2023

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2023"

Das starke Wachstum der Teilnehmerzahlen an unserem mathematischen Wettbewerb aber auch die zunehmende Digitalisierung, die sich in den Zahlen der online-Teilnahmen zeigt, haben uns dazu bewogen – ja geradezu gedrängt – unsere Wettbewerbsorganisation sowohl physikalisch als auch elektronisch zu überdenken und neu zu organisieren. Da wir gute Kontakte zu den Organisatoren des Schweizer Informatik-Wettbewerbs Biber haben, durften wir von deren Erfahrungen profitieren und sind deshalb auf die gleiche Plattform umgestiegen. Die anfänglichen Befürchtungen, dass wir durch diesen Systemwechsel Schulen verlieren könnten, haben sich nicht bestätigt – im Gegenteil!

Dieses Jahr haben sich über 900 Schulen mit insgesamt über 57 000 Teilnehmenden angemeldet. Mit der Anmeldung bleibt offen, ob die Schule auf Papier teilnimmt oder online. Im ersten Fall mussten die Koordinatorinnen und Koordinatoren die Aufgabenblätter und die personalisierten Antwortblätter herunterladen und ausdrucken und letztere nach der Durchführung scannen und hochladen. Für die online-Teilnahmen genügten die Logins, die man ebenfalls herunterladen, ausdrucken und vor dem Wettbewerb verteilen konnte.

Der riesige Sprung von letztes Jahr gut 6000 auf heuer fast 30 000 online-Teilnahmen, was 12% bzw. jetzt 52% der Teilnehmenden entspricht, zeigt, dass dieser moderne Weg definitiv Einzug gefunden hat. Gemäss Rückmeldungen vieler Schulen an uns hat die Känguru-Plattform dem Ansturm stand gehalten. Die Internet-Schwierigkeiten einiger weniger Schulen sind ziemlich sicher auf deren lokale Netzwerke zurückzuführen.

Weltweit haben sich Kinder und Jugendliche in den fast 100 Ländern, die im internationalen Verein „Kangourou sans frontières" zusammenarbeiten, an den Aufgaben versucht. Das Interessante und die Vielgestaltigkeit der Aufgaben rühren vor allem daher, dass unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den verschiedenen Ländern und Kulturen einfliessen. In der Broschüre ist neu angegeben, aus welchen Ländern die Vorschläge für die Aufgaben kamen.

Känguru-Teilnehmerländer 2023

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, D. Hanzig, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. Hell, Familie Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, D. Nikolenkov, Dr. A. Noack, A. Rupflin, A. Stahel, Dr. D. Vigerske und J. Züger erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 7 und 8

1. $2023 : (2+0+2+3) =$

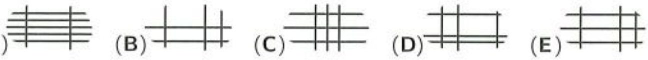
Schweden

(**A**) 179 (**B**) 198 (**C**) 269 (**D**) 289 (**E**) 301

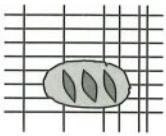
Lösung: $2023 : (2+0+2+3) = 2023 : 7 = 289$.

2. Ein frisch gebackenes Brot wurde zum Abkühlen auf einen Gitterrost gelegt. Wie sieht der Teil des Gitterrostes unter dem Brot aus?

Kroatien



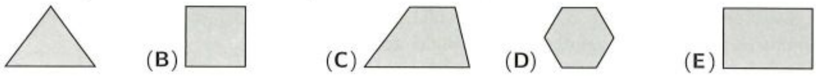
(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)



Lösung: Unter dem Brot sind 3 waagerechte und 3 senkrechte Gitterstangen. Damit fallen die Antwortmöglichkeiten (**A**) und (**B**) weg. Bei (**C**) und (**D**) haben Gitterstangen andere Abstände als im Gitterrost. Nur bei (**E**) passen alle Abstände, das ist die Lösung.

3. Welche der folgenden Figuren (Dreieck, Quadrat, Trapez, regelmäßiges Sechseck, Rechteck) kann <u>nicht</u> mit einer geraden Linie in zwei Trapeze zerteilt werden?

Georgien

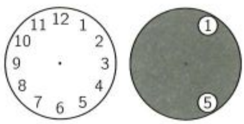


(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Das Dreieck bei (**A**) kann nicht mit einer geraden Linie in zwei Trapeze zerteilt werden, weil beim Zerteilen entweder zwei Dreiecke oder ein Dreieck und ein Viereck entstehen, je nachdem, ob die Linie durch einen Eckpunkt verläuft oder nicht. Die anderen Figuren können zum Beispiel folgendermaßen in zwei Trapeze zerteilt werden:

4. Die dunkle Kreisscheibe mit den zwei Löchern passt genau auf das Ziffernblatt. Nun wird die dunkle Scheibe so um den gemeinsamen Mittelpunkt gedreht, dass eine 10 in einem der Löcher zu sehen ist. Welche Zahl ist dann im anderen Loch zu sehen?

Dänemark



(**A**) 2 oder 7 (**B**) 2 oder 6 (**C**) 1 oder 8 (**D**) 3 oder 6 (**E**) 3 oder 7

Lösung: Die 5 ist auf dem Ziffernblatt 4 Zahlen von der 1 entfernt. Die gesuchten Zahlen müssen von der 10 also ebenfalls 4 Zahlen entfernt sein. Eine Möglichkeit ist die 6 wegen $10-4=6$. In der anderen Richtung ist die 2 auf dem Ziffernblatt 4 Zahlen von der 10 entfernt. Es kann also die 2 oder die 6 im anderen Loch zu sehen sein.

5. Marvin wird heute 10 000 Tage alt. Wie alt ist er?

Frankreich

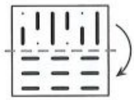
(**A**) zwischen 0 und 3 Jahre (**B**) zwischen 4 und 12 Jahre (**C**) zwischen 13 und 19 Jahre
(**D**) zwischen 20 und 49 Jahre (**E**) zwischen 50 und 99 Jahre

Lösung: Da ein Jahr 365 oder 366 Tage hat und dies ungefähr ein Drittel von 1 000 ist, sind 1 000 Tage ungefähr 3 Jahre und 10 000 Tage folglich ungefähr 30 Jahre. Also ist Marvin zwischen 20 und 49 Jahre alt, wie bei (**D**) angegeben.

Wer schriftlich dividiert, erhält $10\,000 : 365 = 27, \ldots$ Die Überschlagsrechnung, die wir angegeben haben, ist zwar recht grob, reicht aber, um die richtige Antwort zu finden.

6. Kristina hat ein durchsichtiges Stück Folie, auf dem einige Linien eingezeichnet sind. Sie faltet es entlang der gestrichelten Linie nach unten. Was ist nun zu sehen?

Dänemark



(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

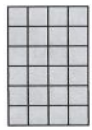
(**E**) 

Lösung: Wir markieren in der unteren Hälfte, wo sich dort die Linien aus der oberen Hälfte nach dem Falten befinden. Wir erhalten 

, was bei (**C**) zu sehen ist.

7. Das abgebildete Rechteck soll aus lauter gleichen Figuren gelegt werden. Die Figuren dürfen gedreht werden, und es darf keine Lücken oder Überlappungen geben. Mit welcher der fünf Figuren ist das <u>nicht</u> möglich?

Griechenland



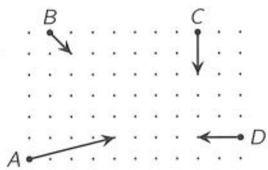
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Das Rechteck enthält $4 \cdot 6 = 24$ Kästchen. Da es keine Lücken oder Überlappungen geben darf, muss die Anzahl der Kästchen in der Figur ein Teiler der Anzahl der Kästchen im Rechteck, also ein Teiler von 24, sein. Da 5 kein Teiler von 24 ist, ist diese Bedingung für die Figur bei (**D**) nicht erfüllt. Mit der Figur bei (**D**) kann das Rechteck also nicht gelegt werden.
Mit jeweils sechs Exemplaren der Figuren bei (**A**), (**C**) und (**E**) bzw. acht Exemplaren der Figur bei (**B**) kann das Rechteck gelegt werden, wie die Bilder zeigen:

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**E**) 

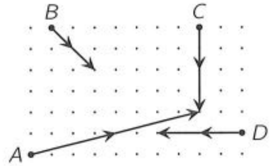
8. Die Abbildung zeigt für 4 Autoscooter mithilfe der Pfeile ihre Ausgangsposition, ihre Fahrtrichtung und wie weit sie sich in 5 Sekunden bewegen. Welche beiden Autos werden zusammenstoßen?

Dänemark



(**A**) A und C (**B**) C und D (**C**) A und B
(**D**) B und C (**E**) A und D

Lösung: Wir zeichnen ein, wie weit sich die Autoscooter in 5 weiteren Sekunden bewegen. Dann sehen wir, dass Autoscooter A und C genau 10 Sekunden nach dem Start zusammenstoßen.
Wer die Pfeile weiter zeichnet, sieht, dass es keine weiteren Zusammenstöße gibt, weil sich die Pfeile zwar kreuzen, aber nicht noch einmal zwei Autoscooter zur selben Zeit am selben Ort sind.



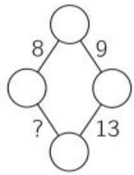
9. In der Fahrschule „Blitz" sind aktuell 40 Fahrschüler angemeldet. Von ihnen haben 40 % bereits die theoretische Prüfung bestanden und 60 % noch nicht. Wie viele der Fahrschüler müssen die theoretische Prüfung noch bestehen, damit genau die Hälfte der 40 Fahrschüler bestanden hat?

Australien

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Es müssen noch $60\,\% - 50\,\% = 10\,\%$ der Fahrschüler die Prüfung bestehen, damit genau die Hälfte bestanden hat. Da 10 % von 40 genau 4 sind, müssen noch 4 Fahrschüler bestehen.
Alternativ können wir auch zuerst berechnen, wie viele Fahrschüler bereits bestanden haben. Das sind 40 % von 40 Fahrschülern, also $\frac{40}{100} \cdot 40 = 16$ Fahrschüler. Damit die Hälfte der 40 Fahrschüler, also 20, bestanden hat, müssen noch $20 - 16 = 4$ Fahrschüler die Prüfung bestehen.

10. In jeden Kreis der abgebildeten Figur soll eine Zahl geschrieben werden. Zwischen zwei benachbarten Kreisen steht immer die Summe der Zahlen in diesen beiden Kreisen. Welche Zahl muss an der Stelle des Fragezeichens stehen?



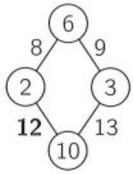
Griechenland

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Die Summe der vier Zahlen in den Kreisen ist gleich $8 + 13 = 21$, denn jede dieser vier Zahlen ist entweder ein Summand der 8 oder ein Summand der 13, die zwischen den Kreisen stehen. Genauso ist $9 + ?$ die Summe der vier Zahlen in den Kreisen. Also steht an der Stelle des Fragezeichens $21 - 9 = 12$.

Eine andere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, ist folgende: Da die Summe 8 um 1 kleiner als 9 ist, muss die Zahl im linken Kreis in jedem Fall um 1 kleiner sein als die Zahl im rechten Kreis, denn die Summen 8 und 9 unterscheiden sich um genau diese beiden Summanden. Genauso ist die Zahl an der Stelle des Fragezeichens um 1 kleiner als 13, also gleich 12.

Die Aufgabe kann außerdem auch gut gelöst werden, indem wir in einen Kreis eine Zahl eintragen und dann die anderen Kreise passend ausfüllen. Eine mögliche Belegung ist rechts abgebildet. Für die Eintragung der Zahlen in die Kreise gibt es zwar mehrere Möglichkeiten, aber an der Stelle des Fragezeichens steht stets eine 12.



11. Mit Streichhölzern lassen sich die Ziffern von 0 bis 9 legen:

Österreich

Wie viele verschiedene natürliche Zahlen lassen sich mit genau fünf Streichhölzern legen?

(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 11

Lösung: Wir zählen zuerst, mit wie vielen Streichhölzern die Ziffern jeweils gelegt werden:

Anzahl Streichhölzer	2	3	4	5	6	7
Ziffern	1	7	4	2, 3, 5	0, 6, 9	8

Der Tabelle entnehmen wir, dass die einstelligen Zahlen, die wir mit genau fünf Streichhölzern legen können, die 2, die 3 und die 5 sind. Zweistellige Zahlen mit genau fünf Streichhölzern lassen sich nur legen, wenn wir einmal 2 und einmal 3 Streichhölzer nehmen, also wenn die Ziffern 1 und 7 sind. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: 17 und 71. Dreistellige und noch größere Zahlen sind mit fünf Streichhölzern nicht möglich. Insgesamt können wir also fünf verschiedene natürliche Zahlen mit genau fünf Streichhölzern legen.

12. Evita möchte die Zahlen von 1 bis 8 so in die Kästchen des abgebildeten Gitters schreiben, dass die Summen der Zahlen in den Kästchen in den vier Zeilen gleich sind und die Summen der Zahlen in den Kästchen in den beiden Spalten gleich sind. Sie hat bereits die Zahlen 3, 4 und 8 eingetragen. Welche Zahl muss sie in das graue Kästchen schreiben?

Mexiko

	3
4	
	8

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

Lösung: Die Summe der einzutragenden Zahlen ist $1+2+3+4+5+6+7+8 = (1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5) = 4 \cdot 9 = 36$. In jeder Zeile muss die Summe also $36 : 4 = 9$ betragen und in jeder Spalte $36 : 2 = 18$. Damit können wir zuerst die drei oberen Zeilen und anschließend die beiden Spalten fertig ausfüllen. Im grauen Kästchen muss die 7 stehen.

6	3
4	5
1	8
7	2

13. Laurenz schreibt drei aufeinanderfolgende dreistellige Zahlen der Größe nach auf. Er beginnt mit der kleinsten Zahl. Statt der Ziffern verwendet er Symbole: □◇◇, ♡△△, ♡△□. Welche Zahl ist die nächstgrößere?

Deutschland

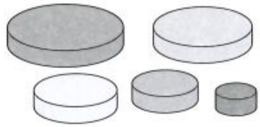
(A) ♡♡◇ **(B)** □♡□ **(C)** ♡△◇ **(D)** ♡◇□ **(E)** ♡△♡

Lösung: Von der ersten zur zweiten Zahl wechselt die Ziffer an der Hunderterstelle. Somit endet die erste Zahl auf 99, die zweite auf 00 und die dritte auf 01. Also gilt ◇ = 9, △ = 0 sowie □ = 1. Die gesuchte nächstgrößere Zahl beginnt mit ♡△ und endet auf 2. Da die erste Zahl mit 1 beginnt, beginnen die folgenden Zahlen mit 2 und das Symbol für die Ziffer 2 ist gefunden: ♡ = 2. Die gesuchte nächstgrößere Zahl ist 202, in Symbolen ♡△♡.

Welche Zahl kommt als nächste, wenn □◇◇, ♡△△, ♡△□ drei aufeinanderfolgende dreistellige Zahlen in absteigender Reihenfolge sind?

14. Marlene will aus drei der abgebildeten Scheiben einen Turm bauen. Die Scheiben sollen von unten nach oben immer kleiner werden. Wie viele verschiedene Türme kann Marlene bauen?

Slowenien



(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 15

Lösung: Egal, welche drei Scheiben Marlene wählt, sie kann aus ihnen immer genau einen Turm bauen, bei dem von unten nach oben immer kleiner werden. Um die Anzahl der möglichen Türme zu finden, bezeichnen wir die Scheiben von groß nach klein mit A, B, C, D und E. Dann können wir alle möglichen Scheibenkombinationen, aus denen ein solcher Turm bestehen kann, systematisch aufschreiben: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE. Marlene kann also 10 verschiedene Türme bauen.

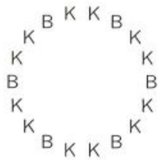
Eine Lösungsvariante besteht darin, die beiden Scheiben zu betrachten, die nicht verwendet werden. Bei der ersten Scheibe, die Marlene nicht verwendet, hat sie 5 Möglichkeiten, diese auszuwählen, und bei der zweiten Scheibe dann noch 4 Möglichkeiten. Bei dieser Überlegung wird jedoch jede Wahl von 2 Scheiben doppelt betrachtet, denn Marlene könnte jede der beiden Scheiben als erste oder als zweite wählen. Also gibt es $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ Möglichkeiten, 2 der 5 Scheiben auszuwählen.

15. Biber und Kängurus haben sich im Kreis aufgestellt. Es sind insgesamt 18 Tiere. Neben jedem Känguru steht mindestens ein Biber. Was ist die größtmögliche Anzahl von Kängurus in diesem Kreis?

