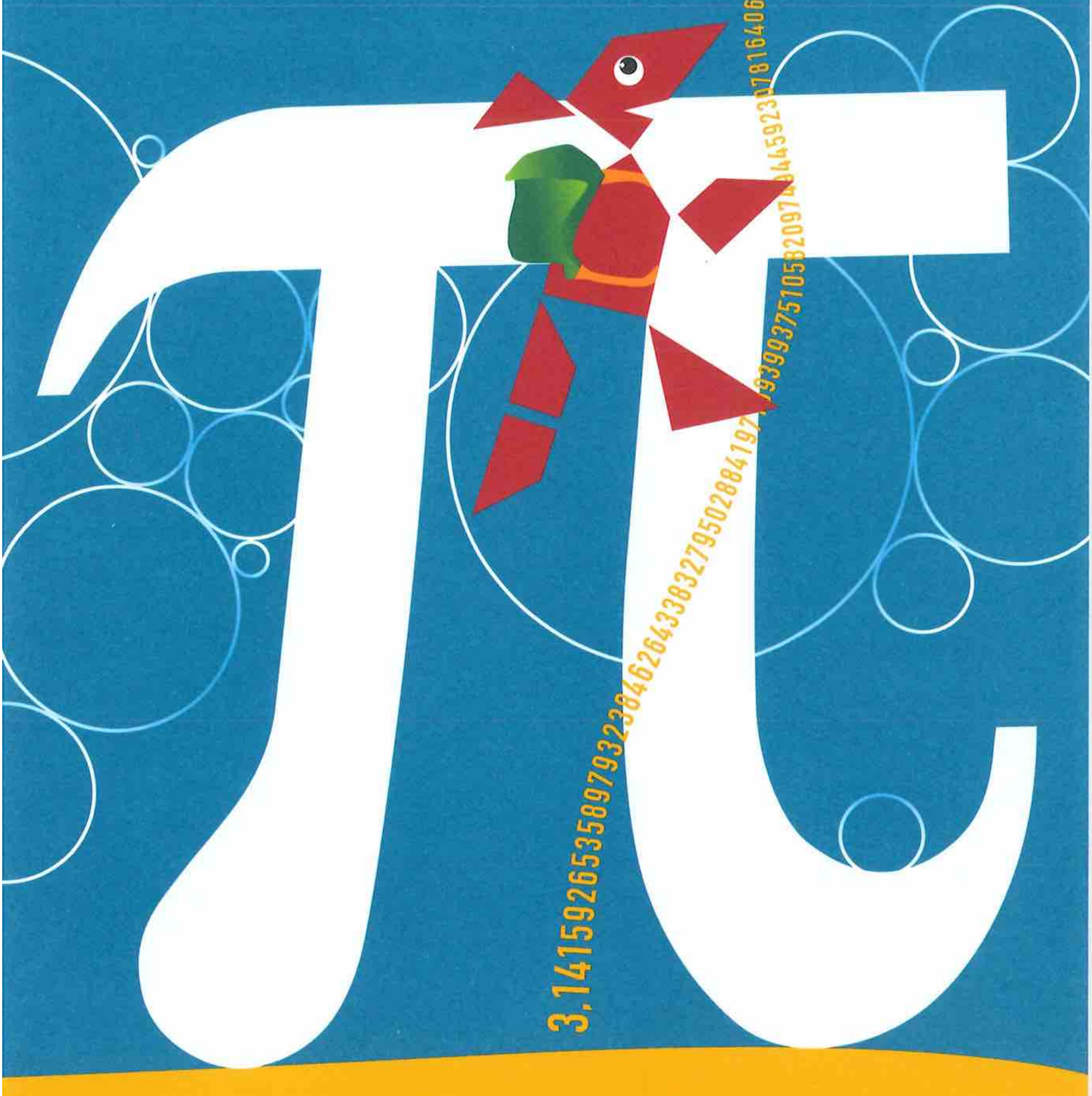
2020
Mathe mit dem Känguru



Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Interessierte am Känguru-Mathematikwettbewerb!

Erstens kommt es anders ...

Schon im Februar kamen bei einigen Leuten Zweifel auf, ob nicht dieses neue Corona-Virus auch unseren weltweiten Mathematikwettbewerb beeinträchtigen könnte, der ja wie immer am dritten Donnerstag im März stattfindet. Das wäre dieses Jahr der 19. März gewesen.

Aber eben – es kam dann ja anders. Mit der aufkommenden Bedrohung durch das Corona-Virus haben wir vom Vorstand des Vereins «Känguru Schweiz» zusammen mit Känguru Deutschland, mit denen wir eng zusammenarbeiten, nach möglichen Ersatzterminen gesucht. Am 13. März wurde uns schliesslich klar, dass der Wettbewerb nicht zum normalen Termin durchgeführt werden kann und wir offerierten den Schulen als *Plan B* den Ersatztermin 27. April 2020. Und bereits am Tag nach dieser Mitteilung wurde durch den Bundesrat der schweizweite *Lockdown* ausgerufen. Spätere Verschärfungen beinhalteten dann auch, dass die Schulen frühestens am 20. April wieder öffnen dürfen.

... und zweitens, als man denkt!

Es kam dann also nochmals nicht so, wie wir es gedacht hatten. Am 16. Mai orientierten wir unsere 696 angemeldeten Schulen mit insgesamt 49 557 Teilnehmenden darüber, dass der Wettbewerb dieses Jahr nicht in der üblichen Form durchgeführt werden kann. Wir schrieben etwa so:

Wir geben die Känguru-Aufgaben 2020 frei. Sie können sie also Ihren Teilnehmenden zukommen lassen und sie können sie selber oder evtl. mit Geschwistern oder Eltern lösen. Einen Rücklauf der Antworten wird es nicht geben und demzufolge auch keine offizielle Auswertung – und auch keine Preischen für alle. Vielleicht bringt unser Wettbewerb gerade jetzt in den Tagen von Fern- und Homeschooling eine erfreuliche Abwechslung in den neuen Alltag. Und es könnte gute Gespräche mit den Eltern geben, wenn die Aufgaben zusammen durchgegangen werden.

Zum Zeitpunkt der Drucklegung dieser Broschüre ist uns nicht bekannt, wie die Umsetzung dieses *Plans C* in den Schulen aussieht bzw. ausgesehen hat. Damit die ausführlichen Lösungen allen zur Verfügung stehen, lassen wir allen Schulen pro 20 Teilnehmende (aufgerundet) eine solche Lösungsbroschüre zukommen. Die Schulen bezahlen dafür (und für das bereits erhaltene Aufgabenmaterial) ein reduziertes Startgeld von einem Franken statt der üblichen drei.

Wir verbleiben in der Hoffnung auf eine normale Durchführung im 2021!

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack, P. Schmolke und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, B. Hell, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, D. Nikolenkov, Dr. A. Noack, A. Rupflin, A. Stahel, Dr. D. Vigerske, Dr. E. und Dr. W. Warmuth und J. Züger erarbeitet. Ein Teil der Knobeleien stammt aus der Feder von Dr. R. Vollmert.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

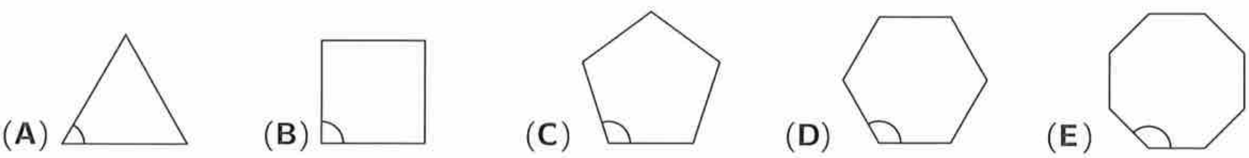
Klassenstufen 7 und 8

1. $\big((2020 : 5) : 2\big) : 2 =$

(A) 20 **(B)** 22 **(C)** 101 **(D)** 222 **(E)** 1001

Lösung: Wir rechnen nacheinander „von innen nach außen", so wie es die Klammern vorgeben: $2020 : 5 = 404$, $404 : 2 = 202$ und schließlich $202 : 2 = 101$.

2. In welchem dieser regelmäßigen Vielecke ist der markierte Innenwinkel am größten?



Lösung: Je größer die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks ist, desto größer sind die Innenwinkel. Im Achteck bei **(E)** ist der markierte Innenwinkel am größten.

3. Fritzi läuft zur Schule oder sie fährt mit dem Fahrrad. Für Hin- und Rückweg braucht sie zu Fuß insgesamt 40 Minuten und mit dem Fahrrad insgesamt 12 Minuten. Für den Hinweg braucht sie jeweils genauso lange wie für den Rückweg. Wie lange würde Fritzi insgesamt brauchen, wenn sie mit dem Fahrrad hinfährt und zu Fuß nach Hause geht?

(A) 26 Minuten **(B)** 28 Minuten **(C)** 30 Minuten **(D)** 32 Minuten **(E)** 34 Minuten

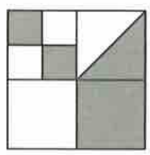
Lösung: Da Fritzi für Hinweg und Rückweg jeweils gleich lange braucht, braucht sie für den Hinweg mit dem Fahrrad $12 : 2 = 6$ Minuten und für den Rückweg zu Fuß $40 : 2 = 20$ Minuten. Insgesamt würde sie also $6 + 20 = 26$ Minuten brauchen.

4. Welche der folgenden Rechnungen liefert das größte Ergebnis?

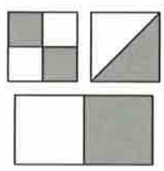
(A) $\frac{4+3}{2}$ **(B)** $\frac{4}{3+2}$ **(C)** $\frac{3+2}{4}$ **(D)** $\frac{4+2}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4+2}$

Lösung: Von zwei Brüchen mit demselben Nenner ist derjenige größer, der den größeren Zähler hat. Und: Von zwei Brüchen mit demselben Zähler ist derjenige größer, der den kleineren Nenner hat. Da von den fünf Brüchen der Bruch bei **(A)** den größten Zähler und gleichzeitig den kleinsten Nenner hat, ist das Ergebnis bei **(A)** am größten.

5. Ein großes Quadrat wurde in kleinere Quadrate unterteilt. In eines davon wurde außerdem eine Diagonale eingezeichnet. Welcher Anteil der Fläche des großen Quadrats ist grau?



(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{3}{8}$ **(C)** $\frac{4}{9}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$



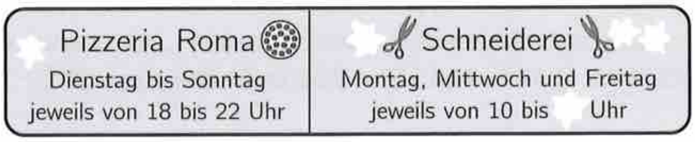
Lösung: Wir können das Quadrat wie rechts abgebildet in 3 Teile zerlegen, von denen jedes zur Hälfte grau ist. Der gesuchte Anteil ist also $\frac{1}{2}$.

6. Linus hilft bei der Inventur im Schuhladen. Insgesamt zählt er 24 Paar Sneakers, 26 Paar Stiefel und 40 Paar Sandalen. 27 der Schuhpaare sind braun und 20 der Schuhpaare sind schwarz. Wie viele Schuhpaare haben eine andere Farbe?

(**A**) 41 (**B**) 43 (**C**) 44 (**D**) 45 (**E**) 48

Lösung: Insgesamt zählt Linus nach Sorten $24 + 26 + 40 = 90$ Schuhpaare. Zieht er davon die schwarzen und braunen Schuhpaare ab, so erhält er $90 - 27 - 20 = 43$ Schuhpaare, die eine andere Farbe haben.

7. Die Pizzeria Roma und die Schneiderei nebenan haben gleich viele Stunden in der Woche geöffnet. Das Schild mit den Öffnungszeiten hat ein paar Schneebälle abbekommen. Wann schließt die Schneiderei?



(**A**) um 15 Uhr (**B**) um 16 Uhr (**C**) um 17 Uhr (**D**) um 18 Uhr (**E**) um 19 Uhr

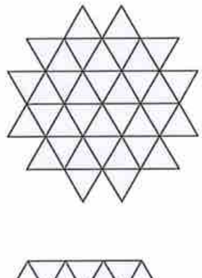
Lösung: Wir berechnen zunächst, wie lange die Pizzeria geöffnet ist. Sie hat an 6 Tagen jeweils 4 Stunden geöffnet, also $6 \cdot 4 = 24$ Stunden in der Woche.
Die Schneiderei ist an 3 Tagen geöffnet. Da Pizzeria und Schneiderei gleich viele Stunden pro Woche geöffnet haben, ist die Schneiderei an $24 : 3 = 8$ Stunden pro Tag geöffnet. Die Schneiderei schließt folglich um 18 Uhr.

8. Das Spiel Supertrio kann man entweder allein oder zu dritt spielen. Im Jugendklub sind drei Spielbretter aufgebaut. Wie viele Jugendliche können <u>nicht</u> an den drei Spielbrettern gleichzeitig spielen?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

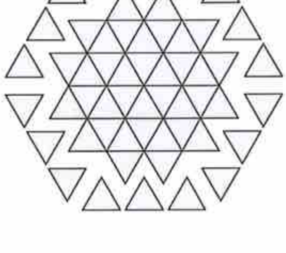
Lösung: Wir starten mit der maximalen Besetzung, das sind 3 voll besetzte Spielbretter. So können 9 Jugendliche gleichzeitig spielen. Sollen weniger Jugendliche spielen, so müssen, da nicht zu zweit gespielt werden kann, mindestens 2 Jugendliche einen Tisch verlassen. Erst dann ist eine Aufteilung auf die Spielbretter wieder möglich. 8 ist also nicht möglich.
Die anderen Aufteilungen erhalten wir, indem zunächst am ersten Tisch zwei Jugendliche weggehen $(9 - 2 = 7)$, dann am zweiten Tisch $(7 - 2 = 5)$ und schließlich am dritten Tisch $(5 - 2 = 3)$.

