2022

# Mathe mit dem Känguru

**Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien**
**... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13**

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2022"

Im Jahre 2003 wurde der Känguru-Wettbewerb in der Schweiz zum ersten Mal mit rund 2700 Teilnehmenden offiziell durchgeführt. Somit haben wir dieses Jahr die 20. Austragung erlebt und die heurige effektive Teilnehmerzahl von weit über 50'000 (die exakte Zahl ist zum Zeitpunkt der Drucklegung noch nicht bekannt) bedeutet einen Zuwachs in der Grössenordnung von 2000%!

Einmal mehr gilt ein herzliches Dankeschön den vielen Lehrpersonen aus fast 800 Schulen. Sie haben den Wettbewerb vor Ort organisiert und für Lust auf Mathematik geworben. Die meisten Schülerinnen und Schüler haben die Aufgaben in der Schule in papiererner Form erhalten und gelöst. Die Möglichkeit, den Wettbewerb online durchzuführen – was im ersten Coronajahr eine Notlösung war – haben wir beibehalten. Und somit haben dieses Jahr auch wieder einige Schulen ihren Kindern diese moderne Art ermöglicht, allerdings unter Aufsicht an der Schule.

Sicher haben die Aufgaben auch dazu angeregt, sich im Anschluss noch mit Freunden oder in der Familie über die Aufgaben auszutauschen. Wir hoffen gemeinsam mit den organisierenden Lehrerinnen und Lehrern, dass sich alle mit Freude mit den mathematischen Problemen beschäftigt und Lust auf weitere bekommen haben. Dazu finden sich Anregungen in dieser Broschüre.

Auch in den anderen fast 100 Ländern, die in der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" zusammenarbeiten, haben sich Kinder und Jugendliche gemeinsam mit den Schweizer Teilnehmenden an den Aufgaben versucht. Das Interessante und Vielgestaltige der Aufgaben rührt vor allem daher, dass unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den verschiedenen Ländern und Kulturen einfliessen.

In diesem Jahr gab es Fragestellungen zu einer symmetrischen Autonummer, Stapeln von Schüsseln oder der Reihenfolge auf einer Autofähre. Die Zusammenstellung von Tischen in einem Konferenzsaal, die Nutzungsdauer von Apps auf dem Smartphone oder die Wahl zum Schülersprecher waren Themen in anderen Aufgaben. Und auch ein Wasserzähler, die Wettervorhersage und ein Judo-Wettkampf gaben Anlass für ein mathematisches Problem. Neben richtigem Rechnen waren kluges Denken, geschicktes Kombinieren, ein gutes Gefühl für Grössenordnungen und Vorstellungsvermögen gefragt. Das alles sind Fertigkeiten, die im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt werden und die uns im täglichen Leben helfen, Fragen und Problemen durch mathematisches Denken, logisches Schliessen und Strukturieren mit klugen Lösungen zu begegnen.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, B. Hell, Familie Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, D. Nikolenkov, Dr. A. Noack, A. Rupflin, A. Stahel, Dr. D. Vigerske und J. Züger erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

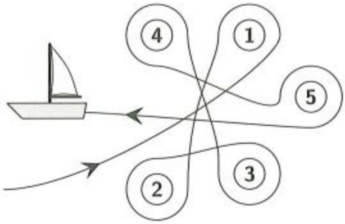
## Klassenstufen 7 und 8

**1.** $\dfrac{20+22}{20-22} =$

(**A**) $-21$ (**B**) $-10$ (**C**) $-2$ (**D**) 22 (**E**) 42

*Lösung:* $\dfrac{20+22}{20-22} = \dfrac{42}{-2} = -\dfrac{42}{2} = -21.$

**2.** Annabelle ist um fünf Bojen gesegelt, so wie abgebildet. Um welche Bojen ist sie im Uhrzeigersinn gesegelt?




(**A**) 2, 3 und 4 (**B**) 1, 2 und 3 (**C**) 1, 3 und 5
(**D**) 2, 4 und 5 (**E**) 2, 3 und 5

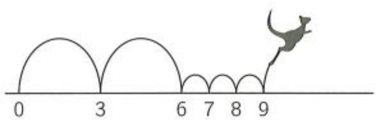
*Lösung:* Wir verfolgen den Weg, den Annabelle gesegelt ist. Um Boje 1 ist sie gegen den Uhrzeigersinn gesegelt, um Boje 2 im Uhrzeigersinn, um Boje 3 im Uhrzeigersinn, um Boje 4 gegen den Uhrzeigersinn und um Boje 5 im Uhrzeigersinn. Annabelle ist genau um die Bojen 2, 3 und 5 im Uhrzeigersinn gesegelt, wie es bei (**E**) steht.

**3.** Beate will die fünf abgebildeten Zahlenkarten in eine Reihe legen. Die entstehende 9-stellige Zahl soll die kleinste mögliche sein. Welche Karte muss sie in die Mitte legen?

(**A**) $\boxed{4}$ (**B**) $\boxed{8}$ (**C**) $\boxed{31}$ (**D**) $\boxed{59}$ (**E**) $\boxed{107}$

*Lösung:* Die Ziffern, die auf den Karten jeweils ganz links stehen, sind alle voneinander verschieden. Für die kleinstmögliche 9-stellige Zahl muss Beate die Karten also von links nach rechts nach der Ziffer, die ganz links steht, ordnen, beginnend mit der kleinsten: $\boxed{107}\boxed{31}\boxed{4}\boxed{59}\boxed{8}$ . In der Mitte liegt die Karte bei (**A**).

**4.** Känguru Konrad springt auf der Zahlengeraden. Er startet bei der 0 und macht wie im Bild immer zwei lange Sprünge und danach drei kurze Sprünge. Auf welcher der folgenden Zahlen landet Konrad?

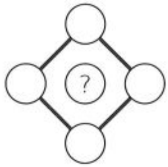



(**A**) 46 (**B**) 47 (**C**) 48 (**D**) 49 (**E**) 50

*Lösung:* Nach jeweils fünf Sprüngen landet Konrad mit dieser Sprungfolge auf den Vielfachen von 9, also auf 9, 18, 27, 36, 45, ... Nach 45 folgt ein langer Sprung auf 48, das ist die Lösung.
Ohne das Muster schrittweise nachzuverfolgen, können wir die Lösung so finden: Da Konrad nur dann auf genau einer von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen landen kann, wenn er mit den zwei langen Sprüngen die anderen Zahlen überspringt, muss von den Antworten die mittlere Zahl die gesuchte sein.

*Wer kann aus neun verschiedenen Ziffern drei 3-stellige Zahlen bilden, deren Summe die Jahreszahl 2022 ist?*

**5.** In die Kreise rechts sollen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 eingetragen werden. Das Produkt der vier Zahlen im äußeren Quadrat soll 144 sein. Welche Zahl gehört in den Kreis in der Mitte?




**(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

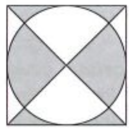
*Lösung:* Da 144 nicht auf 0 und nicht auf 5 endet, ist 144 nicht durch 5 teilbar. Die 5 kann nicht zu den vier Zahlen gehören, deren Produkt 144 ist, und muss im Kreis in der Mitte stehen.
Das lässt sich auch durch Zerlegen herausfinden: $144 = 12 \cdot 12 = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4$; die 5 ist nicht dabei.

**6.** Das Nummernschild von Alains Traktor ist abgefallen. Er hat es aus Versehen verkehrt herum wieder angebracht, aber das macht keinen Unterschied. Welches Nummernschild könnte Alains Traktor haben?

**(A)** 04 NSN 40 **(B)** 60 HOH 09 **(C)** 80 BNB 08 **(D)** 03 HNH 30 **(E)** 08 XBX 80

*Lösung:* Wir drehen in Gedanken jedes Nummernschild um 180° (oder wir drehen einfach das Aufgabenblatt). Nur das Nummernschild bei **(B)** sieht genauso aus, als hätten wir es nicht gedreht. Bei den anderen Nummernschildern steht immer eine Zahl (die 3 oder die 4) oder ein Buchstabe (das B) verkehrt herum.

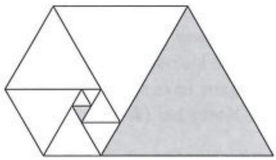
**7.** Das abgebildete Quadrat hat die Seitenlänge 10 cm. Welchen Flächeninhalt hat der graue Teil der Fläche?



**(A)** 40 cm$^2$ **(B)** 45 cm$^2$ **(C)** 50 cm$^2$ **(D)** 55 cm$^2$ **(E)** 60 cm$^2$

*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass das Quadrat auf transparente Folie gemalt ist und wir die Folie entlang einer Diagonalen zusammenfalten. Es landen immer eine graue und eine weiße Fläche aufeinander. Also ist genau die Hälfte des Quadrats grau, und das sind $(10\,\text{cm})^2 : 2 = 50\,\text{cm}^2$.

**8.** Die Figur im Bild rechts ist aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt. Das kleine graue Dreieck hat die Seitenlänge 1 cm. Welche Seitenlänge hat das große graue Dreieck?



**(A)** 8 cm **(B)** 9 cm **(C)** 10 cm **(D)** 11 cm **(E)** 12 cm

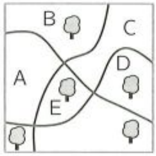
*Lösung:* Neben dem kleinen grauen Dreieck gibt es zwei weitere Dreiecke mit der Seitenlänge 1 cm. Die Seitenlänge der beiden nächstgrößeren Dreiecke ist die Summe von zwei Seitenlängen der kleinsten Dreiecke, also 2 cm. Die Seitenlänge der nächstgrößeren Dreiecke ist jeweils die Summe der Seitenlängen der beiden angrenzenden kleineren Dreiecke, der Reihe nach also (2 cm + 1 cm =) 3 cm, (3 cm+1 cm =) 4 cm, (4 cm+1 cm =) 5 cm, (5 cm+2 cm =) 7 cm und schließlich (7 cm+2 cm =) 9 cm. Das ist die gesuchte Seitenlänge des großen grauen Dreiecks.

**9.** Beim Wasserspringen zeigt jedes Mädchen aus Tinas Trainingsgruppe 7 Sprünge vom 3-Meter-Brett. Die Trainerin hat gezählt, dass schon 22 Sprünge gezeigt wurden. Sie weiß, dass noch 34 Sprünge gezeigt werden müssen. Wie viele Mädchen sind insgesamt in Tinas Trainingsgruppe?

**(A)** 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

*Lösung:* Die Summe aus der Anzahl der Sprünge, die schon gezeigt wurden, und der Anzahl der Sprünge, die noch ausstehen, ist die Gesamtzahl der Sprünge, die die Mädchen beim Training insgesamt zeigen. Da jedes Mädchen 7 Sprünge zeigt, sind es also $(22+34) : 7 = 56 : 7 = 8$ Mädchen.

**10.** In einem kleinen Park stehen fünf Bäume. Ein neuer Baum soll gepflanzt werden, und zwar so, dass auf beiden Seiten eines jeden der drei Wege jeweils gleich viele Bäume stehen. In welchen Bereich muss der neue Baum gepflanzt werden?




(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

*Lösung:* Wir schauen uns für jeden der drei Wege an, auf welcher Seite davon der neue Baum gepflanzt werden muss. Das ist jeweils die Seite, auf der bisher nur 2 Bäume stehen. Der neue Baum muss links des Weges gepflanzt werden, der von unten nach oben verläuft, also in einen der Bereiche A oder B (oder in den kleinen Bereich links unten), und gleichzeitig oberhalb des Weges, der von links oben nach rechts unten verläuft, also in einen der Bereiche B, C oder D. Damit ist schon klar, dass der Bereich B gesucht ist. Dass die Bedingung dann auch für den Weg, der von links unten nach rechts oben verläuft, erfüllt ist, lässt sich schnell nachzählen. (**B**) ist richtig.

*— In Klassenstufe 9/10 war ein schwierigeres Baumpflanzproblem in Aufgabe 19 zu lösen. —*

**11.** Ein Stapel aus 5 Schüsseln ist 20 cm hoch, und ein Stapel aus 2 dieser Schüsseln ist 11 cm hoch. In meinem Geschirrschrank ist jedes Fach 30 cm hoch. Wie viele solche Schüsseln kann ich höchstens so stapeln, dass der ganze Stapel in den Geschirrschrank passt?


(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

*Lösung:* Ein Stapel aus 5 Schüsseln entsteht, wenn wir auf den Stapel aus 2 Schüsseln 3 weitere Schüsseln stapeln. Da der Stapel aus 5 Schüsseln um 20 cm − 11 cm = 9 cm höher ist als der aus 2 Schüsseln, ragen die oberen Schüsseln jeweils 9 cm : 3 = 3 cm aus der Schüssel direkt darunter heraus. Ein Stapel aus 6, 7, 8, 9, ... Schüsseln hat eine Höhe von 23 cm, 26 cm, 29 cm, 32 cm, ... Da jedes Fach im Geschirrschrank 30 cm hoch ist, können höchstens 8 Schüsseln gestapelt werden.

**12.** Vier Pluszeichen und ein Minuszeichen sollen in die Kästchen rechts so eingetragen werden, dass die Rechnung richtig ist. Wohin gehört das Minuszeichen?

$$2\square 3\square 4\square 5\square 6\square 7 = 15$$

(**A**) zwischen 2 und 3 (**B**) zwischen 3 und 4 (**C**) zwischen 4 und 5
(**D**) zwischen 5 und 6 (**E**) zwischen 6 und 7

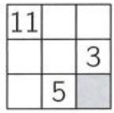
*Lösung:* Würden wir in alle Kästchen ein Pluszeichen schreiben, so wäre das Ergebnis der Rechnung $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$. Wenn wir nun eines der Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzen, verringert sich das Ergebnis um das Doppelte der Zahl, vor der nun das Minuszeichen steht, denn zum einen wird der positive Summand weggelassen und dann durch das Minuszeichen obendrein noch abgezogen. Da sich 27 und das gewünschte Ergebnis 15 um $27 - 15 = 12$ unterscheiden, gehört das Minuszeichen wegen $12 : 2 = 6$ also vor die 6, das heißt zwischen 5 und 6, wie es bei (**D**) steht.

**13.** Auf einem Spielwürfel ist die Summe zweier gegenüberliegender Augenzahlen stets 7. Drei Spielwürfel wurden wie abgebildet zusammengeklebt. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Augen, die auf der gesamten Oberfläche liegen können?

(**A**) 40 (**B**) 41 (**C**) 42 (**D**) 43 (**E**) 44

*Lösung:* Von jedem der drei Würfel gehören zwei Paare gegenüberliegender Seitenflächen zur Oberfläche des abgebildeten Körpers. Auf diesen Seitenflächen sind insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ Augen. Die kleinstmögliche Anzahl an Augen auf der Oberfläche ergibt sich genau dann, wenn sich auf den beiden übrigen Seitenflächen jeweils 1 Auge befindet. Die kleinstmögliche Anzahl an Augen auf der gesamten Oberfläche des abgebildeten Körpers ist somit $42 + 2 = 44$.

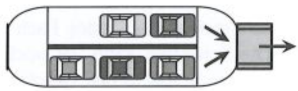
**14.** In jedes Kästchen des abgebildeten $3 \times 3$-Feldes soll eine natürliche Zahl eingetragen werden. Dabei soll in jeder Zeile und in jeder Spalte die jeweils mittlere Zahl der Durchschnitt der beiden äußeren Zahlen sein. Drei Zahlen sind schon eingetragen. Welche Zahl gehört in das graue Kästchen unten rechts?




(**A**) 7 (**B**) 5 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

*Lösung:* Da die mittlere Zahl einer jeden Zeile oder Spalte jeweils der Durchschnitt der beiden äußeren Zahlen sein soll und in allen Kästchen natürliche Zahlen stehen sollen, müssen die beiden äußeren Zahlen einer jeden Zeile oder Spalte jeweils beide ungerade oder beide gerade sein. Anhand der Einträge lesen wir ab, dass oben in der Mitte, links in der Mitte sowie in alle Eckfeldern ungerade Zahlen stehen müssen. (**D**) entfällt damit. Außerdem entfällt (**A**), denn hierfür müsste rechts oben $-1$, also eine negative Zahl stehen. Wir überlegen für die anderen Antworten, welche Zahlen oben rechts und oben in der Mitte stehen würden: (**B**) oben rechts: 1, oben Mitte: 6, (**C**) oben rechts: 3, oben Mitte: 7, (**E**) oben rechts: 5, oben Mitte: 8. Nur bei (**C**) steht oben in der Mitte eine ungerade Zahl, also ist (**C**) die Lösung.

**15.** Auf einer Fähre stehen wie abgebildet fünf Autos, die die Fähre eines nach dem anderen verlassen wollen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es dafür?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

*Lösung:* Für das erste der zwei Autos aus der im Bild oberen Reihe gibt es 4 mögliche Positionen in der Autoschlange, die die Fähre verlässt. Es kann an 1., 2., 3. oder 4. Stelle fahren. Für das zweite Auto aus der oberen Reihe gibt es im ersten Fall 4 mögliche Positionen, im zweiten Fall 3, im dritten Fall 2 und im letzten Fall eine. Die Positionen der drei Autos aus der unteren Reihe sind in jedem Fall eindeutig bestimmt, weshalb es insgesamt $4+3+2+1 = 10$ mögliche Reihenfolgen gibt. Systematisch aufgeschrieben sehen diese so aus, wobei O bzw. U für ein Auto aus der oberen bzw. der unteren Reihe steht:

OOUUU, OUOUU, OUUOU, OUUUO
UOOUU, UOUOU, UOUUO
UUOOU, UUOUO
UUUOO

*— Ein ähnliches, etwas schwierigeres Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 21 zu lösen. —*

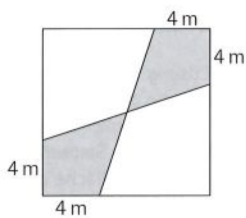
**16.** Das Durchschnittsalter der drei Brüder Jonas, Moritz und Simon ist 10. Das Durchschnittsalter von Jonas und Simon ist 11 und das von Jonas und Moritz ist 12. Wie alt ist der älteste der drei Brüder?