Puerto Rico

(**A**) 11 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 14 (**E**) 15

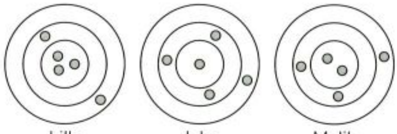
Lösung: Die Kängurus stehen einzeln oder zu zweit nebeneinander im Kreis, da es sonst mindestens ein Känguru gibt, das zwei Kängurus als Nachbarn hätte und keinen Biber. Von drei aufeinanderfolgenden Tieren sind also höchstens zwei Kängurus. Daher sind auch insgesamt höchstens zwei Drittel der Tiere Kängurus, das heißt höchstens $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$. Wie das Beispiel zeigt, sind 12 Kängurus möglich. Also ist 12 die größtmögliche Anzahl.



16. Lilly, John und Malik werfen jeweils fünf Pfeile auf eine Zielscheibe. Pfeile, die im selben Ring landen, geben dieselbe Punktzahl. Lilly hat 46 Punkte erzielt und John 34 Punkte. Wie viele Punkte hat Malik erzielt?

China

(**A**) 37 (**B**) 38 (**C**) 39 (**D**) 40 (**E**) 41



Lösung: Wir können verwenden, dass bei Malik in jedem Ring genau halb so viele Pfeile gelandet sind wie bei Lilly und John zusammen. Maliks Punktzahl erhalten wir also, indem wir die Punkte von Lilly und John addieren und dann durch 2 teilen: $(46 + 34) : 2 = 40$.

Alternativ können wir auch folgendermaßen vorgehen: Bei Lilly sind zwei Pfeile mehr im inneren Ring als bei John, und bei John sind zwei Pfeile mehr im mittleren Ring als bei Lilly. Da Lilly 12 Punkte mehr als John hat, bringt jeder Pfeil im inneren Ring also $12 : 2 = 6$ Punkte mehr als ein Pfeil im mittleren Ring. Da bei Malik ein Pfeil mehr als bei John im inneren Ring und dafür einer weniger im mittleren Ring gelandet ist, hat er 6 Punkte mehr erzielt als John. Das sind $34 + 6 = 40$ Punkte.

17. Wie viele Kanten eines Würfels müssen mindestens rot gefärbt werden, damit jede Seitenfläche des Würfels mindestens eine rote Kante hat?

Belarus

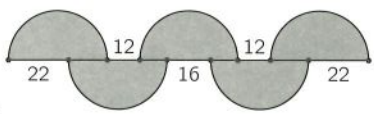
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Jede Kante des Würfels gehört zu genau 2 Seitenflächen. Da der Würfel 6 Seitenflächen hat, können es nicht weniger als $6 : 2 = 3$ rote Kanten sein, damit jede Seitenfläche mindestens eine rote Kante hat. Mit 3 roten Kanten kann jede der 6 Seitenflächen eine rote Kante haben, zum Beispiel, wenn als rote Kanten die im Bild markierten Kanten gewählt werden. Also ist (**A**) die Lösung.

18. In der Zeichnung sind fünf gleich große Halbkreise abgebildet und die Längen einiger Strecken in cm angegeben. Wie groß ist der Radius der Halbkreise?

Iran

(**A**) 14 cm (**B**) 15 cm (**C**) 17 cm (**D**) 18 cm (**E**) 20 cm



Lösung: Wir können die Länge der Strecke zwischen den beiden äußersten markierten Punkten auf zwei verschiedene Weisen angeben. Dazu bezeichnen wir die Länge des Durchmessers der Halbkreise mit d. Mit den drei oberen Halbkreisen erhalten wir, dass die Strecke zwischen den beiden äußersten markierten Punkten die Länge $d + 12\,\text{cm} + d + 12\,\text{cm} + d$ hat, und mit den beiden unteren Halbkreisen erhalten wir für dieselbe Strecke die Länge $22\,\text{cm} + d + 16\,\text{cm} + d + 22\,\text{cm}$. Daraus folgt $3 \cdot d + 24\,\text{cm} = 2 \cdot d + 60\,\text{cm}$, das heißt $d = 36\,\text{cm}$. Der Radius der Halbkreise ist also $36\,\text{cm} : 2 = 18\,\text{cm}$ groß.

19. Im rechts abgebildeten Ausdruck sollen das Quadrat und das Dreieck so durch natürliche Zahlen ersetzt werden, dass beide Seiten gleich groß sind. Wie viele verschiedene Zahlen können das Quadrat ersetzen? $\frac{\square}{17} = \frac{5}{\triangle}$

Deutschland

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 9

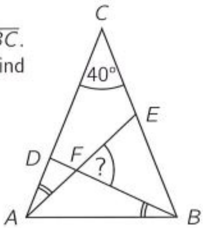
Lösung: Wir multiplizieren die Gleichung $\frac{\square}{17} = \frac{5}{\triangle}$ mit $17 \cdot \triangle$ und erhalten so $\square \cdot \triangle = 5 \cdot 17$. Also ist $\square$ ein Teiler von $5 \cdot 17$ und $\triangle$ ist durch $\square$ eindeutig bestimmt, $\triangle = 5 \cdot 17 : \square$. Da $5 \cdot 17$ die vier Teiler 1, 5, 17 und $5 \cdot 17 = 85$ hat, kann das Quadrat durch vier Zahlen ersetzt werden.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 11 zu lösen. —

20. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit den gleich langen Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Der Winkel ACB ist 40° groß. Die beiden markierten Winkel EAC und DBA sind gleich groß. Wie groß ist der Winkel BFE?

Spanien

(A) 55° **(B)** 60° **(C)** 65° **(D)** 70° **(E)** 75°



Lösung: Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, sind seine Basiswinkel BAC und CBA gleich groß. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist, gilt $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA = (180° - 40°) : 2 = 70°$. Für den Innenwinkel BAF im Dreieck ABF gilt $\measuredangle BAF = 70° - \measuredangle EAC$. Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABF und der Voraussetzung $\measuredangle EAC = \measuredangle DBA$ erhalten wir $\measuredangle AFB = 180° - \measuredangle BAF - \measuredangle FBA$ $= 180° - (70° - \measuredangle EAC) - \measuredangle EAC = 110°$. Der Winkel BFE ist der Nebenwinkel des Winkels AFB, es gilt also $\measuredangle BFE = 180° - \measuredangle AFB = 180° - 110° = 70°$.

Die Aufgabe lässt sich auch auf eine andere, interessante Weise lösen: Wir drehen die beiden Geraden, die durch F verlaufen, um den Punkt B gegen den Uhrzeigersinn um die Größe der markierten Winkel. Dabei wird die Gerade FB auf die Gerade AB abgebildet und die Gerade FE auf eine zu AC parallele Gerade, da $\measuredangle EAC = \measuredangle DBA$ ist. Da sich Winkelgrößen beim Drehen nicht ändern, ist der Winkel BFE genauso groß wie der gedrehte Winkel, und der ist nach dem Stufenwinkelsatz genauso groß wie der Basiswinkel BAC des gleichschenkligen Dreiecks ABC, also $(180° - 40°) : 2 = 70°$.

21. Louis steht gelangweilt in einer Warteschlange. Er stellt fest, dass die Anzahl der Personen in der Schlange ein Vielfaches von 3 ist und dass vor ihm genauso viele Personen stehen wie hinter ihm. Er sieht zwei Freunde, die beide hinter ihm in der Schlange stehen, einer an der 19. Stelle und der andere an der 28. Stelle in der Schlange. An welcher Stelle in der Schlange steht Louis?

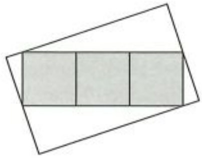
Spanien

(A) an 14. **(B)** an 15. **(C)** an 16. **(D)** an 17. **(E)** an 18.

Lösung: Vor Louis können höchstens 17 Personen stehen, weil einer der Freunde an der 19. Stelle in der Schlange hinter ihm steht. Da hinter Louis genauso viele Personen wie vor ihm stehen, können es insgesamt also höchstens $17 + 1 + 17 = 35$ Personen in der Schlange sein. Es müssen außerdem mindestens 28 Personen sein, weil der andere Freund an der 28. Stelle steht. Also kommen für die Anzahl der Personen in der Schlange nur die Zahlen 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 und 35 in Frage. Die Anzahl der Personen ist ein Vielfaches von 3 und, weil vor Louis genauso viele Personen stehen wie hinter ihm, außerdem ungerade. Von den möglichen Zahlen ist nur 33 durch 3 teilbar und ungerade. Es sind also insgesamt 33 Personen in der Schlange. Louis steht somit an der 17. Stelle.

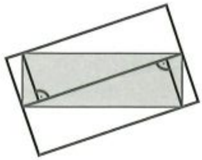
22. Polen

Die drei grauen Quadrate im Bild haben jedes einen Flächeninhalt von $16\,\text{cm}^2$. Sie bilden ein Rechteck, dessen Ecken auf den Seiten des großen Rechtecks liegen. Zwei Eckpunkte des grauen Rechtecks fallen mit den Mittelpunkten der kürzeren Seiten des großen Rechtecks zusammen. Welchen Flächeninhalt hat das große Rechteck?



(**A**) $76\,\text{cm}^2$ (**B**) $84\,\text{cm}^2$ (**C**) $86\,\text{cm}^2$ (**D**) $92\,\text{cm}^2$ (**E**) $96\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir verbinden die Mittelpunkte der kürzeren Seiten des großen Rechtecks und zeichnen in den entstehenden grauen Dreiecken die zugehörigen Höhen ein. Da die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der kürzeren Seiten des großen Rechtecks parallel zu den längeren Rechtecksseiten ist und die Höhen der grauen Dreiecke darauf senkrecht stehen, wird das große Rechteck auf diese Weise in vier kleinere Rechtecke zerlegt, von denen jeweils die Hälfte grau ist. Das lässt sich natürlich auch rechnerisch mithilfe der Flächeninhaltsformel für Dreiecke nachweisen. Die graue Fläche ist also halb so groß wie das große Rechteck und der gesuchte Flächeninhalt damit $2 \cdot (3 \cdot 16\,\text{cm}^2) = 96\,\text{cm}^2$.



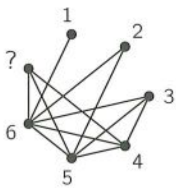
23. Ungarn

Die sieben Zwerge haben heute Schach gespielt. Seppl, der kleinste Zwerg, berichtet Schneewittchen: „Brummbär hat nur gegen einen Zwerg gespielt, Schlafmütz gegen zwei, Hatschi gegen drei, Pimpel gegen vier, Happy gegen fünf und Chef gegen sechs." „Dann weiß ich, gegen wie viele Zwerge du gespielt hast", sagt Schneewittchen. Gegen wie viele Zwerge hat Seppl gespielt?

(**A**) zwei (**B**) drei (**C**) vier (**D**) fünf (**E**) sechs

Lösung: Chef hat gegen 6 Zwerge gespielt, also gegen jeden anderen – insbesondere gegen Seppl. Happy hat gegen 5 Zwerge gespielt. Einer davon ist Chef. Die anderen 4 müssen Schlafmütz, Hatschi, Pimpel und Seppl sein, da Brummbär sein eines Spiel gegen Chef gespielt hat und somit nicht zu den Gegnern von Happy gehört. Pimpel hat gegen 4 Zwerge gespielt. Einer davon ist Chef, ein weiterer ist Happy. Die beiden anderen Gegner von Pimpel sind Hatschi und Seppl, da Brummbär, wie eben schon erwähnt, sein eines Spiel gegen Chef gespielt hat und da Schlafmütz seine zwei Spiele gegen Chef und Happy gespielt hat. Damit ist auch klar, dass der dritte Gegner von Hatschi Pimpel ist. Nun sind die Gegner aller Zwerge klar. Seppl hat gegen drei Zwerge gespielt: gegen Chef, gegen Happy und gegen Pimpel.

Bei dieser Aufgabe kann eine Zeichnung helfen, den Überblick zu behalten. Für die Zwerge setzen wir Punkte und beschriften sie mit der Anzahl der Gegner. Dann verbinden wir die Punkte, beginnend beim Punkt mit der 6, also mit Chef, wenn die entsprechenden Zwerge gegeneinander gespielt haben.

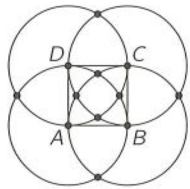


24. Ungarn

Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 1 cm. Wie viele verschiedene Punkte gibt es in der Ebene, die von zwei der Eckpunkte A, B, C, D jeweils 1 cm entfernt sind?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 20

Lösung: Ein Punkt in der Ebene ist von einem Eckpunkt des Quadrats genau dann 1 cm entfernt, wenn er auf dem Kreis um diesen Eckpunkt mit dem Radius 1 cm liegt. Genau dort, wo sich zwei der Kreise schneiden, liegt ein Punkt, der von zwei Eckpunkten jeweils 1 cm entfernt ist. Aus dem Bild lesen wir ab, dass es genau 12 solche Punkte gibt.
Von den 12 Punkten gehören 8 Punkte zu benachbarten Eckpunkten, und zwar jeweils 2 Punkte. Und es gehören 4 Punkte zu gegenüberliegenden Eckpunkten, ebenfalls jeweils 2, und das sind genau die beiden jeweils anderen Eckpunkte.



25. Finja hat die Zahl 1015 als Summe von Zahlen geschrieben. Die Summanden enthalten nur die Ziffer 7, und zwar insgesamt 10-mal. Jetzt möchte Finja die Zahl 2023 als Summe von Zahlen schreiben. Wieder sollen die Summanden nur die Ziffer 7 enthalten, und zwar insgesamt 19-mal. Wie oft muss Finja dazu die Zahl 77 als Summand verwenden?

Griechenland

$$\begin{array}{r} 777 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ \ 7 \\ \hline 1015 \end{array}$$

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal

Lösung: Wer erkennt, dass $2023 = 2 \cdot 1015 - 7$ ist, kann schnell zur Lösung gelangen. Verdoppeln wir nämlich die Anzahl der Summanden in der gegebenen Addition und lassen einen Summanden 7 weg, so erhalten wir als Summe 2023 und verwenden wie gefordert insgesamt $2 \cdot 10 - 1 = 19$-mal die Ziffer 7. Der Summand 77 kommt 6-mal vor.

$$\begin{array}{r} 777 \\ +\ 777 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ 77 \\ +\ \ 7 \\ \hline 2023 \end{array}$$

Eine zweite Lösungsmöglichkeit ist folgende: Finja erhält die 3 an der Einerstelle von 2023 nur, wenn die Anzahl der Summanden 9 ist, da nur $9 \cdot 7, 19 \cdot 7, 29 \cdot 7, 39 \cdot 7, \ldots$ auf 3 enden und $19, 29, 39, \ldots$ nicht in Frage kommen, weil $19 \cdot 7 < 2023$ ist und sonst zu viele Ziffern 7 vorkämen. Wegen $2023 - 9 \cdot 7 = 1960$ endet die Summe der Zehnerziffern der Summanden auf 6, was nur möglich ist, wenn es 8 Zehnerziffern sind. Und wegen $1960 - 8 \cdot 70 = 1400$ endet die Summe der Hunderterziffern der Summanden auf 4, was nur möglich ist, wenn es 2 Hunderterziffern sind. Da $2 \cdot 700 = 1400$ ist, sind wir fertig und erhalten 2 Summanden 777, $8 - 2 = 6$ Summanden 77 (das sind die gesuchten) und $9 - 2 - 6 = 1$ Summand 7. Die Ziffer 7 kommt wegen $2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 19$ tatsächlich 19-mal vor, so wie gefordert.

26. Zum Trainingsbeginn läuft Elisabeth 3 Runden um den Sportplatz. Die erste Runde läuft sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 km/h, die zweite Runde läuft sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h, und die dritte Runde läuft sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 km/h. Was ist Elisabeths Durchschnittsgeschwindigkeit für diese 3 Runden?