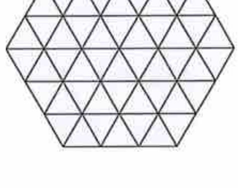
9. Frederik hat 36 identische kleine Dreiecke zu der abgebildeten Figur zusammengeschoben. Was ist die kleinste Anzahl an solchen Dreiecken, die Frederik der Figur hinzufügen muss, damit ein Sechseck entsteht?



(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 18 (**E**) 24

Lösung: Wie im Bild zu sehen, muss Frederik an jeder Seite 3 Dreiecke ergänzen, also insgesamt $6 \cdot 3 = 18$ Dreiecke.





10. Drei verschiedene der Zahlen -5, -3, -1, 2, 4, 6 werden miteinander multipliziert. Welches ist das kleinste Produkt, das man erhalten kann?

(**A**) -200 (**B**) -120 (**C**) -90 (**D**) -48 (**E**) -15

Lösung: Das Produkt ist kleinstmöglich, wenn es negativ ist und einen größtmöglichen Betrag hat. Wenn wir die drei betragsgrößten Zahlen -5, 4 und 6 wählen, so ist das Produkt negativ. Also ist $(-5) \cdot 4 \cdot 6 = -120$ das kleinste Produkt, welches man erhalten kann.

11. Steffi wandert auf dem Goldsteig im Oberpfälzer Wald von Neustadt durch Theisseil nach Letzau. Am Wegrand stehen zwei Wegweiser. Bei einem der beiden Wegweiser ist ein Stück abgebrochen. Welches ist das abgebrochene Teil?

(**A**) 1 km (**B**) 3 km (**C**) 4 km (**D**) 5 km (**E**) 9 km

Lösung: Beim ersten Schild ist Letzau noch 9 km entfernt, beim zweiten nur noch 4 km. Also läuft Steffi vom ersten Schild zum zweiten Schild 5 km. Dabei passiert sie Theisseil laut dem ersten Schild nach 4 km, also erreicht sie das zweite Schild 1 km nach Theisseil. Folglich steht auf dem abgebrochenen Teil 1 km.

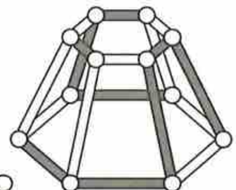
— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 11 gestellt. —

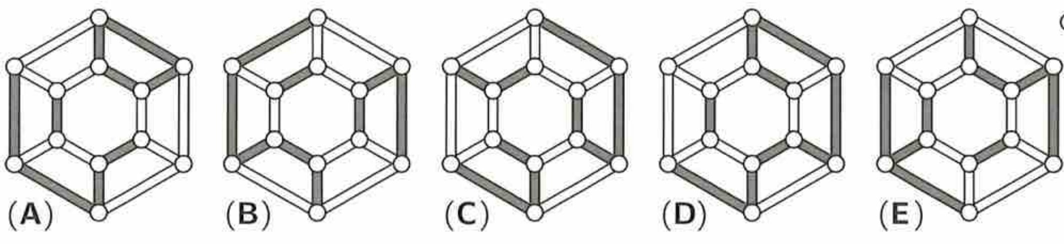
12. Miguels große Schwester muss für ihr Studium ein dickes Buch lesen. Sie hat den ganzen März dafür Zeit. Um das zu schaffen, müsste sie pro Tag durchschnittlich 30 Seiten lesen. Am Abend des 16. März hat sie bereits 570 Seiten geschafft. Wie viele Seiten muss Miguels Schwester durchschnittlich pro Tag im Rest des März lesen, um das Buch zu Ende zu lesen?

(**A**) 36 Seiten (**B**) 30 Seiten (**C**) 24 Seiten (**D**) 18 Seiten (**E**) 12 Seiten

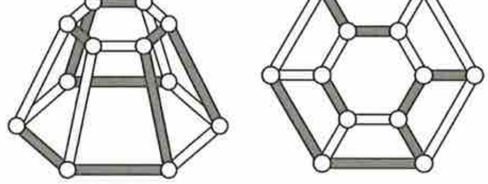
Lösung: Da der März 31 Tage hat, muss Miguels Schwester insgesamt $31 \cdot 30 = 930$ Seiten lesen. Nach 16 Tagen hat sie 570 Seiten geschafft. Also bleiben noch $930 - 570 = 360$ Seiten übrig. An den restlichen 15 Tagen muss sie folglich im Durchschnitt $360 : 15 = 24$ Seiten lesen.

13. Wie sieht das rechts abgebildete Gittermodell von oben aus?





Lösung: In der unteren Ebene sind zwei nebeneinanderliegende Rohre dunkel, und von oben gesehen geht von deren rechtem Ende ein dunkles Rohr nach oben, während die beiden anderen nach oben gehenden Rohre weiß sind. Das ist nur bei (**A**) und (**B**) der Fall. Folgt man dem dunklen Rohr nach oben, so kommt das nächste dunkle Rohr nach rechts und dann das nächste dunkle Rohr nach unten. Das ist nur bei (**B**) der Fall. Rechts ist die um 90° gedrehte Draufsicht von (**B**) zu sehen. Es lässt sich gut erkennen, dass auch die anderen Rohre übereinstimmen.



Wer sich die zusammenhängenden dunklen Rohre genauer anschaut, kann das gesuchte Bild etwas schneller finden. In dem Gittermodell ist vorn eine „Schlange" aus genau 5 aufeinanderfolgenden dunklen Stangen zu sehen. Das finden wir nur bei (**B**). Bei (**A**), (**C**) und (**E**) gibt es nur maximal 4 derartige Stangen, bei (**D**) ist die längste Schlange zu lang.

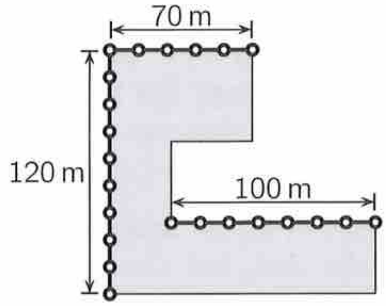
14. In der Fahrradwerkstatt sind wie stets viele Reifen zu flicken. Die akribische Meisterin bemerkt am Morgen überrascht: „Alle Fahrräder in der Werkstatt haben einen Platten. Drei Fünftel der Vorderräder haben einen Platten und drei Fünftel der Hinterräder haben einen Platten. An 5 Fahrrädern sind beide Räder platt." Wie viele Fahrräder sind heute in der Werkstatt?

(**A**) 15 (**B**) 20 (**C**) 25 (**D**) 30 (**E**) 35

Lösung: Alle Fahrräder haben einen Platten. Da drei Fünftel der Vorderräder einen Platten haben, haben die anderen zwei Fünftel der Fahrräder ausschließlich am Hinterrad einen Platten. Aus dem gleichen Grund haben genau zwei Fünftel der Fahrräder ausschließlich am Vorderrad einen Platten. Insgesamt haben also vier Fünftel genau einen Platten, entweder am Vorderrad oder am Hinterrad. Die 5 Fahrräder, bei denen beide Räder platt sind, sind das fehlende Fünftel. Somit gibt es insgesamt $5 \cdot 5 = 25$ Fahrräder in der Werkstatt.

15. Der Marie-Curie-Park soll rundherum einen Zaun bekommen. Ein Teil des Zauns steht bereits. Wie lang wird der Zaun insgesamt?

(**A**) 580 m (**B**) 590 m (**C**) 600 m (**D**) 610 m (**E**) 620 m



Lösung: Es stehen bereits $120\,\text{m} + 70\,\text{m} + 100\,\text{m} = 290\,\text{m}$ Zaun. Jedes Stück Zaun liegt einem Rand ohne Zaun gegenüber und auch jedes unbezaunte Stück Rand liegt einem Rand mit Zaun gegenüber. Also fehlt genauso viel Zaun, wie bereits steht. Der Zaun wird insgesamt $2 \cdot 290\,\text{m} = 580\,\text{m}$ lang.

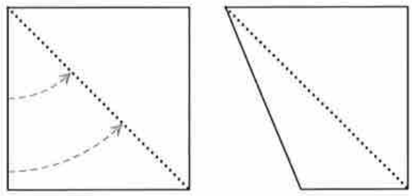
16. Christophs Gehalt beträgt 20 % des Gehalts seines Chefs. Wie viel Prozent von Christophs Gehalt beträgt das Gehalt von Christophs Chef?

(**A**) 80 % (**B**) 120 % (**C**) 180 % (**D**) 320 % (**E**) 500 %

Lösung: Christophs Gehalt beträgt 20 % des Gehalts seines Chefs, also $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Das heißt, Christophs Chef erhält das Fünffache von Christophs Gehalt. Wegen $5 = \frac{500}{100}$ beträgt das Gehalt von Christophs Chef also 500 % von Christophs Gehalt.

17. Romina nimmt sich ein quadratisches Stück Papier und faltet eine Seite auf die Diagonale. So entsteht ein neues Viereck. Wie groß ist der größte Innenwinkel in dem entstandenen Viereck?

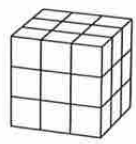
(**A**) 110° (**B**) 112,5° (**C**) 115° (**D**) 117,5° (**E**) 120°



Lösung: Das entstandene Viereck ist ein Trapez mit zwei rechten Winkeln. Der Innenwinkel oben links im Quadrat wird durch die Diagonale halbiert und der halbe Winkel wird durch die Faltung ein weiteres Mal halbiert. Der kleinste Innenwinkel in dem Trapez ist folglich $45° + \frac{1}{2} \cdot 45° = 67{,}5°$ groß. Also ist der größte Innenwinkel $360° - 2 \cdot 90° - 67{,}5° = 112{,}5°$ groß.

— *Ein ähnliches, aber schwereres Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 26 zu lösen.* —

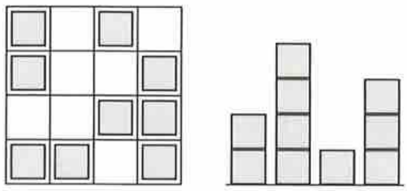
18. Henning hat 27 identische Würfel, von denen jeder genau zwei benachbarte rote Seitenflächen hat. Er benutzt alle 27 Würfel, um einen großen Würfel wie im Bild zu bauen. Wie viele komplett rote Seitenflächen kann der große Würfel höchstens haben?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Da der Würfel in der Ecke vorn links unten nur zwei rote Seitenflächen hat, kann mindestens eine der anliegenden Seitenflächen des großen Würfels nicht komplett rot sein. Das Gleiche gilt für den Würfel in der diagonal gegenüberliegenden Ecke hinten rechts oben, der zu den drei anderen Seitenflächen des großen Würfels gehört. Es gibt also mindestens zwei Seitenflächen des großen Würfels, die nicht komplett rot sind.
Malen wir umgekehrt einen $3 \times 3 \times 3$-Würfel vorn, hinten, links und rechts rot an und oben und unten nicht, so sind von den kleinen Würfeln jeweils höchstens zwei Seiten rot bemalt. Henning kann die kleinen Würfel demnach so zusammenbauen, dass vier Seitenflächen komplett rot sind.
— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 26 zu lösen.* —

19. Anouk hat aus identischen Holzwürfeln eine „Stadt" gebaut. Auf den Bildern ist der Blick von oben und von einer der Seiten zu sehen. Wie viele Holzwürfel kann Anouk höchstens benutzt haben?



(**A**) 26 (**B**) 25 (**C**) 24 (**D**) 23 (**E**) 22

Lösung: Das zweite Bild zeigt die „Stadt" entweder von vorn, von rechts, von hinten oder von links. Die maximale Anzahl an Holzwürfeln ergibt sich jeweils, wenn alle Türme in einer Reihe dieselbe Höhe haben. Die Anzahl der Holzwürfel pro Reihe ist dann das Produkt aus der Anzahl der Türme in der Reihe (siehe Draufsicht) und der Höhe dieser Türme (siehe Seitenansicht). Damit ergibt sich für jeden der 4 Fälle die folgende maximale Anzahl an Holzwürfeln:

$$\begin{aligned}
\text{von vorn:} &\quad 3\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 1+3\cdot 3=21\\
\text{von rechts:} &\quad 3\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 1+2\cdot 3=22\\
\text{von hinten:} &\quad 3\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 1+3\cdot 3=24\\
\text{von links:} &\quad 2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 1+3\cdot 3=23
\end{aligned}$$

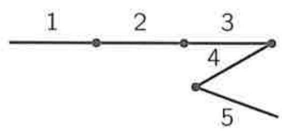
Anouk kann also höchstens 24 Holzwürfel benutzt haben.

Die Zahl 2 407 619 soll gerundet werden.
Auf welche Stelle muss gerundet werden, damit die gerundete Zahl am größten ist?

20. Merlin faltet den abgebildeten Streifen so an den gestrichelten Linien, dass die fünf mit Zahlen markierten Kästchen übereinander liegen. In welcher Reihenfolge können die Kästchen sicher nicht liegen?