(**A**) 13 Jahre (**B**) 14 Jahre (**C**) 15 Jahre (**D**) 16 Jahre (**E**) 17 Jahre

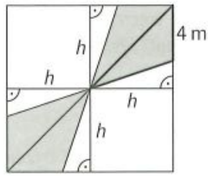
*Lösung:* Wir bezeichnen das Alter von Jonas, Moritz und Simon mit $j$, $m$ bzw. $s$. Da das Durchschnittsalter der drei Brüder 10 ist, gilt $(j + m + s) : 3 = 10$, das heißt $j + m + s = 30$. Da das Durchschnittsalter von Jonas und Simon 11 ist, gilt $(j + s) : 2 = 11$, das heißt $j + s = 22$. Daraus ergibt sich $m = 30 - 22 = 8$ für das Alter von Moritz. Da das Durchschnittsalter von Jonas und Moritz 12 ist, gilt $(j + m) : 2 = 12$, das heißt $j + m = 24$. Daraus ergibt sich $s = 30 - 24 = 6$ für das Alter von Simon. Schließlich erhalten wir $j = 30 - 8 - 6 = 16$ für das Alter von Jonas – das ist der älteste der drei Brüder, (**D**) ist die Lösung.

*— Ähnlich zu dieser Aufgabe, aber etwas schwieriger, war Aufgabe 17 in Klassenstufe 11–13. —*

**17.** Das abgebildete Quadrat hat die Seitenlänge 12 m. Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?




(**A**) $48\,m^2$ (**B**) $46\,m^2$ (**C**) $44\,m^2$ (**D**) $40\,m^2$ (**E**) $36\,m^2$




*Lösung:* Durch Einzeichnen einer Diagonale des Quadrats zerlegen wir die graue Fläche in vier kongruente Dreiecke. Die Länge $h$ der zur Seite mit der Seitenlänge 4 m gehörigen Höhe ist halb so groß wie die Seitenlänge des Quadrats, also 6 m, denn der gemeinsame Punkt der vier grauen Dreiecke ist der Mittelpunkt des Quadrats, da die gesamte Figur symmetrisch ist. Damit beträgt der Flächeninhalt der grauen Fläche $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{m} \cdot 6\,\text{m} = 48\,\text{m}^2$.

Wem es leichter fällt, die weiße Fläche zu zerlegen, kann die Lösung auch damit finden. Die weiße Fläche setzt sich wie zu sehen aus zwei Quadraten mit der Seitenlänge 6 m und vier rechtwinkligen Dreiecken zusammen, deren an den rechten Winkel angrenzende Seiten die Längen 6 m und 2 m haben. Die weiße Fläche hat also den Flächeninhalt $2 \cdot 6\,\text{m} \cdot 6\,\text{m} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 96\,\text{m}^2$. Das große Quadrat hat den Flächeninhalt $12\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} = 144\,\text{m}^2$ und die graue Fläche folglich $144\,\text{m}^2 - 96\,\text{m}^2 = 48\,\text{m}^2$.

**18.** Im Bild rechts gehören 45 % der grauen Fläche sowohl zum Stern als auch zum Mond. 40 % der grauen Fläche gehören zum Stern, aber nicht zum Mond. Wie viel Prozent der Fläche des Mondes liegen außerhalb des Sterns?

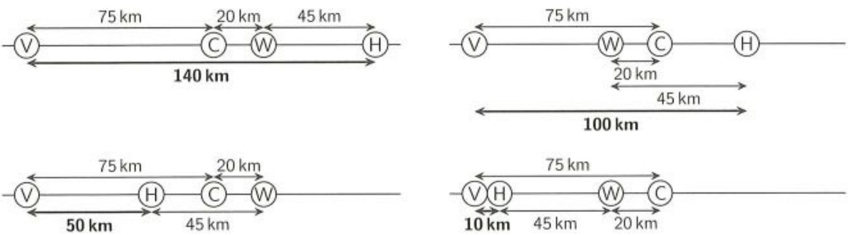
(**A**) 20 % (**B**) 25 % (**C**) 30 % (**D**) 35 % (**E**) 50 %

*Lösung:* Von der grauen Fläche gehören 45 % sowohl zum Mond als auch zum Stern, und es gehören 100 % − 40 % − 45 % = 15 % zum Mond, aber nicht zum Stern. Wegen 45 % : 15 % = 3 liegt von der Fläche des Mondes also 3-mal so viel innerhalb des Sterns wie außerhalb, also 75 % innerhalb und 25 % außerhalb, wie bei (**B**) angegeben.

**19.** Anton und Marja erzählen von einer Radtour von Stendal nach Lüneburg: „Der Radweg führt durch die Orte Viehle, Wahrenberg, Cumlosen und Hohenwulsch. Die Entfernung auf dem Radweg zwischen Wahrenberg und Hohenwulsch beträgt 45 km, zwischen Viehle und Cumlosen 75 km und zwischen Wahrenberg und Cumlosen 20 km." In welcher Reihenfolge diese Orte am Radweg liegen, haben sie nicht erzählt. Was ist sicher <u>nicht</u> die Entfernung auf dem Radweg zwischen Viehle und Hohenwulsch?

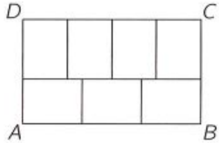
(**A**) 140 km (**B**) 100 km (**C**) 80 km (**D**) 50 km (**E**) 10 km

*Lösung:* Wir überlegen, welche Reihenfolge die vier Orte entlang des Radweges haben können. Wir beginnen mit der längsten Distanz 75 km zwischen Viehle und Cumlosen. Wahrenberg liegt 20 km von Cumlosen entfernt und auf dem Radweg entweder nach oder vor Cumlosen. Hohenwulsch liegt 45 km von Wahrenberg entfernt und auf dem Radweg entweder nach oder vor Wahrenberg. Es ergeben sich die folgenden vier Fälle, für die wir jeweils die Entfernung zwischen Viehle und Hohenwulsch ermitteln:




Wir erhalten 140 km, 50 km, 100 km oder 10 km für die Entfernung zwischen Viehle und Hohenwulsch. (**C**) 80 km ist nicht dabei und somit die Lösung.
Übrigens gibt es diese vier Orte wirklich. Von Stendal nach Lüneburg ist die tatsächliche Reihenfolge mit den angegebenen Entfernungen Hohenwulsch–Wahrenberg–Cumlosen–Viehle, wie im ersten Fall.

**20.** Das Rechteck $ABCD$ ist wie abgebildet in sieben identische Rechtecke zerlegt. Die Seite $\overline{BC}$ ist 42 cm lang. Wie lang ist die Seite $\overline{AB}$?




(**A**) 56 cm (**B**) 60 cm (**C**) 66 cm (**D**) 68 cm (**E**) 72 cm

*Lösung:* Wir bezeichnen die Länge der langen Seite eines der kleinen Rechtecke mit $a$ und die Länge der kurzen Seite mit $b$. Die Seite $\overline{AB}$ hat die Länge $3a$, was dasselbe wie $4b$ ist, da die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Die Länge der Seite $\overline{BC}$ ist gegeben, also gilt $a + b = 42\,\text{cm}$. Wenn wir diese Gleichung mit 3 multiplizieren, erhalten wir $3a + 3b = 3 \cdot 42\,\text{cm}$ und können ausnutzen, dass $3a = 4b$ gilt. Wir erhalten $4b + 3b = 3 \cdot 42\,\text{cm}$, woraus $7b = 3 \cdot 42\,\text{cm}$ und schließlich $b = 3 \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$ folgt. Die Seite $\overline{AB}$ ist somit $4 \cdot 18\,\text{cm} = 72\,\text{cm}$ lang.
Eine andere Lösungsmöglichkeit erhalten wir, indem wir den Flächeninhalt betrachten. Ein kleines Rechteck hat den Flächeninhalt $a \cdot b$. Das große Rechteck hat einerseits den Flächeninhalt $7 \cdot (a \cdot b)$ und andererseits $|BC| \cdot |AB| = 42\,\text{cm} \cdot (3 \cdot a)$. Also gilt $7 \cdot a \cdot b = 42\,\text{cm} \cdot 3 \cdot a$. Daraus folgt $b = 18\,\text{cm}$, und weil $|BC| = 42\,\text{cm}$ gilt, erhalten wir $a = 24\,\text{cm}$. Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist somit $3 \cdot a = 72\,\text{cm}$.

— *In Klassenstufe 9/10 war es ein ähnliches Problem in Aufgabe 15 zu lösen.* —

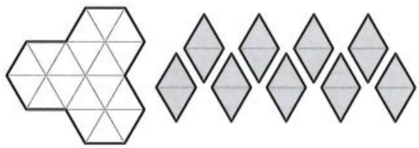
**21.** Die Kirchturmuhren in Vordorf und Nachburg sind schon sehr alt. Die Uhr in Vordorf geht pro Stunde eine Minute vor. Die Uhr in Nachburg geht pro Stunde zwei Minuten nach. Erst gestern wurden sie beide gleichzeitig auf die richtige Zeit gestellt. Heute zeigte die Uhr in Vordorf 13:00 Uhr und die Uhr in Nachburg zum selben Zeitpunkt 12:00 Uhr. Wann wurden die beiden Uhren gestern gestellt?

(**A**) 23:00 Uhr (**B**) 20:40 Uhr (**C**) 18:30 Uhr (**D**) 16:40 Uhr (**E**) 15:20 Uhr

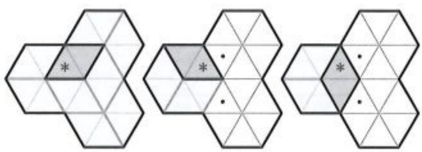
*Lösung:* Die Uhr in Vorburg geht pro Stunde eine Minute vor und die Uhr in Nachburg pro Stunde zwei Minuten nach. Also wächst der Unterschied der angezeigten Uhrzeiten pro Stunde um 3 Minuten. Da er zum genannten Zeitpunkt 60 Minuten beträgt, sind seit dem Stellen der Uhren 20 Stunden vergangen. Die Uhr in Vordorf geht somit in diesem Moment 20 Minuten vor, weshalb die korrekte Uhrzeit 12:40 Uhr ist. Und 20 Stunden davor war es 16:40 Uhr, das ist die gesuchte Uhrzeit.

*Wir stellen uns vor, dass die beiden Uhren in der letzte Aufgabe weiterlaufen, ohne dass sie neu gestellt werden. Wann zeigen sie das nächste Mal dieselbe Uhrzeit? Und wann zeigen sie das nächste Mal beide die richtige Uhrzeit?*

**22.** Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figur vollständig mit den daneben abgebildeten Teilen auszulegen?



(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12



*Lösung:* Wie dargestellt, gibt es drei Möglichkeiten, das mit dem Sternchen markierte Dreieck mit einem der Teile zu überdecken. Im ersten Fall gibt es genau eine Möglichkeit, die gesamte Figur vollständig zu überdecken. In den anderen beiden Fällen ergibt sich zunächst nur eine eindeutige Überdeckung des linken Teilsechsecks. Für die beiden an dieses Sechseck angrenzenden Dreiecke, die im Bild mit einem Punkt markiert sind, gibt es jeweils zwei Möglichkeiten, sie mit einem der Teile zu überdecken und in jedem der vier Fälle gibt es dann genau eine Möglichkeit, die Figur vollständig zu überdecken. Insgesamt gibt es also $1 + 4 + 4 = 9$ Möglichkeiten.

**23.** Fritzi läuft zur Schule oder sie fährt mit dem Fahrrad (jeweils mit konstanter Geschwindigkeit und immer derselben). Mit dem Fahrrad braucht sie 10 Minuten, zu Fuß braucht sie 30 Minuten. Gestern ist Fritzi früh losgeradelt und hat auf dem Weg ihre Freundin Eva abgeholt. Ihr Fahrrad hat sie bei Eva gelassen und ist mit ihr zur Schule gelaufen. So hat Fritzi für ihren Schulweg 26 Minuten gebraucht. Welchen Teil der Strecke ist Fritzi mit dem Fahrrad gefahren?

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{1}{5}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

*Lösung:* Wir bezeichnen den gesuchten Anteil der Strecke, den Fritzi mit dem Fahrrad gefahren ist, mit $a$. Dann ist der Anteil der Strecke, den sie zu Fuß zurückgelegt hat, gleich $1 - a$. Weil sich Fritzi stets mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, sind zurückgelegter Weg und dafür benötigte Zeit zueinander proportional. Fritzi war also $a \cdot 10$ min mit dem Fahrrad unterwegs und $(1-a) \cdot 30$ min zu Fuß.

Also gilt $a \cdot 10\,\text{min} + (1-a) \cdot 30\,\text{min} = 26\,\text{min}$, woraus durch Umformen $a = \frac{1}{5}$ folgt.

Es ist auch möglich, die jeweiligen Geschwindigkeiten und Wegstücke geeignet zu bezeichnen und mit Hilfe der bekannten Beziehungen für zurückgelegten Weg, dafür benötigte Zeit und Geschwindigkeit bei gleichförmigen Bewegungen Gleichungen aufzustellen und umzuformen.

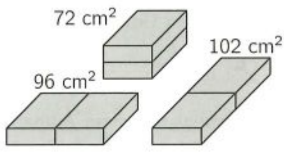
**24.** Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Fatih markiert zwischen je zwei benachbarten Punkten jeweils einen weiteren Punkt. Dann markiert er zwischen je zwei benachbarten der nun vorhandenen Punkte jeweils einen weiteren Punkt. Das macht Fatih insgesamt vier Mal. Nun sind auf der Geraden insgesamt 225 Punkte markiert. Wie viele Punkte waren zu Beginn auf der Geraden markiert?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 19

*Lösung:* Wenn auf der Geraden $n$ Punkte markiert sind, dann kommen beim Markieren $n-1$ Punkte dazu. Insgesamt sind dann $2n-1$ Punkte markiert. Die neue Anzahl an markierten Punkten ist also um 1 kleiner als das Doppelte der vorherigen Anzahl. Das gilt für jeden der Markierungsschritte und wir können rückwärts rechnen: Vor dem vierten Markieren waren es $(225+1) : 2 = 113$ Punkte, vor dem dritten Markieren $(113+1) : 2 = 57$, vor dem zweiten Markieren $(57+1) : 2 = 29$ und vor dem ersten Markieren $(29+1) : 2 = 15$, und das ist die gesuchte Anzahl zu Beginn.

*In der letzten Aufgabe könnten wir auch weiter vorwärts rechnen: Nach dem 1. Schritt sind es $2n-1$ Punkte, nach dem 2. Schritt $2(2n-1)-1 = 4n-3$ Punkte usw. Wie lautet die Formel für die Anzahl der Punkte nach dem 4. Schritt? Wie viele Punkte sind es nach dem 6. oder nach dem 9. Schritt?*

**25.** Zwei quaderförmige Bausteine mit denselben Abmessungen können auf drei verschiedene Weisen zu einem größeren Quader zusammengesetzt werden. Die Oberflächen dieser drei größeren Quader sind $72\,\text{cm}^2$, $96\,\text{cm}^2$ und $102\,\text{cm}^2$ groß. Welchen Oberflächeninhalt hat ein einzelner Baustein?




(**A**) $36\,\text{cm}^2$ (**B**) $48\,\text{cm}^2$ (**C**) $52\,\text{cm}^2$ (**D**) $54\,\text{cm}^2$ (**E**) $60\,\text{cm}^2$

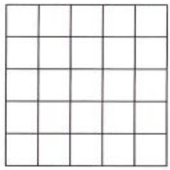
*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass wir die Quader in die Bausteine zerlegen. Dabei vergrößert sich die Gesamtoberfläche genau um die Oberfläche eines Bausteins. Da wir nun 6 Bausteine haben, ist die Gesamtoberfläche der Quader genauso groß wie die Oberfläche von 5 Bausteinen. Der Oberflächeninhalt eines Bausteins beträgt also $(72\,\text{cm}^2 + 96\,\text{cm}^2 + 102\,\text{cm}^2) : 5 = 270\,\text{cm}^2 : 5 = 54\,\text{cm}^2$.
Dass die Summe der Oberflächeninhalte der drei Quader das Fünffache des Oberflächeninhalts eines einzelnen Bausteins ist, lässt sich auch durch Auszählen der verschiedenen Seitenflächen finden.

**26.** Meerjungfrau Mariella hat sich verirrt, seit Tagen schwimmt sie umher. Als sie eine lila Krabbe und einen Seestern trifft, fragt sie die beiden nach dem Wochentag. Mariella weiß wohl, dass lila Krabben montags, dienstags und mittwochs immer lügen und Seesterne donnerstags, freitags und samstags immer lügen – an den jeweils anderen Tagen sprechen sie die Wahrheit. Beide Antworten sind rätselhaft und obendrein völlig gleich: „Gestern war einer meiner Lügentage.“ Mariella überlegt kurz, dann ist alles klar. Nun muss sie nur noch den Weg nach Hause finden. Welcher Wochentag ist es?

