<u>Schwierige Zusatz-Aufgaben</u> (Lösungen)

1. Die Zahlen a, b und c sind dreistellig, und in jeder Zahl ist die erste Ziffer gleich der letzten. Ferner gilt $b = 2a + 1$ und $c = 2b + 1$. Wie viele mögliche Werte gibt es für die Zahl a und wie heissen die Zahlen?

Wäre die mittlere Ziffer von a kleiner oder gleich 4, dann wäre in 2a die Einerziffer gleich der Hunderterziffer, also würde 2a+1 nicht die geforderte Form haben. Daher muss die mittlere Ziffer mindestens 5 sein.

Wäre die erste und dritte Ziffer von a größer oder gleich 2, dann wäre $a \geq 250$, demnach $b = 2a + 1 \geq 501$ und $c = 2b+1 \geq 1003$, ein Widerspruch zur Dreistelligkeit.

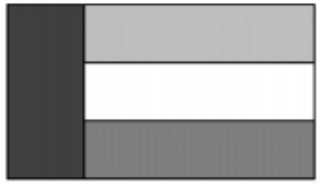
Daher ist die erste und letzte Ziffer von a gleich 1. Auch bei b muss mit derselben Überlegung die mittlere Ziffer mindestens 5 sein. Das ist nur dann erfüllt, wenn die mittlere Ziffer von a gleich 8 oder 9 ist.

Tatsächlich liefern beide Fälle Lösungen für (a, b, c), nämlich (181, 363, 727) und (191, 383, 767)

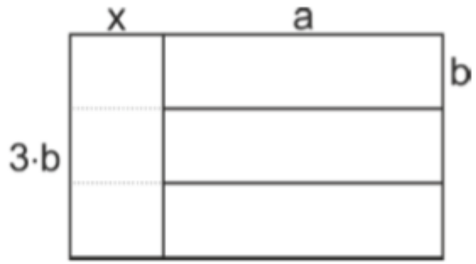
2. Eine 1-Liter-Flasche Sirup ist noch halb voll. Der Sirup soll im Verhältnis 1: 7 zu Saft verdünnt werden. Welchen Bruchteil dieses Sirups muss man verwenden, um 2 Liter Saft zu erhalten?

Um 2 Liter Saft zu erhalten, benötigt man $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ Liter Sirup. Die 1-Liter-Flasche ist noch halb voll, enthält also $\frac{1}{2}$ Liter Sirup. Man muss davon die Hälfte verwenden.

3. Bei einer rechteckigen Flagge stehen die Seitenlängen zueinander im Verhältnis 3: 5. Die Flagge ist, wie in der Abbildung zu sehen, in vier flächengleiche Rechtecke unterteilt. In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen des weissen Rechtecks?



Weil die vier Teilrechtecke flächengleich sind, gilt $a \cdot b = x \cdot 3b$, also $x = \frac{a}{3}$. Das Verhältnis der Seitenlängen der Flagge ergibt damit $3b$: $\frac{4a}{3}$ = 3 : 5, also $b : a = 4 : 15$.



4. Jemand macht aus mehreren identischen kleinen weissen Würfeln einen grossen Würfel und malt einige dieser Seitenflächen des grossen Würfels rot an. Leider lässt die Person den Würfel fallen und er zerbricht wieder in die ursprünglichen kleinen Würfel. Von diesen haben 45 keine rote Seitenfläche. Wie viele Seitenflächen des grossen Würfels wurden bemalt?

Lösung: Zumindest die Würfel im Inneren haben keine rote Seitenfläche. Bei einem $n \times n \times n$-Würfel, sind das $(n-2)^3$ kleine Würfel. Da nur 45 Würfel keine rote Seitenfläche haben, gilt $(n-2)^3 \leq 45$ und damit $n \leq 5$. Der Würfel besteht aus mindestens 45 Würfeln. Daraus folgt $n^3 \geq 45$ und damit $n \geq 4$.

Möglichkeit 1: n=4. Der Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln. Davon haben 64-45=19 Würfel eine rote Seite. Durch das Bemalen einer einzelnen Seitenfläche des großen Würfels haben 16 kleine Würfel eine rote Seitenfläche, beim Bemalen von zwei zusammenstoßenden großen Seitenflächen 16+12=28. Beim Bemalen von zwei gegenüberliegenden Seitenflächen 16+16=32. Es ist in diesem Fall nicht möglich, genau 19 Würfel mit einer roten Seitenfläche zu erhalten.