(**A**) 3, 5, 4, 2, 1 (**B**) 3, 4, 5, 1, 2 (**C**) 3, 2, 1, 4, 5 (**D**) 3, 1, 2, 4, 5 (**E**) 3, 4, 2, 1, 5

Lösung: Wer mit einem Papierstreifen probiert, kann herausfinden, dass (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) möglich sind. Dass die Reihenfolge (**E**) ganz sicher nicht entstehen kann, sehen wir wie folgt: In Antwort (**E**) liegt die 3 ganz oben und die 4 direkt unter der 3. Das heißt, die 4 muss wie im Bild nach unten gefaltet werden und die 5 in die andere Richtung. Egal wie der linke Teil gefaltet wird, ist es unmöglich die 2 zwischen die 4 und 5 zu bekommen. Die Reihenfolge in (**E**) lässt sich also nicht erreichen.

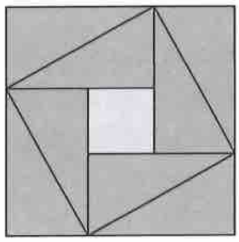


21. Mia geht an ihrem Geburtstag mit ihrer Mutter, ihrem Bruder, ihren 2 Onkeln, 3 Tanten und 4 Cousins ins Kino. Sie haben eine komplette Reihe mit 12 Plätzen für sich. Onkel Frank sitzt auf der einen Seite ganz außen, und Tante Birgit sitzt auf der anderen Seite ganz außen. Die 4 Cousins sitzen nebeneinander und auch die 3 Tanten sitzen nebeneinander. Mia sitzt auf dem 3. Platz von rechts. Wer sitzt auf dem 6. Platz von links?

(**A**) die Mutter (**B**) einer der Cousins (**C**) eine der Tanten
(**D**) einer der Onkel (**E**) der Bruder

Lösung: Mias 3 Tanten sitzen zusammen am Ende der Reihe. Da Mia den 3. Platz von rechts besetzt hat, müssen die Tanten also am linken Ende zusammen sitzen. Die 4 Cousins müssen nun zusammen Platz finden. Von links gesehen kann der erste Cousin frühestens auf dem 4. Platz sitzen und der letzte Cousin spätestens auf dem 9. Platz (auf dem 10. Platz sitzt bereits Mia). Auf dem 6. Platz von links (und auch auf dem 7.) sitzt dann auf jeden Fall einer der Cousins.

22. Acht identische rechtwinklige Dreiecke und ein kleines Quadrat sind zu einem großen Quadrat zusammengeschoben. Das große Quadrat ist $49\,\text{cm}^2$ groß und die größte Seite eines Dreiecks ist 5 cm lang (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Welchen Flächeninhalt hat das kleine Quadrat?

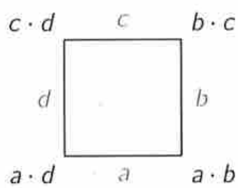


(**A**) $1\,\text{cm}^2$ (**B**) $4\,\text{cm}^2$ (**C**) $9\,\text{cm}^2$ (**D**) $16\,\text{cm}^2$ (**E**) $25\,\text{cm}^2$

Lösung: In der Figur sind drei Quadrate zu sehen: das große mit dem Flächeninhalt $49\,\text{cm}^2$, das mittlere mit dem Flächeninhalt $5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$ und das kleine mit dem gesuchten Flächeninhalt. Die Differenz der Flächeninhalte zwischen dem großen und dem mittleren Quadrat ist gleich der Differenz zwischen dem mittleren und dem kleinen Quadrat, denn es handelt sich jeweils um den Flächeninhalt von 4 Dreiecken. Somit erhalten wir den Flächeninhalt des kleinen Quadrats, indem wir $49\,\text{cm}^2 - 25\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$ vom Flächeninhalt des mittleren abziehen, also $25\,\text{cm}^2 - 24\,\text{cm}^2 = 1\,\text{cm}^2$.

23. An jeder Seite eines Quadrats steht eine positive ganze Zahl. An jeder der vier Ecken stehen die Produkte der beiden Zahlen, die an den jeweils anliegenden Seiten stehen. Die Summe der vier Zahlen an den Ecken ist 15. Wie groß ist die Summe der vier Zahlen an den Seiten?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 15



Lösung: Wir bezeichnen die Zahlen an den Seiten der Reihe nach mit a, b, c und d. Dann stehen an den Ecken die Zahlen $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot d$ und $a \cdot d$. Wir wissen, dass die Summe der Zahlen an den Ecken 15 ist. Wir klammern geschickt aus, $15 = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + a \cdot d = (a+c) \cdot b + (c+a) \cdot d = (a+c) \cdot (b+d)$, und stellen fest, dass 15 das Produkt aus $a+c$ und $b+d$ ist. Da a, b, c und d größer als oder gleich 1 sind, sind sowohl $a+c$ als auch $b+d$ größer als 1. Da sich 15 nur durch $3 \cdot 5$ als Produkt zweier ganzer Zahlen größer als 1 darstellen lässt, ist einer der Summanden $a+c$ und $b+d$ gleich 3 und der andere gleich 5. Die Summe aller Zahlen an den Seiten ist $(a+c)+(b+d) = 3+5 = 8$.

Der Bus 164 hält direkt vor meiner Haustür. Er fährt alle 25 Minuten. Früh um 7 Uhr fährt der erste und kurz vor 23 Uhr der letzte.
Wie viele Busse fahren innerhalb eines Tages zur vollen Stunde ab?

24. Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, deren Hälfte durch 2 teilbar ist, deren Drittel durch 3 teilbar ist und deren Fünftel durch 5 teilbar ist?

(**A**) 1 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Die Hälfte einer solchen Zahl ist durch 2 teilbar, also ist die Zahl selbst durch 4 teilbar. Analog muss eine solche Zahl durch 9 und 25 teilbar sein. Da 4, 9 und 25 teilerfremd sind, muss eine solche Zahl dann auch durch das Produkt $4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$ teilbar sein. Die gesuchten Zahlen sind genau die durch 900 teilbaren 4-stelligen Zahlen. Davon gibt es 10, nämlich $2 \cdot 900 = 1800$, $3 \cdot 900 = 2700, \ldots, 11 \cdot 900 = 9900$.

25. Im Finale der Luftgitarrenmeisterschaft bewertet jeder der drei Punktrichter X, Y und Z die fünf Kandidaten mit 1, 2, 3, 4 oder 5 Punkten. Jeder Punktrichter vergibt jede Punktzahl genau einmal. In der Tabelle rechts sind einige der Punkte und die fünf Summen notiert. Wie viele Punkte hat Aaron vom Punktrichter Z bekommen?

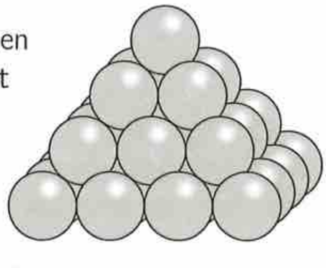
	Aaron	Sonja	Bella	Edwin	Mert
X	3	1			
Y		3	1		
Z					
Summe	10	8	6	7	14

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass Sonja 4 Punkte von Punktrichter Z bekommen hat. Mert hat insgesamt 14 Punkte bekommen, was nur dann möglich ist, wenn er zweimal 5 Punkte und einmal 4 Punkte erhalten hat. Von Punktrichter Z hat er 5 Punkte erhalten, da dieser schon 4 Punkte an Sonja vergeben hat. Von Punktrichter X hat Mert auch 5 Punkte erhalten, da aufgrund der Summe und der bereits eingetragenen Einsen weder Bella noch Edwin 5 Punkte von Punktrichter X erhalten haben können. Also hat Punktrichter Y an Mert 4 Punkte vergeben. Da Edwin auch von Punktrichter Y keine 5 Punkte erhalten haben kann, hat Punktrichter Y seine 5 Punkte an Aaron vergeben. Von Punktrichter Z hat Aaron folglich 2 Punkte erhalten.
Für die vollständig ausgefüllte Tabelle gibt es zwei Möglichkeiten, wie rechts zu sehen ist.

	Aaron	Sonja	Bella	Edwin	Mert
X	3	1	**2 / 4**	**4 / 2**	**5**
Y	**5**	3	1	**2**	**4**
Z	**2**	**4**	**3 / 1**	**1 / 3**	**5**
Summe	10	8	6	7	14

26. Elena baut eine Pyramide aus gleich großen Holzkugeln. Die einzelnen Schichten bestehen aus 4×4, 3×3 und 2×2 Kugeln, die jeweils quadratisch angeordnet sind. Ganz oben liegt eine einzige Kugel. Einige der Kugeln berühren einander. Wie viele Berührungspunkte haben die 30 Kugeln insgesamt?



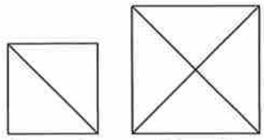
(**A**) 72 (**B**) 85 (**C**) 88 (**D**) 92 (**E**) 96

Lösung: Wir zählen zunächst die Berührungspunkte innerhalb einer Schicht. Dazu stellen wir uns gedanklich eine Schicht mit $n \times n$ Kugeln vor. Alle Kugeln dieser Schicht haben einen Berührungspunkt auf der rechten Seite mit Ausnahme der n Kugeln ganz rechts. Insgesamt sind das $n^2 - n$ Berührungspunkte. Ebenso haben alle Kugeln dieser Schicht einen Berührungspunkt auf der hinteren Seite mit Ausnahme der n Kugeln ganz hinten. Also gibt es pro Schicht $2 \cdot (n^2 - n)$ Berührungspunkte. Das sind dann $2 \cdot (4^2 - 4) = 24$ in der untersten Schicht, $2 \cdot (3^2 - 3) = 12$ in der nächsten Schicht und $2 \cdot (2^2 - 2) = 4$ in der zweiten Schicht von oben.
Jede Kugel in den 3 oberen Schichten, das sind 14 Kugeln, hat außerdem 4 Berührungspunkte mit den Kugeln der darunter liegenden Schicht. So kommen $4 \cdot 14 = 56$ Berührungspunkte hinzu. Insgesamt sind es $24 + 12 + 4 + 56 = 96$ Berührungspunkte.

27. Sofia hat 52 identische rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke. Sie möchte einige der Dreiecke nutzen, um lückenlos und ohne Überlappung ein Quadrat zu legen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Seitenlänge eines solchen Quadrats?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

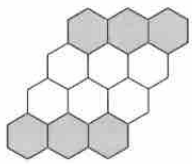
Lösung: Jedes Quadrat, das sich legen lässt, ist aus kleinen Quadraten entweder vom Typ A oder vom Typ B zusammengesetzt, wie rechts abgebildet. Aus den 52 Dreiecken lassen sich bis zu $52 : 2 = 26$ Quadrate vom Typ A bilden. Es gibt 5 Quadratzahlen kleiner als oder gleich 26, nämlich 1, 4, 9, 16 und 25. Das heißt, Sofia kann 1, 4, 9, 16 oder 25 Quadrate vom Typ A zu einem großen Quadrat legen. Es gibt also Quadrate aus $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 9 = 18$, $2 \cdot 16 = 32$ und $2 \cdot 25 = 50$ der Dreiecke.



Typ A Typ B

Analog lassen sich bis zu $52 : 4 = 13$ Quadrate vom Typ B bilden, von denen Sofia 1, 4 oder 9 nehmen kann, um ein großes Quadrat daraus zu legen. So ergeben sich Quadrate aus $4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 4 = 16$ und $4 \cdot 9 = 36$ dieser Dreiecke.
Da die genannten Quadrate jeweils aus unterschiedlich vielen der Dreiecke bestehen, haben sie unterschiedliche Flächeninhalte und damit auch verschiedene Seitenlängen. Insgesamt gibt es also 8 Möglichkeiten für die Seitenlänge eines solchen Quadrats.

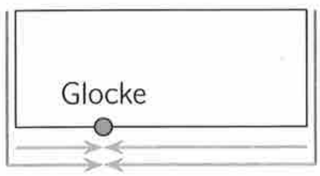
Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Bild rechts zwei weiße Sechsecke grau auszumalen, sodass dann alle acht grauen Sechsecke zusammenhängen?
Und wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn drei weiße Sechsecke grau ausgemalt werden sollen?



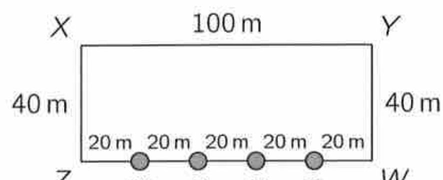
28. Die kleine Burg Drachenfels ist von einer rechteckigen Mauer mit den Maßen $40\,\text{m} \times 100\,\text{m}$ umgeben. Auf der Mauer steht an jeder Ecke ein Wächter. Als der Burgherr die Pausenglocke auf der Mauer läutet, eilen drei Wächter auf den Randmauern auf kürzestem Weg zum Burgherren. Sie legen insgesamt 200 m zurück. Nur der Wächter Alfred schläft mal wieder an seiner Ecke. Der Burgherr läuft auf den Randmauern auf kürzestem Wege zu Alfred, um ihn zu wecken. Wie lang ist sein Weg?

(**A**) 40 m (**B**) 48 m (**C**) 60 m (**D**) 80 m (**E**) 100 m

Lösung: Würden alle Burgwächter zur Glocke laufen, dann würde die Länge der Seite mit der Glocke zweimal abgelaufen werden, die Seite gegenüber gar nicht und die beiden anderen Seiten genau einmal (s. Bild rechts oben). Die Addition dieser Wege ergibt genau die Gesamtlänge der Mauer, also $2 \cdot (100\,\text{m} + 40\,\text{m}) = 280\,\text{m}$. Die drei Burgwächter sind 200 m gelaufen, also müssen die fehlenden 80 m Alfreds Weg entsprechen. Der Burgherr läuft nun Alfreds eigentlichen Weg in entgegengesetzter Richtung, also 80 m.