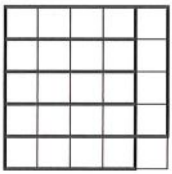
(**A**) Donnerstag (**B**) Freitag (**C**) Samstag (**D**) Sonntag (**E**) Montag

*Lösung:* Die Aussage wird von jeder der beiden Kreaturen nur an einem Lügentag getroffen, der auf einen Wahrheitstag folgt, oder an einem Wahrheitstag, der auf einen Lügentag folgt. Da bei beiden Wahrheits- und Lügentage in Blöcken zusammenhängen, gibt es dafür nur jeweils zwei Möglichkeiten. Bei der lila Krabbe kommen nur Montag und Donnerstag in Frage, und beim Seestern sind es Donnerstag und Sonntag. Also ist es Donnerstag.
Hier lässt sich auch gut mit einer Tabelle arbeiten, in der Lügentage und Wahrheitstage eingetragen werden und dazu jeweils, ob die Aussage an diesem Tag möglich ist oder nicht.

**27.** In einem $5 \times 5$-Quadrat sollen einige Kästchen ausgemalt werden. Dabei soll in jedem $1 \times 4$-Rechteck und in jedem $4 \times 1$-Rechteck mindestens ein ausgemaltes Kästchen liegen. Was ist die kleinste Anzahl an Kästchen, die ausgemalt werden müssen?



(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9



*Lösung:* In das $5 \times 5$-Quadrat lassen sich, wie das linke Bild zeigt, 6 Rechtecke vom Format $1 \times 4$ oder $4 \times 1$ ohne Überlappungen einzeichnen. Es genügt daher nicht, weniger als 6 Kästchen auszumalen. Mit 6 Kästchen klappt es (siehe Beispiel im rechten Bild), wie man durch geschicktes Probieren findet. Hilfreich ist die Erkenntnis, dass dafür kein Eckkästchen ausgemalt werden darf, denn das linke Bild (oder eine gedrehte Version davon) zeigt, dass dann mindestens 7 Kästchen ausgemalt werden müssten. (**B**) ist richtig.

*— Ein dazu verwandtes Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 11 zu lösen. —*

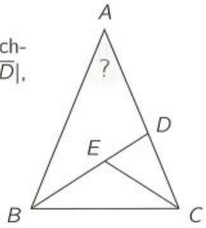
**28.** Tante Carin möchte ihren Flur grün streichen. Sie hat blaue und gelbe Farbe und will aus 2 Litern blauer und 3 Litern gelber Farbe 5 Liter grüne Farbe mischen. Schon beim Rühren merkt sie, dass etwas nicht stimmt. Carin hat aus Versehen 3 Liter blaue und 2 Liter gelbe Farbe genommen. Wie viel grüne Farbe aus der Mischung muss Carin durch gelbe Farbe ersetzen, damit sie 5 Liter Farbe im gewünschten Grünton hat?

(**A**) $\frac{6}{5}$ Liter (**B**) $\frac{3}{2}$ Liter (**C**) $\frac{7}{3}$ Liter (**D**) $\frac{9}{5}$ Liter (**E**) $\frac{5}{3}$ Liter

*Lösung:* Für diese Aufgabe gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Am kürzesten ist wohl diese hier: Aus der falschen Mischung muss genau 1 Liter blaue Farbe entfernt werden. Da das $\frac{1}{3}$ der blauen Farbe in der Mischung ist, muss $\frac{1}{3}$ der Mischung ersetzt werden, also $\frac{5}{3}$ Liter.

Und eine zweite Variante geben wir noch an: Aus der falschen Mischung muss genau so viel grüne Farbe entfernt werden, dass darin genau 1 Liter blaue Farbe enthalten ist. Da sich das Volumen von blauer Farbe zu gelber in der falschen Mischung wie 3 : 2 verhält, werden mit genau 1 Liter blauer Farbe auch $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ Liter gelber Farbe mit entfernt. Insgesamt müssen also $\frac{5}{3}$ Liter Farbe ersetzt werden.

**29.** Das gleichschenklige Dreieck $ABC$ kann wie abgebildet in drei kleinere gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden. Dabei gelten $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$, $|\overline{AD}| = |\overline{BD}|$, $|\overline{CD}| = |\overline{CE}|$ und $|\overline{BE}| = |\overline{CE}|$ (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*).
Wie groß ist der Innenwinkel bei $A$?




(**A**) 24° (**B**) 28° (**C**) 30° (**D**) 32° (**E**) 36°

*Lösung:* Aus den gegebenen Gleichungen folgt, dass in den gleichschenkligen Dreiecken $ABC$, $ABD$, $CDE$, $BCE$ die Seite $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ bzw. $\overline{BC}$ die Basis ist. Die Basiswinkel in diesen Dreiecken sind jeweils gleich groß. Wir bestimmen die Größen der Innenwinkel im Dreieck $ABC$. Mit $\alpha$ bezeichnen wir die gesuchte Größe des Innenwinkels bei $A$. Es gilt $\measuredangle DBA = \measuredangle BAD = \alpha$. Da sich die Innenwinkel im Dreieck zu 180° addieren, gilt $\measuredangle ADB = 180° - 2\alpha$. Der Nebenwinkel $\measuredangle EDC$ hat somit die Größe $2\alpha$. Also gilt $\measuredangle CED = \measuredangle EDC = 2\alpha$. Der Nebenwinkel $\measuredangle BEC$ hat somit die Größe $180° - 2\alpha$, und aus dem Innenwinkelsatz für Dreiecke folgt, dass die beiden anderen Innenwinkel im Dreieck $BCE$ zusammen die Größe $2\alpha$ haben. Also gilt $\measuredangle CBE = \measuredangle ECB = \alpha$. Nun hat der Innenwinkel des großen Dreiecks $ABC$ im Punkt $B$ die Größe $\measuredangle CBE + \measuredangle EBA = 2\alpha$. Also gilt $\measuredangle ACB = \measuredangle CBA = 2\alpha$. Damit kennen wir alle Innenwinkelgrößen im Dreieck $ABC$. Ihre Summe ist $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha$, und wegen $5\alpha = 180°$ folgt schließlich $\alpha = 180° : 5 = 36°$.

**30.** In 7 Gewächshäusern züchtet Gregor Primeln und Alpenveilchen. In jedem Gewächshaus ist die Anzahl der Primeln genauso groß wie die Gesamtanzahl der Alpenveilchen in allen anderen Gewächshäusern. Primeln hat Gregor insgesamt 2022. Wie viele Alpenveilchen hat er insgesamt?

(**A**) 288 (**B**) 337 (**C**) 576 (**D**) 674 (**E**) 1011

*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass wir aus einem der Gewächshäuser, nennen wir es $X$, ein Alpenveilchen entfernen. Wir überlegen, was zu tun ist, damit die Bedingung, dass in jedem Gewächshaus die Anzahl der Primeln genauso groß ist wie die Gesamtanzahl der Alpenveilchen in allen anderen Gewächshäusern, weiterhin erfüllt ist. Das ist der Fall, wenn wir aus allen Gewächshäusern außer $X$ eine Primel entfernen. Nun können wir genauso fortfahren: Wir entfernen aus einem der Gewächshäuser ein Alpenveilchen und aus den anderen jeweils eine Primel. Da es 7 Gewächshäuser sind, entfernen wir schrittweise 6-mal so viele Primeln wie Alpenveilchen. Der Prozess endet, wenn kein Alpenveilchen mehr vorhanden ist, was genau dann eintritt, wenn auch keine Primel mehr vorhanden ist. Also gibt es insgesamt 6-mal so viele Primeln wie Alpenveilchen, und die gesuchte Anzahl ist $2022 : 6 = 337$.
Diese Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe von Gleichungen lösen, wozu wir mit $p_1, p_2, \ldots, p_7$ die Anzahl der Primeln und mit $a_1, a_2, \ldots, a_7$ die Anzahl der Alpenveilchen in den 7 Gewächshäusern bezeichnen. Nach Aufgabenstellung gilt $p_1 = a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$, $p_2 = a_1+a_3+a_4+a_5+a_6$, $p_3 = a_1+a_2+a_4+a_5+a_6$ und so weiter. Indem wir diese Gleichungen addieren, erhalten wir auf der linken Seite die Gesamtanzahl der Primeln, also 2022. Auf der rechten Seite erhalten wir das Sechsfache der gesuchten Gesamtanzahl der Alpenveilchen, die folglich $2022 : 6 = 337$ beträgt.

# Das $(3n+1)$-Problem *von Ingmar Lehmann (Berlin)*

Die Hälfte einer geraden Zahl ist leicht im Kopf zu bilden; bei einer ungeraden Zahl bliebe stets der Rest 1 – man sagt deshalb auch, für ungerade Zahlen „geht die Division durch 2 nicht auf". Wenn man die Zahlen 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... sieht, erkennt man sofort, dass es sich um die „Dreierreihe" handelt. Das ist die Folge der Zahlen, die durch Verdreifachen aller natürlichen Zahlen entstehen: $[3n]$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Nach welcher Vorschrift aber sind die Zahlen 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... gebildet worden? Hat man zuvor die Dreierreihe betrachtet, ist es keine große Kunst, das darin verborgene „Gesetz" zu entdecken: zu jedem Dreifachen einer Zahl wird 1 addiert; es sind also gerade die Nachfolger der Zahlen der Dreierreihe: $[3n+1]$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Die Rechenoperationen, die im folgenden Problem mit einer natürlichen Zahl $n$ durchzuführen sind, sind ebenfalls ganz einfach. Es wird multipliziert und addiert oder aber dividiert. Im Ergebnis erhält man wieder eine natürliche Zahl. Wir bleiben bei den Grundrechenoperationen – und werden einige Überraschungen erleben.

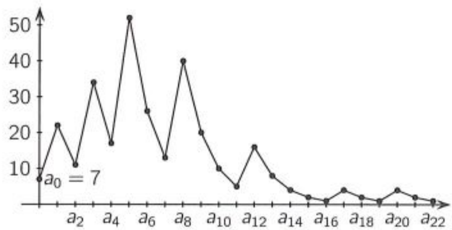
Im Jahr 1937 hat sich ein Student, der spätere deutsche Mathematiker Lothar Collatz (1910-1990), ein merkwürdiges Spiel – eine Vorschrift – ausgedacht, wie man von einer gegebenen positiven natürlichen Zahl $n$ immer aufs Neue weitere Zahlen konstruiert: **Wähle dafür eine beliebige positive natürliche Zahl $n$. Wenn $n$ ungerade ist, dann ersetze $n$ durch $3n+1$, wenn $n$ gerade ist, dann ersetze $n$ durch $n/2$. Dann unterwirf den neuen Wert demselben Prozess und immer so weiter.**

Beispiel ($n = 5$): 5 ist ungerade, also ersetzen wir 5 durch $16 = 3 \cdot 5 + 1$. Nun testen wir, ob der neue Wert gerade oder ungerade ist, und wenden die gegebene Vorschrift erneut an: 16 ist gerade, also ersetzen wir 16 durch $8 = 16 : 2$. Jetzt müssen wir mit 8 fortfahren: 8 ist gerade, also ersetzen wir 8 durch $4 = 8 : 2$. Wenn wir immer so weitermachen, erhalten wir die Folge $[5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, \dots]$.

Was passiert, wenn wir eine andere Startzahl wählen? Mit $n = 6$ erhalten wir z. B. die Folge $[6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, \dots]$. **Aufgabe:** Wähle selbst eine Zahl und wende die Vorschrift an!

Wir können uns „drehen und wenden" wie wir wollen, egal mit welcher Zahl wir auch starten, irgendwann erhalten wir die Zahl **1** und bleiben dann in der Schleife $\mathbf{1, 4, 2, 1}, \dots$ „hängen" – diese Zahlen bilden also einen **Teufelskreis**! Dabei springen die sich ergebenden Zahlen in diesem Prozess scheinbar wahllos hin und her. Brian Hayes hat diese Zahlen 1984 *Hagelschlag-Zahlen* und Clifford A. Pickover *Achterbahn-Zahlen* genannt; Douglas R. Hofstadter nennt solche Zahlen 1979 **wundersame Zahlen**.

Der Prozess endet stets im Zyklus $\dots, \mathbf{4, 2, 1, 4}, \dots$, deshalb ist es sinnvoll abzubrechen, wenn **1** erreicht wird. Ist es nun wirklich egal, mit welcher Zahl wir starten? Ein weiterer Versuch liefert für $a_0 = 7$ nacheinander 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... Um die Sprünge besser zu veranschaulichen, tragen wir die Folge in ein Koordinatensystem ein:




Was aber ist, wenn die Ausgangszahl sehr groß ist? Für $n = 1024$ ist die Antwort noch leicht. Solange die neu gebildeten Zahlen gerade sind, können wir immer weiter halbieren, so auch hier: 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Und schon wieder sind wir im **Teufelskreis**!

Ist die Ausgangszahl aber ungerade und zudem sehr groß, kann es doch eine langwierige Rechnerei werden. Während für die Zahl $n = 17$ insgesamt 12 Schritte nötig sind, um zur Zahl 1 zu gelangen, benötigt man für $n = 18$ gleich 8 Schritte mehr (obwohl die Startzahl gerade ist), für $n = 27$ kommt man erst nach 111 Schritten zur Zahl 1. Wählt man $n = 77.031$, muss der Prozess 350-mal erfolgen. Für $n = 15.733.191$ brauchen wir noch mehr Ausdauer: Erst nach 704 Schritten landen wir im **Teufelskreis**!

Aber ungeachtet aller solcher Versuche mit immer neuen Zahlen wissen wir bis heute nicht, ob tatsächlich alle Startzahlen in den **Teufelskreis** münden. Allerdings hat man bisher – trotz Computerunterstützung! – **keine Startzahl** gefunden, für die dieser Prozess **nicht** im **Teufelskreis** endet. Jetzt noch mit Papier und Bleistift ein Gegenbeispiel finden zu wollen, ist deshalb wohl aussichtslos. Denn man hat bereits 2008 gezeigt, dass jede Zahl, die kleiner als die unvorstellbar riesige Zahl $19 \cdot 2^{58}$ ($\approx 5.476 \cdot 10^{18}$, also größer als 5 Trillionen) ist, im **Teufelskreis** enden.
(siehe `https://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html` und für vieles mehr siehe auch `https://www.juergendankert.de/spezmath/html/collatzproblem.html`)

Der australische Mathematiker Terence Tao (*1975) zeigte 2019, dass die Collatz-Vermutung für „fast alle" natürlichen Zahlen „fast" zutrifft (das heißt, man endet mit der Collatz-Folge „nahe" 1, wobei die Schranke für die Nähe vom Startwert abhängt). Beispielsweise folgt aus Taos Satz, dass mindestens 99 % der natürlichen Zahlen bis 1024, mit denen man die Collatz-Folge startet, einen Endwert erreichen, der unter 200 liegt.

Die $(3n+1)$-**Vermutung** lautet, dass alle natürlichen Zahlen wundersam sind. Das $(3n+1)$-Problem schlummerte lange vor sich hin, bevor es wiederentdeckt bzw. wieder zum Leben erweckt worden ist. Deshalb hat dieses Problem gleich mehrere Namen, wie z. B. **Collatz-Problem**, **Ulam-Problem**, **Hasse-Algorithmus**, **Syracuse-Problem**, **Kakutani-Problem** und **Thwaites' Vermutung**.

Kakutani soll um 1960 gesagt haben: „Einen Monat lang arbeitet jeder in Yale daran – ohne Ergebnis. Ein ähnliches Phänomen trat auf, als ich es an der Universität Chicago erwähnte. Der Witz kam auf, das Problem sei Teil einer Verschwörung zur Lähmung der mathematischen Forschung in den Vereinigten Staaten."

Bereits 1970 hatte der britisch-kanadische Mathematiker H. S. M. Coxeter (1907-2003) 50 Dollar als Preis zur Lösung des Problems ausgeschrieben. Dann erhöhte der ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913-1996) diese Summe auf 500 Dollar. Und schließlich versprach 1996 der britische Mathematiker Bryan Thwaites 1000 Pfund für einen Beweis der Behauptung, dass alle Zahlen in den **Teufelskreis** münden. 2021 bot Bakuage Co., Ltd. mit Sitz in Shibuya, Tokio, 120 Millionen Yen (ca. 925.000 Euro) als Preisgeld für die Lösung des Problems.

Ein Gegenbeispiel zu finden, dürfte also nicht einfach sein! Der britisch-kanadische Mathematiker Richard Guy (1916-2020) warnte 1983 vor diesem und drei anderen auch heute noch ungelösten Problemen: „Don't try to solve these problems!" („Versuche nicht, diese Probleme zu lösen!")

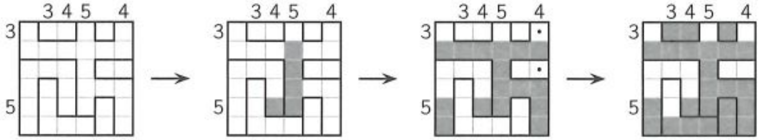
Der US-amerikanische Mathematiker Jeff Lagarias (*1949), der diesem Problem sehr viel Zeit gewidmet hatte, ohne einer Lösung nahe zu kommen, nannte es ein gefährliches Problem, da man bei zu intensiver Beschäftigung damit geistige Gesundheit und Karriere aufs Spiel setze.

Der ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913-1996) kommentiert das Problem mit: „Die Mathematik ist noch nicht reif für solche Probleme."