Möglichkeit 2: $n = 5$. Im Inneren sind 27 kleine Würfel. Weitere 18 Würfel haben keine rote Seitenfläche. Eine Möglichkeit ist, dass Ed nur zwei gegenüberliegende Seiten des großen Würfels nicht rot bemalt hat. Dann haben an diesen Seiten dennoch alle Würfel, die entlang einer Kante sind, mindestens eine rote Seite. Von den 25 Würfeln einer Seite sind das 16. Die restlichen 9 haben keine rote Seite. Insgesamt haben damit 27+9+9=45 Würfel keine rote Seite. Ed hat vier Seitenflächen rot bemalt.

5. Jede Zahl der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6} wird in genau ein Feld einer 3 x 2 - Tabelle geschrieben.
Auf wie viele Arten kann man dies machen, so dass die Summe der Zahlen in jeder Spalte und jeder Zeile durch 3 teilbar ist?

Lösung: Für die Spalten gibt es folgende Möglichkeiten:

$$\binom{1}{5}, \binom{2}{4}, \binom{3}{6}, \binom{4}{2}, \binom{5}{1}, \binom{6}{3}$$

Für die erste Spalte kann ich beliebig eine der sechs Spalten wählen, für die zweite gibt es nur mehr vier Möglichkeiten (nach der Spalte $\binom{1}{5}$ sind z.B. die Spalten $\binom{1}{5}$ und $\binom{5}{1}$ nicht mehr möglich). Für die letzte Spalte sind nur mehr zwei Spalten möglich. Insgesamt ergeben sich damit $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten.

6. Gegeben sind vier positive Zahlen. Man soll nun darunter drei auswählen, ihr arithmetisches Mittel bestimmen, und die vierte Zahl dazu zählen. Dies kann man auf vier Arten machen. Dieerhaltenen Ergebnisse sind dann 17, 21, 23 un d 29. Wie lautet die grösste der vier gegebenen Zahlen?

Lösung: Wir bezeichnen die vier Zahlen mit a, b, c und d mit $a \geq b \geq c \geq d$. Die Rechnungen sind dann:

$$\frac{a+b+c}{3} + d = 17$$
$$\frac{a+b+d}{3} + c = 21$$
$$\frac{a+c+d}{3} + b = 23$$
$$\frac{b+c+d}{3} + a = 29$$

Wir summieren die ersten drei Gleichungen und multiplizieren die vierte mit 5:

$$a + \frac{5}{3}(b+c+d) = 17 + 21 + 23$$
$$5a + \frac{5}{3}(b+c+d) = 145$$

Nun subtrahieren wir die obere Gleichung von der unteren:

$$4a = 84$$
$$a = 21$$

7. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es mit der Eigenschaft, dass die zweiziffrige Zahl, die man durch das Streichen der mittleren Ziffer erhält, genau ein Neuntel der ursprünglichen Zahl ist?

Lösung: Für drei Ziffern a, b und c ist $100a + 10b + c$ eine dreiziffrige Zahl (falls $a \neq 0$). Wir suchen nun die Ziffern so, dass gilt $100a + 10b + c = 9 \cdot (10a + c)$, also $10a + 10b = 8c$ bzw. $a + b = \frac{4c}{5}$. Da $a + b$ ganzzahlig ist, muss auch $\frac{4c}{5}$ ganzzahlig sein und somit c durch 5 teilbar sein. Falls $c = 0$ muss auch $a + b = 0$ und daher $a = b = c = 0$ sein. Das ergibt keine dreiziffrige Zahl. Also ist $c = 5$ und $a + b = 4$.

Die dreiziffrigen Zahlen sind 405, 315, 225 und 135. Dabei ist $\frac{405}{9} = 45$, $\frac{315}{9} = 35$, $\frac{225}{9} = 25$ und $\frac{135}{9} = 15$.

8. An der Humanistischen Universität kann man Sprachen, Geschichte und Philosophie studieren. Einige Studenten studieren dort genau eine Sprache - niemand studiert mehrere Sprachen zugleich. Unter diesen studieren 35% Englisch. Unter allen Studenten der Universität studieren 13% eine andere Sprache als Englisch. Welcher Prozentsatz der Studenten studiert eine Sprache?

Lösung: Die 13 %, die eine andere Sprache als Englisch studieren, sind 65 % aller Sprachstudenten. Insgesamt studieren also $\frac{13}{65} = 0{,}2 = 20\,\%$ eine Sprache.