Wir können außerdem ermitteln, wo sich die Glocke befinden kann. Sie kann nicht an einer der kurzen Seiten sein, da dann keine der Ecken 80 m entfernt wäre. Auf jeder der langen Seiten kommen die vier im Bild rechts markierten Stellen in Frage. Dabei befindet sich Alfred in der Ecke X, wenn sich die Glocke an der Stelle x befindet (analog mit den Punkten Y, Z und W).



29. Die drei Ameisen Amanda, Boris und Rosa beginnen gleichzeitig und jede mit konstanter Geschwindigkeit am Fuße einer Sonnenblume mit dem Erklimmen des Stengels. Amanda erreicht zuerst die Blüte, da hat Boris noch 12 cm vor sich und Rosa noch 39 cm. Als Boris die Blüte erreicht, liegen noch 29 cm vor Rosa. Wie lang ist der Stengel der Sonnenblume?

(**A**) 144 cm (**B**) 156 cm (**C**) 160 cm (**D**) 174 cm (**E**) 180 cm

Lösung: Während Boris die letzten 12 cm läuft, schafft Rosa nur 10 cm. Da alle drei Ameisen mit konstanter Geschwindigkeit laufen, gerät Rosa 1 cm in Rückstand zu Boris, wenn Boris 6 cm läuft. Als Boris schließlich die Blüte erreicht, hat Rosa 29 cm Rückstand, was bedeutet, dass Boris insgesamt $29 \cdot 6\,\text{cm} = 174\,\text{cm}$ gelaufen ist. Das ist die Länge des Stengels der Sonnenblume.

30. Luise hat sich eine vierstellige Zahl gedacht. Pierre versucht, sie herauszukriegen. Seine bisherigen Versuche waren alle falsch, aber Luise hat ihm Tipps gegeben.

7642 — Keine der Ziffern ist korrekt.
2741 — Eine Ziffer ist korrekt, sie steht aber an der falschen Stelle.
4132 — Zwei Ziffern sind korrekt, aber beide stehen an der falschen Stelle.
9826 — Eine Ziffer ist korrekt und steht auch an der richtigen Stelle.
5079 — Zwei Ziffern sind korrekt. Eine davon steht an der richtigen Stelle, die andere nicht.

Welches ist die letzte Ziffer von Luises Zahl?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 9

Lösung: Wir überlegen zunächst, welche Ziffern in dem Code vorkommen. Da 2, 4, 6 und 7 laut erster Zeile falsch sind, müssen laut dritter Zeile 1 und 3 richtig sein, und in der vierten Zeile ist entweder 8 oder 9 richtig. Wenn in der vierten Zeile 8 richtig wäre, dann wüssten wir schon drei Ziffern, nämlich 1, 3 und 8, und dann könnten in der letzten Zeile nicht zwei Ziffern richtig sein. Also muss 9 richtig sein und eine der Ziffern 5 oder 0, da 7 laut der ersten Zeile nicht vorkommt.
Wir überlegen nun, an welchen Stellen die Ziffern stehen. Laut der vierten Zeile steht die 9 an der ersten Stelle. In der fünften Zeile steht damit die 9 an der falschen Stelle und die Ziffer, die an der richtigen Stelle steht, muss die 0 sein, die Ziffer 5 kommt in Luises Zahl nicht vor. Da die 3 in der dritten Zeile an der falschen Stelle steht, muss sie an der vierten Stelle stehen – das ist die gesuchte Ziffer. An der dritten Stelle steht die 1, Luises Zahl ist 9013.

Sudoku

In den Diagrammen soll in jedes Feld ein Symbol eingetragen werden und zwar so, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem dick umrandeten Rechteck jedes Symbol genau einmal vorkommt.

Hier ein Beispiel, bei dem die einzutragenden Symbole gewöhnliche Buchstaben sind:

A		C	D
	D		B
D	C		
	A		

→

A	**B**	C	D
C	D	**A**	B
D	C	**B**	**A**
B	A	**D**	**C**

Wie sehen die vollständig ausgefüllten Sudokus aus?

	◇	○	
☆			◇
	△		○
○		◇	

		II			
	IV	I			
					V
			III		
VI				IV	
	III				I

W	Y				
			W		Z
	W			U	X
X	U			V	
V		U			
					U

Ziegelsudoku

In den folgenden Ziegelsudokus soll natürlich wie für Sudokus üblich in jeder Zeile und in jeder Spalte jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommen. Außerdem soll in jedem dick umrandeten „Ziegel", der aus zwei Kästchen besteht, eine gerade Zahl und eine ungerade Zahl stehen.

Wer löst die folgenden Ziegelsudokus?

		3	6		
	6			3	
4					6
2					5
	2			1	
		2	1		

4			3		2
				3	
		2			5
2			4		
	4				
1		3			4

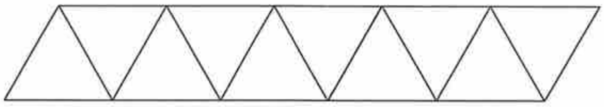
	3		6	4	5
			4		
		6			
		2			
			1		
	4		2	3	6

Trihexaflexagon-Bastelecke

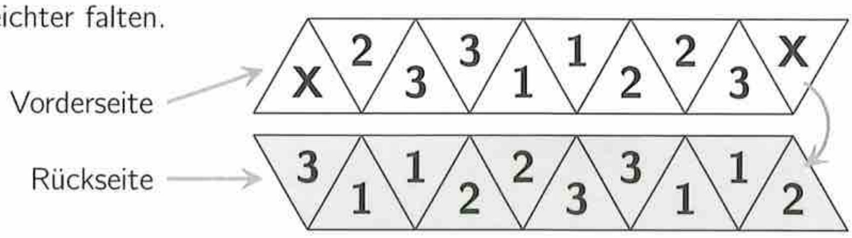
Ein Trihexaflexagon ist ein bewegliches Sechseck, das aus einem Streifen gleichseitiger Dreiecke gefaltet werden kann. Das Sechseck lässt sich in der Mitte öffnen und kann so sein Aussehen verändern.

Zum Basteln eines Trihexaflexagons benötigen wir ein A4-Blatt.

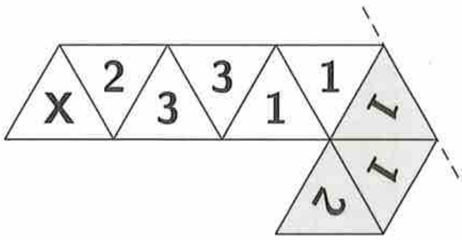
1. Wir zeichnen mit Zirkel und Lineal einen Streifen, der aus 10 gleichseitigen Dreiecken besteht. Wählen wir 4 cm als Seitenlänge der Dreiecke, so passt der Streifen geradeso quer auf das Blatt. Wer die Dreiecksseiten kräftig nachzeichnet, kann an diesen Stellen später leichter falten.

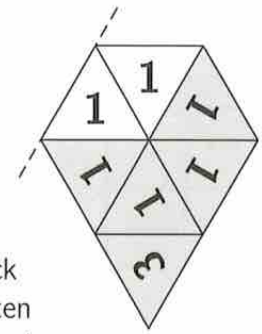


2. Wir schneiden den Streifen aus und beschriften die beiden Seiten mit Zahlen, so wie angegeben.



3. Nun falten wir die 3 Dreiecke am rechten Ende wie abgebildet nach vorn. Dann falten wir die 4 Dreiecke am linken Ende nach hinten, jedoch so, dass sie unten vor der 2 auf dem rechten Ende liegen.



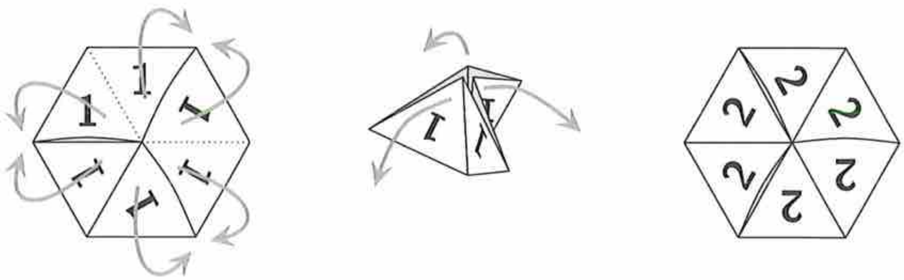


4. Entstanden ist ein Sechseck mit Einsen und ein kleines, überstehendes Dreieck mit einer 3. Dieses trägt auf der Rückseite ein Kreuz. Wir falten es nach hinten und kleben die beiden Dreiecke mit den Kreuzen mit einem Klebestift aufeinander.

Fertig ist das Trihexaflexagon!

Im Moment sind vorn die Einsen zu sehen und hinten die Dreien. Die Zweien sind im Inneren versteckt.

Um die Zweien nach vorn zu bringen, knicken wir die drei offenen Faltkanten nach oben. Dann öffnen wir das Trihexaflexagon wie eine Blume, indem wir es an den oberen Ecken auseinanderfalten. Nun sind die Zweien vorn zu sehen und die Einsen auf der Rückseite.



Durch wiederholtes Anwenden können wir nacheinander jede der Zahlen nach vorne bringen.

Und statt der Zahlen kann das Trihexaflexagon natürlich auch mit schönen Mustern verziert werden.

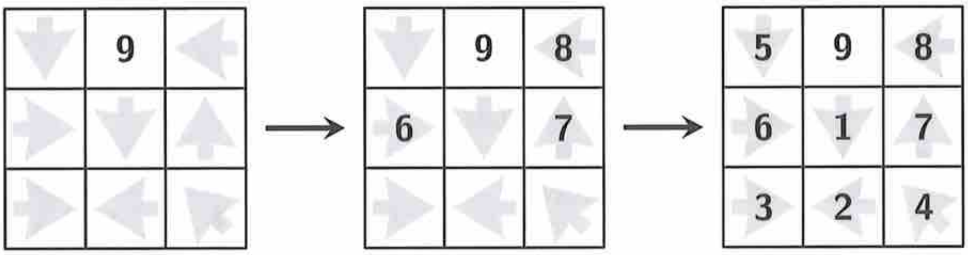
Probier's aus!

Diese Anleitung wurde freundlicherweise von Jürgen Köller zur Verfügung gestellt. Auf seiner Seite www.mathematische-basteleien.de/flexagon.htm werden noch weitere Flexagone vorgestellt.

Nachfolger-Pfeile

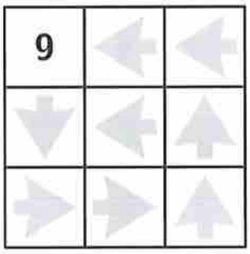
Die angegebenen Zahlen sollen in die Kästchen so eingetragen werden, dass der Pfeil in jedem Kästchen in die Richtung zeigt, in der der Nachfolger der Zahl in diesem Kästchen zu finden ist. Dieser Nachfolger muss nicht direkt im nächsten Kästchen in dieser Richtung stehen.

Hier ist ein Beispiel:

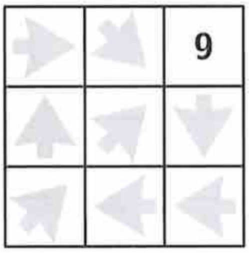


1 bis 9

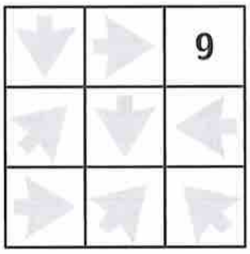
Wer findet die Lösungen der folgenden Rätsel?