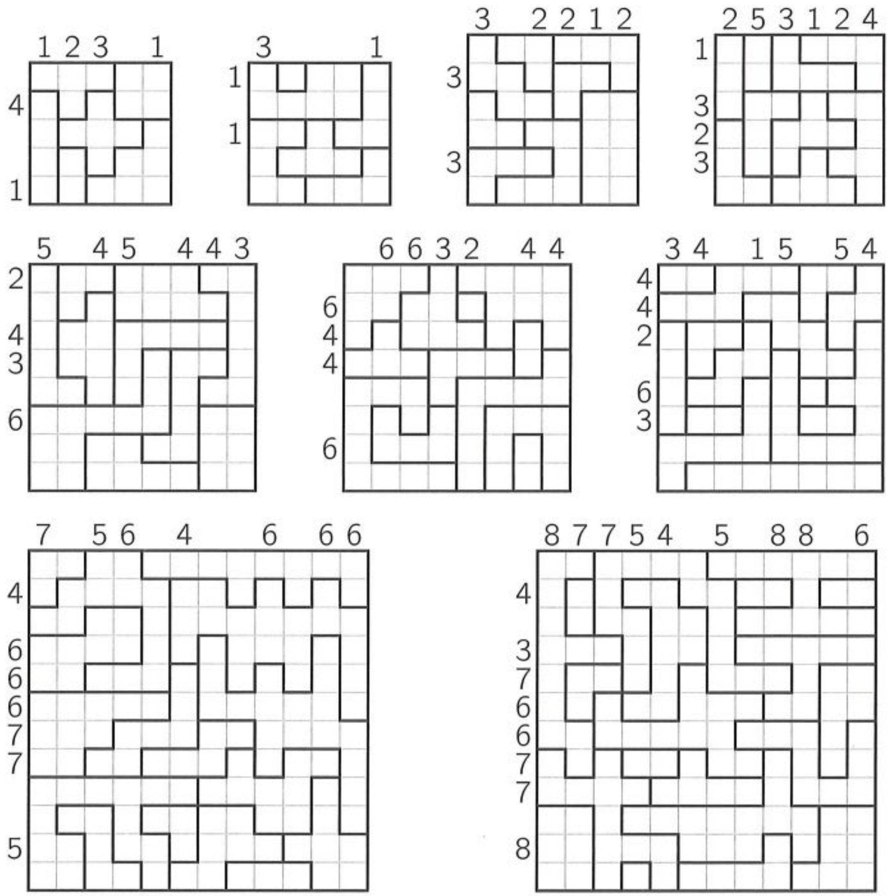
Aber dann meldete *Spiegel online* am 5. Juni 2011: „Die Collatz-Vermutung ist etwa 60 Jahre alt – ein Hamburger Mathematiker könnte sie nun bewiesen haben. Prof. Gerhard Opfer hat den von ihm gefundenen Beweis beim Fachblatt *Mathematics of Computation* eingereicht. Ein Preprint ist online verfügbar. Mit der üblichen Vorsicht des seriösen Wissenschaftlers wurde Gerhard Opfer mit den Worten zitiert: „Ich würde erst sagen, dass es stimmt, wenn es begutachtet ist." Im Preprint steht seit dem 17. Juni 2011 jetzt eine „Author's note": „... the statement 'that the collatz conjecture is true' has to be withdrawn, at least temporarily." (siehe auch: *Spiegel online*). Schade, aber als Trost mag gelten, womit Gerhard Opfer selbst in *Spiegel online* vom 5. Juni 2011 zitiert wird: „Die Collatz-Vermutung hat eine Vielzahl von Arbeiten ausgelöst. Es wäre eigentlich schade, wenn sie jetzt bewiesen ist, denn dann wäre es damit ja vorbei."

## Aquarium-Rätsel

Jedes der folgenden Diagramme ist in „Behälter“ unterteilt, die aus Kästchen zusammengesetzt sind. Einige der Kästchen sollen blau ausgemalt werden, das heißt, sie sollen „mit Wasser gefüllt werden“. Dabei geben die Zahlen links bzw. oben jeweils an, wie viele Kästchen in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte auszumalen sind. Da Wasser bekanntermaßen nicht schweben kann, gilt außerdem die Regel: Ist ein Kästchen in einem Behälter ausgemalt, so müssen auch alle Kästchen in diesem Behälter ausgemalt werden, die auf derselben Höhe oder weiter unten liegen. Hier ist ein Beispiel:

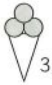
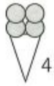
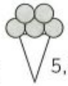



Wer findet die richtigen Wasserstände der Behälter in den folgenden Diagrammen?



## Klassenstufen 9 und 10

**1.** Beim Eisstand im Park stehen die Preise für eine bis fünf Kugeln Eis an einer Tafel. Bei welcher Wahl bezahlt man pro Kugel Eis am wenigsten?

(**A**)  1,40 € (**B**)  2,60 € (**C**)  3,70 € (**D**)  4,60 € (**E**)  5,50 €

*Lösung:* Bei der Wahl (**E**) bezahlt man pro Kugel Eis 5,50 € : 5 = 1,10 €. Die eine Kugel bei (**A**) kostet mehr als 1,10 €, die zwei Kugeln bei (**B**) kosten mehr als $2 \cdot 1{,}10$ € = 2,20 €, die drei Kugeln bei (**C**) kosten mehr als $3 \cdot 1{,}10$ € = 3,30 € und die vier Kugeln bei (**D**) kosten mehr als $4 \cdot 1{,}10$ € = 4,40 €. Also bezahlt man, wie schon zu erwarten war, bei der Wahl (**E**) pro Kugel Eis am wenigsten.

**2.** Ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat haben denselben Umfang. Das gleichseitige Dreieck hat die Seitenlänge 12 cm. Welche Seitenlänge hat das Quadrat?

(**A**) 7 cm (**B**) 8 cm (**C**) 9 cm (**D**) 10 cm (**E**) 11 cm

*Lösung:* Da das gleichseitige Dreieck die Seitenlänge 12 cm hat, beträgt sein Umfang $3 \cdot 12\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$. Ein Quadrat, das denselben Umfang hat, hat demzufolge die Seitenlänge $36\,\text{cm} : 4 = 9\,\text{cm}$.

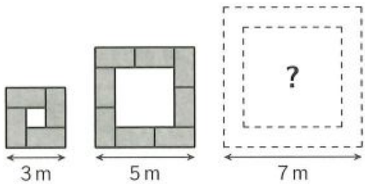
**3.** $\dfrac{20 \cdot 22}{(2+0) \cdot (2+2)} =$

(**A**) 2 (**B**) 10 (**C**) 24 (**D**) 40 (**E**) 55

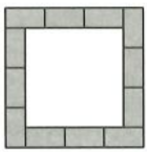
*Lösung:* $\dfrac{20 \cdot 22}{(2+0) \cdot (2+2)} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11}{2 \cdot 4} = 5 \cdot 11 = 55.$

**4.** In einem Konferenzsaal sind alle Tische  2 m lang und 1 m breit. Sie können zu Quadraten wie im Bild zusammengestellt werden und müssen nun für ein Meeting zu einem 7 m × 7 m-Quadrat angeordnet werden. Wie viele Tische sind dafür notwendig?

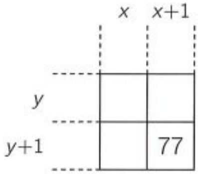
(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16




*Lösung:* Werden die Tische zu solchen Quadraten zusammengestellt, zeigt von jedem Tisch genau eine Längsseite nach außen. Wenn die Tische zu einem 7 m × 7 m-Quadrat angeordnet sind, zeigt an jeder der Quadratseiten von genau 3 Tischen eine Längsseite nach außen. Insgesamt sind es also $4 \cdot 3 = 12$ Tische. Die Tische lassen sich aber auch schnell zeichnen und abzählen (s. Abb.).



**5.** Von einer Multiplikationstabelle ist zwar nur eine Zahl zu sehen, aber der Wert von $x$ lässt sich trotzdem feststellen, da bekannt ist, dass $x$ und $y$ natürliche Zahlen sind und dass $x > y > 0$ gilt. Welchen Wert hat $x$?




(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

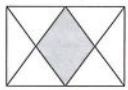
*Lösung:* Da $x$ und $y$ natürliche Zahlen sind, sind auch $x+1$ und $y+1$ natürliche Zahlen. Da $x > y$ und laut Tabelle $77 = (x+1)\cdot(y+1)$ gilt, kommen nur zwei Fälle in Betracht: $x+1 = 11$, $y+1 = 7$ oder $x+1 = 77$, $y+1 = 1$. Wegen $y > 0$ ist $y+1 > 1$, der zweite Fall entfällt also. Folglich gilt $y+1 = 7$. Damit ist $x+1 = 11$, also $x = 10$.

**6.** Für welche Zahl gilt, dass sie kleiner ist als ihre Hälfte, größer ist als ihr Doppeltes und dass die Summe aus dieser Zahl und ihrem Quadrat Null ist?

(**A**) $-2$ (**B**) $-1$ (**C**) 0 (**D**) 1 (**E**) 2

*Lösung:* Es sei $z$ eine Zahl mit den genannten Eigenschaften. Wegen $z > 2z$ gilt $z < 0$. Dann folgt aus $0 = z + z^2 = z\cdot(1+z)$, dass $1+z = 0$ bzw. $z = -1$ gilt. Eine Probe zeigt, dass $-1$ wirklich die drei genannten Eigenschaften besitzt: $-1 < -0{,}5$; $-1 > -2$; $-1 + (-1)^2 = 0$.
Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem für die Zahlen in den Antworten jeweils die drei genannten Eigenschaften überprüft werden; diese sind nur für (**B**) alle erfüllt.

**7.** Im abgebildeten Rechteck sind die Mittelpunkte der längeren Seiten mit den vier Ecken verbunden. Welchen Anteil an der Rechteckfläche hat die grau gefärbte Fläche?



(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{2}{7}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{2}{5}$

*Lösung:* Verbinden wir die beiden Mittelpunkte der längeren Seiten des Rechtecks, so entstehen zwei kleinere Rechtecke mit ihren Diagonalen. Da sich die Diagonalen in einem Rechteck halbieren, teilen die Diagonalen ein Rechteck in 4 flächengleiche Dreiecke. (Eine der Dreiecksseiten ist eine Rechtecksseite, und die dazugehörige Höhe ist halb so lang wie die andere Rechtecksseite.) Der Anteil der grauen Fläche in den beiden kleinen Rechtecken ist jeweils $\frac{1}{4}$. Also ist auch der Anteil der gesamten grauen Fläche am großen Rechteck $\frac{1}{4}$.

**8.** Auf Nadjas Smartphone ist an einem Diagramm zu erkennen, wie lange sie in der vergangenen Woche vier Apps benutzt hat. In dieser Woche hat sie bei zwei dieser Apps die Zeit halbiert und bei den beiden anderen die Zeit beibehalten. Welches der Diagramme könnte für diese Woche zutreffen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

*Lösung:* Bei (**A**) ist jeder Balken halb so lang wie in der vergangenen Woche, bei (**B**) nur der dritte von oben, bei (**D**) hat sich der oberste Balken um ein Viertel verkleinert und die anderen drei sind halb so lang, und bei (**E**) sind die oberen drei Balken halb so lang. Nur bei (**C**) sind genau zwei Balken halb so lang wie in der vergangenen Woche.

— *In Klassenstufe 11–13 war es ein ähnliches Problem in Aufgabe 4 zu lösen.* —

**9.** Einst traf ich die 6 Töchter des Direktors, deren Alter 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind. Ich fragte jede der 6 Schwestern: „Wie alt ist deine älteste Schwester?“ Die 6 Zahlen aus den Antworten habe ich addiert. Welche der folgenden Zahlen ist sicher <u>nicht</u> die Summe, die ich erhalten habe?

(**A**) 95 (**B**) 125 (**C**) 167 (**D**) 205 (**E**) 233

*Lösung:* Das Alter der ältesten der Schwestern bezeichnen wir mit $a$. Während diese „$a - 1$“ antwortete, antworteten ihre fünf Schwestern „$a$“. Die Summe der genannten Zahlen ist $6a - 1$. Addieren wir zu dieser Summe 1, dann erhalten wir eine durch 6 teilbare Zahl. Nur für (**D**) erhalten wir mit $205 + 1 = 206$ eine nicht durch 6 teilbare Zahl. Also ist 205 sicher nicht die Summe der 6 Zahlen aus den Antworten.

**10.** Um die Funktion des Schülersprechers haben sich fünf Schülerinnen und Schüler beworben. Wer die meisten Stimmen auf sich vereinen kann, gewinnt die Wahl. Nachdem 90 % der abgegebenen Stimmen ausgezählt sind, gibt es folgende Stimmenverteilung:

| Sarah | Marco | Olina | Knut | Elias | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 44 | 40 | 32 | 8 | (Enthaltungen: 0) |

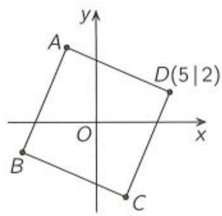
Wie viele dieser Fünf könnten bei dieser Wahl die meisten Stimmen erhalten?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

*Lösung:* Es wurden bereits $56 + 44 + 40 + 32 + 8 + 0 = 180$ Stimmen ausgezählt. Da das 90 % der abgegebenen Stimmen sind, wurden insgesamt $\frac{100\,\%}{90\,\%} \cdot 180 = 200$ Stimmen abgegeben. Es sind also noch $200 - 180 = 20$ Stimmen auszuzählen. Mit diesen könnte Sarah auf $56 + 20 = 76$ Stimmen kommen, Marco auf $44 + 20 = 64$ und Olina $40 + 20 = 60$. Diese drei könnten so insgesamt die meisten Stimmen erhalten. Knut kann höchstens auf $32 + 20 = 52$ und Elias höchstens auf $8 + 20 = 28$ Stimmen kommen. Die beiden bleiben somit sicher hinter Sarah. Drei der Fünf könnten also die meisten Stimmen erhalten.

*Es gilt $21^2 = 441$ und $12^2 = 144$, das heißt, wenn die Reihenfolge der Ziffern der Zahl 21 umgekehrt wird (zur 12), dann kehrt sich beim Quadrieren auch die Reihenfolge der Ziffern um (144 statt 441). Gibt es weitere zweistellige Zahlen, bei denen das so ist? Wer findet alle?*

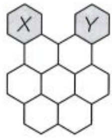
**11.** Der Diagonalenschnittpunkt des rechts abgebildeten Quadrats befindet sich im Punkt $O(0\,|\,0)$. Die Koordinaten des Eckpunktes $D$ sind $(5\,|\,2)$. Wie groß ist die Summe der vier Koordinaten der Punkte $A$ und $B$?




(**A**) −7 (**B**) −4 (**C**) 0 (**D**) 3 (**E**) 7

*Lösung:* Der Punkt $B$ ist bezüglich des Koordinatenursprungs zu $D$ gespiegelt. Somit hat $B$ die Koordinaten $(-5\,|\,-2)$. Der Punkt $A$ ergibt sich aus dem Punkt $D$ durch eine 90°-Drehung um den Koordinatenursprung. Somit hat $A$ die Koordinaten $(-2\,|\,5)$. Die Summe der vier Koordinaten von $A$ und $B$ ist folglich gleich $(-5) + (-2) + (-2) + 5 = -4$.

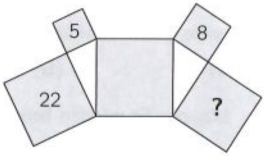
**12.** Die Bienenkönigin legt in die Wabe $X$ ein Ei. Sie krabbelt nun immer von einer Wabe zu einer benachbarten und legt dort ein Ei, solange bis sie $Y$ erreicht. In jede Wabe muss sie genau ein Ei legen. Wie viele verschiedene Wege von $X$ nach $Y$ sind möglich?




(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

*Lösung:* Wir prüfen systematisch, wie die Bienenkönigin krabbeln könnte. Die weiße Wabe oben links muss sie als erste besuchen und die weiße Wabe oben rechts als letzte. Sobald sie die weiße Wabe in der Mitte besucht, ist der Rest des Weges eindeutig festgelegt. Es gibt also die folgenden 5 Wege:

**13.** Fünf Quadrate und zwei rechtwinklige Dreiecke bilden die Figur rechts. Die drei Zahlen 22, 5 und 8 im Inneren dreier Quadrate geben jeweils ihren Flächeninhalt in $\mathrm{m}^2$ an. Welchen Flächeninhalt hat das Quadrat mit dem Fragezeichen?




(**A**) $16\,\mathrm{m}^2$ (**B**) $17\,\mathrm{m}^2$ (**C**) $18\,\mathrm{m}^2$ (**D**) $19\,\mathrm{m}^2$ (**E**) $20\,\mathrm{m}^2$

*Lösung:* Wir betrachten als erstes das linke rechtwinklige Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse gleich $5\,\mathrm{m}^2 + 22\,\mathrm{m}^2 = 27\,\mathrm{m}^2$. Nun betrachten wir das rechte rechtwinklige Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras ist der Flächeninhalt des Quadrats mit dem Fragezeichen gleich $27\,\mathrm{m}^2 - 8\,\mathrm{m}^2 = 19\,\mathrm{m}^2$.

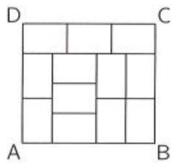
**14.** „Ich habe geträumt, ich müsste 2022 Arbeiten korrigieren", erzählte unser Mathelehrer. „Zuerst korrigierte ich jede 6. Arbeit. Als ich damit fertig war, kam meine Frau und half mir, indem sie vom Rest jede 5. Arbeit korrigierte. Als sie fertig war, hatte ich mich erholt und korrigierte vom Rest nun jede 4. Arbeit. Danach bin ich aufgewacht", sagte er. Wie viele Arbeiten waren da noch zu korrigieren?