China

(**A**) $\frac{72}{7}$ km/h (**B**) $\frac{59}{6}$ km/h (**C**) $\frac{53}{5}$ km/h (**D**) $\frac{41}{4}$ km/h (**E**) $\frac{29}{3}$ km/h

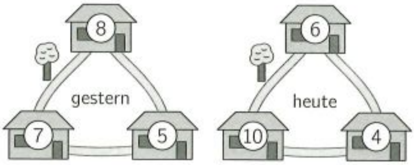
Lösung: Die Länge einer Runde sei s. Mit t_1, t_2 und t_3 bezeichnen wir die Zeit, die Elisabeth für die erste, die zweite bzw. die dritte Runde benötigt. Da Elisabeth jeweils mit konstanter Geschwindigkeit läuft, gelten $v_1 = 8\,\text{km/h} = \frac{s}{t_1}$, $v_2 = 10\,\text{km/h} = \frac{s}{t_2}$ und $v_3 = 15\,\text{km/h} = \frac{s}{t_3}$, umgestellt nach der Zeit also $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{8\,\text{km/h}}$, $t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{10\,\text{km/h}}$ und $t_3 = \frac{s}{v_3} = \frac{s}{15\,\text{km/h}}$. Elisabeths Gesamtzeit für die drei Runden ist $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{8\,\text{km/h}} + \frac{s}{10\,\text{km/h}} + \frac{s}{15\,\text{km/h}} = \frac{15s + 12s + 8s}{120\,\text{km/h}} = \frac{35s}{120\,\text{km/h}} = \frac{7s}{24\,\text{km/h}}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit v für die drei Runden erhalten wir dann, indem wir den Gesamtweg $3s$ durch die Gesamtzeit teilen: $v = 3s : \frac{7s}{24\,\text{km/h}} = \frac{3s \cdot 24\,\text{km/h}}{7s} = \frac{72}{7}\,\text{km/h}$.

Da die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit unabhängig von der Länge einer Runde ist, könnten wir auch eine konkrete Länge wählen, mit der sich gut rechnen lässt, zum Beispiel 120 km (auch, wenn das in der Realität viel zu lang wäre), da 120 durch 8, 10 und 15 teilbar ist. Dann läuft Elisabeth die erste Runde in $120\,\text{h} : 8 = 15\,\text{h}$, die zweite in $120\,\text{h} : 10 = 12\,\text{h}$ und die dritte in $120\,\text{h} : 15 = 8\,\text{h}$. Die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit ist $\frac{3 \cdot 120\,\text{km}}{15\,\text{h} + 12\,\text{h} + 8\,\text{h}} = \frac{72}{7}\,\text{km/h}$.

Drei natürliche Zahlen haben die Summe 12 und das Produkt 48. Welche drei Zahlen sind das?

27. Griechenland

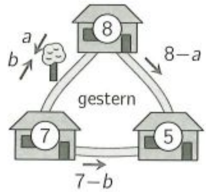
In drei benachbarten Häusern leben insgesamt 20 Mäuse. Letzte Nacht hat jede Maus ihr Haus verlassen und ist auf direktem Weg in eines der beiden anderen Häuser umgezogen. Die Zahlen in der Zeichnung geben die Anzahl der Mäuse pro Haus gestern und heute an. Wie viele Mäuse haben den Weg genommen, an dem der Baum steht?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 14

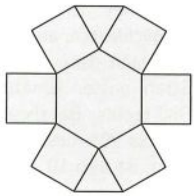
Lösung: Von den insgesamt $7+8=15$ Mäusen, die gestern in dem Haus links unten oder in dem Haus oben gewohnt haben, sind insgesamt 4 in das Haus rechts unten umgezogen, denn das sind genau die Mäuse, die heute dort wohnen. Weil jede Maus umgezogen ist, haben genau die anderen dieser 15 Mäuse den Weg, an dem der Baum steht, genommen, das heißt $15-4=11$ Mäuse.

Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir Variablen nutzen: Wir bezeichnen die Anzahl der Mäuse, die vom Haus oben in das Haus links unten umgezogen sind, mit a und die Anzahl der Mäuse, die vom Haus links unten in das Haus oben umgezogen sind, mit b. Dann sind von oben nach rechts unten $8-a$ Mäuse und von links unten nach rechts unten $7-b$ Mäuse umgezogen. Da heute im Haus rechts unten 4 Mäuse sind, gilt $(8-a)+(7-b)=4$. Daraus folgt $a+b=8+7-4=11$. Und genau das ist die gesuchte Anzahl.



28. Iran

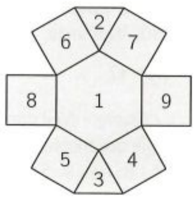
Die rechts abgebildete Figur besteht aus 9 Feldern, die dreieckig, viereckig und sechseckig sind. Konstantin möchte die Zahlen von 1 bis 9 in die Felder schreiben. Dabei soll das Produkt der Zahlen in zwei Feldern, die eine gemeinsame Seite haben, nicht größer als 15 sein. Auf wie viele verschiedene Arten kann er das tun?



(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 24 (**E**) 32

Lösung: Da bereits $8\cdot 2$ und $9\cdot 2$ größer als 15 sind, können die Felder mit der 8 und der 9 nur an das Feld mit der 1 angrenzen. Die 8 und die 9 stehen also in den beiden Quadraten links und rechts, und die 1 gehört in die Mitte. Die Zahlen 4, 5, 6 und 7 dürfen nicht in Feldern mit einer gemeinsamen Seite stehen, weil jedes Produkt von zwei dieser Zahlen bereits größer als 15 ist. Deshalb müssen diese vier Zahlen in den vier verbliebenen Quadraten stehen. Die 2 und die 3 stehen folglich in den beiden Dreiecken. Dabei müssen die 6 und die 7 in den Nachbarfeldern der 2 stehen, weil $6\cdot 3$ und $7\cdot 3$ größer als 15 sind. Die 4 und die 5 stehen folglich in den Nachbarfeldern der 3.

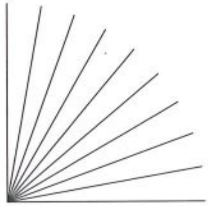
Jede Anordnung der 9 Zahlen, die die zuvor beschriebenen Eigenschaften erfüllt, ist auch möglich. Dabei gibt es jeweils unabhängig voneinander 2 Möglichkeiten, die 8 und die 9 einzutragen (links oder rechts), 2 Möglichkeiten, die 2 und die 3 einzutragen (oben oder unten), 2 Möglichkeiten, die 6 und die 7 einzutragen (links oder rechts von der 2) und 2 Möglichkeiten, die 4 und die 5 einzutragen (links oder rechts von der 3) und damit insgesamt $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ Möglichkeiten. Ein Beispiel, wie das aussehen kann, ist im Bild rechts zu sehen.



Stell dir vor, du multiplizierst alle Zahlen von 1 bis 2023. Auf wie vielen Nullen endet dieses riesige Produkt?

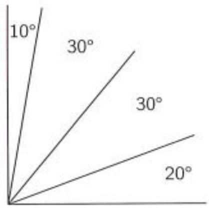
29. Alina hat mit dem Bleistift 10 Strahlen gezeichnet. Benachbarte Strahlen schließen jeweils einen Winkel der Größe 10° ein. Was ist die größte Anzahl an Strahlen, die sie so wegradieren kann, dass sie immer noch für jeden der Werte 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80° und 90° zwei Strahlen finden kann, die einen Winkel dieser Größe einschließen?

Belarus



(A) 6 **(B)** 5 **(C)** 4 **(D)** 3 **(E)** 2

Lösung: Wir überlegen, wie viele Strahlen übrig bleiben müssen. Um 9 verschiedene Werte für die eingeschlossenen Winkel messen zu können, muss es mindestens 9 Möglichkeiten geben, 2 verschiedene Strahlen als Schenkel auszuwählen. Es müssen mehr als 2 Strahlen sein, denn bei 2 Strahlen gibt es nur eine Möglichkeit, 2 Strahlen auszuwählen. Bei 3 Strahlen kommen 2 Möglichkeiten hinzu, wenn wir den dritten Strahl und einen der beiden anderen wählen, also sind es insgesamt $1 + 2 = 3$ Möglichkeiten. Bei 4 Strahlen kommen 3 Möglichkeiten hinzu, wenn wir den vierten Strahl und einen der drei anderen wählen, also sind es insgesamt $3 + 3 = 6$ Möglichkeiten. Bei 5 Strahlen kommen 4 Möglichkeiten hinzu, wenn wir den fünften Strahl und einen der vier anderen wählen, also sind es insgesamt $6+4 = 10$ Möglichkeiten. Somit ist 5 die kleinste Anzahl an Strahlen, bei der es mindestens 9 Möglichkeiten gibt, 2 Strahlen auszuwählen. Wir überlegen, ob es möglich ist, die Strahlen so übrig zu lassen, dass tatsächlich die geforderten Werte gemessen werden können. Sicher müssen die beiden äußeren Strahlen für den 90°-Winkel dabei sein und, um 80° messen zu können, ein Strahl, der 10° von einem Randstrahl entfernt ist. Um 70° messen zu können, wählen wir den Strahl, der 20° vom anderen Randstrahl entfernt ist (es gibt auch andere Möglichkeiten, aber so haben wir auf jeden Fall bis hierher keine Winkelgröße mehrfach dabei, davon darf es ja höchstens eine geben). Wie der fünfte Strahl passen könnte, finden wir durch Probieren, zum Beispiel so wie im Bild rechts. Bei diesen 5 Strahlen können wir tatsächlich alle 9 Werte von 10° bis 90° messen. Die größte Anzahl an Strahlen, die Alina wegradieren kann, ist also $10 - 5 = 5$.



> *Es gibt noch drei weitere Möglichkeiten, wie die verbleibenden Strahlen gewählt werden können. Wer findet sie?*

30. In der letzten Saison hat ein Handball-Team im 7. Spiel 33 Tore, im 8. Spiel 27 Tore und im 9. Spiel 29 Tore geworfen. Im Durchschnitt hat das Team nach 9 Spielen mehr Tore geworfen als nach den ersten 6 Spielen. Nach dem 10. Spiel war die durchschnittliche Anzahl an Toren pro Spiel größer als 30. Wie viele Tore hat das Team im 10. Spiel mindestens geworfen?

Südafrika

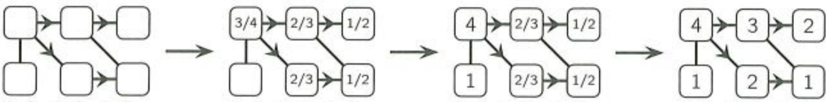
(A) 32 **(B)** 33 **(C)** 34 **(D)** 35 **(E)** 36

Lösung: Weil das Team nach 9 Spielen im Durchschnitt mehr Tore geworfen hat als nach 6 Spielen, war die durchschnittliche Anzahl an Toren bei den Spielen 7, 8 und 9 größer als bei den ersten 6 Spielen. Im 7., 8. und 9. Spiel wurden insgesamt $33+27+29 = 89$ Tore geworfen. In den ersten 6 Spielen hat das Team insgesamt also weniger als $\frac{89}{3} \cdot 6 = 178$ Tore geworfen, das heißt höchstens 177. Folglich kann das Team in den ersten 9 Spielen insgesamt höchstens $177 + 89 = 266$ Tore geworfen haben. Damit die durchschnittliche Anzahl an Toren pro Spiel nach 10 Spielen größer als 30 ist, muss das Team in allen 10 Spielen zusammen mindestens $10 \cdot 30 + 1 = 301$ Tore geworfen haben. Im 10. Spiel waren es also mindestens $301 - 266 = 35$ Tore.

Paare

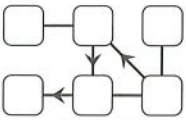
In jedes Feld ist eine der Zahlen von 1 bis 4 (bzw. 1 bis 5 oder 1 bis 6) so einzutragen, dass unter den Zahlen, die mit einem Strich direkt verbunden sind, jedes der angegebenen Paare genau einmal vorkommt. Befindet sich auf dem Strich ein Pfeil, so muss der Pfeil immer von der größeren Zahl zur kleineren Zahl zeigen.

Hier ist ein Beispiel:

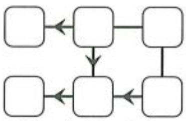


1–2 1–3 1–4	1–2 1–3 1–4	1–2 1–3 ~~1–4~~	~~1–2~~ ~~1–3~~ ~~1–4~~
2–3 2–4 3–4	2–3 2–4 3–4	2–3 2–4 3–4	~~2–3~~ ~~2–4~~ ~~3–4~~

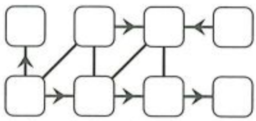
Wer füllt die folgenden Diagramme richtig aus?



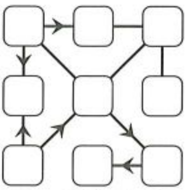
1–2 1–3 1–4
2–3 2–4 3–4



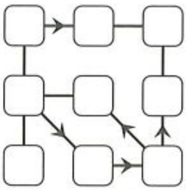
1–2 1–3 1–4
2–3 2–4 3–4



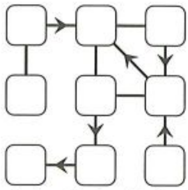
1–2 1–3 1–4 1–5 2–3
2–4 2–5 3–4 3–5 4–5



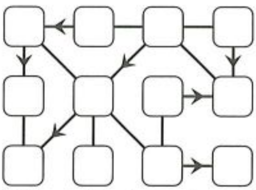
1–2 1–3 1–4 1–5
2–3 2–4 2–5 3–4
3–5 4–5



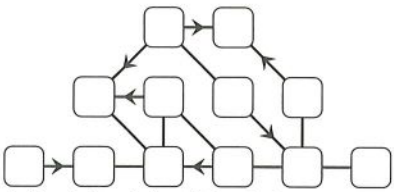
1–2 1–3 1–4 1–5
2–3 2–4 2–5 3–4
3–5 4–5



1–2 1–3 1–4 1–5
2–3 2–4 2–5 3–4
3–5 4–5



1–2 1–3 1–4 1–5 1–6
2–3 2–4 2–5 2–6 3–4
3–5 3–6 4–5 4–6 5–6



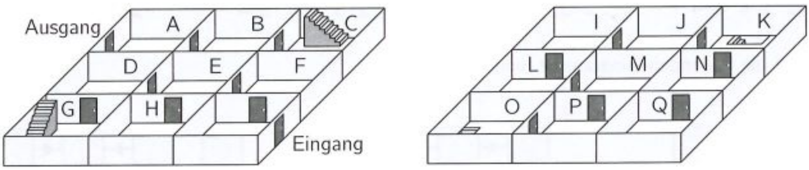
1–2 1–3 1–4 1–5 1–6
2–3 2–4 2–5 2–6 3–4
3–5 3–6 4–5 4–6 5–6

Lauter Labyrinthe

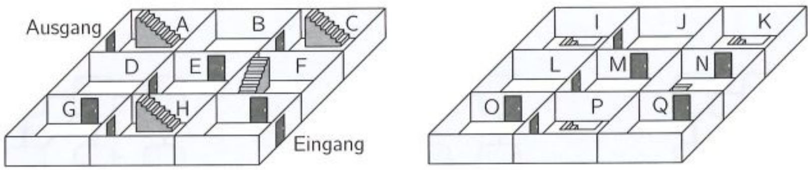
Von vier Gebäuden sind die Gebäudepläne abgebildet. Die Gebäude haben jeweils zwei oder drei Stockwerke. Tina läuft durch die Gebäude. Sie geht jeweils durch den Eingang hinein und durch den Ausgang wieder hinaus.

Tina weiß bei jedem Gebäude, wo sich der Eingang und der Ausgang befinden. Und sie weiß, dass es auf jeder Etage neun gleich große quadratische Räume sind. Welche Räume durch Türen oder Treppen miteinander verbunden sind, weiß Tina aber nicht.

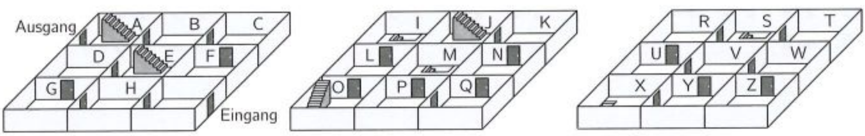
Wenn Tina durch ein Gebäude läuft, wird ihr irgendwann klar sein, wie der gesamte Weg vom Eingang bis zum Ausgang verläuft. In welchem Raum ist das bei den einzelnen Gebäuden frühestens der Fall?



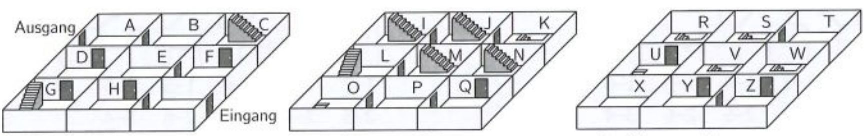
Erdgeschoss 1. Obergeschoss



Erdgeschoss 1. Obergeschoss



Erdgeschoss 1. Obergeschoss 2. Obergeschoss



Erdgeschoss 1. Obergeschoss 2. Obergeschoss

Klassenstufen 9 und 10

1. $(33 + 3333 + 333333) - (3 + 333 + 33333) =$

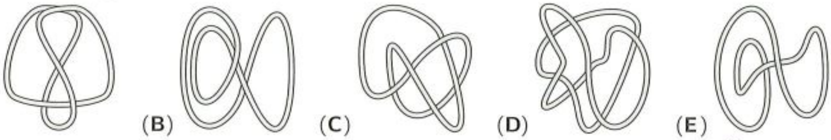
Dänemark

(**A**) 393939 (**B**) 303030 (**C**) 360360 (**D**) 369369 (**E**) 330330

Lösung: Wir stellen geschickt um und erhalten $(33 + 3333 + 333333) - (3 + 333 + 33333)$ $= (33 - 3) + (3333 - 333) + (333333 - 33333) = 30 + 3000 + 300000 = 303030$.