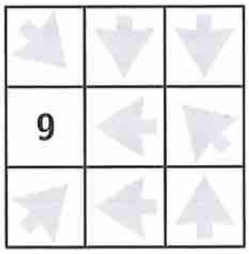
1 bis 9



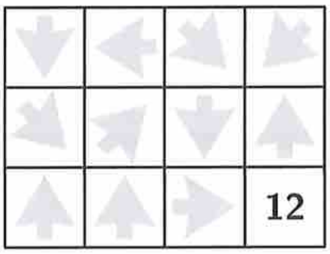
1 bis 9



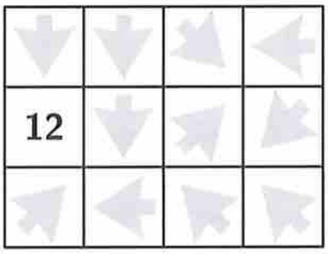
1 bis 9



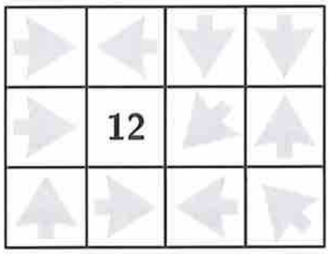
1 bis 9



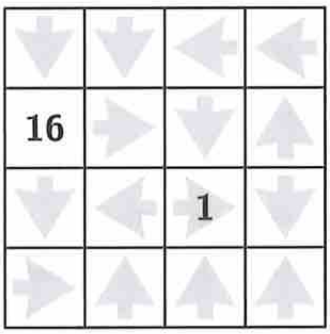
1 bis 12



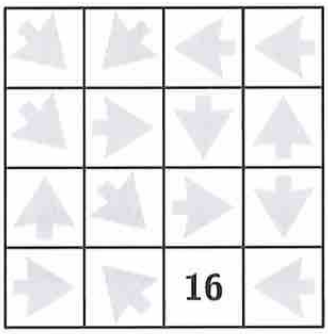
1 bis 12



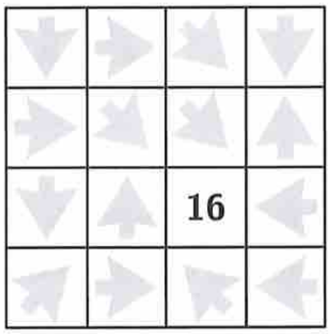
1 bis 12



1 bis 16



1 bis 16



1 bis 16

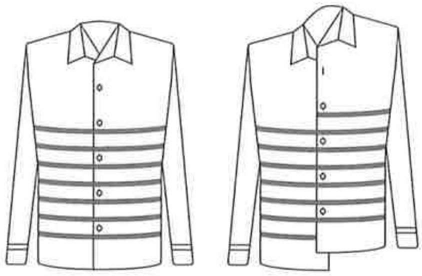
Klassenstufen 9 und 10

1. Welche der folgenden Rechnungen hat das größte Ergebnis?

(**A**) $12345 + 6$ (**B**) $1234 + 56$ (**C**) $123 + 456$ (**D**) $12 + 3456$ (**E**) $1 + 23456$

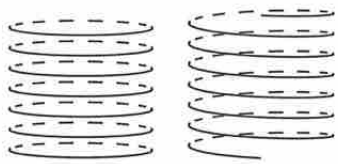
Lösung: Die Ergebnisse bei (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) sind alle kleiner als 20000. Das Ergebnis bei (**E**) ist größer als 20000, und ist damit das größte.

2. Wenn Tom sein Hemd richtig zuknöpft, wie im linken Bild zu sehen, bilden die horizontalen Streifen 7 geschlossene Ringe um seinen Körper. Heute Morgen hat er sein Hemd falsch zugeknöpft, wie im rechten Bild zu sehen. Wie viele geschlossene Ringe bilden die Streifen nun um Toms Körper?



(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Rechts ist zu sehen, wie die Streifen beim richtig und beim falsch zugeknöpften Hemd aussehen. Beim falsch zugeknöpften Hemd bilden die Streifen eine Schraubenlinie. Es ist dann kein geschlossener Ring zu sehen.

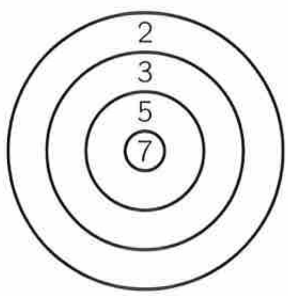


3. Die Jahreszahlen 2020 und 1717 bestehen beide aus zwei gleichen zweistelligen Zahlen. In wie vielen Jahren von heute an hat eine Jahreszahl zum ersten Mal wieder diese Eigenschaft?

(**A**) in 20 Jahren (**B**) in 101 Jahren (**C**) in 120 Jahren (**D**) in 121 Jahren (**E**) in 202 Jahren

Lösung: Die nächste Jahreszahl mit dieser Eigenschaft ist 2121. Das ist in 101 Jahren.

4. An Olivias Schule findet ein Wettbewerb im Bogenschießen statt. Jeder Pfeil, der trifft, bringt so viele Punkte wie im getroffenen Feld stehen. Zum Schluss werden alle erzielten Punkte multipliziert. Als Produkt erhält Olivia 18 Punkte. Sie hat mit jedem Pfeil getroffen. Wie viele Treffer hatte Olivia?



(**A**) 9 (**B**) 6 (**C**) 5 (**D**) 3 (**E**) 2

Lösung: In jedem Feld der Zielscheibe steht eine Primzahl. Wir zerlegen also 18 in Primfaktoren: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Olivia hat folglich einmal die 2 und zweimal die 3 getroffen. Insgesamt hatte sie 3 Treffer.

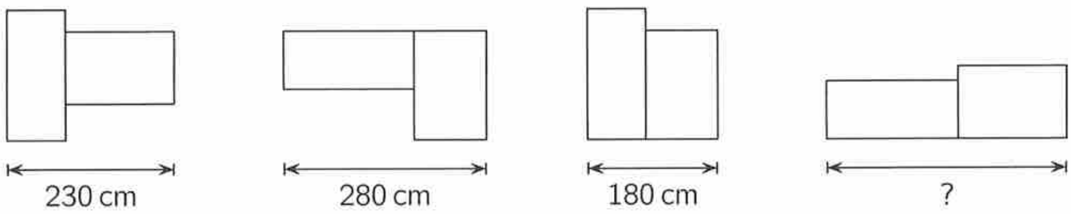
Wie viele Monate mit fünf Sonntagen kann es in einem Jahr höchstens geben?

5. Die Summe von 4 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist 2. Welche ist die kleinste dieser 4 Zahlen?

(**A**) -3 (**B**) -2 (**C**) -1 (**D**) 0 (**E**) 1

Lösung: Wenn 4 aufeinanderfolgende ganze Zahlen die Summe 2 haben, ist klar, dass sowohl positive als negative Zahlen darunter sind, allerdings mehr positive als negative. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit: -1, 0, 1, 2. Die gesuchte kleinste Zahl ist -1.

6. Zwei rechteckige Tische lassen sich auf vier verschiedene Arten zusammenschieben:



Welche Längenangabe gehört an die Stelle des Fragezeichens?

(**A**) 330 cm (**B**) 350 cm (**C**) 360 cm (**D**) 400 cm (**E**) 410 cm

Lösung: In den beiden mittleren Bildern ist zu erkennen, dass der linke Tisch 100 cm länger ist als er breit ist. Also ist die gesuchte Länge 100 cm größer als die Längenangabe im Bild ganz links, das heißt 230 cm + 100 cm = 330 cm.

Da in den beiden linken Bildern wie auch in den beiden rechten Bildern Länge und Breite der beiden Tische jeweils einmal in die Längenangaben einfließen, lässt sich die gesuchte Längenangabe auch so berechnen: 230 cm + 280 cm − 180 cm = 330 cm.

Finde eine Rechenaufgabe, in der jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal vorkommt und deren Ergebnis 2020 ist. Es dürfen $\cdot$, + und − verwendet werden, und es dürfen auch mehrstellige Zahlen vorkommen.

Wer findet mehrere Möglichkeiten?

7. Jeder Buchstabe in der Rechnung $\begin{array}{r} \mathbf{AB} \\ +\,\mathbf{CD} \\ \hline \mathbf{43} \end{array}$ steht für eine Ziffer. In der Rechnung rechts $\begin{array}{r} \mathbf{AD} \\ +\,\mathbf{CD} \\ +\,\mathbf{AB} \\ +\,\mathbf{CB} \\ \hline ? \end{array}$ stehen die Buchstaben für dieselben Ziffern. Was ist das Ergebnis der Rechnung rechts?

(**A**) 43 (**B**) 77 (**C**) 86 (**D**) 98 (**E**) 102

Lösung: In der Rechnung rechts tauchen die Zehnerziffern **A** und **C** und die Einerziffern **B** und **D** jeweils doppelt so oft auf wie in der ursprünglichen Rechnung. Das gesuchte Ergebnis ist $2 \cdot 43 = 86$.

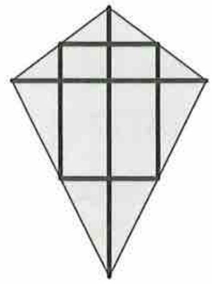
— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 8 zu lösen. —

8. Auf der Veranda stehen 8 Hocker, dreibeinige und vierbeinige. Marius klebt von unten an jedes Hockerbein einen Bodenschoner aus Filz, insgesamt 27 Stück. Wie viele der Hocker auf der Veranda sind dreibeinig?

(**A**) 7 (**B**) 6 (**C**) 5 (**D**) 4 (**E**) 2

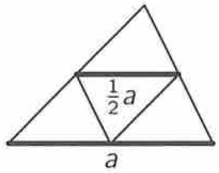
Lösung: Klebt Marius bei jedem Hocker zuerst an genau 3 Beine einen Bodenschoner, so braucht er dazu insgesamt $3 \cdot 8 = 24$ Stück. Es bleiben noch 3 Stück übrig. Da bei allen vierbeinigen Hockern noch genau ein Bodenschoner fehlt, müssen es also 3 vierbeinige Hocker sein. Somit gibt es 5 dreibeinige.

9. Judith hat eine Holzleiste in 6 Teile zersägt und damit einen Drachen gebaut. Für die Diagonalen hat sie ein 60 cm langes Stück und ein 40 cm langes Stück genommen. Mit den anderen vier Teilen der Leiste hat sie die Mittelpunkte der Drachenseiten verbunden. Wie lang war die Leiste, bevor sie zerschnitten wurde?

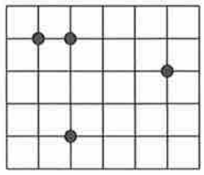


(**A**) 150 cm (**B**) 180 cm (**C**) 200 cm (**D**) 210 cm (**E**) 225 cm

Lösung: In einem Dreieck ist die Strecke zwischen zwei Seitenmittelpunkten halb so lang wie die dritte Dreiecksseite und parallel zu dieser. Jede Leiste, die die Mittelpunkte zweier Drachenseiten verbindet, ist demzufolge halb so lang wie die Diagonale, zu der sie parallel ist. Folglich war die Leiste, bevor sie zerschnitten wurde, $60\,\text{cm} + 40\,\text{cm} + 2 \cdot 30\,\text{cm} + 2 \cdot 20\,\text{cm} = 200\,\text{cm}$ lang.



10. Auf Kästchenpapier sind vier Punkte markiert. Jedes Kästchen ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 mm. Je drei dieser vier Punkte können als Eckpunkte eines Dreiecks gewählt werden. Welches ist der kleinste Flächeninhalt eines solchen Dreiecks?



(**A**) $12{,}5\,\text{mm}^2$ (**B**) $25\,\text{mm}^2$ (**C**) $40\,\text{mm}^2$ (**D**) $50\,\text{mm}^2$ (**E**) $62{,}5\,\text{mm}^2$

Lösung: Von den vier möglichen Dreiecken kommen für das kleinste Dreieck nur die beiden Dreiecke in Frage, die die beiden Punkte oben links als Eckpunkte haben. Wählen wir die Strecke zwischen diesen beiden Punkten als Grundseite, dann hat das Dreieck, das aus den drei oberen Punkten gebildet wird, eine kleinere Höhe als das andere Dreieck und somit den kleineren Flächeninhalt. Also beträgt der kleinste Flächeninhalt eines solchen Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot 5\,\text{mm} \cdot 5\,\text{mm} = 12{,}5\,\text{mm}^2$.

11. Der Eifelsteig, ein Wanderweg an der deutsch-belgischen Grenze, führt auf dem Abschnitt von Roetgen nach Monschau vorbei an einem Granitblock, der „Kaiser Karls Bettstatt" genannt wird. Am Wegrand stehen zwei Wegweiser. Einer war neulich beschädigt. Welche Kilometerangabe stand auf dem beschädigten Schild?

(**A**) 1 km (**B**) 2 km (**C**) 3 km (**D**) 4 km (**E**) 5 km

Lösung: Wenn auf einem Wegweiser die Schilder von zwei Orten in entgegengesetzte Richtungen weisen, dann ist die Entfernung dieser beiden Orte zueinander die Summe der beiden Entfernungsangaben. Demzufolge beträgt die Entfernung zwischen Roetgen und Monschau 17 km und die zwischen Roetgen und Kaiser Karls Bettstatt 10 km. Die Entfernung zwischen Kaiser Karls Bettstatt und Monschau beträgt also $17\,\text{km} - 10\,\text{km} = 7\,\text{km}$, was wir auch direkt vom linken Wegweiser ablesen könnten. Auf dem beschädigten Schild stand folglich $7\,\text{km} - 4\,\text{km} = 3\,\text{km}$.

— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 11 gestellt. —

12. In den Ferien fährt Helen für 18 Tage zu ihrer Großmutter. An jedem Tag gehen sie ins Freibad. Jeden Dienstag, Samstag und Sonntag haben die Turmspringer dort eine Trainingseinheit, da will Helen unbedingt zuschauen. Die 18 Tage liegen so, dass Helen bei der größtmöglichen Anzahl von Trainingseinheiten zuschauen kann. Welcher Wochentag ist Helens erster Tag bei ihrer Großmutter?

(**A**) Montag (**B**) Dienstag (**C**) Mittwoch (**D**) Samstag (**E**) Sonntag

Lösung: Helen ist 2 volle Wochen und 4 Tage bei ihrer Großmutter. In den vollen Wochen sind natürlich jeweils alle 3 Turmspringtage enthalten. In den 4 zusätzlichen Tagen kann Helen höchstens 3 Turmspringtage dabeihaben. Das ist der Fall, wenn ihr erster Ferientag ein Samstag ist.

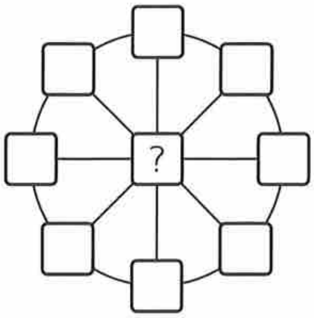
13. Wenn $11x + 33y = 121$ ist, wie groß ist dann $7x + 21y$?