(**A**) 337 (**B**) 674 (**C**) 1011 (**D**) 1348 (**E**) 1685

*Lösung:* Zuerst hat unser Mathelehrer jede 6. Arbeit korrigiert, diese Anzahl nennen wir $n$ (es gilt $n = 2022 : 6 = 337$). Am Anfang gab es also $6n$ Arbeiten und übrig blieben $5n$ Arbeiten. Von diesen hat seine Frau jede 5. Arbeit korrigiert, also ebenfalls $n$ Arbeiten. Dann blieben noch $4n$ Arbeiten übrig. Von diesen hat unser Mathelehrer jede 4. Arbeit, also nochmals $n$ Arbeiten korrigiert. Am Ende waren noch $3n = 6n : 2 = 2022 : 2 = 1011$ Arbeiten zu korrigieren.

Eine andere Lösung ist diese hier: Nach dem ersten Schritt waren noch $\frac{5}{6}$ der 2022 Arbeiten übrig, nach dem zweiten Schritt noch $\frac{4}{5}$ des Restes und nach dem dritten Schritt noch $\frac{3}{4}$ des nun noch vorhandenen Restes. Somit blieben noch $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 2022 \cdot \frac{1}{2} = 1011$ Arbeiten zu korrigieren.

**15.** Das Bild zeigt das Rechteck $ABCD$, das aus 12 identischen Rechtecken besteht. Wie verhält sich die Länge der Seite $\overline{AD}$ zur Länge der Seite $\overline{DC}$?




(**A**) 8 : 9 (**B**) 5 : 6 (**C**) 7 : 8 (**D**) 2 : 3 (**E**) 6 : 7

*Lösung:* Es seien $a$ die längere und $b$ die kürzere Seitenlänge der kleinen Rechtecke. Dann gilt $a + 3b = |AB| = |DC| = 3a$, und somit $b = \frac{2}{3}a$. Das gesuchte Seitenverhältnis ist also gleich $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{2a+b}{3a} = \frac{2a+\frac{2}{3}a}{3a} = \frac{\frac{8}{3}}{3} = \frac{8}{9}$ bzw. 8 : 9.

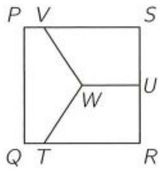
*— In Klassenstufe 7/8 war es ein ähnliches Problem in Aufgabe 20 zu lösen. —*

**16.** Hase und Igel laufen auf der 440 m langen Stadion-Außenbahn um die Wette. Der Hase läuft 10 m/s, der Igel 1 m/s. Sie rennen gleichzeitig an der Startlinie in entgegengesetzter Richtung los. Als sie einander wieder treffen, dreht der Igel sich um und rennt dem Hasen hinterher. Wie viel später als der Hase ist er wieder an der Startlinie?

(**A**) 32 s (**B**) 33 s (**C**) 35 s (**D**) 36 s (**E**) 39 s

*Lösung:* Hase und Igel treffen sich wieder, wenn sie in Summe 440 m gelaufen sind. Das ist nach $\frac{440\,\text{m}}{10\,\text{m/s}+1\,\text{m/s}} = 40\,\text{s}$. Der Igel ist in dieser Zeit $1\,\text{m/s} \cdot 40\,\text{s} = 40\,\text{m}$ gelaufen. Zurück zur Startlinie braucht der Igel (genauso wie für den Hinweg) 40 s und der Hase ein Zehntel davon, das heißt 4 s. Der Igel ist also $40\,\text{s} - 4\,\text{s} = 36\,\text{s}$ später als der Hase wieder an der Startlinie.

**17.** Das Quadrat $PQRS$ hat die Seitenlänge 1 cm, $U$ ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{RS}$ und $W$ der Mittelpunkt von $PQRS$. Die Punkte $V$ und $T$ liegen so auf den Seiten $\overline{PS}$ bzw. $\overline{QR}$, dass die Flächeninhalte der drei entstehenden Teilflächen gleich sind. Wie lang ist die Strecke $\overline{SV}$?




(**A**) $\frac{1}{2}$ cm (**B**) $\frac{2}{3}$ cm (**C**) $\frac{3}{4}$ cm (**D**) $\frac{4}{5}$ cm (**E**) $\frac{5}{6}$ cm

*Lösung:* Das Viereck $WUSV$ ist ein Trapez. Sein Flächeninhalt lässt sich als $\frac{|UW|+|SV|}{2} \cdot |SU|$ berechnen. Nach Voraussetzung ist dieser Flächeninhalt $\frac{1}{3}\,\text{cm}^2$, und es gilt $|SU| = |UW| = \frac{1}{2}$ cm. Damit folgt $\frac{1}{3}\,\text{cm}^2 = \frac{|UW|+|SV|}{2} \cdot |SU| = \frac{\frac{1}{2}\,\text{cm}+|SV|}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\text{cm} = \frac{1}{8}\,\text{cm}^2 + \frac{1}{4}|SV|\,\text{cm}$. Also gilt $|SV| = 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\,\text{cm} = \frac{5}{6}\,\text{cm}$.

**18.** Als die Großmutter Besuch von ihren drei Enkelkindern hatte, wollten diese wissen, wie alt sie sei. „Was schätzt ihr denn?", fragte die Großmutter. Jeder vermutete ein anderes Alter: 75, 78 und 81. Keiner lag richtig. Einer hatte sich um 1 Jahr, einer um 2 Jahre und einer um 4 Jahre verschätzt. Dann ist das Alter der Großmutter

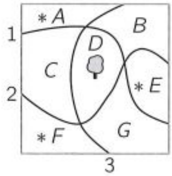
(**A**) sicher 76 Jahre. (**B**) sicher 77 Jahre. (**C**) sicher 79 Jahre. (**D**) sicher 80 Jahre.
(**E**) mit diesen Angaben nicht eindeutig bestimmt.

*Lösung:* Das Enkelkind, das 75 gesagt hat, hat sich um höchstens 4 Jahre verschätzt. Also ist die Großmutter höchstens $75 + 4 = 79$ Jahre alt. Auch das Enkelkind, das 81 gesagt hat, hat sich um höchstens 4 Jahre verschätzt. Also ist die Großmutter mindestens $81 - 4 = 77$ Jahre alt. Somit ist das Alter der Großmutter eine der Zahlen 77, 78 oder 79. Ihr Alter kann nicht 78 sein, da ein Enkelkind genau 78 vermutet hat. Sowohl 77 als auch 79 sind aber möglich, denn $|78-77| = 1$, $|75-77| = 2$, $|81-77| = 4$ bzw. $|78-79| = 1$, $|81-79| = 2$, $|75-79| = 4$. Das Alter ist also mit den Angaben aus der Aufgabe nicht eindeutig bestimmt, (**E**) ist richtig.

**19.** Durch unseren Stadtpark führen drei Wege und in der Mitte steht ein Baum. Welches ist die kleinste Anzahl von Bäumen, die zu pflanzen wären, damit es auf beiden Seiten eines jeden Weges dieselbe Anzahl von Bäumen gibt?

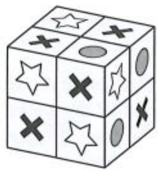
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

*Lösung:* Wir versuchen als erstes, ob es ausreicht, einen weiteren Baum zu pflanzen. Dann müsste er links von Weg 3 gepflanzt werden, also in den Bereich $A$, $C$ oder $F$. In jedem dieser Fälle stünden dann aber bei Weg 1 oder Weg 2 zwei Bäume auf der einen Seite und kein Baum auf der anderen. Nur zwei weitere Bäume zu pflanzen reicht auch nicht, da es dann insgesamt drei Bäume wären – so kann bei keinem Weg auf beiden Seiten dieselbe Anzahl von Bäumen stehen. Dass drei weitere Bäume ausreichen, zeigt das Beispiel: Es muss dafür in den Bereichen $A$, $E$ und $F$ jeweils ein Baum gepflanzt werden.




*— In Klassenstufe 7/8 war ein einfacheres Baumpflanzproblem in Aufgabe 10 zu lösen. —*

**20.** Jede Seitenfläche des abgebildeten Würfels ist in vier kleine Quadrate geteilt. Auf jedes kleine Quadrat ist ein Sticker geklebt, entweder ein Kreuz, ein Stern oder ein Kreis. Auf je zwei kleinen Quadraten, die eine gemeinsame Seite haben, kleben stets verschiedene Sticker. Wie viele Kreis-Sticker sind insgesamt auf diesem Würfel?



(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

*Lösung:* An jeder Würfelecke stoßen drei Quadrate zusammen, die paarweise eine gemeinsame Seite haben. Auf drei solchen Quadraten kleben also drei verschiedene Sticker, d.h. ein Kreuz, ein Stern und ein Kreis. Da jedes Quadrat zu genau einer der 8 Würfelecken gehört, gibt es insgesamt 8 Quadrate mit einem Kreis-Sticker. Durch die sichtbaren drei Seitenflächen ist eindeutig bestimmt, wie die drei anderen Seitenflächen beklebt wurden.

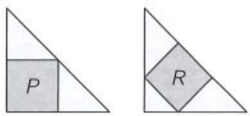
**21.** Lilou trägt, wie abgebildet, an einer Hand 5 Ringe. Ab und zu nimmt sie alle Ringe einen nach dem anderen ab. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es dafür?

(**A**) 16 (**B**) 20 (**C**) 24 (**D**) 30 (**E**) 45

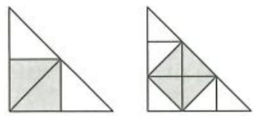
*Lösung:* Für den Ring am Mittelfinger und den Ring am kleinen Finger ist jede Position in der Reihenfolge möglich: jeweils die erste, die zweite, die dritte, die vierte oder die letzte. Für die Positionen dieser beiden Ringe in der Reihenfolge gibt es also $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten. In jedem dieser Fälle sind die Positionen der Ringe am Ringfinger dann eindeutig bestimmt. Nimmt Lilou z. B. den Ring am Mittelfinger als letzten ab und den Ring am kleinen Finger als zweiten, so muss sie von den Ringen am Ringfinger den linken als ersten, den mittleren als dritten und den rechten als vierten abnehmen. Also gibt es insgesamt 20 verschiedene Reihenfolgen.
Diese 20 Möglichkeiten lassen sich auch gut systematisch aufschreiben und zählen.

*— Ein ähnliches, etwas leichteres Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 15 zu lösen. —*

**22.** In zwei zueinander kongruente, gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke sind die Quadrate $P$ bzw. $R$ einbeschrieben (s. Bild). Der Flächeninhalt von $P$ beträgt $45\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat $R$?




(**A**) $40\,\text{cm}^2$ (**B**) $42\,\text{cm}^2$ (**C**) $44\,\text{cm}^2$ (**D**) $45\,\text{cm}^2$ (**E**) $48\,\text{cm}^2$



*Lösung:* Da die beiden Dreiecke gleichschenklig und rechtwinklig sind, lässt sich das linke Dreieck wie abgebildet in vier und das rechte in neun kleine kongruente Dreiecke zerlegen. Im linken Bild ist zu erkennen, dass der Flächeninhalt des großen Dreiecks doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt von $P$, also $90\,\text{cm}^2$. Im rechten Bild hat jedes der kleinen Dreiecke folglich den Flächeninhalt $\frac{90\,\text{cm}^2}{9} = 10\,\text{cm}^2$. Also hat $R$ den Flächeninhalt $4 \cdot 10\,\text{cm}^2 = 40\,\text{cm}^2$.

**23.** Die Zahlen von 1 bis 12 hat Firas in drei Gruppen mit je vier Zahlen aufgeteilt. Die Summe der Zahlen in der ersten Gruppe beträgt 41 und in der zweiten Gruppe 26. Welche der folgenden Zahlen ist in derselben Gruppe wie die 9?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 10

*Lösung:* Da die vier Zahlen in der ersten Gruppe die Summe 41 haben, muss es sich um die Zahlen 12, 11, 10 und 8 handeln, denn ohne die 12 wäre die Summe höchstens $11+10+9+8=38$, ohne die 11 höchstens $12+10+9+8=39$ und ohne die 10 höchstens $12+11+9+8=40$. Die Summe der vier Zahlen in der dritten Gruppe ist $(1+\ldots+12)-(41+26)=78-67=11$. In der dritten Gruppe sind somit die Zahlen 1, 2, 3 und 5, da die Summe 11 ebenfalls nur auf eine Weise entstehen kann. In der zweiten Gruppe sind folglich 4, 6, 7 und 9. Die gesuchte Zahl ist 7.

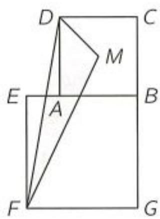
**24.** Um den „Pokal der Bürgermeisterin" spielen in diesem Jahr die besten Fußballteams aus acht Schulen. Jedes Team spielt gegen jedes andere genau einmal. Es gibt 3 Punkte für den Gewinner, 0 Punkte für den Verlierer und bei Unentschieden 1 Punkt für jedes der beiden Teams. Insgesamt wurden im Turnier 61 Punkte vergeben. Wie viele Punkte kann das Siegerteam höchstens erzielt haben?

(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 18 (**D**) 19 (**E**) 21

*Lösung:* Bei jedem Spiel wurden insgesamt entweder $1+1=2$ Punkte (bei einem Unentschieden) oder $3+0=3$ Punkte vergeben. Insgesamt gab es $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ Spiele. Wenn wir die Anzahl der Spiele, die unentschieden ausgingen, mit $n$ bezeichnen, dann wurden insgesamt $n\cdot 2+(28-n)\cdot 3=84-n$ Punkte vergeben. Da es insgesamt 61 Punkte gab, müssen es $n=84-61=23$ Unentschieden gewesen sein. Folglich gab es nur $28-23=5$ Spiele mit einem Sieger. Da jedes Team gegen 7 andere Teams gespielt hat, kann das Siegerteam höchstens $5\cdot 3+2\cdot 1=17$ Punkte erzielt haben.

**25.** Die Diagonalen in den Quadraten $ABCD$ und $EFGB$ im Bild rechts sind 7 cm bzw. 10 cm lang. Der Punkt $M$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Quadrat $ABCD$. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $FMD$?

(**A**) $14{,}5\,\text{cm}^2$ (**B**) $15\,\text{cm}^2$ (**C**) $15{,}75\,\text{cm}^2$ (**D**) $16{,}5\,\text{cm}^2$ (**E**) $17{,}5\,\text{cm}^2$




*Lösung:* Da die beiden Diagonalen im Quadrat einander halbieren, gilt $|BM|=|MD|=\frac{7\,\text{cm}}{2}$. Die Diagonalen halbieren außerdem die Innenwinkel, also gilt $\measuredangle MBA=45°$ und ebenso $\measuredangle EBF=45°$. Die Dreiecke $FBM$ und $FMD$ haben bezüglich der beiden gleich langen Grundseiten $\overline{BM}$ bzw. $\overline{MD}$ dieselbe Höhe. Daraus folgt, dass die Dreiecke $FBM$ und $FMD$ den gleichen Flächeninhalt haben. Wegen $\measuredangle MBF=\measuredangle MBA+\measuredangle EBF=45°+45°=90°$, ist das Dreieck $FBM$ rechtwinklig. Folglich ist der gesuchte Flächeninhalt gleich $A_{\triangle FMD}=A_{\triangle FBM}=\frac{1}{2}\cdot|BM|\cdot|BF|=\frac{1}{2}\cdot\frac{7\,\text{cm}}{2}\cdot 10\,\text{cm}=17{,}5\,\text{cm}^2$.

**26.** Das Produkt der Ziffern der Zahl $N$ ist 20. Welche der folgenden Zahlen kann nicht das Produkt der Ziffern von $N+1$ sein?

(**A**) 40 (**B**) 35 (**C**) 30 (**D**) 25 (**E**) 24

*Lösung:* Für die Ziffern von $N$ kommen nur die einstelligen Teiler von 20 in Frage, also 1, 2, 4 und 5. Das Produkt der Ziffern von $N$ und das Produkt der Ziffern von $N+1$ unterscheiden sich genau um den Faktor, den die Einerziffer liefert, das Produkt der anderen Ziffern ist dasselbe. Wenn $N$ auf 1 endet, dann ist $20 = 20 \cdot 1$ das Produkt der Ziffern von $N$ und somit $20 \cdot (1+1) = 20 \cdot 2 = 40$ das Produkt der Ziffern von $N+1$. In den anderen drei Fällen ist das Produkt der Ziffern von $N+1$ gleich $10 \cdot (2+1) = 30$, $5 \cdot (4+1) = 25$ und $4 \cdot (5+1) = 24$. Das Produkt 35 bei (**B**) ist nicht möglich. Konkrete Beispiele für $N$ in den vier möglichen Fällen sind: (**A**) 541, (**C**) 522, (**D**) 54, (**E**) 45.
Zur Lösung gelangt auch, wer sieht, dass 35 durch 7 teilbar ist, und sich überlegt, dass 7 jedoch nicht als Ziffer von $N+1$ in Frage kommt.

**27.** Die AG Natur in unserer Gemeinde hatte einen Arbeitseinsatz zur Aufforstung organisiert, 600 Birken und 200 Rotbuchen sollen gepflanzt werden. Viele Freiwillige beteiligten sich. Jedes erwachsene AG-Mitglied pflanzte 10 Birken und 5 Rotbuchen, jeder andere Erwachsene 8 Birken und 3 Rotbuchen und jedes Kind 6 Birken und eine Rotbuche. Wie viele Personen beteiligten sich am Einsatz?