2. In welchem der folgenden Bilder ist mehr als eine Schnur zu sehen?

Schweiz



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: In Bild (**D**) sind zwei Schnüre zu sehen.

3. Damit Fiete keinen Sonnenbrand bekommt, soll er ohne Sonnenschutz höchstens 5 Minuten in der Sonne verbringen. Mit einer Sonnencreme mit Lichtschutzfaktor 40 kann er angeblich 40-mal so lange in der Sonne bleiben. Wie lange wäre das?

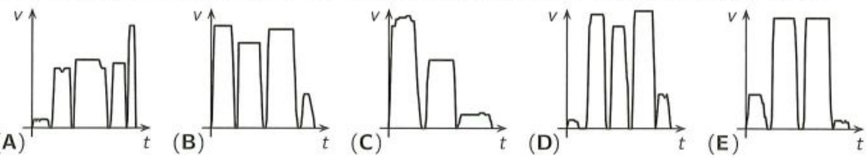
Deutschland

(**A**) 2 Stunden und 30 Minuten (**B**) 2 Stunden und 50 Minuten (**C**) 3 Stunden und 20 Minuten
(**D**) 3 Stunden und 40 Minuten (**E**) 4 Stunden und 15 Minuten

Lösung: Das 40-Fache von 5 Minuten sind 200 Minuten, das sind 3 Stunden und 20 Minuten.

4. Heute Morgen hatte Marie-Luise es eilig. Sie musste sogar rennen, um ihre U-Bahn nicht zu verpassen. Zwei Haltestellen später stieg sie aus und ging wie üblich zur Schule.
Eines der folgenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme passt zu Marie-Luises Schulweg. Welches?

Deutschland



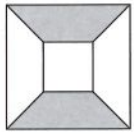
(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Als Marie-Luise zur U-Bahn gerannt ist, war sie sicherlich schneller als auf dem letzten Wegstück, auf dem sie wie üblich ging. Somit kann weder (**A**) noch (**D**) die Lösung sein. Bei (**B**) und (**C**) wäre sie zu Fuß schneller gewesen als mit der U-Bahn, das kann auch nicht sein. Es passt also nur das Diagramm (**E**).

— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 3 zu lösen.* —

5. Rechts ist ein großes Quadrat mit Seitenlänge 10 cm und ein kleines Quadrat mit Seitenlänge 4 cm abgebildet. Das kleine Quadrat liegt genau in der Mitte des großen Quadrats. Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?

Slowakei



(**A**) $25\,\text{cm}^2$ (**B**) $30\,\text{cm}^2$ (**C**) $40\,\text{cm}^2$ (**D**) $42\,\text{cm}^2$ (**E**) $45\,\text{cm}^2$

Lösung: Da das kleine Quadrat genau in der Mitte des großen Quadrats liegt, sind die vier äußeren Vierecke gleich groß. Ihr Flächeninhalt beträgt jeweils ein Viertel von $(10\,\text{cm})^2 - (4\,\text{cm})^2 = 84\,\text{cm}^2$, also $21\,\text{cm}^2$. Dann hat die graue Fläche den Flächeninhalt $2 \cdot 21\,\text{cm}^2 = 42\,\text{cm}^2$.

6. In 2023 Tagen ist derselbe Wochentag wie

Ungarn

(**A**) vorgestern. (**B**) gestern. (**C**) heute. (**D**) morgen. (**E**) übermorgen.

Lösung: Weil eine Woche 7 Tage hat und $2023 : 7 = 289$ Rest 0 gilt, sind 2023 Tage genau 289 Wochen. Daher ist der Wochentag in 2023 Tagen derselbe wie heute.

7. Das abgebildete Rechteck ist aus 20 gleich großen Quadraten zusammengesetzt. Der Umfang des grauen Bereichs ist 66 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?

Mexiko

(**A**) $162\,\text{cm}^2$ (**B**) $180\,\text{cm}^2$ (**C**) $198\,\text{cm}^2$ (**D**) $215\,\text{cm}^2$ (**E**) $240\,\text{cm}^2$

Lösung: Der Umfang des grauen Bereichs ist genauso lang wie 22 Quadratseiten. Also haben die kleinen Quadrate die Seitenlänge $66\,\text{cm} : 22 = 3\,\text{cm}$. Da das Rechteck aus 20 Quadraten zusammengesetzt ist, beträgt sein Flächeninhalt $20 \cdot (3\,\text{cm})^2 = 20 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 180\,\text{cm}^2$.

8. Biologen haben aus einem Teich 50 Frösche gefangen, markiert und dann wieder freigelassen. Kurze Zeit später haben sie aus demselben Teich 100 Frösche gefangen. Von diesen waren 5 markiert. Welche der folgenden Zahlen ist eine sinnvolle Schätzung für die Anzahl der Frösche in diesem Teich?

Kroatien

(**A**) 250 (**B**) 500 (**C**) 1000 (**D**) 1750 (**E**) 2500

Lösung: Es ist sinnvoll anzunehmen, dass sich die markierten Frösche unter allen Fröschen gleichmäßig verteilt haben. Beim zweiten Mal wurden $\frac{5}{50}$ aller markierten Frösche gefangen. Damit wäre eine sinnvolle Schätzung, dass auch etwa $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ <u>aller</u> Frösche gefangen wurde. Dann wäre die Anzahl der Frösche im Teich etwa $10 \cdot 100 = 1000$.

9. Die natürlichen Zahlen m und n sind beide ungerade. Welche der folgenden Zahlen ist dann ebenfalls ungerade?

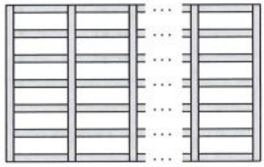
Schweden

(**A**) $m \cdot (n+1)$ (**B**) $(m-n)^2$ (**C**) $m + 2n + 3$ (**D**) $m + n$ (**E**) $m \cdot n + 2$

Lösung: Da m und n ungerade sind, ist auch $m \cdot n$ ungerade und somit auch $m \cdot n + 2$.

10. In der Schulbibliothek wird an einer Wand ein neues Regal aufgebaut. Zwischen benachbarten senkrechten Brettern sind immer 7 waagerechte Bretter. Die Gesamtzahl der Bretter ist eine der folgenden Zahlen. Welche?

Italien



(**A**) 65 (**B**) 66 (**C**) 67 (**D**) 68 (**E**) 69

Lösung: Wenn wir uns das senkrechte Brett ganz links wegdenken, sind es pro Abschnitt immer 8 Bretter (1 senkrechtes und 7 waagerechte). Das bedeutet, dass die Gesamtzahl der Bretter um 1 größer ist als ein Vielfaches von 8. Von den Antworten trifft das nur auf die 65 zu $(65 = 8 \cdot 8 + 1)$.

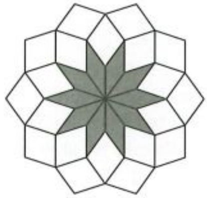
11. Wie viele Paare (a, b) natürlicher Zahlen erfüllen die Gleichung $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$?

Deutschland

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Wir stellen die Gleichung um: $a \cdot b = 35$. Da a und b natürliche Zahlen sind, ist a ein Teiler von 35, also entweder 1, 5, 7 oder 35. Dann ist b jeweils eindeutig bestimmt, und zwar $b = 35 : a$. Es gibt also genau die vier Paare $(1, 35)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$ und $(35, 1)$, die die Gleichung erfüllen.

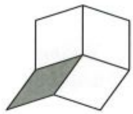
— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 19 zu lösen. —



12. Aus 30 Rauten (Rhomben) wurde ein Mosaik gelegt. Die 20 hellen Rauten sind alle zueinander kongruent und die 10 dunklen sind alle zueinander kongruent. Wie groß ist der größere Innenwinkel der hellen Rauten?

Frankreich

(**A**) 106° (**B**) 108° (**C**) 110° (**D**) 112° (**E**) 114°



Lösung: In der Mitte bilden 10 der kleineren Innenwinkel der dunklen Rauten einen Vollwinkel. Der kleinere Innenwinkel der dunklen Rauten ist also $360° : 10 = 36°$ groß. Die anderen kleineren Innenwinkel der dunklen Rauten bilden, jeweils mit drei der größeren Innenwinkel der hellen Rauten einen Vollwinkel, wie rechts abgebildet. Der größere Innenwinkel der hellen Rauten ist also $(360° - 36°) : 3 = 108°$ groß.

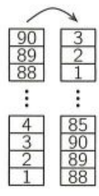
13. Im Betrieb meiner Mutter gibt es genau 200 Angestellte. Davon sind 49 % weiblich. Außerdem gibt es noch einige Auszubildende, die alle weiblich sind. Zählt man alle Angestellten und Auszubildenden zusammen, sind davon 50 % weiblich. Wie viele Auszubildende gibt es in diesem Betrieb?

Paraguay

(**A**) 4 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 16 (**E**) 20

Lösung: Von den 200 Angestellten sind 49 % weiblich. Also sind $\frac{49}{100} \cdot 200 = 98$ Angestellte weiblich und $200 - 98 = 102$ nicht. Da von den Angestellten und Auszubildenden zusammen 50 % weiblich sind und die Auszubildenden alle weiblich sind, müssen es $102 - 98 = 4$ Auszubildende sein.

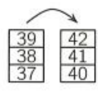
— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 9 zu lösen. —



14. Maliyahs kleine Schwester hat 90 Spielsteine zu einem Turm gestapelt. Auf den Steinen stehen von unten nach oben die Zahlen von 1 bis 90. Nun nimmt Maliyah nach und nach immer drei Steine gleichzeitig von oben weg und stapelt sie zu einem neuen Turm. Wie viele Steine sind dann im neuen Turm zwischen dem Stein mit der 39 und dem Stein mit der 40?

Polen

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4



Lösung: Wir betrachten die 3-er-Stapel, die Maliyah umstapelt. Die oberste Zahl auf jedem 3-er-Stapel ist ein Vielfaches von 3. Den Stapel, in dem der Stein mit der 39 vorkommt, stellt Maliyah direkt auf den Stapel, in dem der Stein mit der 40 vorkommt. Zwischen dem Stein mit der 39 und dem Stein mit der 40 sind dann also die 4 Steine mit der 38, der 37, der 42 und der 41.

Wer findet zwei Vielecke, die sich lückenlos und ohne Überlappung zu einem Dreieck, zu einem konvexen Viereck und zu einem konvexen Fünfeck zusammenlegen lassen?

15. Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die Durchschnitt (arithmetisches Mittel) von vier verschiedenen Primzahlen ist?

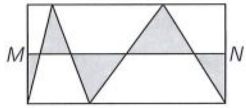
Paraguay

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

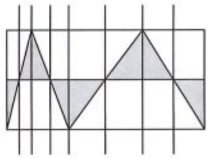
Lösung: Wenn bei vier verschiedenen Primzahlen die 2 dabei ist, so ist ihre Summe ungerade. Dann ist ihr Durchschnitt sicher keine natürliche Zahl. Die 2 ist also nicht dabei. Die vier nächstgrößeren Primzahlen sind 3, 5, 7 und 11. Ihre Summe ist 26 und ihr Durchschnitt 6,5. Die kleinste natürliche Zahl, die Durchschnitt von vier verschiedenen Primzahlen ist, ist also sicher größer oder gleich 7. Wenn wir die Primzahlen 3, 5, 7 und 13 wählen, erhalten wir als Durchschnitt 7. Also ist 7 die Lösung.

16. Die beiden Punkte M und N sind die Mittelpunkte der linken und der rechten Seite des abgebildeten Rechtecks. Welcher Anteil der Fläche des Rechtecks ist grau gefärbt?

Paraguay



(**A**) $\frac{1}{7}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{3}$



Lösung: Wir zerlegen das Rechteck wie abgebildet in acht Streifen. Da M und N die Mittelpunkte der linken und der rechten Seite sind, ist bei jedem Streifen $\frac{1}{4}$ der Fläche grau gefärbt. Also ist auch beim gesamten Rechteck $\frac{1}{4}$ der Fläche grau gefärbt.

Eine andere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, ist folgende: Die Länge der oberen Seite des Rechtecks sei a und die Länge der linken Seite sei b. Weil M und N die Mittelpunkte der linken und der rechten Seite sind, haben alle grauen Dreiecke dieselbe Höhe, nämlich $\frac{b}{2}$. Der gesamte Flächeninhalt der grauen Dreiecke ist das halbe Produkt aus der Summe der Grundseiten multipliziert mit ihrer Höhe, das heißt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$, also ein Viertel des Flächeninhalts des Rechtecks.

17. Nick versucht Wasser zu sparen. Dafür hat er die Dauer seiner morgendlichen Dusche um ein Viertel verkürzt. Außerdem benutzt er nun einen wassersparenden Duschkopf, aus dem ein Viertel weniger Wasser kommt. Um welchen Anteil hat Nick dadurch seinen Wasserverbrauch beim Duschen reduziert?

Deutschland

(**A**) um $\frac{1}{3}$ (**B**) um $\frac{3}{8}$ (**C**) um $\frac{5}{8}$ (**D**) um $\frac{5}{12}$ (**E**) um $\frac{7}{16}$

Lösung: Wir berechnen zuerst, wie viel Wasser Nick jetzt im Vergleich zu vorher verbraucht. Er verbraucht $\frac{3}{4}$ der Menge wegen der Verkürzung der Dauer. Und von diesen $\frac{3}{4}$ verbraucht er $\frac{3}{4}$ der Menge wegen des neuen Duschkopfes. Das heißt, dass Nicks Wasserverbrauch jetzt $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ des alten Wasserverbrauchs ist. Also hat er seinen Wasserverbrauch um $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ reduziert.

Der gesuchte Anteil lässt sich aber auch direkt berechnen: In einem Viertel der alten Duschzeit duscht Nick jetzt nicht mehr, reduziert also den gesamten Wasserverbrauch, den er in dieser Zeit vorher hatte. In den restlichen drei Vierteln der alten Duschzeit duscht er jetzt mit dem wassersparenden Duschkopf, reduziert also ein Viertel des Wasserverbrauchs, den er in dieser Zeit vorher hatte. Insgesamt hat Nick seinen Wasserverbrauch also um $1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$ reduziert.

18. Bei uns im Hochhaus wurde das Treppenhaus saniert. Insgesamt gibt es 272 Stufen, und jede 6. Stufe von unten musste ausgebessert werden. Danach wurde an jeder 8. Stufe von unten an der Stufenkante eine spezielle Markierung für Sehbehinderte angebracht. Wie viele der ausgebesserten Stufen wurden mit einer Markierung versehen?

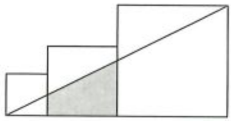
Österreich

(**A**) 9 (**B**) 11 (**C**) 17 (**D**) 20 (**E**) 25

Lösung: Die Nummern der Stufen, die sowohl ausgebessert als auch markiert wurden, sind genau die gemeinsamen Vielfachen von 6 und 8, also die Vielfachen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von 6 und 8, und das ist 24. Also ist jede 24. Stufe eine ausgebesserte Stufe, die mit einer Markierung versehen wurde. Das sind wegen $272 : 24 = 11$ Rest 8 genau 11 Stufen.

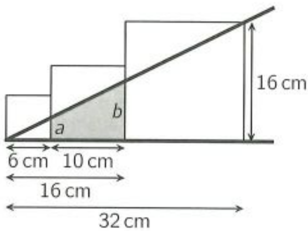
19. Die drei Quadrate im Bild haben die Seitenlängen 6 cm, 10 cm und 16 cm. Welchen Flächeninhalt hat das graue Trapez?

Großbritannien



(**A**) 55 cm^2 (**B**) 60 cm^2 (**C**) 65 cm^2 (**D**) 70 cm^2 (**E**) 75 cm^2

Lösung: Wir bezeichnen die Längen der beiden zueinander parallelen Seiten des Trapezes mit a und b. Nun wenden wir den 2. Strahlensatz auf die beiden dick gezeichneten Strahlen an. Wir erhalten $\frac{a}{6\,\text{cm}} = \frac{b}{16\,\text{cm}} = \frac{16\,\text{cm}}{32\,\text{cm}}$ und somit $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$. Der Flächeninhalt des grauen Trapezes ist also gleich $\frac{a+b}{2} \cdot 10\,\text{cm} = \frac{11\,\text{cm}}{2} \cdot 10\,\text{cm} = 55\,\text{cm}^2$.



Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern ersetzen werden und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern. Wer findet die Lösung?

$$ART + ART + ART = STAR$$

20. Ein 76 cm langer Draht wurde in drei Stücke zerschnitten. Dabei ist das 2. Stück um 50 % länger als das 1. Stück, und das 3. Stück ist um 50 % länger als das 2. Stück. Wie lang ist das 3. Stück?

Spanien

(**A**) 26 cm (**B**) 27 cm (**C**) 31 cm (**D**) 33 cm (**E**) 36 cm

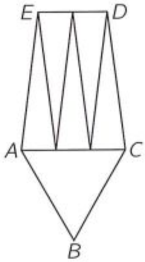
Lösung: Es sei x die Länge des 1. Stücks. Dann ist die Länge des 2. Stücks $x + \frac{50}{100} \cdot x = \frac{3}{2} \cdot x$ und die Länge des 3. Stücks $\frac{3}{2} \cdot x + \frac{50}{100} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x = \frac{9}{4} \cdot x$. Da die Gesamtlänge der drei Stücke 76 cm beträgt, gilt $76\,\text{cm} = x + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} \cdot x = \frac{19}{4} \cdot x$, und somit $x = \frac{4}{19} \cdot 76\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$. Damit ist das 1. Stück 16 cm lang, das 2. Stück $\frac{3}{2} \cdot 16\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$ lang und das 3. Stück $\frac{9}{4} \cdot 16\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$ lang.

— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 14 zu lösen.* —

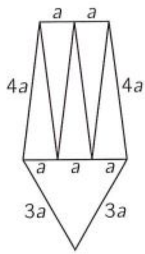
21. Das Fünfeck $ABCDE$ wurde in sechs gleichschenklige Dreiecke zerlegt, die alle denselben Umfang haben. Das Dreieck ABC ist sogar gleichseitig. Dann verhält sich der Umfang des Dreiecks ABC zum Umfang des Fünfecks $ABCDE$ wie

Spanien

(A) 1 : 3. **(B)** 4 : 9. **(C)** 3 : 7. **(D)** 9 : 16. **(E)** 5 : 8.



Lösung: Da die oberen Dreiecke alle gleichschenklig sind und benachbarte Dreiecke einen gemeinsamen Schenkel haben, sind alle ihre Schenkel gleich lang. Und da sie zusätzlich alle denselben Umfang haben, haben ihre Basen auch dieselbe Länge. Die Länge der Basis dieser Dreiecke bezeichnen wir mit a. Das gleichseitige Dreieck ABC hat folglich die Seitenlänge $3a$ und einen Umfang von $9a$. Somit ist die Länge der Schenkel der oberen Dreiecke gleich $(9a - a) : 2 = 4a$. Der Umfang des Fünfecks $ABCDE$ ist $a + a + 4a + 4a + 3a + 3a = 16a$. Das gesuchte Verhältnis ist folglich 9 : 16.



22. Jana hat sich eine Zahlenfolge ausgedacht. Sie beginnt mit den vier Zahlen 2, 0, 2, 3. Jede weitere Zahl ist die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von den vier vorherigen Zahlen. Welches ist die 2023. Zahl in dieser Zahlenfolge?

Polen

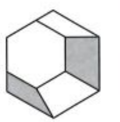
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Lösung: Wir bestimmen die nächsten Zahlen dieser Zahlenfolge nach 2, 0, 2, 3:

5. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von 2, 0, 2, 3, ist 1.
6. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von **0**, **2**, **3**, **1**, ist **4**.
7. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von 2, 3, 1, 4, ist 0.
8. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von 3, 1, 4, 0, ist 2.
9. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von 1, 4, 0, 2, ist 3.
10. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von 4, 0, 2, 3, ist 1.
11. Zahl: Die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden ist von **0**, **2**, **3**, **1**, ist **4**.

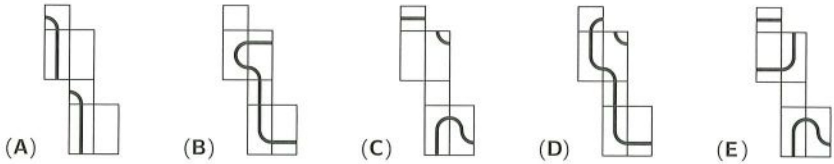
Die 7. bis 11. Zahl und ihre Reihenfolge sind identisch mit der 2. bis 6. Zahl. Das bedeutet, dass sich in dieser Zahlenfolge von nun an immer diese 5 Zahlen in dieser Reihenfolge wiederholen. Folglich ist die 2023. Zahl in dieser Zahlenfolge dieselbe wie die 2018., die 2013., 2008., und so weiter bis zur 13., 8. und 3. Zahl. Die 2023. Zahl in dieser Zahlenfolge ist also eine 2.

Ein regelmäßiges Sechseck ist in ein kleineres regelmäßiges Sechseck und vier Vierecke unterteilt. Der Flächeninhalt des kleinen Sechsecks und der Flächeninhalt der grauen Fläche stehen im Verhältnis 4 : 3. *In welchen Verhältnis steht der Flächeninhalt des kleinen Sechsecks zum Flächeninhalt des großen Sechsecks?*



23. Feodor hat auf einen Quader eine geschlossene Linie gemalt. Wie sieht das Netz dieses Quaders ganz sicher <u>nicht</u> aus?

Slowenien



Lösung: Wir verdeutlichen, wie die Wege auf dem Quader zusammenhängen:

Nur bei (**E**) ergibt sich keine geschlossene Linie.

— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 11 zu lösen.* —

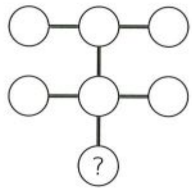
In der Abbildung lässt sich das Wort ROKOKO lesen, indem man beim R beginnt und dann immer zu einem Nachbarfeld weitergeht. Dabei dürfen Felder auch mehrfach benutzt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt dafür?

R	O	K
O	K	O
K	O	K

24. In die Kreise sollen sieben verschiedene einstellige natürliche Zahlen geschrieben werden. Das Produkt der drei Zahlen auf jeder der drei Linien soll gleich sein. Welche Zahl muss in den Kreis mit dem Fragezeichen geschrieben werden?

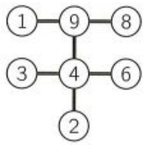
Griechenland

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8



Lösung: Es kommen zunächst die 10 einstelligen Zahlen von 0 bis 9 in Frage. Wäre die 0 dabei, so wäre das Produkt auf einer Linie, auf der die 0 liegt, gleich 0. Da es aber kein Feld gibt, das auf allen drei Linien liegt, gibt es eine Line, auf der nur positive Zahlen liegen – dort ist das Produkt somit ungleich 0. Ähnlich kann man für die Zahlen 5 und 7 argumentieren: Unter den verbleibenden Zahlen gibt es nur eine, die durch 5 teilbar ist, und nur eine, die durch 7 teilbar ist. Da es aber kein Feld gibt, das auf allen drei Linien liegt, gibt es eine Linie, auf der das Produkt der Zahlen <u>nicht</u> ein Vielfaches von 5 oder 7 ist. Also sind die sieben Zahlen, die eingetragen werden sollen: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$. Da die 8 und die 9 dabei sind, ist das Produkt auf jeder Linie durch 8 und durch 9 teilbar, also auch durch 72. Das Produkt aller Zahlen ist gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 72 \cdot 72 \cdot 2$. Also kann das Produkt auf den Linien nicht größer als 72 sein, und in das Feld mit dem Fragezeichen muss die 2 geschrieben werden.

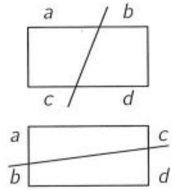
Eine Möglichkeit für die ausgefüllte Figur ist rechts abgebildet. Dabei müssen auf der senkrechten Linie die 4 und die 9 stehen, auf der Zeile mit der 4 stehen 3 und 6 in beliebiger Reihenfolge und auf der Zeile mit der 9 stehen 1 und 8 in beliebiger Reihenfolge.



25. In ein Koordinatensystem wurde ein Rechteck mit den Eckpunkten (0 | 0), (100 | 0), (100 | 50) und (0 | 50) eingezeichnet. Nun soll eine Gerade durch den Punkt (75 | 30) eingezeichnet werden, die das Rechteck in zwei flächengleiche Teile teilt. Welche Steigung hat diese Gerade?

Australien

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{1}{3}$



Lösung: Wir zeigen zuerst, dass die Gerade durch den Mittelpunkt des Rechtecks verläuft. Würde die Gerade das Rechteck in ein Dreieck und ein Viereck oder in ein Dreieck und ein Fünfeck teilen, so wäre der Flächeninhalt des Dreiecks kleiner als der Flächeninhalt des halben Rechtecks. Also verläuft die Gerade durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte oder zwei gegenüberliegende Seiten des Rechtecks. Im ersten Fall verläuft die Gerade sicher durch den Mittelpunkt des Rechtecks. Im zweiten Fall wird das Rechteck in zwei Trapeze geteilt. Dabei gilt für die beiden geteilten Rechteckseiten $a+b=c+d$. Da die beiden Trapeze flächengleich sind, gilt auch $a+c=b+d$. Daraus folgt $a=d$ und $b=c$. Also liegt die Gerade punktsymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes des Rechtecks und verläuft somit durch den Mittelpunkt, das heißt durch den Punkt (50 | 25). Nun kennen wir zwei Punkte auf der Geraden, (50 | 25) und (75 | 30). Dann betrachten wir das Steigungsdreick mit den Eckpunkten (50 | 25), (75 | 25) und (75 | 30). Daraus ergibt sich die Steigung $\frac{30-25}{75-50}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

26. Wenn Metins Smartphone vollständig geladen ist, kann er damit 16 Stunden telefonieren oder 10 Stunden im Internet surfen. Der Akku hält 40 Stunden, wenn Metin sein Smartphone nicht benutzt. Als Metin am Morgen in den Zug stieg, war der Akku genau zur Hälfte geladen. Ein Drittel der Fahrtzeit hat er telefoniert, ein weiteres Drittel hat er im Internet gesurft, und den Rest der Zeit hat er das Smartphone nicht benutzt. Genau als Metin aus dem Zug aussteigt, geht sein Smartphone aus, weil der Akku leer ist. Wie lange dauerte die Zugfahrt?

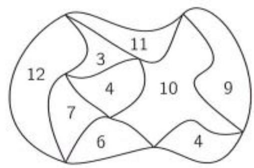
Türkei

(A) 5 Stunden **(B)** 6 Stunden **(C)** 7 Stunden **(D)** 8 Stunden **(E)** 9 Stunden

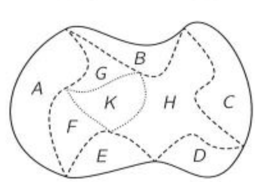
Lösung: Die Dauer der Zugfahrt sei n Stunden, das heißt, Metin hat $n/3$ Stunden telefoniert, $n/3$ Stunden im Internet gesurft und $n/3$ Stunden das Smartphone nicht benutzt. Beim Telefonieren hat er $\frac{n/3}{16}$ einer vollen Akkuladung verbraucht, beim Surfen $\frac{n/3}{10}$ und beim Nichtbenutzen $\frac{n/3}{40}$. Da der Akku zu Beginn der Zugfahrt genau zur Hälfte geladen war und am Ende gerade leer wird, gilt $\frac{n/3}{16}+\frac{n/3}{10}+\frac{n/3}{40}=\frac{1}{2}$. Daraus folgt $\frac{n}{3}\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}\right)=\frac{1}{2}$, also $n=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{16}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}}$ und somit $n=8$. Die Zugfahrt dauerte also 8 Stunden.

27. Die Zahlen in den Gebieten der rechts abgebildeten Figur geben jeweils den Umfang dieses Gebiets in cm an (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie lang ist die äußere Begrenzungslinie der Figur?

Griechenland



(A) 22 cm **(B)** 26 cm **(C)** 28 cm **(D)** 32 cm **(E)** 34 cm



Lösung: Die Länge der äußeren Begrenzungslinie der Figur ist in der Summe der Umfänge der Gebiete am Rand, also von A, B, C, D und E, enthalten. Diese Summe enthält zusätzlich die Länge der im Bild gestrichelt gezeichneten Linie. Die Länge der gestrichelten Linie ist wiederum in der Summe der Umfänge der Gebiete F G und H enthalten, welche zusätzlich den Umfang des Gebiets K enthält (gepunktet gezeichnet). Folglich ist die Länge der gestrichelten Linie in cm gleich $(7+3+10)-4=16$ und damit ist die Länge der äußeren Begrenzungslinie in cm gleich $(12+11+9+4+6)-16=26$.

28. Es gibt 3-stellige natürliche Zahlen N mit folgender Eigenschaft: Die Differenz aus N und der Quersumme von N ist eine 3-stellige Zahl mit 3 gleichen Ziffern. Wie viele solche Zahlen N gibt es?

Ungarn

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 20 (**D**) 27 (**E**) 39

Lösung: Wir schreiben N als ABC mit den Ziffern A, B, C. Also ist $N = 100A + 10B + C$, und nach Voraussetzung ist $N - Q(N) = (100A + 10B + C) - (A + B + C) = 99A + 9B$ eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern. Diese Ziffer bezeichnen wir mit Z. Es gilt also $99A + 9B = 111Z$, das heißt $33A + 3B = 37Z$. Da die linke Seite durch 3 teilbar ist und 37 nicht durch 3 teilbar ist, muss Z durch 3 teilbar sein. Dafür gibt es die folgenden drei Fälle:

$Z = 3$: Aus $33A + 3B = 37 \cdot 3$ folgt $11A + B = 37$, und das gilt nur für $A = 3$ und $B = 4$.

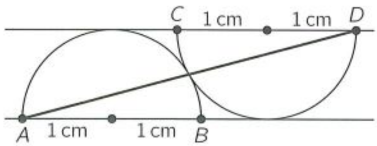
$Z = 6$: Aus $33A + 3B = 37 \cdot 6$ folgt $11A + B = 74$, und das gilt nur für $A = 6$ und $B = 8$.

$Z = 9$: Aus $33A + 3B = 37 \cdot 9$ folgt $11A + B = 111$, und das ist nicht möglich.

Da die Bedingungen alle unabhängig von C sind, kommen für N genau die Zahlen von 340 bis 349 und die Zahlen von 680 bis 689 in Frage. Alle diese Zahlen haben die gewünschte Eigenschaft, also gibt es 20 solche Zahlen.

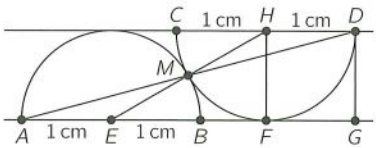
29. Die zwei Halbkreise in der Abbildung haben beide den Radius 1 cm und berühren einander sowie die zueinander parallelen Geraden AB und CD. Wie groß ist das Quadrat der Länge der Strecke $\overline{AD}$ in cm^2?

Spanien



(**A**) $10 + 3\sqrt{3}$ (**B**) $6 + 6\sqrt{2}$ (**C**) $9 + 5\sqrt{2}$

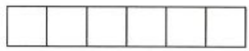
(**D**) $11 + 2\sqrt{3}$ (**E**) $8 + 4\sqrt{3}$



Lösung: Wir fällen die Lote von H und D auf die Gerade AB und betrachten die rechtwinkligen Dreiecke EFH und AGD. Die Strecken $\overline{HF}$, $\overline{EM}$ und $\overline{MH}$ sind Radien der Halbkreise und es gilt $|EH| = |EM| + |MH|$. Folglich gilt $|EH| = 2\,\text{cm}$. Da die Geraden AB und CD zueinander parallel sind, gilt $|DG| = |HF| = 1\,\text{cm}$.
Im Dreieck EFH gilt nach dem Satz des Pythagoras $|EF|^2 + |HF|^2 = |EH|^2$, woraus $|EF| = \sqrt{3}\,\text{cm}$ folgt. So erhalten wir $|AG| = |AE| + |EF| + |FG| = (2 + \sqrt{3})\,\text{cm}$. Schließlich folgt im Dreieck AGD aus dem Satz des Pythagoras $|AD|^2 = |AG|^2 + |DG|^2 = (2 + \sqrt{3})^2\,\text{cm}^2 + 1^2\,\text{cm}^2 = (8 + 4\sqrt{3})\,\text{cm}^2$.