(**A**) 77 (**B**) 64 (**C**) 49 (**D**) 44 (**E**) 28

Lösung: Teilen wir die Gleichung durch 11, so erhalten wir $x + 3y = 11$. Wenn wir nun mit 7 multiplizieren, bekommen wir $7x + 21y = 77$.

Für welche zwei Ziffern A und B gilt $AB \cdot B + BA \cdot A = 441$?
Und für welche gilt $AB \cdot B + BA \cdot A = 774$?

14. Jeremias möchte in jedes der 9 Kästchen der Figur rechts eine Zahl schreiben. Dabei soll die Summe der 3 Zahlen auf jeder Linie, die durch das Kästchen in der Mitte verläuft, 13 sein. Die Summe der 8 Zahlen auf dem Außenkreis soll 40 sein. Welche Zahl muss Jeremias in das Kästchen in der Mitte schreiben?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Da die 3 Zahlen auf jeder der 4 Linien, die durch das Kästchen in der Mitte verlaufen, die Summe 13 haben, ist die Summe zweier gegenüberliegender Zahlen auf dem Außenkreis jeweils gleich. Somit beträgt die Summe der 8 Zahlen auf dem Außenkreis genau das Vierfache der Summe zweier gegenüberliegender Zahlen. Die Summe zweier gegenüberliegender Zahlen beträgt somit $40 : 4 = 10$. Deshalb muss Jeremias in das Kästchen in der Mitte die 3 schreiben.

15. Lucia startet ihre Autofahrt zum 520 km entfernten Wohnort ihrer Tante mit 14 Liter Kraftstoff im Tank. Ihr altes Auto verbraucht 10 Liter pro 100 km. Nach 55 km werden die nächsten Tankstellen, die sich entlang der Autobahn befinden, angezeigt. Sie sind 35 km, 45 km, 55 km, 75 km und 95 km entfernt. Der Tank von Lucias Auto fasst 40 Liter. Lucia möchte nur einmal zum Tanken anhalten. Wie weit ist die Tankstelle entfernt, die sie dazu wählen sollte?

(**A**) 35 km (**B**) 45 km (**C**) 55 km (**D**) 75 km (**E**) 95 km

Lösung: Mit den 14 Litern Kraftstoff kommt Lucia 140 km weit. Nach 55 km Fahrt schafft sie damit noch 140 km − 55 km = 85 km. Außer der 95 km entfernten Tankstelle kann sie alle erreichen. Sie kann also insbesondere die 75 km entfernte Tankstelle erreichen. Von dort sind es noch 520 km − 55 km − 75 km = 390 km bis zu Lucias Tante, und dafür reichen die 40 Liter, wenn sie volltankt. Würde Lucia früher tanken, würde die Tankfüllung nicht bis zur Tante reichen.

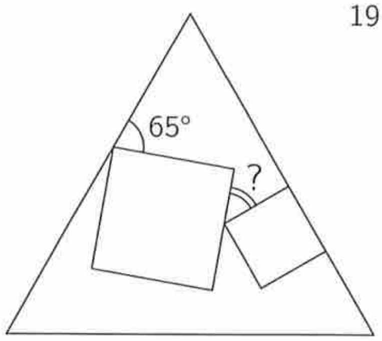
16. Für die ganzen Zahlen a, b, c und d gilt $a \cdot b = 2 \cdot c \cdot d$. Welche der folgenden Zahlen ist dann <u>gewiss nicht</u> das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$?

(**A**) 32 (**B**) 200 (**C**) 50 (**D**) 72 (**E**) 100

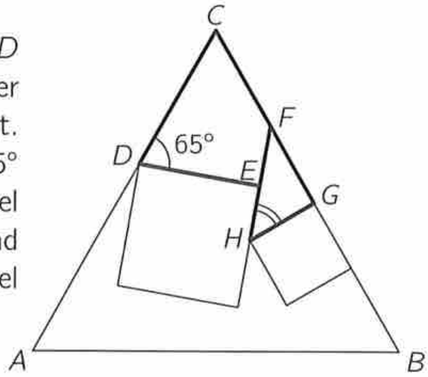
Lösung: Wegen $a \cdot b = 2 \cdot c \cdot d$ gilt $a \cdot b \cdot c \cdot d = 2 \cdot c^2 \cdot d^2 = 2 \cdot (c \cdot d)^2$. Die Zahl, die wir suchen, darf also nicht das Doppelte einer Quadratzahl sein. Das trifft nur für 100 zu, denn $100 : 2 = 50$ ist keine Quadratzahl. Die vier anderen Zahlen sind Doppelte einer Quadratzahl, und zwar ist $200 = 2 \cdot 10^2$, $72 = 2 \cdot 6^2$, $50 = 2 \cdot 5^2$ und $32 = 2 \cdot 4^2$.

17. Zwei Quadrate sind wie im Bild in ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der mit dem Fragezeichen markierte Winkel?

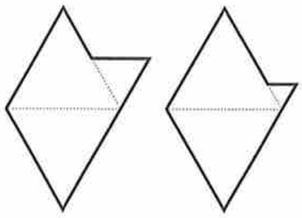
(**A**) 35° (**B**) 40° (**C**) 45° (**D**) 50° (**E**) 55°



Lösung: In der rechts gezeichneten Figur sind in dem Viereck $EFCD$ der rechte Winkel bei E, der vorgegebene 65°-Winkel bei D und der Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks bei C, der 60° beträgt, bekannt. Also ist der Winkel $\measuredangle CFH = \measuredangle CFE = 360° - 90° - 65° - 60° = 145°$ groß. Von den Winkeln im Dreieck GFH kennen wir den rechten Winkel bei G und den Winkel $\measuredangle HFG$ bei F, der Nebenwinkel von $\measuredangle CFH$ und somit $180° - 145° = 35°$ groß ist. Daraus folgt für den gesuchten Winkel $\measuredangle GHE = \measuredangle GHF = 180° - 90° - 35° = 55°$.



Die zwei Puzzleteile rechts sind aus gleichseitigen Dreiecken in drei Größen zusammengesetzt. Schneide aus Papier zwei solche Teile aus (etwas größer natürlich) und lege sie ohne Überlappung zu einer Figur, die eine Symmetrieachse besitzt.



18. Eine der Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks ist 20 cm lang. Von den beiden anderen Seiten beträgt die Länge der einen Seite $\frac{2}{5}$ der Länge der anderen Seite. Wie lang ist der Umfang dieses Dreiecks?

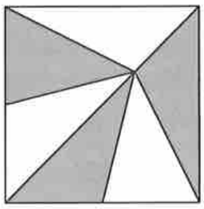
(**A**) 36 cm (**B**) 48 cm (**C**) 60 cm (**D**) 95 cm (**E**) 120 cm

Lösung: Die Seite, von der wir wissen, dass sie 20 cm lang ist, ist ein Schenkel, denn die beiden anderen Seiten sind unterschiedlich lang. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Es kann die Länge der Basis $\frac{2}{5}$ der Länge der Schenkel betragen oder umgekehrt die Länge der Schenkel $\frac{2}{5}$ der Länge der Basis. Im zweiten Fall wäre die Summe der Längen der beiden Schenkel nur $\frac{4}{5}$ der Länge der Basis, also die Dreiecksungleichung nicht erfüllt, womit dieser Fall nicht eintreten kann. Im ersten Fall hat die Basis die Länge $\frac{2}{5} \cdot 20\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$. Der Umfang des Dreiecks ist $8\,\text{cm} + 2 \cdot 20\,\text{cm} = 48\,\text{cm}$.

19. Sascha schreibt ein Multiplikationszeichen zwischen die zweite und dritte Ziffer der Jahreszahl 2020. Das Produkt $20 \cdot 20$ ist eine Quadratzahl. Für wie viele der Jahreszahlen von 2021 bis 2099 ist das entsprechende Produkt ebenfalls eine Quadratzahl?

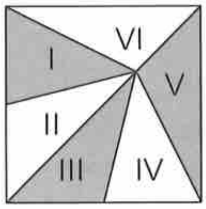
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Da $20 = 2^2 \cdot 5$ ist, muss der „hintere Teil" der Jahreszahl ein Produkt aus 5 und einer Quadratzahl sein, die größer ist als 2^2. Dafür kommen nur 3^2 und 4^2 in Frage, denn der „hintere Teil" der Jahreszahl wäre mit 5^2 bereits $5 \cdot 5^2 = 125$, also zu groß. Daher ist genau für die beiden Jahreszahlen 2045 und 2080 das Produkt aus dem „vorderen Teil" und dem „hinteren Teil" eine Quadratzahl.



20. Ein quadratisches Zierfenster besteht aus 6 Glasdreiecken, die alle denselben Flächeninhalt haben. Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 15 cm. Wie weit von der unteren Quadratseite ist der Punkt entfernt, in dem die 6 Dreiecke zusammentreffen?

(**A**) 8,5 cm (**B**) 9 cm (**C**) 9,5 cm (**D**) 10 cm (**E**) 10,5 cm



Lösung: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist die Hälfte des Produkts aus Grundseite und zugehöriger Höhe. Für die Dreiecke III und IV wählen wir als Grundseite jeweils die untere Dreiecksseite. Da die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt und gleiche Höhen haben, sind ihre Grundseiten gleich lang, und somit halb so lang wie die Quadratseite. Das Dreieck VI hat im Vergleich zu Dreieck IV eine doppelt so lange Grundseite und muss deshalb eine halb so große Höhe haben. Der Abstand des Treffpunkts der 6 Dreiecke ist also halb so weit von der oberen Quadratseite entfernt wie von der unteren. Sein Abstand zur unteren Quadratseite beträgt somit $\frac{2}{3}$ von 15 cm, also 10 cm. Die gesuchte Größe lässt sich auch direkt berechnen: Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt $15^2\,\text{cm}^2$, jedes Dreieck hat einen Flächeninhalt von $\frac{15^2\,\text{cm}^2}{6}$. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist die Hälfte des Produkts aus der Länge der Grundseite und der zugehörigen Höhe. Wählen wir im oberen Dreieck als Grundseite die Quadratseite, so ist die Länge der zugehörigen Höhe $\frac{15^2\,\text{cm}^2}{6} \cdot 2 : (15\,\text{cm}) = 5\,\text{cm}$. Also ist der Treffpunkt der 6 Dreiecke von der unteren Quadratseite $15\,\text{cm} - 5\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$ entfernt.

21. Ein Rechteck und ein Quadrat haben denselben Flächeninhalt. Eine der Seitenlängen des Rechtecks ist um 25 % länger als die Seitenlänge des Quadrats. Um wie viel Prozent ist der Umfang des Rechtecks größer als der Umfang des Quadrats?

(**A**) um 1 % (**B**) um 2 % (**C**) um 2,5 % (**D**) um 3,5 % (**E**) um 5 %

Lösung: Die Seitenlänge des Quadrats sei a. Der Flächeninhalt des Quadrats und des Rechtecks ist $A = a^2$ und der Umfang des Quadrats ist $U_Q = 4a$. Die eine Seitenlänge des Rechtecks beträgt $a + 25\,\% \cdot a = a + \frac{25}{100}a = \frac{5}{4}a$ und die andere $\frac{A}{\frac{5}{4}a} = \frac{a^2}{\frac{5}{4}a} = \frac{4}{5}a$. Somit ist der Umfang des Rechtecks gleich $U_R = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}a + \frac{4}{5}a\right) = \frac{41}{10}a = \frac{41}{40} \cdot 4a = U_Q + \frac{1}{40} \cdot U_Q = U_Q + \frac{2{,}5}{100} \cdot U_Q = U_Q + 2{,}5\,\% \cdot U_Q$, ist also um 2,5 % größer als der Umfang des Quadrats.

22. Ertem schreibt die Ziffern von 1 bis 9 in irgendeiner Reihenfolge auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 9-stellige Zahl durch 18 teilbar ist?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{4}{9}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{5}{9}$ (**E**) $\frac{1}{18}$

Lösung: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 18 teilbar, wenn sie sowohl durch 9 als auch durch 2 teilbar ist. Die Quersumme von Ertems Zahl ist unabhängig von der Reihenfolge der Ziffern gleich $1+2+\ldots+9 = 45$. Da 45 durch 9 teilbar ist, folgt aus der Teilbarkeitsregel der 9, dass Ertems Zahl durch 9 teilbar ist. Ertems Zahl ist folglich genau dann durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 teilbar ist, also auf eine gerade Zahl endet. Wenn die Zahl auf eine der Ziffern 2, 4, 6 oder 8 endet, ist sie durch 18 teilbar, wenn sie auf eine der Ziffern 1, 3, 5, 7 oder 9 endet, ist sie nicht durch 18 teilbar. Da es zu jeder Endziffer gleich viele verschiedene 9-stellige Zahlen gibt, nämlich $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ertems Zahl durch 18 teilbar ist, gleich $\frac{4}{9}$.

23. Kaisa möchte ein 4×4-Quadrat so mit Zahlen füllen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich ist. Einige Zahlen hat sie bereits eingetragen. Welche Zahl gehört in das graue Kästchen?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
(grau)		7	

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: In Kaisas 4×4-Quadrat ist die 3. Zeilensumme gleich $11 + c + d$ und die 3. Spaltensumme ist gleich $15 + d$. Also ist $c = 4$. Die 2. Zeilensumme ist gleich $12 + b$ und die 1. Spaltensumme ist gleich $1 + b + c + e = 5 + b + e$. Also gehört in das graue Kästchen die Zahl $e = 7$.
Für jede beliebige Zeilensumme lässt sich das Quadrat eindeutig ausfüllen.