(**A**) 50 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 80 (**E**) 90

*Lösung:* Wer die Zahlen in der Aufgabe aufmerksam betrachtet, sieht, dass jede Person, die am Einsatz beteiligt war, 5 Birken mehr pflanzte als Rotbuchen. Und da es insgesamt $600 - 200 = 400$ Birken mehr sind als Rotbuchen, beteiligten sich $400 : 5 = 80$ Personen am Einsatz.
Zur Lösung gelangt man auch mit Gleichungen. Dazu bezeichnen wir mit $x$, $y$ und $z$ die Anzahl der erwachsenen AG-Mitglieder, der anderen Erwachsenen bzw. der Kinder. Nach Aufgabenstellung gilt $600 = 10x + 8y + 6z$ und $200 = 5x + 3y + z$. Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, erhalten wir $400 = 5x+5y+5z = 5(x+y+z)$. Also ist die gesuchte Anzahl $x+y+z = 400 : 5 = 80$. Für die genaue Anzahl der einzelnen Personengruppen gibt es viele Möglichkeiten.

**28.** Denise hat eine flache runde Dose, in der sie ihre Tischtennisbälle aufbewahrt. Sieben Bälle passen exakt in die Dose. Zwei ihrer Bälle sind orange, die anderen weiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die orangefarbenen Bälle einander berühren, wenn Denise die Bälle zufällig in die Dose legt?

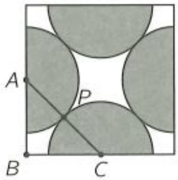
(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{2}{7}$ (**C**) $\frac{5}{14}$ (**D**) $\frac{2}{3}$ (**E**) $\frac{4}{7}$

*Lösung:* Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{7}$ legt Denise den ersten orangefarbenen Ball in die Mitte. In diesem Fall berührt dieser Ball am Ende alle anderen Bälle, insbesondere den zweiten orangefarbenen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{7}$ legt Denise den ersten orangefarbenen Ball auf einen der 6 äußeren Positionen. Dann berührt dieser Ball am Ende 3 der 6 anderen Bälle. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die orangefarbenen Bälle am Ende berühren ist, also $\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7}$.
Eine andere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, besteht darin, die Wahrscheinlichkeit als Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle zu berechnen. Insgesamt gibt es $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ mögliche Positionen für die beiden orangefarbenen Bälle, wovon 12 günstig sind (einer in der Mitte und der zweite auf einer beliebigen der 6 Randpositionen oder beide Bälle auf benachbarten Randpositionen). Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

**29.** In einen Würfel mit Kantenlänge 2 cm sind in die sechs Seitenflächen gleich große halbkugelförmige Löcher gefräst worden. Jedes Loch hat mit jedem der vier benachbarten Löcher genau einen Berührungspunkt. Die Mittelpunkte der Kreise, die diese halbkugelförmigen Löcher in den Seitenflächen bilden, sind die Mittelpunkte der entsprechenden Seitenflächen des Würfels. Welchen Durchmesser haben diese Kreise?

**(A)** $\sqrt{2}$ cm  **(B)** $\frac{5}{4}$ cm  **(C)** $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm  **(D)** 1 cm  **(E)** $\frac{3}{2}$ cm

*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass wir den Körper parallel zur Deckfläche halbieren. Die Schnittfläche ist rechts abgebildet. Die Punkte $A$ und $C$ sind Mittelpunkte der Kreise, die die halbkugelförmigen Löcher in den Seitenflächen bilden. Also ist der Berührungspunkt $P$ dieser beiden Löcher genau der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Da $|AB| = |BC| = 1$ cm gilt, folgt aus dem Satz des Pythagoras $|AC| = \sqrt{2}$ cm. Und da $\overline{AP}$ und $\overline{CP}$ Radien der Löcher sind, haben die Löcher den Durchmesser $2|AP| = |AC| = \sqrt{2}$ cm.




**30.** Eine Tabelle hat drei Spalten. In jeder Zelle steht eine Zahl, alle Zahlen sind voneinander verschieden. In jeder Zeile ist die Zahl in der 3. Spalte die Summe der Zahlen aus den ersten beiden Spalten. Eine der Zeilen ist rot markiert und eine grün. Wird die Tabelle nach der 1. Spalte aufsteigend sortiert, so ist die 5. Zeile rot und die 6. Zeile grün. Wird die Tabelle nach der 2. Spalte aufsteigend sortiert, so ist die 5. Zeile grün und die 6. Zeile rot. Wird die Tabelle nach der 3. Spalte aufsteigend sortiert, so ist die 1. Zeile rot und die letzte Zeile grün. Wie viele Zeilen hat diese Tabelle?

**(A)** 10  **(B)** 11  **(C)** 12  **(D)** 14  **(E)** 16

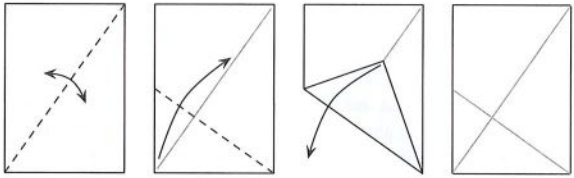
*Lösung:* Wir bezeichnen die drei Zahlen in der roten Zeile mit $R_1$, $R_2$, $R_3$ und die in der grünen Zeile mit $G_1$, $G_2$, $G_3$. Nach Aufgabenstellung gilt $R_1 < G_1$ und alle anderen Einträge in der 1. Spalte sind kleiner als $R_1$ oder größer als $G_1$ (Sortierung nach der 1. Spalte). Außerdem gilt $G_2 < R_2$ und alle anderen Einträge in der 2. Spalte sind kleiner als $G_2$ oder größer als $R_2$ (Sortierung nach der 2. Spalte). Nun teilen wir alle nicht-markierten Zeilen in die folgenden vier Kategorien ein:

Kategorie 1: Die Zahl in der 1. Spalte ist kleiner als $R_1$ und die Zahl in der 2. Spalte ist kleiner als $G_2$.
Kategorie 2: Die Zahl in der 1. Spalte ist kleiner als $R_1$ und die Zahl in der 2. Spalte ist größer als $R_2$.
Kategorie 3: Die Zahl in der 1. Spalte ist größer als $G_1$ und die Zahl in der 2. Spalte ist kleiner als $G_2$.
Kategorie 4: Die Zahl in der 1. Spalte ist größer als $G_1$ und die Zahl in der 2. Spalte ist größer als $R_2$.

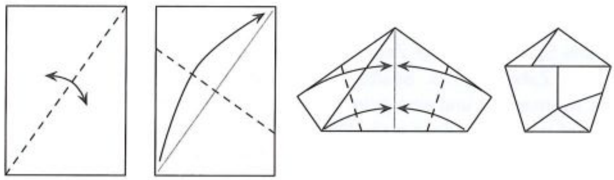
Offenbar gehört jede Zeile zu genau einer der vier Kategorien.
Zur Kategorie 1 kann keine Zeile gehören: Wären $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ die Zahlen in einer solchen Zeile, so wäre $Z_3 = Z_1 + Z_2 < R_1 + G_2 < R_1 + R_2 = R_3$. Nach Aufgabenstellung ist aber $R_3$ die kleinste Zahl in der 3. Spalte.
Ebenso gehört auch keine Zeile zur Kategorie 4: Wären $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ die Zahlen in einer solchen Zeile, so wäre $Z_3 = Z_1 + Z_2 > G_1 + R_2 > G_1 + G_2 = G_3$. Nach Aufgabenstellung ist aber $G_3$ die größte Zahl in der 3. Spalte.
Also gehören alle nicht-markierten Zeilen entweder zur Kategorie 2 oder zur Kategorie 3.
Die 4 Zeilen, bei denen die Zahl in der 1. Spalte kleiner als $R_1$ ist, gehören zur Kategorie 2. Weitere Zeilen, die zur Kategorie 2 gehören, kann es nicht geben, da bei allen anderen Zeilen die Zahl in der 1. Spalte größer als $R_1$ ist.
Die 4 Zeilen, bei denen die Zahl in der 2. Spalte kleiner als $G_2$ ist, gehören zur Kategorie 3. Weitere Zeilen, die zur Kategorie 3 gehören, kann es nicht geben, da bei allen anderen Zeilen die Zahl in der 2. Spalte größer als $G_2$ ist.
Somit gibt es neben der roten und der grünen Zeile noch 8 weitere, die Tabelle hat also 10 Zeilen.

# Faltkonstruktionen: Exakt oder gute Fälschung?

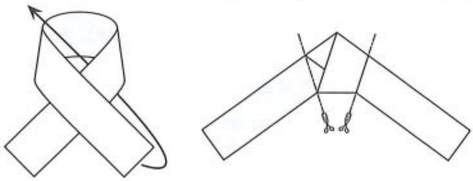
[1] Falte ein A4-Blatt wie folgt. Wird die Diagonale des Rechtecks durch die zweite Faltlinie gedrittelt? Wird die zweite Faltlinie durch die Diagonale gedrittelt? Wer kann seine Vermutung beweisen?



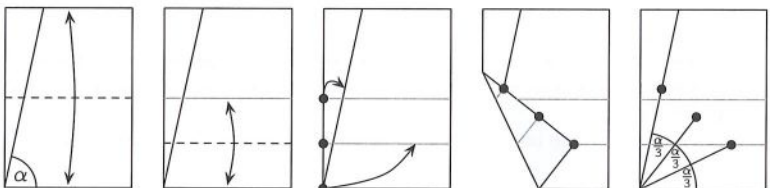
[2] Falte ein A4-Blatt wie folgt. Ist das entstehende Fünfeck ein regelmäßiges Fünfeck? Wer kann seine Vermutung beweisen?



[3] Schneide von einem A4-Blatt einen langen, etwa 2,5 cm breiten Streifen ab. Mach mit dem Streifen einen Knoten, zieh ihn vorsichtig fest und drück ihn platt. Schneide die überstehenden Enden ab. So entsteht ein Fünfeck. Ist dieses Fünfeck regelmäßig? Wer kann seine Vermutung beweisen?



[4] Lege ein A4-Blatt hochkant vor dich und verbinde die linke untere Ecke mit einem Punkt auf der oberen Seite mit einer geraden Linie. Falte das Blatt einmal in der Mitte, sodass die beiden kürzeren Seiten aufeinander liegen, und falte wieder auseinander (Bild a). Dann falte die untere Seite auf die gerade entstandene Faltlinie und falte wieder auseinander (Bild b). Nun falte die linke untere Ecke so auf die 2. Faltlinie, dass dabei der linke Randpunkt der 1. Faltlinie auf der eingezeichneten Geraden landet (Bild c). Markiere den Punkt, an dem die linke untere Ecke nun ist, und den Punkt, an dem der linke Randpunkt der 2. Faltlinie nun ist (Bild d). Falte das Blatt wieder auseinander. Verbinde die beiden markierten Punkte jeweils mit der linken unteren Ecke (Bild e). Beweise, dass so der Winkel, den die gezeichnete Gerade mit der unteren Seite des Blatts einschließt, gedrittelt wird.




a b c d e

## Klassenstufen 11 bis 13

**1.** $2^0 \cdot 2^2 =$

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

*Lösung:* $2^0 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$.

**2.** Am Ende eines Kartenspiels hat Kai mehr Punkte als Zoé aber weniger als Jona. Svea hat mehr Punkte als Kai. Zwei von ihnen haben genau dieselbe Anzahl an Punkten. Welche zwei sind das?

(**A**) Svea und Jona (**B**) Zoé und Svea (**C**) Jona und Zoé (**D**) Svea und Kai (**E**) Kai und Jona

*Lösung:* Jona und Svea haben beide mehr Punkte als Kai, und Kai hat mehr Punkte als Zoé. Es können also nur Jona und Svea dieselbe Anzahl an Punkten haben.

**3.** Das Produkt der Ziffern einer 10-stelligen natürlichen Zahl ist 15. Wie groß ist die Summe der Ziffern dieser Zahl?

(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 20

*Lösung:* Da das Produkt der Ziffern 15 ist, ist eine der Ziffern 3 und eine andere 5. Die restlichen acht Ziffern müssen Einsen sein. Dann ist die Summe der Ziffern $3 + 5 + 8 \cdot 1 = 16$.

**4.** Maren entdeckt auf ihrem Smartphone, wie viel Zeit sie gestern mit ihren vier Lieblings-Apps verbracht hat (s. Abb.). Heute hat sie zwei dieser Apps genauso lange benutzt wie gestern, die anderen zwei nur halb so lange. Im Diagramm sind die Apps stets nach der Benutzungsdauer sortiert. Wie kann das Diagramm für heute <u>sicher nicht</u> aussehen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

*Lösung:* Im Diagramm bei (**D**) hat sich im Vergleich zum Vortag nur die Benutzungsdauer der 4. App halbiert, die anderen sind unverändert. Das ist also das gesuchte Diagramm.
Der Vollständigkeit halber machen wir uns klar, dass die anderen Diagramme tatsächlich möglich sind: Die halbe Nutzungsdauer haben für (**A**) die 2. und die 3. App aus der gestrigen Anzeige, für (**B**) die 1. und die 4. (hier hat sich die Sortierung geändert), für (**C**) die 1. und entweder die 2. oder die 3. (auch hier hat sich die Sortierung geändert) und für (**E**) die 4. und entweder die 2. oder die 3.
— *In Klassenstufe 9/10 war es ein ähnliches Problem in Aufgabe 8 zu lösen.* —

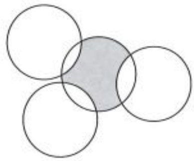
**5.** Auf einem Zettel stehen in aufsteigender Reihenfolge untereinander alle natürlichen Zahlen von 2 bis 2022, die nur aus den Ziffern 0 und 2 bestehen. Welche Zahl steht in der Mitte?

| |
|---|
| 2 |
| 20 |
| 22 |
| ⋮ |
| 2022 |

(**A**) 200 (**B**) 220 (**C**) 222 (**D**) 2000 (**E**) 2002

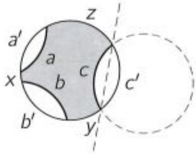
*Lösung:* Die Zahlen auf dem Zettel stehen in der Reihenfolge:
2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000, 2002, 2020, 2022. In der Mitte steht 220.

**6.** Die vier abgebildeten Kreise haben alle den Radius 1 cm. Was gilt (in cm) für den Umfang $u$ der grauen Fläche?

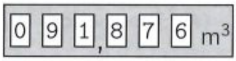


(**A**) $u \leq \pi$ (**B**) $u = \frac{3\pi}{2}$ (**C**) $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$
(**D**) $u = 2\pi$ (**E**) $u \geq 3\pi$

*Lösung:* Mit den Bezeichnungen der Kreisbögen wie im Bild rechts gilt für den Umfang der grauen Fläche $u = a+b+c+x+y+z$. Die Kreisbögen $a$, $b$ und $c$, die „nach innen" gebogen sind, sind genauso lang wie die entsprechenden Kreisbögen $a'$, $b'$ bzw. $c'$ des mittleren Kreises, weil alle Kreise denselben Radius haben. Um das einzusehen, ist im Bild für den rechten der drei äußeren Kreise die Gerade durch die beiden Schnittpunkte gezeichnet; diese ist eine Symmetrieachse. Folglich ist der Umfang der grauen Fläche (in cm) gleich dem Umfang des mittleren Kreises, das heißt $u = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.




**7.** Nick bemerkt, dass auf dem Wasserzähler sechs verschiedene Ziffern zu sehen sind (s. Abb.). Wie viel Wasser wird verbraucht, bis das nächste Mal auf dem Wasserzähler sechs verschiedene Ziffern zu sehen sind?




(**A**) 0,047 m$^3$ (**B**) 0,186 m$^3$ (**C**) 0,258 m$^3$ (**D**) 0,537 m$^3$ (**E**) 2,249 m$^3$

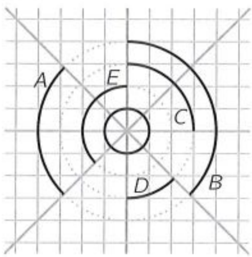
*Lösung:* Wenn sich nur die letzte Stelle verändert, dann wäre sie 7, 8 oder 9. In keinem der Fälle wären alle Ziffern verschieden. Ebenso reicht es nicht, wenn sich nur die letzten beiden oder die letzten drei Stellen verändern. Also muss sich die 1 vor dem Komma ändern. Die kleinste Zahl, die mit „092" beginnt und aus sechs verschiedenen Ziffern besteht, ist die 092,134. Bis dahin wird $92{,}134\,\text{m}^3 - 91{,}876\,\text{m}^3 = 0{,}258\,\text{m}^3$ Wasser verbraucht.

**8.** Für wie viele reelle Zahlen $x$ gilt die Gleichung $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

*Lösung:* Quadrate reeller Zahlen sind nicht-negativ, also gilt $(x-2)^2 \geq 0$ und $(x+2)^2 \geq 0$. Damit die Summe 0 ergibt, müssen beide Summanden 0 sein. Das heißt $x-2=0$ und $x+2=0$, also $x=2$ und $x=-2$. Das kann nicht beides gleichzeitig zutreffen, und somit gibt es keine reelle Zahl $x$, für die die Gleichung gilt. (**A**) ist richtig.
Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir die Terme auf der linken Seite ausmultiplizieren: Es ist $(x-2)^2+(x+2)^2 = (x^2-4x+4)+(x^2+4x+4) = 2x^2+8 \geq 8 > 0$, also für kein reelles $x$ gleich 0.