30. Die Zahlen von 1 bis 6 sollen in die Felder so eingetragen werden, dass die Summe der Zahlen in drei benachbarten Feldern überall ein Vielfaches von 3 ist. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

Mexiko



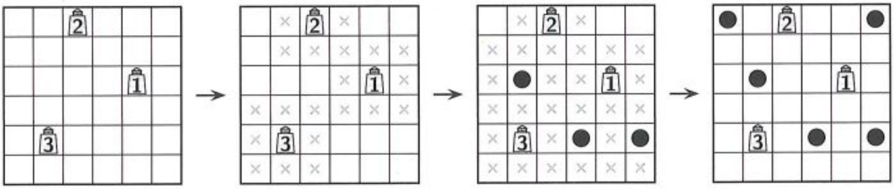
(**A**) 48 (**B**) 64 (**C**) 72 (**D**) 81 (**E**) 120

Lösung: Angenommen A, B, C, D, E, F wäre in dieser Reihenfolge eine mögliche Eintragung. Dann sind $(A + B + C)$ und $(B + C + D)$ beide durch 3 teilbar, also auch ihre Differenz $(A - D)$. Das heißt, dass A und D beim Teilen durch 3 denselben Rest lassen. Dasselbe gilt für B und E und ebenso für C und F. Beim Teilen durch 3 lassen die Zahlen 1 und 4 den Rest 1, die Zahlen 2 und 5 den Rest 2 und die Zahlen 3 und 6 den Rest 0. Für A kommt jede der 6 Zahlen in Frage. Für jede Wahl von A gibt es dann noch 4 Möglichkeiten für B, dann noch 2 Möglichkeiten für C und schließlich jeweils noch eine Möglichkeit für D, E und F. Daher gibt es insgesamt $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten.

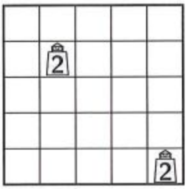
— Ein ähnliches, etwas leichteres Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 20 zu lösen. —

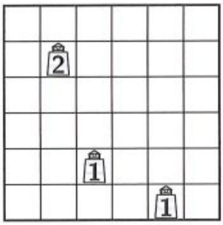
Leuchttürme

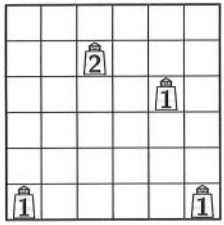
In den folgenden Diagrammen sind Leuchttürme mit Zahlen vorgegeben. In einige leere Felder sollen nun Schiffe eingezeichnet werden (zum Beispiel als dicker Punkt). Dabei darf kein Schiff ein anderes Schiff oder einen Leuchtturm berühren, auch nicht diagonal. Von jedem Leuchtturm aus werden alle Schiffe gesehen, die sich in derselben Zeile oder in derselben Spalte wie dieser Leuchtturm befinden. Die Zahlen geben an, wie viele Schiffe von dem jeweiligen Leuchtturm aus gesehen werden können. Jedes Schiff muss von mindestens einem Leuchtturm aus gesehen werden. Hier ist ein Beispiel:

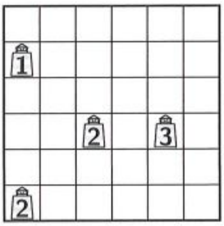


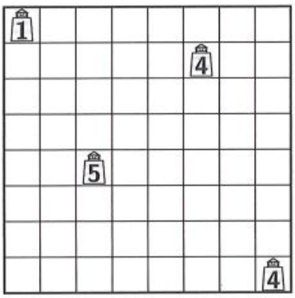
Wer findet die richtigen Positionen der Schiffe?

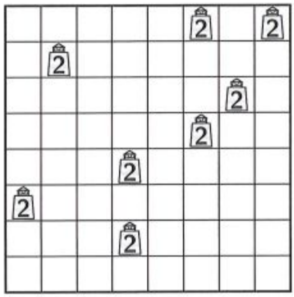


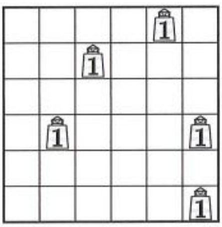


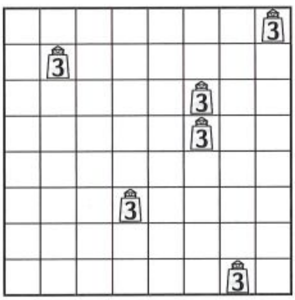


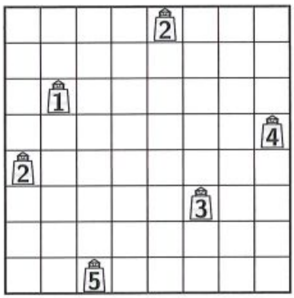








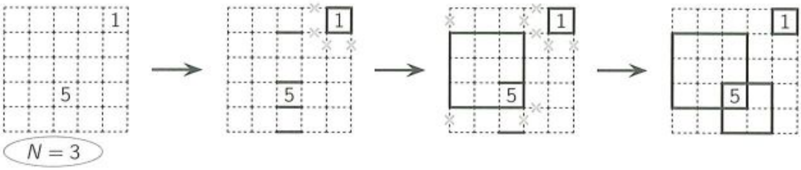




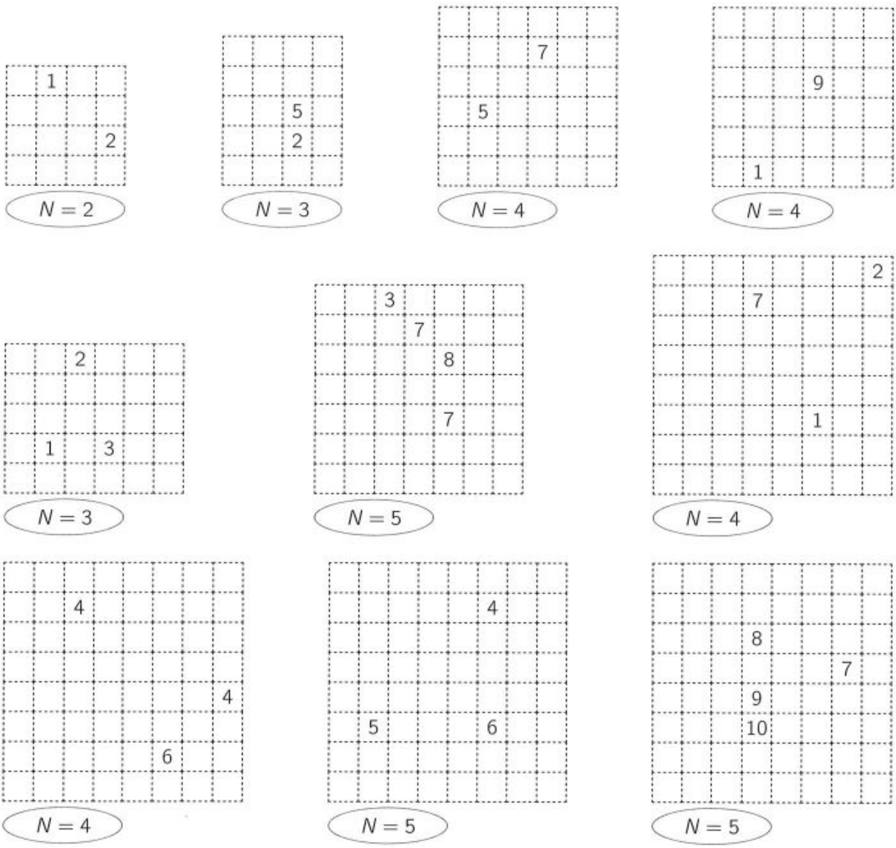
Überlappende Quadrate

In jedem Diagramm sollen für die angegebene Zahl N Quadrate mit den Seitenlängen von 1 bis N entlang der Gitterlinien eingezeichnet werden – für jede dieser Seitenlängen genau ein Quadrat. Die Seiten der Quadrate dürfen sich kreuzen. Ansonsten dürfen sich die Quadrate mit den Seiten oder den Ecken aber nicht berühren. Die vorgegebenen Zahlen geben die Summe der Seitenlängen aller Quadrate an, zu denen das entsprechende Feld gehört.

Hier ist ein Beispiel:



Wer findet die richtigen Positionen der Quadrate in den folgenden Diagrammen?



Klassenstufen 11 bis 13

1. $\dfrac{77^2}{55 \cdot 22} =$

Griechenland

(**A**) $\dfrac{49}{10}$ (**B**) $\dfrac{21}{2}$ (**C**) $\dfrac{7}{52}$ (**D**) $\dfrac{77}{16}$ (**E**) $\dfrac{14}{5}$

Lösung: $\dfrac{77^2}{55 \cdot 22} = \dfrac{7 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 11}{5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 11} = \dfrac{7 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \dfrac{49}{10}$

2. Friederike würfelt mit fünf normalen Spielwürfeln, die auf ihren Seiten jeweils 1 bis 6 Augen haben. Wie viele Sechsen kann sie höchstens gewürfelt haben, wenn es insgesamt 19 Augen sind?

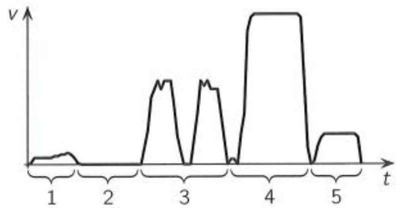
Deutschland

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Bei den insgesamt 19 Augen können 2 Sechsen dabei gewesen sein, zum Beispiel so: $6+6+3+3+1=19$. Hätte Friederike 3 Sechsen oder mehr gewürfelt, so wäre die Augensumme größer oder gleich $3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 20$. Also kann sie höchstens 2 Sechsen gewürfelt haben.

3. Neven zeichnet mit seinem Smartphone seinen Weg zur Schule auf und erhält das rechts abgebildete Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Nevens Weg ist in die Abschnitte 1 bis 5 unterteilt. Diese sind in den Antworten beschrieben. Was tut Neven in Abschnitt 5?

Deutschland



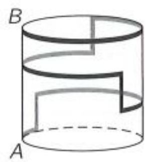
(**A**) Neven fährt Bus. (**B**) Neven rennt.
(**C**) Neven geht. (**D**) Neven wartet.
(**E**) Neven fährt Zug.

Lösung: In Abschnitt 2 hat Neven offensichtlich gewartet. In Abschnitt 1 war er nur etwas schneller, dort ist er gegangen. In den Abschnitten 3 und 4 war er sehr schnell unterwegs, das sind die Bus- und die Zugfahrt. In Abschnitt 5 ist Neven dann das letzte Stück zu Schule gerannt (vielleicht, weil er den Bus verpasst hat, er hat ja eine Weile warten müssen).

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 4 zu lösen. —

4. Der rechts abgebildete Zylinder ist 15 cm hoch und der Umfang seiner Grundfläche beträgt 30 cm. Der abgebildete Weg von A nach B auf der Oberfläche des Zylinders verläuft immer senkrecht nach oben oder horizontal, also parallel zur Grundfläche. Wie lang ist dieser Weg?

Griechenland



(**A**) 45 cm (**B**) 55 cm (**C**) 60 cm (**D**) 65 cm (**E**) 75 cm

Lösung: Die senkrechten Abschnitte des Weges sind zusammen genauso lang wie die Höhe des Zylinders. Und die horizontalen Abschnitte sind zusammen zweimal so lang wie der Umfang der Grundfläche des Zylinders. Die Länge des Weges beträgt also $1 \cdot 15\,\text{cm} + 2 \cdot 30\,\text{cm} = 75\,\text{cm}$.

5. Wie viele Paare (x, y) natürlicher Zahlen erfüllen die Gleichung $2x + 3y = 23$?

Montenegro

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Lösung: Da $2x$ gerade und 23 ungerade ist, muss $3y$ und folglich y ungerade sein. Und wegen $3 \cdot 8 = 24 > 23$ ist y kleiner als 8. Die Werte 1, 3, 5 und 7 für y führen jeweils zu einem Lösungspaar: $(10, 1)$, $(7, 3)$, $(4, 5)$, $(1, 7)$. Es gibt somit 4 solche Paare.

6. Liane möchte die drei Streifen der Fahne ausmalen. Sie hat Stifte in drei verschiedenen Farben. Jeder Streifen soll mit einer einzigen Farbe ausgemalt werden. Benachbarte Streifen sollen verschiedene Farben haben. Wie viele Möglichkeiten hat Liane dafür?

Slowenien

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 16 **(E)** 18

Lösung: Für den obersten Streifen hat Liane 3 Farben zur Auswahl. Für den mittleren Streifen hat sie dann jeweils die zwei anderen Farben zur Auswahl, nämlich die, die sie für den obersten Streifen nicht verwendet hat. Für jede dieser $3 \cdot 2 = 6$ Farbkombinationen hat Liane jeweils noch zwei Farben für den untersten Streifen zur Auswahl, nämlich die, die sie für den mittleren Streifen nicht verwendet hat. Insgesamt hat sie also $6 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten.

7. Josephine hat im Lotto den Jackpot in Höhe von 17,1 Millionen Euro gewonnen. Sie hat den Jackpot nicht alleine geknackt. Das Geld wird gleichmäßig auf alle Gewinner aufgeteilt. Welcher Betrag könnte exakt Josephines Anteil sein?

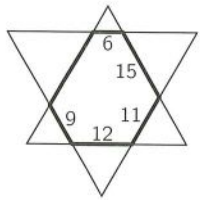
Deutschland

(A) 1,1 Millionen Euro **(B)** 1,3 Millionen Euro **(C)** 1,5 Millionen Euro
(D) 1,7 Millionen Euro **(E)** 1,9 Millionen Euro

Lösung: Wir zerlegen 171 in Primfaktoren: $171 = 3 \cdot 3 \cdot 19$. Also gilt $17{,}1 = 9 \cdot 1{,}9$ und damit ist 1,9 Millionen Euro ein ganzzahliger Anteil von 17,1 Millionen Euro. Josephines Anteil könnte also exakt 1,9 Millionen Euro betragen. Durch Nachrechnen kann man sich davon überzeugen, dass 17,1 Millionen kein ganzzahliges Vielfaches der Werte unter **(A)** bis **(D)** ist.

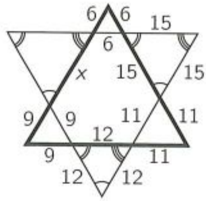
8. Die beiden großen, übereinanderliegenden Dreiecke im Bild rechts sind gleichseitig. Gegenüberliegende Seiten des Sechsecks in der Mitte sind jeweils parallel zueinander. Von fünf Sechseckseiten sind die Längen in cm angegeben. Wie lang ist die sechste Sechseckseite?

Mexiko



(A) 16 cm **(B)** 17 cm **(C)** 18 cm **(D)** 19 cm **(E)** 20 cm

Lösung: Da die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks parallel zueinander sind, sind die sechs kleinen Dreiecke außerhalb des Sechsecks gleichseitig (z.B. sind die jeweils gleich markierten Winkel im Bild Stufenwinkel, also sind sie alle 60° groß, da jeweils einer von ihnen ein Innenwinkel des dünn gezeichneten großen Dreiecks ist).
Folglich ist die Seitenlänge des großen Dreiecks mit der Spitze oben gleich $6\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 11\,\text{cm} = 32\,\text{cm}$. Und damit ist die Länge der sechsten Sechseckseite gleich $x = 32\,\text{cm} - 6\,\text{cm} - 9\,\text{cm} = 17\,\text{cm}$.



9. Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts $(5^5 + 1) \cdot (5^6 + 1) \cdot (5^7 + 1)$?

Großbritannien

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

Lösung: Die Fünferpotenzen 5^5, 5^6 und 5^7 enden alle auf 5. Also enden die drei Faktoren jeweils auf 6. Und Produkte von Zahlen, die alle auf 6 enden, enden ihrerseits auf 6.

10. Für eine positive ganze Zahl n ist $n!$ („n Fakultät") definiert als das Produkt der Zahlen von 1 bis n. Zum Beispiel ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Für welche positive ganze Zahl N gilt $N! = 6! \cdot 7!$?

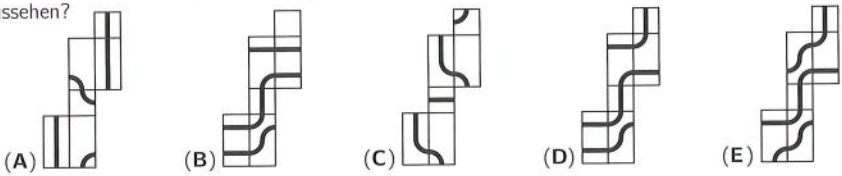
Türkei

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 14

Lösung: Wir fassen die Faktoren von 6! geschickt zusammen und erhalten:
$6! \cdot 7! = 7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 7! \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$
Also ist $N = 10$.