1	a	6	3
b	2	2	8
c	7	d	4
e	f	7	g

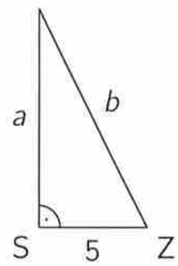
Die ersten 16 Ziffern der Zahl Pi = 3,141592653589793 . . . können so in das 4×4-Quadrat eingetragen werden, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gleich ist. Wer findet die Lösung?

3	1		
		4	
		1	5

24. Hase und Igel tragen ein 5-km-Rennen entlang einer geraden Strecke aus. Der Hase ist fünfmal so schnell wie der Igel. Hektisch rennt der Hase beim Start in eine falsche Richtung los, und zwar senkrecht zur Wettbewerbsstrecke. Als er den Fehler bemerkt, stoppt er und rennt auf direktem Weg zum Ziel, das er zeitgleich mit dem Igel erreicht. Nach wie vielen Kilometern hat der Hase seinen Fehler bemerkt?

(**A**) 11 km (**B**) 12 km (**C**) 13 km (**D**) 14 km (**E**) 15 km

Lösung: Der Igel läuft 5 km vom Start (S) zum Ziel (Z). Der Hase läuft zuerst a km in die falsche Richtung und anschließend b km zum Ziel. Er läuft insgesamt 25 km, da er fünfmal so schnell ist wie der Igel und gleichzeitig mit ihm ankommt. Daher gilt $a + b = 25$ bzw. $b = 25 - a$. Außerdem gilt nach dem Satz des Pythagoras $a^2 + 5^2 = b^2$. Indem wir b durch $25 - a$ ersetzen, erhalten wir $a^2 + 25 = (25 - a)^2 = 625 - 50 \cdot a + a^2$, also $a = 12$. Der Hase hat seinen Fehler bemerkt, nachdem er 12 km gerannt ist.



25. Beim Schulfest treten die Lehrer Herr Richter, Herr Dorn und Herr Nicol zum Daumenwrestling an. In jeder Runde wrestlen zwei Lehrer und der dritte ruht sich aus. Nach jeder Runde tritt der Gewinner gegen den ausgeruhten Lehrer an. Insgesamt ist Herr Richter 10-mal angetreten, Herr Dorn 17-mal und Herr Nicol 15-mal. Wer hat die zweite Runde verloren?

(**A**) Herr Richter (**B**) Herr Dorn (**C**) Herr Nicol
(**D**) Sowohl Herr Richter als auch Herr Dorn könnte die zweite Runde verloren haben.
(**E**) Sowohl Herr Dorn als auch Herr Nicol könnte die zweite Runde verloren haben.

Lösung: Da in jeder Runde zwei Lehrer antreten, gibt es insgesamt $\frac{10 + 17 + 15}{2} = 21$ Runden. Da jedes Mal der Gewinner der Runde gegen den ausgeruhten Lehrer antritt, ist jeder Lehrer mindestens bei jeder zweiten Runde dabei, somit bei mindestens 10 Runden. Um bei 21 Runden bei genau 10 Runden anzutreten (wie Herr Richter), muss man in der 2., 4., 6., 8., 10., 12., 14., 16., 18. und 20. Runde dabei sein und jedes Mal verlieren. Die 2. Runde hat folglich Herr Richter verloren.

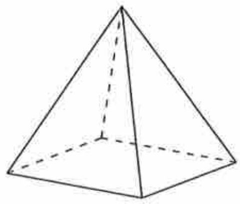
26. Connor baut aus 64 identischen kleinen Würfeln einen großen Würfel und malt anschließend drei seiner Seitenflächen vollständig rot an. Welches ist die größtmögliche Anzahl kleiner Würfel, die genau eine rote Seitenfläche haben?

(**A**) 27 (**B**) 28 (**C**) 32 (**D**) 34 (**E**) 40

Lösung: Es gibt zwei Möglichkeiten, wie der große Würfel nach dem Bemalen aussehen kann. Im ersten Fall liegen sich zwei rote Seitenflächen gegenüber. Dann haben von den jeweils 16 kleinen Würfeln auf den sich gegenüberliegenden roten Seitenflächen des großen Würfels jeweils 12 genau eine rote Seitenfläche. Auf der dritten rot bemalten Seitenfläche haben 8 weitere kleine Würfel genau eine rote Seitenfläche. Insgesamt sind das $2 \cdot 12 + 8 = 32$ kleine Würfel mit genau einer roten Seitenfläche. Im zweiten Fall haben die drei rot bemalten Seitenflächen eine gemeinsame Ecke. Auf jeder der drei rot bemalten Seitenflächen des großen Würfels haben dann 9 kleine Würfel genau eine rote Seitenfläche. Insgesamt haben in diesem Fall nur $3 \cdot 9 = 27$ kleine Würfel genau eine rote Seitenfläche.
Maximal haben also 32 kleine Würfel genau eine rote Seitenfläche.

— Ein ähnliches, etwas einfacheres Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 18 gestellt. —

27. Valeska schreibt an die Ecken einer quadratischen Pyramide die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5. Dann schreibt sie auf jede der fünf Seitenflächen die Summe der Zahlen, die an den zugehörigen Ecken stehen. Vier dieser Summen sind 7, 8, 9 und 10. Welche Zahl steht auf der fünften Seitenfläche?



(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

Lösung: Die Zahl, die Valeska an die Spitze schreibt, nennen wir S und die Zahl, die sie auf die Grundfläche schreibt, nennen wir G. Dann ist G gleich der Summe der vier Zahlen in den unteren Ecken, also ist $S + G = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Da die Summe 7 nur durch $1 + 2 + 4$ entstanden sein kann, steht die 7 auf einer der dreieckigen Seitenflächen. Also ist S gleich 1, 2 oder 4. Wegen $G = 15 - S$, ist G gleich 14, 13 oder 11. G kommt folglich bei den gegebenen Summen (7, 8, 9, 10) nicht vor – ist also die gesuchte Summe. Die vier gegebenen Summen sind die Zahlen auf den dreieckigen Seitenflächen. Für die Summe dieser vier Zahlen, $7 + 8 + 9 + 10 = 34$, wird im einzelnen S genau 4-mal und jede der Zahlen an den unteren Ecken genau 2-mal addiert. Also gilt $34 = 4S+2G = 2(S+G)+2S = 30+2S$, und folglich ist $S = 2$. Und $G = 13$ ist die gesuchte Summe. An den Ecken der Grundfläche stehen im bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn 4, 1, 5, 3.

28. Ida will auf dem Markt eine Schutzhülle für ihr Smartphone kaufen. Einige der Hüllen dort sind schwarz, der Rest ist hell. Einige Hüllen sind gemustert, der Rest ist einfarbig. Die Hüllen sind entweder aus Leder oder aus Silikon. Ida stellt fest:

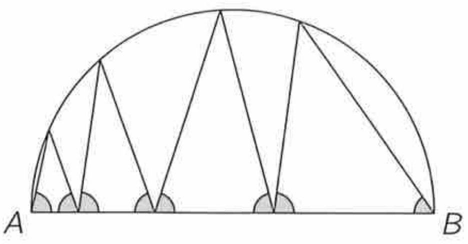
1) Wenn eine Hülle aus Leder ist, dann ist sie schwarz.
2) Wenn eine Hülle gemustert ist, dann ist sie hell.

Welche der folgenden Aussagen stimmt dann ganz sicher?

(**A**) Alle einfarbigen Hüllen sind schwarz.
(**B**) Alle schwarzen Hüllen sind aus Leder.
(**C**) Alle Hüllen aus Silikon sind gemustert.
(**D**) Alle hellen Hüllen sind gemustert.
(**E**) Alle gemusterten Hüllen sind aus Silikon.

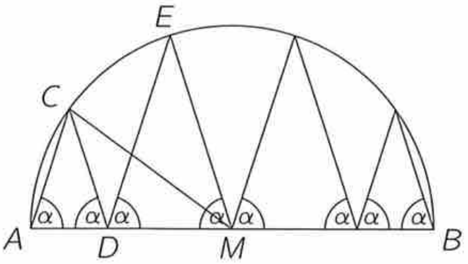
Lösung: Die zweite Aussage besagt, dass alle gemusterten Hüllen hell sind. Aus der ersten Aussage folgt, dass eine helle Hülle nicht aus Leder sein kann (sonst wäre sie ja schwarz), also aus Silikon sein muss. Folglich sind alle gemusterten Hüllen aus Silikon, (**E**) ist richtig.
Die anderen Aussagen können stimmen, aber nicht ganz sicher. Wenn es zum Beispiel eine helle und eine schwarze einfarbige Hülle aus Silikon gibt, dann trifft nur (**E**) zu, alle anderen Aussagen sind falsch.

29. Im Endpunkt A des Durchmessers AB eines Halbkreises startend verläuft eine Zickzacklinie zum Bogen des Halbkreises und wieder zum Durchmesser zurück. Nach vier Ausschlägen endet die Zickzacklinie genau im Punkt B. Wenn alle grau markierten Winkel gleich groß wären, wie groß wären diese dann?



(**A**) 60° (**B**) 72° (**C**) 75° (**D**) 80° (**E**) 82,5°

Lösung: Der Radius des Halbkreises sei r. Wenn alle grau markierten Winkel die Größe α haben, sind die vier Dreiecke, die von der Zickzacklinie und dem Durchmesser gebildet werden, gleichschenklig mit Basiswinkel α. Die Winkel an der Spitze dieser Dreiecke haben jeweils die Größe $180° - 2\alpha$. Außerdem ist die Zickzacklinie spiegelsymmetrisch und verläuft nach dem zweiten Ausschlag durch den Mittelpunkt M.



Die Strecken $\overline{MA}$, $\overline{MC}$ und $\overline{ME}$ sind Radien, haben also alle die Länge r. Daraus folgt, dass die Dreiecke CAM und DME beide gleichschenklig sind, Schenkellänge r haben und die Basiswinkel gleich α sind. Also sind die Dreiecke CAM und DME zueinander kongruent, und insbesondere gilt $|AC| = |DM|$ und $\measuredangle CMA = 180° - 2\alpha$. Da das Dreieck ADC gleichschenklig ist, gilt $|AC| = |DC|$. Also ist auch das Dreieck MCD gleichschenklig. Die Basiswinkel von Dreieck MCD sind gleich $\measuredangle CMD = \measuredangle CMA = 180° - 2\alpha$. Der Winkel $\measuredangle MDC$ ist Nebenwinkel von $\measuredangle CDA$, also gleich $180° - \alpha$. Daher ist die Innenwinkelsumme in MCD gleich $180° = 2 \cdot (180° - 2\alpha) + (180° - \alpha) = 3 \cdot 180° - 5\alpha$. Daraus erhalten wir $\alpha = 72°$.

30. Leopold hat acht aufeinanderfolgende dreistellige Zahlen aufgeschrieben. Jede dieser Zahlen ist durch ihre letzte Ziffer teilbar. Welche Quersumme hat die kleinste Zahl, die Leopold aufgeschrieben hat?

(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

Lösung: Keine dreistellige Zahl ist durch 0 teilbar. Leopold hat also keine Zahl aufgeschrieben, die auf 0 endet. Das bedeutet, dass bei den aufgeschriebenen acht Zahlen alle die gleiche Ziffer an der Hunderterstelle haben, und dass alle die gleiche Ziffer an der Zehnerstelle haben. Die Ziffer an der Hunderterstelle nennen wir x und die Ziffer an der Zehnerstelle nennen wir y. Leopold hat auf jeden Fall die Zahlen $xy2$, $xy3$, $xy4$, $xy5$, $xy6$, $xy7$ und $xy8$ aufgeschrieben sowie eine der beiden Zahlen $xy1$ oder $xy9$.
Die dreistellige Zahl xyz ist genau dann durch z teilbar, wenn auch die dreistellige Zahl $xy0$ durch z teilbar ist. Also ist $xy0$ ganz sicher durch die Zahlen von 2 bis 8 teilbar, und somit auch durch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$. Also muss $xy0 = 840$ sein.
Da 849 nicht durch 9 teilbar ist, muss Leopold die Zahlen von 841 bis 848 aufgeschrieben haben. Die Quersumme der kleinsten dieser Zahlen ist gleich $8 + 4 + 1 = 13$.

Wildwest-Rätsel

1

Nach dem letzten Raubzug der Banditen Tom, George und John hat der Sheriff ein Kopfgeld auf die drei ausgesetzt. Das Kopfgeld auf John ist dreimal so hoch wie das Kopfgeld auf George, und es ist fünfmal so hoch wie das Kopfgeld auf Tom. Auf George sind 1000 Dollar mehr Kopfgeld ausgesetzt als auf Tom.

Wie viel Kopfgeld ist auf jeden einzelnen der drei Banditen ausgesetzt?

2

Der pedantische Sheriff führt Kontrollen zur Verkehrstüchtigkeit der Pferde im Ort durch. Dabei stellt er fest, dass 85 % aller Pferde viel zu schnell durch den Ort geritten wurden, 80 % waren ohne Sattel und 75 % hatten ungesichertes Gepäck dabei.

Wie viel Prozent der kontrollierten Pferde waren es mindestens, die zu schnell und ohne Sattel und mit ungesichertem Gepäck durch den Ort geritten wurden?