**9.** Welcher der schwarzen Kreisbögen ist genauso lang wie der Umfang des kleinen schwarzen Kreises in der Mitte?




(**A**) $A$ (**B**) $B$ (**C**) $C$ (**D**) $D$ (**E**) $E$

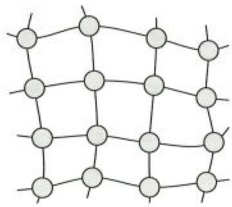
*Lösung:* Die Radien der größeren Kreise sind 2-mal, 3-mal bzw. 4-mal so lang wie der Radius des kleinen Kreises. Ein Kreisbogen mit einem solchen Radius ist genau dann genauso lang wie der Umfang des kleinen Kreises, wenn es sich um einen Halbkreis, Drittelkreis bzw. Viertelkreis handelt. Das trifft nur auf den Kreisbogen $A$ zu.
Indem man die Länge des Radius des kleinen Kreises mit $r$ bezeichnet, kann man in Abhängigkeit von $r$ auch den Umfang des kleinen Kreises und die Längen der Kreisbögen berechnen und vergleichen.

**10.** Es seien $a, b, c$ reelle Zahlen und alle ungleich 0. Die Zahlen $-a^4b^3c^2$ und $a^3b^5c^6$ haben dasselbe Vorzeichen. Welche der folgenden Aussagen ist auf jeden Fall richtig?

(**A**) $a > 0$ (**B**) $b < 0$ (**C**) $c > 0$ (**D**) $b > 0$ (**E**) $a < 0$

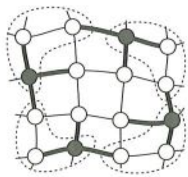
*Lösung:* Für eine reelle Zahl $x \neq 0$ sind die geraden Potenzen $x^2, x^4, x^6, \ldots$ alle positiv, und die ungeraden Potenzen $x^1, x^3, x^5, \ldots$ haben alle dasselbe Vorzeichen, nämlich das von $x$. Also hat $-a^4b^3c^2$ dasselbe Vorzeichen wie $-b$, und $a^3b^5c^6$ hat dasselbe Vorzeichen wie $ab$. Dann muss $a$ auf jeden Fall negativ sein, also $a < 0$ gelten.

**11.** Im Stadtpark sollen für die Joggerinnen und Jogger an einigen der 16 Wegkreuzungen (s. Abb.) Wasserspender aufgestellt werden. Wie viele Wasserspender müssen es mindestens sein, damit von jeder Wegkreuzung der nächstgelegene Wasserspender maximal ein Wegstück entfernt ist?



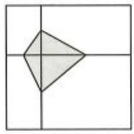
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

*Lösung:* Die Wasserspender müssen so aufgestellt werden, dass von jeder Wegkreuzung der nächstgelegene Wasserspender maximal ein Wegstück entfernt ist. Insbesondere muss das für die 4 Wegkreuzungen an den Ecken gelten. Das heißt, es muss in den 4 markierten Gebieten jeweils mindestens ein Wasserspender aufgestellt werden, also insgesamt mindestens 4 Stück. Dass 4 Wasserspender genügen, zeigt das Beispiel, in dem die Wasserspender schwarz und die direkten Wegstücke zu ihnen dick markiert sind.



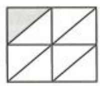
*— Ein dazu verwandtes Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 27 zu lösen. —*

**12.** Ein großes Quadrat wurde in 4 Rechtecke zerteilt (s. Abb.). Die Eckpunkte des grauen Vierecks sind jeweils Seitenmittelpunkte dieser Rechtecke. Der Flächeninhalt des grauen Vierecks beträgt $3\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat das große Quadrat?



(**A**) $16\,\text{cm}^2$ (**B**) $18\,\text{cm}^2$ (**C**) $20\,\text{cm}^2$ (**D**) $24\,\text{cm}^2$ (**E**) $27\,\text{cm}^2$

*Lösung:* In jedem der vier Rechtecke befindet sich ein rechtwinkliges graues Dreieck. Die Katheten sind bei jedem dieser Dreiecke halb so lang wie die Seiten des umgebenden Rechtecks. Also beträgt der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke $\frac{1}{8}$ des Flächeninhalts des umgebenden Rechtecks. Das lässt sich auch durch Zerlegen zeigen, wie für das rechte untere Rechteck rechts zu sehen ist. Folglich ist der Flächeninhalt des Quadrats 8-mal so groß wie der Flächeninhalt des grauen Vierecks: $8 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$.

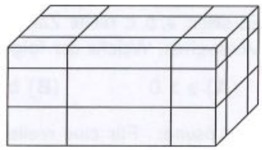


**13.** Was ist der größte gemeinsame Teiler von $2^{2021} + 2^{2022}$ und $3^{2021} + 3^{2022}$?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 12 (**E**) 36

*Lösung:* Wir klammern bei beiden Zahlen jeweils den kleineren der zwei Summanden aus und erhalten so $2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021} \cdot (1+2) = 2^{2021} \cdot 3$ und $3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021} \cdot (1+3) = 3^{2021} \cdot 2^2$. Die größte Zweierpotenz, die beide Zahlen teilt, ist $2^2$. Die größte Dreierpotenz, die beide Zahlen teilt, ist $3^1$. Andere Primteiler als 2 und 3 haben die beiden Zahlen nicht. Also ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen $2^2 \cdot 3 = 12$.

**14.** Der Oberflächeninhalt des abgebildeten Quaders ist $A$. Mit sechs geraden Schnitten wurde er in 27 kleinere Quader zerlegt. Wie groß ist der gesamte Oberflächeninhalt aller 27 kleinen Quader?



**(A)** $\frac{5}{2}A$ **(B)** $3A$ **(C)** $\frac{7}{2}A$ **(D)** $4A$ **(E)** $\frac{9}{2}A$

*Lösung:* Wir bezeichnen mit $A_o$, $A_r$ und $A_v$ den Flächeninhalt der oberen, rechten bzw. vorderen Seitenfläche des abgebildeten Quaders. Für Oberfläche $A$ des Quaders gilt $A = 2A_o + 2A_r + 2A_v$. Bei einem Schnitt, der parallel zur oberen Seitenfläche verläuft, vergrößert sich der gesamte Oberflächeninhalt um $2A_o$. Bei einem Schnitt, der parallel zur rechten Seitenfläche verläuft, vergrößert sich der gesamte Oberflächeninhalt um $2A_r$. Bei einem Schnitt, der parallel zur vorderen Seitenfläche verläuft, vergrößert sich der gesamte Oberflächeninhalt um $2A_v$. Von jedem dieser Schnitte gibt es zwei. Insgesamt vergrößert sich der gesamte Oberflächeninhalt durch das Schneiden also um $4A_o + 4A_r + 4A_v = 2 \cdot (2A_o + 2A_r + 2A_v) = 2A$. Der gesamte Oberflächeninhalt aller 27 kleinen Quader ist folglich $3A$.

**15.** Wenn die Wettervorhersage Regen ansagt oder es am Vortag geregnet hat, nimmt Frau Zucker ihren Schirm mit zur Arbeit, ansonsten nicht. Letzte Woche hat sie ihren Schirm am Dienstag, am Mittwoch und am Freitag mitgenommen. Am Montag und am Donnerstag hat sie ihn zu Hause gelassen. Die Wettervorhersage stimmte an jedem der 5 Tage. An wie vielen der 5 Tage hat es geregnet?

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

*Lösung:* Für Tage, an denen Frau Zucker ihren Schirm zu Hause lässt, wurde kein Regen angesagt. Folglich hat es, da die Wettervorhersage stimmte, am Montag und am Donnerstag nicht geregnet. Am Mittwoch kann es auch nicht geregnet haben, da Frau Zucker ansonsten am Donnerstag ihren Schirm mitgenommen hätte. Am Dienstag und am Freitag hat Frau Zucker ihren Schim mitgenommen. Da es jeweils am Vortag nicht geregnet hat, wurde Regen angesagt und folglich hat es am Dienstag und am Freitag geregnet, da die Wettervorhersage immer stimmte. Insgesamt hat es an 2 der 5 Tage geregnet.

**16.** Auf einer Geraden wurden die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ markiert:


Der Abstand zwischen $A$ und $C$ beträgt 12 cm und der Abstand zwischen $B$ und $D$ beträgt 18 cm. Wie groß ist der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$?

**(A)** 6 cm **(B)** 9 cm **(C)** 12 cm **(D)** 15 cm **(E)** 18 cm

*Lösung:* Der gesuchte Abstand ist $\frac{1}{2}|AB| + |BC| + \frac{1}{2}|CD|$, was wir geschickt umformen können, um das Ergebnis zu erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|AB| + |BC| + \frac{1}{2}|CD| &= \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|BC| + \frac{1}{2}|BC| + \frac{1}{2}|CD| \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |BC|) + \frac{1}{2}(|BC| + |CD|) \\ &= \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|BD| \\ &= 6\,\text{cm} + 9\,\text{cm} \\ &= 15\,\text{cm}\end{aligned}$$

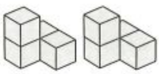
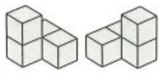
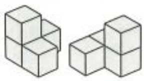
**17.** Der Durchschnitt von fünf Zahlen ist 24. Der Durchschnitt der drei kleinsten dieser Zahlen ist 19 und der Durchschnitt der drei größten ist 28. Welches ist die drittgrößte Zahl?

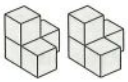
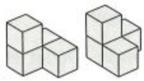
(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

*Lösung:* Es seien $a, b, c, d, e$ die fünf Zahlen, und es gelte $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Nach Aufgabenstellung gilt $\frac{1}{5} \cdot (a+b+c+d+e) = 24$, also $a+b+c+d+e = 5 \cdot 24 = 120$. Ebenso gilt $a+b+c = 3 \cdot 19 = 57$ und $c+d+e = 3 \cdot 28 = 84$. Folglich gilt für die drittgrößte Zahl $c = (a+b+c)+(c+d+e)-(a+b+c+d+e) = 57+84-120 = 21$.

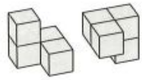
— *Ähnlich zu dieser Aufgabe war Aufgabe 16 in Klassenstufe 7/8.* —

**18.** Welche zwei Teile lassen sich zu dem rechts abgebildeten Körper zusammensetzen?

(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

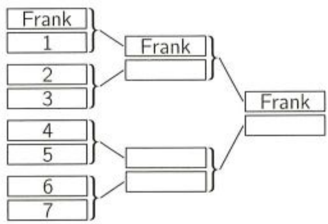
*Lösung:* Wenn wir bei (**A**) das rechte Teil um 90° nach vorn rechts kippen, lassen sich die beiden Teile zu dem abgebildeten Körper zusammenschieben. Bei den anderen Antwortmöglichkeiten klappt das nicht.



**19.** An einem Judo-Wettkampf nehmen 8 Schüler teil. Die vier Paarungen der 1. Runde werden ausgelost und die vier Sieger kommen in die 2. Runde. Die zwei Paarungen der 2. Runde werden erneut ausgelost und die beiden Sieger kommen ins Finale. Stephan wird jeden Kampf gewinnen außer den gegen den unbesiegbaren Frank, der den Wettkampf gewinnen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Stephan das Finale erreicht?

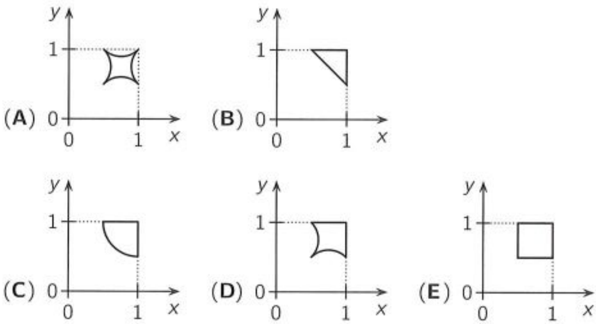
(**A**) $\frac{3}{7}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{4}{7}$ (**D**) $\frac{2}{3}$ (**E**) $\frac{7}{8}$

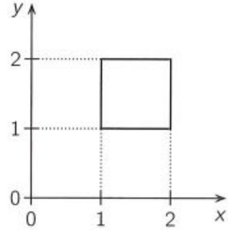
*Lösung:* Wir zeichnen den Wettkampf-Plan als Baumdiagramm so, dass Frank ganz oben steht. Da Frank unbesiegbar ist, wird er also in der 1. und der 2. Runde gewinnen und dann ins Finale einziehen. Wenn Stephan auf Platz 1 startet, verliert er in der 1. Runde gegen Frank und kommt nicht ins Finale. Wenn Stephan auf Platz 2 oder 3 startet, verliert er in der 2. Runde gegen Frank und kommt nicht ins Finale. Startet Stephan hingegen auf einem der anderen vier Plätze der insgesamt sieben, so trifft er in den ersten beiden Runden nicht auf Frank und kommt somit ins Finale. Die Wahrscheinlichkeit, dass Stephan das Finale erreicht, ist also $\frac{4}{7}$.




Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir rundenweise mit den Wahrscheinlichkeiten rechnen: Stephan erreicht das Finale genau dann, wenn er in der 1. Runde nicht gegen Frank antritt (die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{6}{7}$) und wenn er in der 2. Runde nicht gegen Frank antritt (die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{3}$). Da nach der 1. Runde neu ausgelost wird, sind die beiden Ereignisse unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit, dass Stephan ins Finale kommt, ist folglich $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$.

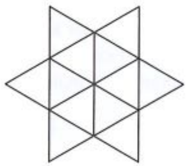
**20.** Ein Quadrat liegt in einem Koordinatensystem (s. Abb. rechts). Jeder Punkt $(x\,|\,y)$ des Quadrats wird auf den Punkt $\left(\frac{1}{x}\,\middle|\,\frac{1}{y}\right)$ transformiert. Wie sieht das transformierte Quadrat aus?



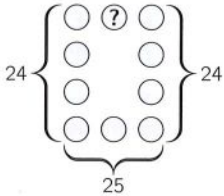



*Lösung:* Die Eckpunkte $(1\,|\,1)$, $(2\,|\,1)$, $(2\,|\,2)$ und $(1\,|\,2)$ des Quadrats werden auf die Punkte $(1\,|\,1)$, $\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ bzw. $\left(1\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ transformiert. Damit entfallen die Antworten **(B)** und **(C)**. Die Punkte auf den einzelnen Seiten des Quadrats haben jeweils dieselbe $x$- bzw. dieselbe $y$-Koordinate. Also haben die Punkte auf den transformierten Seiten des Quadrats ebenfalls jeweils dieselbe $x$- bzw. dieselbe $y$-Koordinate. Das transfomierte Quadrat besteht folglich aus Strecken zwischen den transformierten Eckpunkten, also handelt es sich genau um das Quadrat, das bei **(E)** zu sehen ist.

*Die Zahlen von 1 bis 12 sollen so in die 12 kleinen Dreiecke eingetragen werden, dass in jedem der mittelgroßen Dreiecke, die sich aus vier kleinen Dreiecken zusammensetzen, die Summe der vier Zahlen 20 ist. Wer findet mehrere Möglichkeiten?*

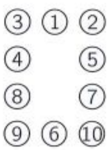


**21.** Die Zahlen von 1 bis 10 sollen so in die Kreise geschrieben werden, dass die Summe der vier Zahlen in den linken Kreisen sowie die Summe der vier Zahlen in den rechten Kreisen gleich 24 und die Summe der drei Zahlen in den unteren Kreisen gleich 25 ist. Welche Zahl muss in den Kreis mit dem Fragezeichen geschrieben werden?




**(A)** 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

*Lösung:* Die Summe aller Zahlen, die in die Kreise geschrieben werden sollen, ist $1 + \ldots + 10 = 55$. Die Zahl, die in den Kreis mit dem Fragezeichen geschrieben werden muss, nennen wir $x$ und die Zahl, die in den Kreis unten in der Mitte geschrieben werden muss, nennen wir $y$. Dann gilt $55 = 24 + 24 + x + y$ bzw. $x + y = 7$. Wäre $y < 6$, so wäre die Summe der drei Zahlen unten kleiner als $6 + 9 + 10 = 25$ und nicht gleich 25. Also muss $y = 6$ und somit $x = 1$ gelten. Die Abbildung zeigt eine mögliche Belegung.



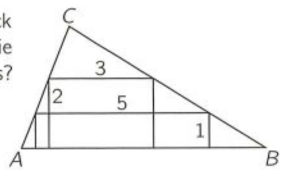
**22.** Malte schreibt an die Eckpunkte eines 20-Ecks die Zahlen von 1 bis 20. Dann schreibt er an jede Seite den Betrag der Differenz der beiden Zahlen, die an den Eckpunkten dieser Seite stehen. An jeder Seite steht nun entweder eine 1 oder eine 2. An wie vielen Seiten steht eine 1?

**(A)** 2 **(B)** 4 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 16

*Lösung:* Wir beginnen an dem Eckpunkt mit der 1 und untersuchen Schritt für Schritt, mit welchen Zahlen es in beide Richtungen weitergehen kann. Die beiden Zahlen an den Nachbarecken der 1 müssen 2 und 3 sein. Für die Nachbarn der 2 kommen nur 1, 3 und 4 in Frage. Da die 3 schon auf der anderen Seite der 1 steht, kommt nach der 2 also die 4. Folglich steht nach der 3 die 5, nach der 4 die 6, nach der 5 die 7, nach der 6 die 8 usw. bis nach der 18 die 20 kommt. Die Reihenfolge der Zahlen an den Ecken lautet somit: 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Es stehen also nur an 2 Seiten, nämlich zwischen 1 und 2 und zwischen 19 und 20, eine 1.