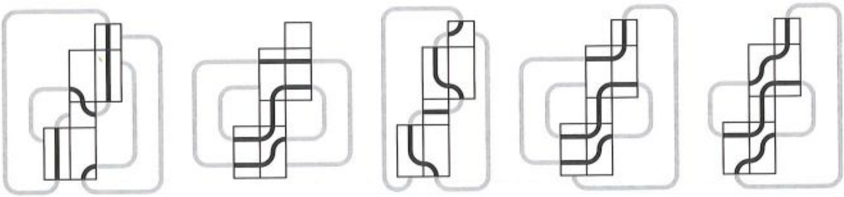
11. Leonard hat auf einen Quader eine geschlossene Linie gemalt. Wie könnte das Netz dieses Quaders aussehen?

Slowenien



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Wir verdeutlichen, wie die Wege auf dem Quader zusammenhängen:



Nur bei (**E**) ergibt sich eine geschlossene Linie.
— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 23 zu lösen.* —

Wie viele Paare (x, y) natürlicher Zahlen erfüllen die Gleichung $20x+23y = 2023$?

12. Medhi hat im Tierpark viele Fotos gemacht. Die 22 Fotos von den Kängurus und den Bibern hat er ausgedruckt und in eine Reihe gelegt. Neben jedem Foto liegt mindestens ein Foto von einem Känguru. Was ist die größtmögliche Anzahl an Biber-Fotos, die Medhi gemacht haben kann?

Ungarn

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 14

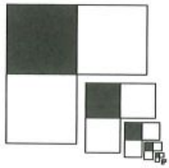
Lösung: Das 1. Foto liegt neben einem Känguru-Foto. Das 2. Foto ist also ein Känguru-Foto. Neben dem 2. Foto liegt ein Känguru-Foto, folglich ist das 1. oder das 3. Foto ein Känguru-Foto. Also ist höchstens ein Biber-Foto unter den ersten 3 Fotos der Reihe. Genauso gibt es höchstens ein Biber-Foto unter den letzten 3 Fotos.
Zwischen den ersten 3 und den letzten 3 Fotos der Reihe liegen noch $22 - 6 = 16$ Fotos. Da neben jedem Biber-Foto mindestens ein Känguru-Foto liegt, liegen immer nur höchstens 2 Biber-Fotos nebeneinander. Und da neben jedem Känguru-Foto mindestens ein Känguru-Foto liegt, liegen von den Känguru-Fotos immer mindestens 2 nebeneinander. Unter 4 nebeneinanderliegenden Fotos gibt es folglich maximal 2 Biber-Fotos. Also sind von den 16 Fotos höchstens 8 Biber-Fotos.
Insgesamt kann es also nicht mehr als 10 Biber-Fotos geben, und dass 10 Biber-Fotos möglich sind, zeigt das folgende Beispiel: BKK BBKK BBKK BBKK BBKK KKB.

13. Ein Quadrat mit $84\,\text{cm}^2$ Flächeninhalt wird in vier Quadrate unterteilt und das Quadrat links oben wird schwarz gefärbt. Dann wird das Quadrat rechts unten in vier Quadrate unterteilt und von diesen das linke obere schwarz gefärbt. Dieser Ablauf wird immer wieder wiederholt. Wie groß wäre der Flächeninhalt der schwarzen Fläche, wenn das unendlich oft wiederholt werden würde?

Niederlande

(**A**) $28\,\text{cm}^2$ (**B**) $31\,\text{cm}^2$ (**C**) $32\,\text{cm}^2$ (**D**) $34\,\text{cm}^2$ (**E**) $37\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir zerlegen das Quadrat so, wie es rechts dargestellt ist. Von jeder der Teilfächen ist offenbar ein Drittel der Fläche schwarz. Also ist auch insgesamt ein Drittel der Fläche schwarz, das heißt $84\,\text{cm}^2 : 3 = 28\,\text{cm}^2$.



Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, den Flächeninhalts der schwarzen Fläche abzuschätzen. Der Flächeninhalt des größten schwarzen Quadrats ist $84\,\text{cm}^2 : 4 = 21\,\text{cm}^2$, der des zweitgrößten ist $21\,\text{cm}^2 : 4 = 5{,}25\,\text{cm}^2$ und der des drittgrößten ist $5{,}25\,\text{cm}^2 : 4 = 1{,}3125\,\text{cm}^2$. Das heißt, der Flächeninhalt der gesamten schwarzen Fläche ist größer als $21\,\text{cm}^2 + 5{,}25\,\text{cm}^2 + 1{,}3125\,\text{cm}^2 = 27{,}5625\,\text{cm}^2$. Außerdem befindet sich der Rest der schwarzen Fläche innerhalb des rechten unteren Quadrats, das bei der dritten Unterteilung entstanden ist. Da dieses den Flächeninhalt $1{,}3125\,\text{cm}^2$ hat, folgt daraus, dass der Flächeninhalt der gesamten schwarzen Fläche kleiner als $27{,}5625\,\text{cm}^2 = 28{,}875\,\text{cm}^2$ ist. Von den Antworten liegt in diesem Bereich nur $28\,\text{cm}^2$.

Und eine dritte Lösungsmöglichkeit gibt es für diejenigen, die bereits die geometrische Reihe kennen. Der Flächeninhalt des größten schwarzen Quadrats ist $84\,\text{cm}^2 : 4 = 21\,\text{cm}^2$. Und der Flächeninhalt jedes folgenden schwarzen Quadrats beträgt immer ein Viertel des nächstgrößeren schwarzen Quadrats. Also ist der gesuchte Flächeninhalt gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{21\,\text{cm}^2}{4^n} = 21\,\text{cm}^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 21\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 21\,\text{cm}^2 \cdot \frac{4}{3} = 28\,\text{cm}^2.$$

Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern ersetzen werden und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern.
Wer findet die Lösung?

$$MIX + FUN + AND = MATH$$

14. Lucy trainiert mit ihren beiden Schwestern Liegestütze. Zusammen haben sie 95 Liegestütze geschafft. Lucys große Schwester hat 50 % mehr geschafft als Lucys kleine Schwester. Und Lucy hat 50 % mehr geschafft als ihre große Schwester. Wie viele Liegestütze hat Lucy geschafft?

Spanien

(**A**) 36 (**B**) 39 (**C**) 42 (**D**) 45 (**E**) 48

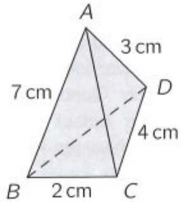
Lösung: Es sei x die Anzahl der Liegestütze, die Lucys kleine Schwester geschafft hat. Dann hat Lucys große Schwester $\frac{3}{2} \cdot x$ und Lucy hat $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{9}{4} \cdot x$ Liegestütze geschafft. Insgesamt haben sie 95 Liegestütze geschafft, also gilt $95 = x + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} \cdot x = \frac{19}{4} \cdot x$ und somit $x = 20$. Also hat Lucys kleine Schwester 20, Lucys große Schwester hat 30 und Lucy hat 45 Liegestütze geschafft.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 20 zu lösen. —

15. Die sechs Kanten der dreiseitigen Pyramide im Bild haben in cm eine ganzzahlige Länge. Vier der Längen sind angegeben. Wie lang ist die Kante $\overline{AC}$?

Griechenland

(A) 3 cm **(B)** 4 cm **(C)** 5 cm **(D)** 6 cm **(E)** 7 cm



Lösung: Wir betrachten die Dreiecke BCA und CDA und wenden auf sie jeweils die Dreiecksungleichung an. Im Dreieck BCA gilt $7\,\text{cm} - 2\,\text{cm} < |AC| < 7\,\text{cm} + 2\,\text{cm}$, also $5\,\text{cm} < |AC| < 9\,\text{cm}$. Im Dreieck CDA gilt $4\,\text{cm} - 3\,\text{cm} < |AC| < 4\,\text{cm} + 3\,\text{cm}$, also $1\,\text{cm} < |AC| < 7\,\text{cm}$. Zusammen ergibt sich $5\,\text{cm} < |AC| < 7\,\text{cm}$. Da alle Kanten ganzzahlige Längen in cm haben, muss $|AC| = 6\,\text{cm}$ gelten.

16. Die fünf reellen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 haben die Summe S. Es gilt $a_k = k + S$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Welchen Wert hat S?

Griechenland

(A) $-\frac{15}{4}$ **(B)** $\frac{14}{5}$ **(C)** $-\frac{13}{6}$ **(D)** $\frac{11}{2}$ **(E)** $-\frac{10}{3}$

Lösung: Wenn wir in der Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$ jedes a_k durch $k + S$ ersetzen, erhalten wir $(1+S)+(2+S)+(3+S)+(4+S)+(5+S) = S$. Folglich gilt $15 + 5S = S$ und somit $S = -\frac{15}{4}$.

17. Vor dem Kochen stehen Pascals Gewürze wie abgebildet im Regal. Pascal kocht ein Chili sin Carne und stellt danach alle Gewürze wahllos wieder zurück. Am Ende steht ein Gewürz 4 Positionen weiter links und ein anderes 3 Positionen weiter rechts als zu Beginn. Auch am Ende steht der Zimt weiter links als der Ingwer. Nur ein Gewürz steht wieder genau dort, wo es zu Beginn stand. Welches?

Schweiz

(A) Chili **(B)** Muskat **(C)** Zimt **(D)** Ingwer **(E)** Pfeffer

Lösung: Wir kürzen die Gewürze mit ihren Anfangsbuchstaben ab. Die Anordnung zu Beginn ist CMZIP. Das einzige Gewürz, das 4 Positionen weiter links als zu Beginn stehen kann, ist der Pfeffer. Nur die Gewürze Chili und Muskat können 3 Positionen weiter rechts als zu Beginn stehen. Folglich gibt es zwei mögliche Anordnungen: P??C? und P???M.
Da der Zimt am Ende weiter links als der Ingwer steht, kommen genau die folgenden Anordnungen in Frage: PZICM, PZMCI, PMZCI, PZCIM, PCZIM.
Bei zwei dieser Anordnungen stehen zwei Gewürze dort, wo sie zu Beginn standen, und bei zwei anderen Anordnungen stehen alle Gewürze an einer anderen Stelle als zu Beginn. Nur bei der Anordnung PZCIM steht genau ein Gewürz wieder dort, wo es zu Beginn stand, nämlich der Ingwer.

18. Welche der folgenden Zahlen hat denselben Wert wie die Zahl $2^{(2^{20})}$?

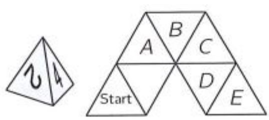
Griechenland

(A) $(2^{18})^{(2^{18})}$ **(B)** $(2^{16})^{(2^{16})}$ **(C)** $(2^{12})^{(2^{12})}$ **(D)** $(2^{10})^{(2^{10})}$ **(E)** $(2^{8})^{(2^{8})}$

Lösung: Wir gehen die Antworten durch und beachten die Potenzgesetze. Bei **(B)** ergibt sich $(2^{16})^{(2^{16})} = 2^{(16 \cdot 2^{16})} = 2^{(2^4 \cdot 2^{16})} = 2^{(2^{(4+16)})} = 2^{(2^{20})}$.
Oder wir starten mit $2^{(2^{20})}$ und formen nach und nach um: $2^{(2^{20})} = 2^{(2 \cdot 2^{19})} = (2^2)^{(2^{19})} = (2^2)^{(2 \cdot 2^{18})}$ $= (2^{(2 \cdot 2)})^{(2^{18})} = (2^4)^{(2^{18})} = (2^4)^{(2 \cdot 2^{17})} = (2^{(4 \cdot 2)})^{(2^{17})} = (2^8)^{(2^{17})} = (2^8)^{(2 \cdot 2^{16})} = (2^{(8 \cdot 2)})^{(2^{16})} = (2^{16})^{(2^{16})}$.

19. Ein Tetraeder ist mit den Zahlen von 1 bis 4 beschriftet. Es wird mit der 1 auf das Feld Start gelegt, das rechts abgebildet ist. Dann wird es von Feld zu Feld bewegt, indem es jeweils über eine Kante gekippt wird. Auf welchem Feld liegt das Tetraeder zum ersten Mal wieder mit der 1?

Polen



(A) A **(B)** B **(C)** C **(D)** D **(E)** E

Lösung: Wir beobachten, wohin sich die Spitze, die der 1 gegenüberliegt, bei jedem Kippen bewegt. Nur wenn diese Spitze oben ist, liegt das Tetraeder auf der 1. Nach dem ersten Kippen landet diese Spitze auf dem Punkt, den die Felder A, B, C und D gemeinsam haben. Und dort bleibt sie, bis das Tetraeder auf das Feld D gekippt ist. Beim nun folgenden Kippen auf das Feld E kommt diese Spitze wieder nach oben, sodass das Tetraeder – zum ersten Mal – wieder mit der 1 nach unten liegt.

20. Mexiko In die sieben Felder sollen die Zahlen von 1 bis 7 so eingetragen werden, dass die Summe der Zahlen in drei benachbarten Feldern überall ein Vielfaches von 3 ist. Die 2 und die 6 wurden schon eingetragen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, die anderen fünf Zahlen einzutragen?

		2	6			

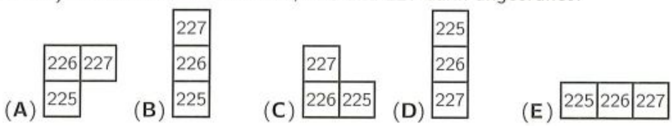
(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Da $2+6=8$ ist, können zwischen der 2 und der 6 nur die Zahlen 1, 4 und 7 stehen, denn nur $8+1=9$, $8+4=12$ und $8+7=15$ sind durch 3 teilbar. Rechts von der 6 muss in jedem Fall die 5 stehen, denn nur $1+6+5=12$, $4+6+5=15$ und $7+6+5=18$ sind durch 3 teilbar. Links von der 2 muss in jedem Fall die 3 stehen, denn nur $3+2+1=6$, $3+2+4=9$ und $3+2+7=12$ sind durch 3 teilbar. Die beiden verbleibenden Zahlen der 1, 4 und 7 müssen in die beiden äußeren Felder eingetragen werden. Dabei sind in jedem Fall die Summe der drei linken Zahlen und die Summe der drei rechten Zahlen beide durch 3 teilbar. Die Reihenfolge der Zahlen 1, 4 und 7 im linken, mittleren und rechten Feld ist also beliebig, und dafür gibt es 6 Möglichkeiten.

— Ein ähnliches, etwas schwereres Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 30 zu lösen. —

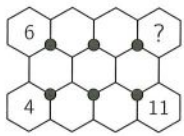
21. Serbien Die Zahlen von 1 bis 999 werden aufsteigend in Form einer Spirale angeordnet (*s. Abb.*). Wie sind die Zahlen 225, 226 und 227 darin angeordnet?

⋮	10	11	12	13
24	9	2	3	14
23	8	1	4	15
22	7	6	5	16
21	20	19	18	17



Lösung: Wir schreiben die Zahlen in Gedanken nach und nach auf. Jedes Mal wenn die aufgeschriebenen Zahlen ein Quadrat bilden, sind wir bei einer Quadratzahl angekommen. Eine Quadratzahl steht unten rechts, wenn sie gerade ist, und sie steht oben links, wenn sie ungerade ist. Da $225=15^2$ eine ungerade Quadratzahl ist, steht sie im 15×15-Feld der ersten 225 Zahlen oben links. Die Spirale geht dann im Uhrzeigersinn so weiter, dass die 226 über der 225 steht und die 227 rechts neben der 226. (**A**) ist also richtig.

22. Polen In die Sechsecke sollen die Zahlen von 1 bis 11 geschrieben werden. Dabei soll die Summe der drei Zahlen in den Sechsecken um einen schwarzen Punkt bei allen sechs Punkten die gleiche sein. Drei Zahlen wurden schon eingetragen. Welche Zahl muss in das Sechseck mit dem Fragezeichen geschrieben werden?



(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Wir stellen uns vor, dass alle Sechsecke ausgefüllt sind. Dann fassen wir die 11 Zahlen auf zwei Weisen in kleine Gruppen zusammen:

(a) Die drei Zahlen um den Punkt oben links, die drei Zahlen um den Punkt oben rechts, die drei Zahlen um den Punkt unten in der Mitte sowie die 4 und die 11.

(b) Die drei Zahlen um den Punkt oben in der Mitte, die drei Zahlen um den Punkt unten links, die drei Zahlen um den Punkt unten rechts sowie die 6 und das „?".

Die Summe ist in beiden Fällen gleich. Und da jeweils 3-mal die Summe um einen schwarzen Punkt vorkommt, gilt $4+11=6+?$ und somit $?=9$. Die Sechsecke lassen sich auf eindeutige Weise ausfüllen, wie rechts abgebildet.