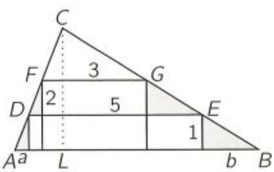
*Der abgebildete $4 \times 4 \times 4$-Würfel ist aus kleinen Würfeln zusammengebaut. Einige der kleine Würfel sollen so entfernt werden, dass der Oberflächeninhalt des entstehenden Körpers dann 1,5-mal so groß ist wie der Oberflächeninhalt des ursprünglichen $4 \times 4 \times 4$-Würfels.*
*Wie viele kleine Würfel müssen mindestens entfernt werden?*

**23.** Ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 cm und 5 cm und ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 cm und 3 cm passen in das Dreieck $ABC$ wie abgebildet. Wie groß ist die zur Seite $\overline{AB}$ gehörige Höhe dieses Dreiecks?



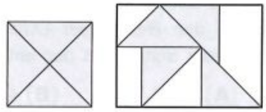

**(A)** $\frac{10}{3}$ cm **(B)** $\frac{7}{2}$ cm **(C)** $\frac{13}{4}$ cm **(D)** $\frac{16}{5}$ cm **(E)** $\frac{11}{3}$ cm

*Lösung:* Die Länge (in cm) der zu $AB$ gehörigen Höhe von $\triangle ABC$ bezeichnen wir mit $h$. Da $\overline{DE}$ und $\overline{FG}$ Rechtecksseiten sind, sind sie beide parallel zu $\overline{AB}$. Daraus folgt, dass die Dreiecke $DEC$ und $FGC$ ähnlich sind. Insbesondere ist das Verhältnis zwischen Grundseite und der zugehörigen Höhe in diesen beiden Dreiecken gleich, d. h. es gilt $\frac{5}{h-1} = \frac{3}{h-2}$. Also gilt $5 \cdot (h-2) = 3 \cdot (h-1)$, woraus $h = \frac{7}{2}$ folgt. Die gesuchte Länge ist $\frac{7}{2}$ cm.



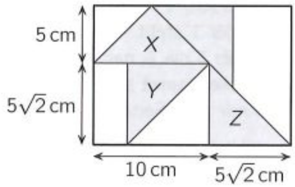

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Steigungsdreiecke der Geraden $AC$ und $BC$ zu untersuchen. Die Höhen der im Bild grau markierten Steigungsdreiecke sind alle 1 cm lang. Folglich sind die beiden linken Steigungsdreiecke zueinander kongruent und ebenso die beiden rechten. Die Länge (in cm) ihrer Grundseiten bezeichnen wir mit $a$ bzw. $b$. Dann gilt in cm $|DE| = 5 = a+3+b$, woraus $a+b = 2$ und somit $|AB| = a+5+b = 7$ folgt. Sei $L$ der Lotfußpunkt von $C$ auf $AB$. Dann gilt $\frac{|AL|}{h} = \frac{a}{1}$ und $\frac{|LB|}{h} = \frac{b}{1}$. Wir erhalten $7 = |AB| = |AL| + |LB| = ah + bh = (a+b) \cdot h = 2h$, also $h = \frac{7}{2}$.

**24.** Delaila schneidet ein buntes quadratisches Blatt Papier mit Seitenlänge 10 cm in vier kongruente Dreiecke. Die vier Teile klebt sie auf den Deckel einer rechteckigen Kiste (s. Abb.). Welchen Flächeninhalt (in $cm^2$) hat der Teil des Deckels, den Delaila <u>nicht</u> überklebt hat?



(**A**) $50 + 50\sqrt{2}$ (**B**) $125\sqrt{2} - 100$ (**C**) $75 + 25\sqrt{2}$
(**D**) $250 - 100\sqrt{2}$ (**E**) $75\sqrt{2}$

*Lösung:* Die entstandenen Dreiecke sind gleichschenklig und rechtwinklig. Die Hypotenusen der Dreiecke entsprechen den Seiten des quadratischen Blatts, sie sind also 10 cm lang. Nach dem Satz des Pythagoras sind die Katheten der Dreiecke $5\sqrt{2}$ cm lang. Die zu den Hypotenusen gehörenden Höhen sind 5 cm lang. Rechts ist zu erkennen, wie sich Höhe und Breite des Rechtecks durch die Längen der Hyptenusen, Katheten und Höhen der drei Dreiecke ausdrücken lassen. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist somit $(5 + 5\sqrt{2})\,\text{cm} \cdot (10 + 5\sqrt{2})\,\text{cm} = (100 + 75\sqrt{2})\,\text{cm}^2$. Da die vier Dreiecke zusammen den Flächeninhalt $10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 100\,\text{cm}^2$ haben, hat Delaila $(75\sqrt{2})\,\text{cm}^2$ des Deckels nicht überklebt.

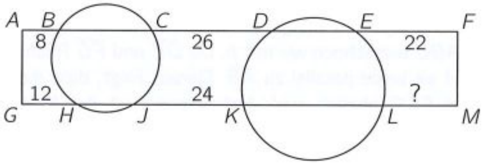



**25.** Wie viele 3-stellige natürliche Zahlen gibt es, die 5-mal so groß sind wie das Produkt ihrer Ziffern?

(**A**) 5 (**B**) 4 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

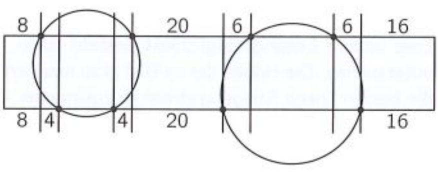
*Lösung:* Sei $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ eine solche Zahl. Da sie ein Vielfaches von 5 ist, muss $z = 0$ oder $z = 5$ gelten. $z = 0$ kann nicht gelten, da ansonsten $\overline{xyz} = 5 \cdot x \cdot y \cdot 0 = 0$ nicht 3-stellig wäre. Also gilt $z = 5$, und somit $100x + 10y + 5 = \overline{xy5} = 5 \cdot x \cdot y \cdot 5$ bzw. $2y + 1 = 5xy - 20x$. Daraus folgt, dass $2y + 1$ ein Vielfaches von 5 sein muss. Dafür kommt nur $y = 2$ und $y = 7$ in Frage. Diese beiden Werte setzen wir nacheinander in die Gleichung $2y + 1 = 5xy - 20x$ ein. Im 1. Fall ergibt sich $x = -0{,}5$, was unmöglich ist, da $x$ eine Ziffer ist. Im 2. Fall ergibt sich $x = 1$. Folglich ist $\overline{xyz} = 175$ die einzige Zahl mit den geforderten Eigenschaften.

**26.** Zwei Kreise schneiden das Rechteck $GMFA$ (s. Abb.). Es gilt $|AB| = 8$ cm, $|CD| = 26$ cm, $|EF| = 22$ cm, $|GH| = 12$ cm und $|JK| = 24$ cm. Welchen Abstand haben die Punkte $L$ und $M$?




(**A**) 14 cm (**B**) 15 cm (**C**) 16 cm
(**D**) 17 cm (**E**) 18 cm

*Lösung:* Wir zeichnen durch jeden Punkt, in dem einer der Kreise das Rechteck schneidet, eine Hilfslinie senkrecht zu den langen Rechtecksseiten. Dann ist der Abstand zwischen der 1. und der 2. Hilfslinie 12 cm − 8 cm = 4 cm. Aus Symmetriegründen ist der Abstand zwischen der 3. und der 4. Hilfslinie ebenfalls 4 cm. Folglich ist der Abstand zwischen der 4. und der 5. Hilfslinie 24 cm − 4 cm = 20 cm. Nun folgt, dass der Abstand zwischen der 5. und der 6. sowie der Abstand zwischen der 7. und der 8. Hilfslinie jeweils 26 cm − 20 cm = 6 cm ist. Schließlich haben die Punkte $L$ und $M$ den Abstand 22 cm − 6 cm = 16 cm.

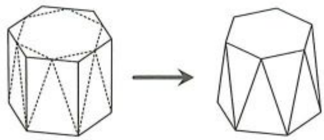


**27.** Es sei $N$ eine beliebige positive ganze Zahl. Wie viele ganze Zahlen sind größer als $\sqrt{N^2+N+1}$ und kleiner als $\sqrt{9N^2+N+1}$?

(**A**) $N+1$ (**B**) $2N-1$ (**C**) $2N$ (**D**) $2N+1$ (**E**) $3N-1$

*Lösung:* Da $N$ positiv ist, gilt $N^2 < N^2+N+1 < N^2+2N+1 = (N+1)^2$, und somit folgt $N < \sqrt{N^2+N+1} < N+1$. Und aus $(3N)^2 = 9N^2 < 9N^2+N+1 < 9N^2+6N+1 = (3N+1)^2$ folgt $3N < \sqrt{9N^2+N+1} < 3N+1$. Die ganzen Zahlen, die zwischen den beiden Wurzelausdrücken liegen, sind also genau die ganzen Zahlen von $N+1$ bis $3N$, und das sind $2N$ Stück.

**28.** Von einem regelmäßigen, 6-seitigen Prisma wurden die sechs oberen Ecken abgeschnitten (s. Abb.). Die neue Deckfläche ist nun ein kleineres regelmäßiges Sechseck, und die Mantelfläche besteht aus zwölf gleichschenkligen Dreiecken. Das Volumen des Prismas war $36\,\text{cm}^3$. Wie groß ist das gesamte Volumen der sechs abgeschnittenen Ecken?



(**A**) $3\,\text{cm}^3$ (**B**) $3\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ (**C**) $3\sqrt{2}\,\text{cm}^3$ (**D**) $6\,\text{cm}^3$ (**E**) $2\sqrt{3}\,\text{cm}^3$


*Lösung:* Da die neue Mantelfläche nur aus gleichschenkligen Dreiecken besteht, müssen die Eckpunkte der neuen Deckfläche die Mittelpunkte der 6 Seiten der alten Deckfläche gewesen sein. Folglich sind alle abgeschnittenen Pyramiden zueinander kongruent. In der Abbildung ist die Deckfläche des Prismas zu sehen. Zusätzlich sind der Mittelpunkt $M$ und die Schnittkanten eingezeichnet. Wir betrachten nun die Pyramide mit der Grundfläche $CDB$ und vergleichen dieses Dreieck mit dem Dreieck $CEM$. Da $D$ der Mittelpunkt von $\overline{CE}$ ist, ist die Seite $\overline{CD}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{CE}$. Und da $B$ der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ ist, ist die zugehörige Höhe in $\triangle CDB$ halb so lang wie die zugehörige Höhe in $\triangle CEM$. Folglich ist der Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts von $\triangle CEM$. Da der Flächeninhalt von $\triangle CEM$ genau $\frac{1}{6}$ des Flächeninhalts der gesamten Deckfläche ist, ist der Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide $\frac{1}{24}$ des Flächeninhalts der gesamten Deckfläche. Da die Pyramide und das Prisma die gleiche Höhe haben, ist das Volumen der Pyramide $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{24}$ des Volumens des Prismas. Die 6 Pyramiden haben somit ein Gesamtvolumen von $6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{24}\cdot 36\,\text{cm}^3 = 3\,\text{cm}^3$.


Eine Lösungsvariante ist folgende: Wir nutzen wieder, dass sich ein regelmäßiges Sechseck in 6 gleichseitige, zueinander kongruente Dreiecke zerlegen lässt. Rechts sehen wir, dass die Deckfläche den 6-fachen Flächeninhalt wie das Dreieck $ACM$ und die neue Deckfläche des entstandenen Körpers den 6-fachen Flächeninhalt wie das Dreieck $DFM$ hat. Dabei ist die Seitenlänge des Dreiecks $DFM$ gleich der Länge der Höhe im Dreieck $ACM$, also gleich $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|AC|$. Die Seitenlänge des kleineren regelmäßigen Sechsecks, das die neue Deckfläche bildet, beträgt also $\frac{\sqrt{3}}{2}$ der Seitenlänge des größeren regelmäßigen Sechsecks, und sein Flächeninhalt folglich das $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ des Flächeninhalts des größeren Sechsecks. Die gesamte Grundfläche der abgeschnittenen Pyramiden beträgt damit $\frac{1}{4}$ der Deckfläche des Prismas und ihr gesamtes Volumen folglich $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ des Volumens des Prismas, also $3\,\text{cm}^3$.

**29.** Die Bildungsvorschrift der Folge $f_n$ ist gegeben durch $f_{2m} = f_2 \cdot f_m + 1$ und $f_{2m+1} = f_2 \cdot f_m - 2$ für alle $m \geq 1$. Für das erste Folgenglied gilt $0 < f_1 < 1$ und für das siebente $f_7 = 2$. Welchen Wert hat $f_2$?

(**A**) 2 (**B**) $\frac{7}{2}$ (**C**) $-1$ (**D**) $-\frac{1}{3}$ (**E**) 4

*Lösung:* Da wir nur den Wert von $f_7$ kennen, starten wir bei diesem Folgenglied: Die Bildungsvorschrift besagt $2 = f_7 = f_{2\cdot 3+1} = f_2 f_3 - 2$, also gilt $f_3 = \frac{4}{f_2}$. Für $f_3$ gilt $f_3 = f_{2\cdot 1+1} = f_2 f_1 - 2$, und für $f_2$ gilt $f_2 = f_{2\cdot 1} = f_2 f_1 + 1$. Daraus erhalten wir nun $f_2 = f_3 + 3 = \frac{4}{f_2} + 3$. Das führt zu der quadratischen Gleichung $f_2^2 - 3f_2 - 4 = 0$, die die zwei Lösungen $f_2 = -1$ und $f_2 = 4$ hat. Wäre $f_2 = -1$, so würde $-1 = (-1) \cdot f_1 + 1$ und somit $f_1 = 2$ gelten, was aber der Voraussetzung widerspricht. Also muss $f_2 = 4$ gelten (in diesem Fall gilt $4 = 4 \cdot f_1 + 1$ und somit $f_1 = \frac{3}{4}$).

**30.** Bei einem Juwelier ist der Wert der Diamanten im Tresor 45-mal so groß wie der Wert der Diamanten in der Auslage. Als ein Kunde die zwei wertvollsten Diamanten aus der Auslage für sich reservieren lässt, bringt der Juwelier sie in den Tresor, um sie dort für ihn zu verwahren. Nun ist der Wert der Diamanten im Tresor 48-mal so groß wie der Wert der Diamanten in der Auslage. Welches ist die kleinstmögliche Anzahl an Diamanten, die jetzt noch in der Auslage liegen?

(**A**) 19 (**B**) 24 (**C**) 27 (**D**) 31 (**E**) 36

*Lösung:* Mit $d_1$ bezeichnen wir den Wert des wertvollsten und mit $d_2$ den Wert des zweitwertvollsten der reservierten Diamanten. Wir bezeichnen mit $T$ und $A$ den Gesamtwert aller anderen Diamanten im Tresor bzw. in der Auslage. Die Anzahl der Diamanten, die am Ende in der Auslage liegen, sei $n$. Damit erhalten wir die zwei Gleichungen $T = 45 \cdot (A + d_1 + d_2)$ und $T + d_1 + d_2 = 48A$. Setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir $45 \cdot (A + d_1 + d_2) + d_1 + d_2 = 48A$, also $A = \frac{46}{3} \cdot (d_1 + d_2)$. Wir schätzen nun $A$ nach oben ab: $A \leq n \cdot d_2 \leq n \cdot \frac{d_1 + d_2}{2}$. Also gilt $\frac{46}{3} \leq \frac{n}{2}$, das heißt $n \geq \frac{92}{3} = 30\frac{2}{3}$. In der Auslage müssen also jetzt noch mindestens 31 Diamanten liegen.

Dass 31 als kleinste Anzahl wirklich möglich ist, zeigt das Beispiel: In der Auslage lagen zu Beginn 31 Diamanten jeweils mit dem Wert $x$ und 2 Diamanten jeweils mit dem Wert $\frac{93}{92}x$. Die Anzahl der Diamanten im Tresor spielt keine Rolle, der Gesamtwert im Tresor muss lediglich 45-mal so groß sein wie der Gesamtwert der Auslage vor dem Reservieren der beiden wertvollsten Diamanten, denn aus $T = 45 \cdot (A + d_1 + d_2)$, also $T = 45 \cdot \left(31 \cdot x + 2 \cdot \frac{93}{92}x\right)$, folgt in jedem Falle $T + 2 \cdot \frac{93}{92}x = 45 \cdot 31 \cdot x + 46 \cdot 2 \cdot \frac{93}{92}x = 45 \cdot 31 \cdot x + 3 \cdot 31 \cdot x = 48 \cdot 31 \cdot x$, also $T + d_1 + d_2 = 48A$.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | A | E | A | C | D | B | C | B | A | B |
| Aufgabe | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Antwort | B | D | E | C | D | D | A | B | C | E |
| Aufgabe | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Antwort | D | D | B | C | D | A | B | E | E | B |

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | E | C | E | C | D | B | A | C | D | C |
| Aufgabe | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Antwort | B | D | D | C | A | D | E | E | C | B |
| Aufgabe | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Antwort | B | A | C | B | E | B | D | E | A | A |

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | C | A | D | D | B | D | C | A | A | E |
| Aufgabe | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Antwort | B | D | D | B | C | D | B | A | C | E |
| Aufgabe | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Antwort | A | A | B | E | E | C | C | A | E | D |

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.

Das Titelbild widmet sich dem 200. Geburtstag von Gregor Mendel. Er züchtete Erbsenpflanzen, um herauszufinden, wie einzelne Merkmale vererbt werden. Hinter der „Erbsenzählerei" steckt eine statistische Auswertung. Die von ihm entdeckten Gesetzmäßigkeiten sind als *Mendelsche Regeln* bekannt.

grafik | www.elephant-castle.de

**www.kaenguru-schweiz.ch**
**www.kangourou-suisse.ch**