23. Durch den Punkt $S(x_0 \mid y_0)$ verlaufen die Graphen aller Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3+4x^2+ax+3a+4$, egal welcher Wert für den Parameter a eingesetzt wird. Welchen Wert hat y_0?

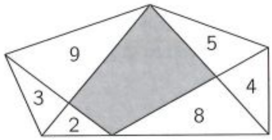
Griechenland

(**A**) 4 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 13

Lösung: Setzen wir den Punkt S in die Funktion ein, so erhalten wir $y_0 = x_0^3 + 4x_0^2 + ax_0 + 3a + 4 = x_0^3 + 4x_0^2 + 4 + a \cdot (x_0 + 3)$. Da y_0 unabhängig von a ist, muss $(x_0 + 3) = 0$ bzw. $x_0 = -3$ sein. Daraus folgt $y_0 = (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 + 4 = -27 + 36 + 4 = 13$.

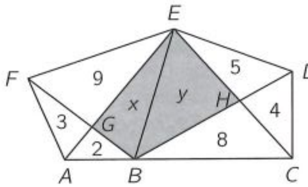
24. Das große Fünfeck im Bild wurde in sieben Teile zerlegt. Die Zahlen in den Dreiecken geben jeweils deren Flächeninhalt in cm² an. Welchen Flächeninhalt hat das graue Viereck?

Griechenland



(**A**) 15 cm² (**B**) 16 cm² (**C**) 17 cm² (**D**) 18 cm² (**E**) 19 cm²

Lösung: Wir zeichnen als Hilfslinie die Strecke $\overline{BE}$ ein und bezeichnen mit x und y die Flächeninhalte der beiden grauen Dreiecke in cm². Die beiden Dreiecke AGF und GEF haben bezüglich der Grundseite $\overline{AG}$ bzw. $\overline{GE}$ dieselbe Höhe. Ebenso haben die beiden Dreiecke GAB und EGB ebenfalls bezüglich der Grundseite $\overline{AG}$ bzw. $\overline{GE}$ dieselbe Höhe. Folglich gilt $\frac{x}{2} = \frac{|GE|}{|AG|} = \frac{9}{3}$ und somit $x = 6$. Analog gilt $\frac{y}{5} = \frac{|BH|}{|HD|} = \frac{8}{4}$, und somit $y = 10$. Der Flächeninhalt der grauen Fläche ist also gleich $6\,\text{cm}^2 + 10\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$.

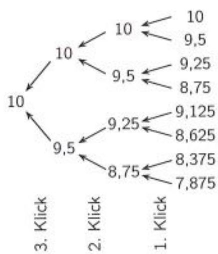


25. Larissa hat ein kleines Programm geschrieben. Man kann eine Zahl in ein Feld schreiben und dann beliebig oft auf einen Knopf klicken. Bei jedem Klick wird zu der Zahl im Feld ihr Nach-Komma-Anteil addiert. Zum Beispiel wird 1,4365 durch einen Klick zu $1{,}4365 + 0{,}4365 = 1{,}873$ und durch einen weiteren Klick zu $1{,}873 + 0{,}873 = 2{,}746$. Oliver probiert es aus. Er schreibt eine Zahl in das Feld und klickt 3 Mal auf den Knopf. Im Feld steht jetzt die Zahl 10. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Zahl, die Oliver in das Feld geschrieben haben kann?

Estland

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 12 (**E**) 16

Lösung: Wir wissen, dass nach dem 3. Klick im Feld die Zahl 10 steht. Wir überlegen uns, was vor dem 3. Klick in dem Feld gestanden haben könnte. Wenn der Nach-Komma-Anteil x gleich 0 war, stand im Feld 10. Andernfalls läge der Nach-Komma-Anteil x zwischen 0 und 1. Dann stünde in dem Feld $(9+x)$ und nach dem 3. Klick $(9+x)+x = 10$, woraus $x = 0{,}5$ folgt. Vor dem 3. Klick stand also 10 oder 9,5 im Feld.



Wenn nach dem 2. Klick 10 im Feld stand, kann – wie eben berechnet – vor dem 2. Klick 10 oder 9,5 im Feld gestanden haben. Wenn nach dem 2. Klick 9,5 im Feld stand, kann vor dem 2. Klick $(8 + x_1)$ oder $(9 + x_2)$ im Feld gestanden haben. Aus $(8 + x_1) + x_1 = 9{,}5$ folgt $x_1 = 0{,}75$, und aus $(9 + x_2) + x_2 = 9{,}5$ folgt $x_2 = 0{,}25$. In diesem Fall kann vor dem 2. Klick 8,75 oder 9,25 im Feld gestanden haben.

Wenn nach dem 1. Klick 10 oder 9,5 im Feld stand, kann – wie eben berechnet – vor dem 1. Klick 10, 9,5, 8,75 oder 9,25 im Feld gestanden haben. Wenn nach dem 1. Klick 8,75 im Feld stand, kann vor dem 1. Klick $(7+x_1)$ oder $(8+x_2)$ im Feld gestanden haben. Aus $(7+x_1)+x_1 = 8{,}75$ folgt $x_1 = 0{,}875$, und aus $(8+x_2)+x_2 = 8{,}75$ folgt $x_2 = 0{,}375$. In diesem Fall kann vor dem 1. Klick 7,875 oder 8,375 im Feld gestanden haben. Wenn nach dem 1. Klick 9,25 im Feld stand, kann vor dem 1. Klick $(8+x_1)$ oder $(9+x_2)$ im Feld gestanden haben. Aus $(8+x_1)+x_1 = 9{,}25$ folgt $x_1 = 0{,}625$, und aus $(9+x_2)+x_2 = 9{,}25$ folgt $x_2 = 0{,}125$. In diesem Fall kann vor dem 1. Klick 8,625 oder 9,125 im Feld gestanden haben. Das heißt, es gibt 8 verschiedene Zahlen, die Oliver in das Feld geschrieben haben könnte.

26. Bei einem Boulder-Wettbewerb treten 13 Kletterinnen in drei Kategorien gegeneinander an. Die Endpunktzahl einer jeden Teilnehmerin ist das Produkt ihrer Platzierungen in den drei Kategorien. Belegt eine Kletterin zum Beispiel den 4., 3. und 6. Platz, beträgt ihre Endpunktzahl $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Je kleiner die Endpunktzahl ist, desto besser ist die Endplatzierung. Hannah belegt in zwei der Kategorien den 1. Platz. Was ist die schlechteste Endplatzierung, die Hannah haben kann, wenn in keiner der drei Kategorien zwei Kletterinnen gleich platziert sind?

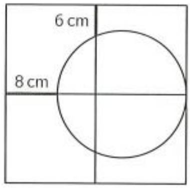
Deutschland

(**A**) 2. Platz (**B**) 3. Platz (**C**) 4. Platz (**D**) 5. Platz (**E**) 6. Platz

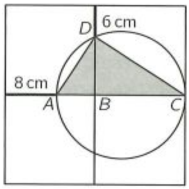
Lösung: Die schlechteste Endpunktzahl von Hannah wäre $1 \cdot 1 \cdot 13 = 13$. Die anderen Kletterinnen können nicht die Endpunktzahl 13 haben, da man dafür in zwei Kategorien den 1. Platz belegen müsste. Nun untersuchen wir, wie viele Kletterinnen gleichzeitig eine Endpunktzahl von höchstens 12 erzielen können. Die Kletterinnen mit 4 oder mehr Punkten in der dritten Kategorie haben mindestens eine Endpunktzahl von $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16 > 12$. Diese landen auf jeden Fall hinter Hannah. Hannahs Endplatzierung ist schon mal sicher nicht schlechter als der 4. Platz.
Damit Hannah am Ende auf dem 4. Platz wäre, müssten drei Kletterinnen besser sein als Hannah, also jeweils eine Endpunktzahl haben, die kleiner oder gleich 12 ist. Das bedeutet, dass das Produkt aller ihrer neun Platzierungen in den einzelnen Kategorien kleiner oder gleich 12^3 wäre. Die drei bestmöglichen Platzierungen in den ersten beiden Kategorien sind 2, 3, 4 und in der dritten Kategorie 1, 2, 3. Damit ist das Produkt der neun Platzierungen dieser drei Kletterinnen größer oder gleich $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12^3 \cdot 2 > 12^3$. Das ist ein Widerspruch, Hannahs Endplatzierung ist folglich nicht schlechter als der 3. Platz. Dass der 3. Platz möglich ist, zeigt das Beispiel:
1. Platz mit einer Endpunktzahl von $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; 2. Platz mit einer Endpunktzahl von $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$; 3. Platz Hannah mit einer Endpunktzahl von $1 \cdot 1 \cdot 13 = 13$.

27. Ein großes Quadrat ist in vier kleinere Quadrate zerteilt. Ein Kreis im Inneren des Quadrats berührt den Mittelpunkt der rechten Seite des großen Quadrats. Welche Seitenlänge hat das große Quadrat? (*Abb. nicht maßstabsgerecht*)

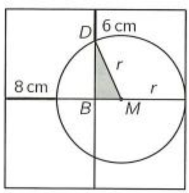
Deutschland



(**A**) 18 cm (**B**) 20 cm (**C**) 24 cm (**D**) 28 cm (**E**) 30 cm



Lösung: Die Seitenlänge des großen Quadrats bezeichnen wir mit a. Da der Kreis den Mittelpunkt der rechten Seite des großen Quadrats berührt, ist die Strecke $\overline{AC}$ ein Durchmesser des Kreises. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ACD rechtwinklig. Folglich gilt $\angle BDC = 90° - \angle ADB = \angle BAD$. Also stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABD und BCD in allen drei Winkeln überein und sind somit zueinander ähnlich. Daher gilt $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|DB|}{|BC|}$.
Wir setzen die Längen ein und erhalten so $\frac{a/2 - 8\,\text{cm}}{a/2 - 6\,\text{cm}} = \frac{a/2 - 6\,\text{cm}}{a/2}$. Diese Gleichung ergibt sich auch direkt aus dem Höhensatz, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck ACD. Durch Umformen finden wir die Seitenlänge $a = 18\,\text{cm}$.



Lösungsvariante: Wir folgern wie oben, dass der Mittelpunkt M des Kreises auf der horizontalen Mittellinie liegt und bezeichnen die Seitenlänge des großen Quadrats mit a und die Länge des Radius des Kreises mit r. Nun betrachten wir das Dreieck BMD. Die Länge der horizontalen Mittellinie ist $a = 8\,\text{cm} + 2r$, woraus $r = \frac{a}{2} - 4\,\text{cm}$ folgt. Somit gilt $|BM| = \frac{a}{2} - r = 4\,\text{cm}$ und $|MD| = r = \frac{a}{2} - 4\,\text{cm}$. Außerdem gilt $|BD| = \frac{a}{2} - 6\,\text{cm}$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt $|BD|^2 + |BM|^2 = |MD|^2$. Setzen wir ein und formen um, erhalten wir $a = 18\,\text{cm}$.

28. Die zwei Funktionen f und g erfüllen für alle reellen Zahlen x die Gleichungen $f(x)+2g(1-x)=x^2$ und $f(1-x)-g(x)=x^2$. Dann ist $f(x)=$

Griechenland

(**A**) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ (**B**) $3x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}$ (**C**) $2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ (**D**) $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ (**E**) $-\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}$

Lösung: Wir setzen in die 2. Gleichung $(1-x)$ für x ein. So erhalten wir die Gleichung $f(1-(1-x))-g((1-x))=(1-x)^2$, also $f(x)-g(1-x)=(1-x)^2$. Also gilt $g(1-x)=f(x)-(1-x)^2$, was wir nun in die 1. Gleichung einsetzen können: $f(x)+2[f(x)-(1-x)^2]=x^2$. Daraus ergibt sich $3f(x)-2+4x-2x^2=x^2$ und folglich $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

29. Die 12-stellige Zahl $ABB\,CDD\,CDD\,ABB$ ist das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Die Ziffern A, B, C und D sind aufeinanderfolgend, aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Welche Ziffer ist D?

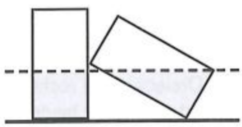
Australien

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

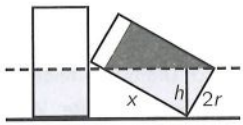
Lösung: Da die 6 Faktoren aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, ist mindestens einer von ihnen durch 5 teilbar und mindestens einer durch 2. Das Produkt ist also durch 10 teilbar und endet folglich auf 0. Demzufolge gilt $B=0$.
Da A, B, C und D aufeinanderfolgende Ziffern sind, müssen A, C und D die Ziffern 1, 2 und 3 sein. Da mindestens einer der 6 Faktoren durch 3 teilbar ist, ist auch das Produkt und damit auch die Quersumme des Produkts durch 3 teilbar, d.h. $2A+4B+2C+4D$ ist durch 3 teilbar. Wir können nun die 6 Fälle für die einzelnen Belegungen durchtesten oder noch etwas umformen: Wegen $B=0$ ist $2A+4B+2C+4D=2A+2C+4D=2(A+C+D)+2D=12+2D$. Da 12 durch 3 teilbar ist, ist auch $2D$ durch 3 teilbar, also ist $D=3$.
Da unter den 6 aufeinanderfolgenden Faktoren immer drei durch 2 teilbare und davon mindestens eine durch 4 teilbare sein müssen, ist ihr Produkt durch 16 teilbar. Somit kann A nicht 1 sein, also ist $A=2$ und $C=1$ und die 12-stellige Zahl lautet 200 133 133 200. Die 6 Faktoren lassen sich damit auch eindeutig rekonstruieren und lauten 74, 75, 76, 77, 78, 79.

30. Zwei identische zylinderförmige Gläser enthalten dieselbe Menge Wasser. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Gläser ist jeweils $12\pi\,\text{cm}^2$. Das rechte Glas wird so weit gekippt, dass der Boden gerade noch vollständig mit Wasser bedeckt ist (*s. Abb.*). Das Wasser steht in beiden Gläsern gleich hoch. Wie viel Wasser befindet sich in einem Glas?

Belarus



(**A**) $54\pi\,\text{cm}^3$ (**B**) $60\pi\,\text{cm}^3$ (**C**) $72\pi\,\text{cm}^3$ (**D**) $81\pi\,\text{cm}^3$ (**E**) $96\pi\,\text{cm}^3$



Lösung: Wir bezeichnen mit h die Höhe des Wasserstandes. Da der Flächeninhalt der Grundfläche gleich $12\pi\,\text{cm}^2$ ist, ist der Radius der Grundfläche $r=\sqrt{12}\,\text{cm}$ lang. Der Abstand zwischen dem linken Rand des Bodens und dem linken Rand der Wasseroberfläche beim gekippten Glas bezeichnen wir mit x. Da das Volumen des dunkelgrau markierten Teils des Glases drehsymmetrisch zum hellgrauen Teil ist, sind ihre Volumina gleich. Würden wir doppelt so viel Wasser in das Glas gießen, wäre der Wasserstand bei $2h$, also gilt $x=2h$. Die beiden Teil-Dreiecke des rechtwinkligen hellgrauen Dreiecks sind ähnlich zueinander (vgl. Lösung von 27.). Also folgt unter Verwendung des Satzes des Pythagoras $\frac{2r}{h}=\frac{x}{\sqrt{x^2-h^2}}$ und somit $\frac{2\sqrt{12}\,\text{cm}}{h}=\frac{2h}{\sqrt{(2h)^2-h^2}}$. Wir verwenden $\sqrt{(2h)^2-h^2}=\sqrt{3}h$ und formen die Gleichung zu $h=\sqrt{3}\sqrt{12}\,\text{cm}=6\,\text{cm}$ um. Also befinden sich $12\pi\,\text{cm}^2\cdot 6\,\text{cm}=72\pi\,\text{cm}^3$ Wasser in einem Glas.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	E	A	B	D	C	D	A	B	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	E	E	C	B	D	A	D	B	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	B	C	E	A	C	C	B	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	C	E	D	C	B	C	E	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	B	A	E	C	D	E	B	A	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	C	E	A	A	D	B	C	E	A

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	A	C	B	E	C	C	E	B	D	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	C	A	D	D	A	D	B	E	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	E	E	B	C	B	A	A	C	C

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.

Der Traum vom Fliegen beschäftigte schon viele Menschen, so auch Otto Lilienthal, der vor 175 Jahren geboren wurde und dem das Titelbild gewidmet ist. Er studierte den Vogelflug und untersuchte den Auftrieb verschieden geformter Flächen. Mit selbstgebauten Flugapparaten gelangen ihm bis zu 250 Meter weite Gleitflüge.
Er erkannte den Vorteil gewölbter Flächen und legte so den Grundstein für den Bau moderner Flugzeuge.

www.kaenguru-schweiz.ch
www.kangourou-suisse.ch

grafik | steffen blankenburg | elephant-castle.de