3

Die Cowboys Joe und Maurice treffen sich im Saloon.
Joe erzählt: „Gestern bin ich auf direktem Weg von meinem Haus zu deinem Haus geritten und dann direkt zum Saloon. Das waren insgesamt 6 Meilen Ritt."
Maurice entgegnet: „Stell dir vor, ich bin heute von meinem Haus direkt zu deinem Haus geritten und von dort direkt zum Saloon. Das waren insgesamt 9 Meilen Ritt."
Joe überlegt: „Wenn wir eine Rundtour machen würden, von hier zu meinem Haus, dann zu deinem Haus und wieder zurück zum Saloon, wie lang würde dieser Weg wohl sein?"
Billy am Klavier gibt den beiden einen Tipp: „Denkt dran, dass zwei der drei Teilstrecken gleich lang sind und die drei Wegpunkte nicht auf einer Linie liegen. Dann müsstet ihr das ausrechnen können."

Wie lang wäre die Rundtour?

4

Am Lagerfeuer erzählt Lucy, die Tochter des Pferdehändlers, von antimagischen Quadraten. Dabei handelt es sich um 4×4-Quadrate, in deren Kästchen die Zahlen von 1 bis 16 stehen und zwar so, dass die 10 Summen der Zahlen in jeder der 4 Zeilen, in jeder der 4 Spalten und in jeder der 2 Diagonalen 10 verschiedene, aufeinanderfolgende Zahlen sind.
Lucy hat angefangen, ein antimagisches Quadrat auszufüllen:

4	5	7	14
6	13	3	
11	12	9	
10			

Wie sieht das antimagische Quadrat aus, wenn es vollständig ausgefüllt ist?

5

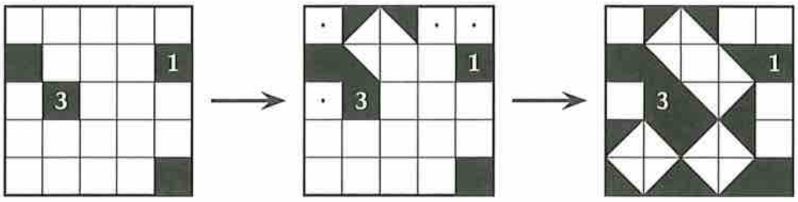
Cowboy Jack sind 22 Rinder entlaufen, nur braune und schwarze. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei Rinder, die er wieder einfängt, alle braun sind, ist gleich $\frac{1}{7}$.

Wie viele braune und wie viele schwarze Rinder sind Jack entlaufen?

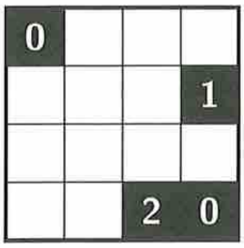
Rechteck-Mosaik

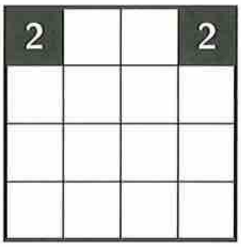
In einige der weißen Kästchen ist eine Diagonale einzuzeichnen und jeweils genau eine der beiden Hälften schwarz auszumalen. Alle weißen Gebiete müssen am Ende Rechtecke sein. (Jedes solche Rechteck liegt entweder gerade oder schräg, und auch Quadrate sind möglich, wie das Beispiel zeigt.) Die Hinweiszahlen in den schwarzen Feldern geben an, in wie viele der senkrecht und waagerecht benachbarten Kästchen eine Diagonale einzuzeichnen ist.

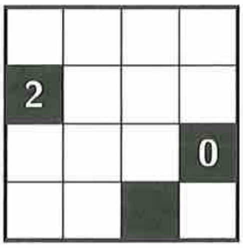
Hier ist ein Beispiel:

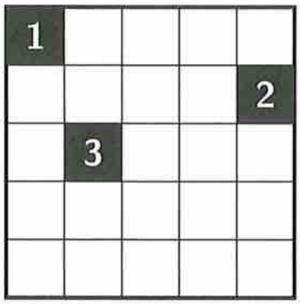


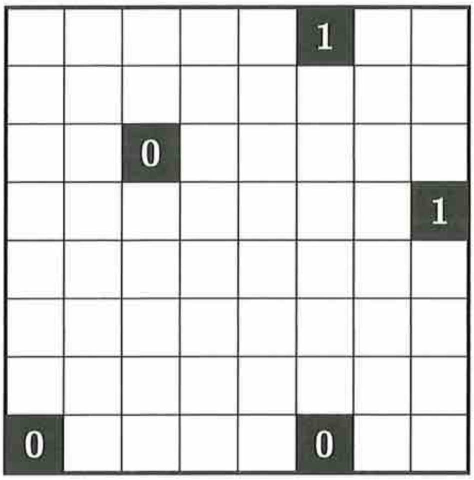
Wer schafft es, alle Rechteck-Mosaike richtig zu lösen?

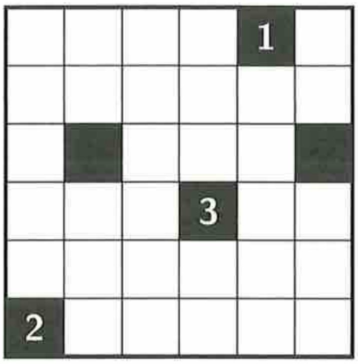


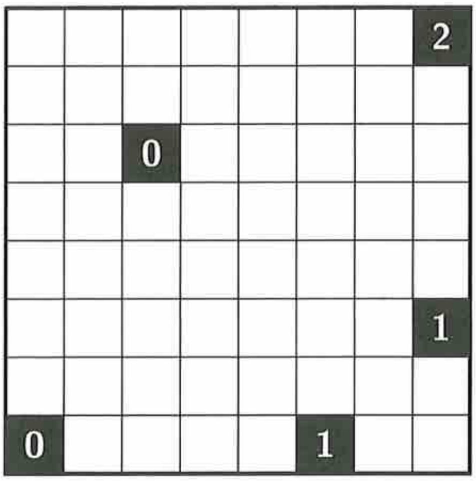


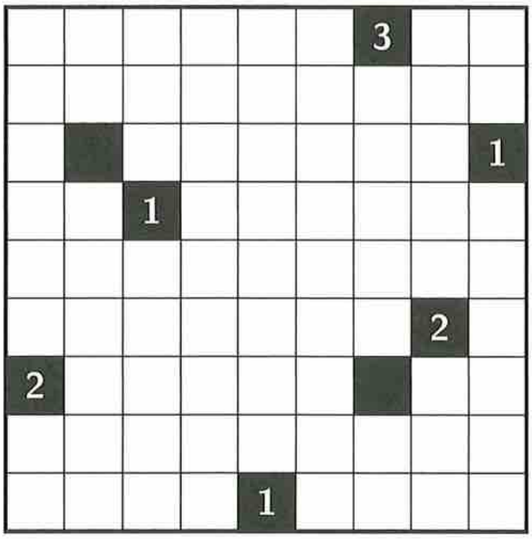












Diese Aufgaben hat Dr. Robert Vollmert erstellt, der seit Jahren bei den Logic Masters erfolgreich ist.

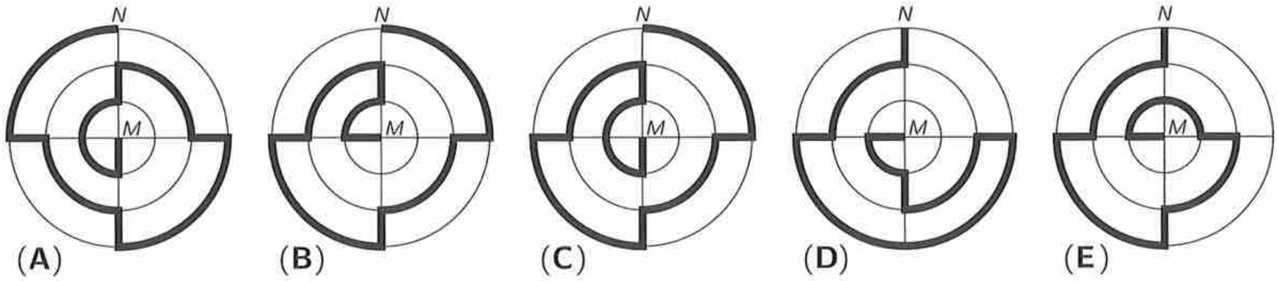
Klassenstufen 11 bis 13

1. $\dfrac{10^2 + 20^2 + 30^2}{20} =$

(**A**) 20 (**B**) 30 (**C**) 40 (**D**) 60 (**E**) 70

Lösung: $\dfrac{10^2 + 20^2 + 30^2}{20} = \dfrac{100 + 400 + 900}{20} = \dfrac{1400}{20} = 70$

2. Die folgenden Wege von N nach M verlaufen entlang der drei Kreise mit Mittelpunkt M und den zwei senkrecht aufeinander stehenden Durchmessern. Welcher dieser Wege ist am kürzesten?



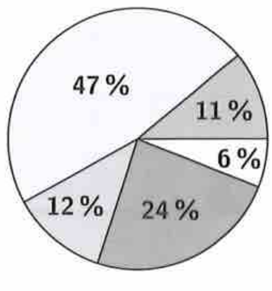
Lösung: Von den geraden Wegstücken und den mittelgroßen Viertelkreisen gibt es bei allen fünf Wegen gleich viele. Von den großen Viertelkreisen gibt es bei (**E**) einen und bei den anderen Wegen zwei. Von den kleinen Viertelkreisen gibt es bei (**B**) und bei (**D**) einen und bei den anderen Wegen zwei. Da die großen Viertelkreise länger sind als die kleinen, ist der Weg bei (**E**) am kürzesten.

3. Zum Frühstück macht Frieda heute French Toast. Dafür werden die Toastscheiben von jeder Seite genau 4 Minuten in der Pfanne gebraten. In Friedas Pfanne passen aber nur 2 Scheiben gleichzeitig. Wie lange braucht Frieda mindestens, um 3 Scheiben French Toast zu machen?

(**A**) 8 Minuten (**B**) 10 Minuten (**C**) 12 Minuten (**D**) 14 Minuten (**E**) 18 Minuten

Lösung: Insgesamt müssen 6 Toastseiten gebraten werden, dafür sind mindestens 3-mal 4 Minuten, also 12 Minuten, nötig. Um mit möglichst wenig Zeit auszukommen, versucht Frieda, immer zwei Toastscheiben gleichzeitig zu braten. Sie beginnt mit Toast 1 und Toast 2, dann kommen Toast 1 (Rückseite) und Toast 3, und zum Schluss Toast 2 (Rückseite) und Toast 3 (Rückseite) in die Pfanne. So kann Frieda 3 Scheiben French Toast innerhalb von 12 Minuten machen.

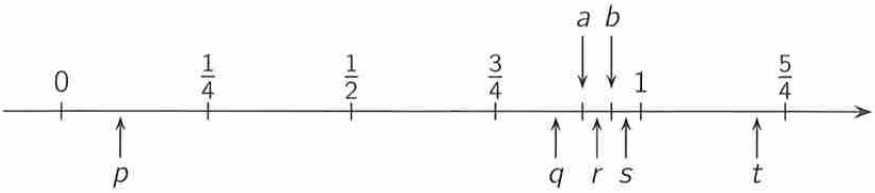
4. Im Kreisdiagramm rechts ist dargestellt, wie die Schülerinnen und Schüler meines Jahrgangs zur Schule kommen. Es kommen ungefähr doppelt so viele mit dem Fahrrad zur Schule wie mit dem Bus. Zu Fuß kommen ungefähr genauso viele zur Schule wie mit dem Auto gebracht werden. Der Rest kommt mit dem Moped. Wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler kommen mit dem Moped zur Schule?



(**A**) 6 % (**B**) 11 % (**C**) 12 % (**D**) 24 % (**E**) 47 %

Lösung: Da es im Kreisdiagramm nur zwei Prozentzahlen gibt, die fast gleich sind (die 11 % und die 12 %), entsprechen diese den Schülerinnen und Schülern, die zu Fuß kommen oder mit dem Auto gebracht werden. Mit dem Fahrrad kommen ungefähr doppelt so viele wie mit dem Bus, das sind dann folglich die 47 % und die 24 %. Mit dem Moped kommen demzufolge 6 % der Schülerinnnen und Schüler.

5. Zwei Zahlen a und b sind auf der Zahlengeraden markiert:



Eine der Zahlen p, q, r, s, t ist das Produkt $a \cdot b$. Welche?

(A) p **(B)** q **(C)** r **(D)** s **(E)** t

Lösung: Da b kleiner ist als 1, ist das Produkt $a \cdot b$ kleiner als a, also eine der Zahlen p und q. Des Weiteren sind a und b beide größer als $\frac{3}{4}$. Somit ist $a \cdot b$ größer als $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ und damit größer als $\frac{1}{2}$. Das trifft nur auf q zu.

6. Es werden zwei (faire) Würfel gleichzeitig geworfen. Die Würfel haben jeweils zwei rote, zwei blaue und zwei weiße Seiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mit beiden Würfeln dieselbe Farbe gewürfelt wird?

(A) $\frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{2}{9}$ **(E)** $\frac{1}{3}$

Lösung: Wir stellen uns das Werfen beider Würfel als 2-stufiges Zufallsexperiment vor. Mit beiden Würfeln wird genau dann dieselbe Farbe gewürfelt, wenn mit dem zweiten Würfel dieselbe Farbe wie mit dem ersten gewürfelt wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

7. Für wie viele reelle Zahlen x gilt $\frac{x^2}{3} = \frac{3}{x^2}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Lösung: Da sicher $x \neq 0$ gilt, multiplizieren wir die Gleichung mit $3x^2$ und erhalten $x^4 = 9$. Da x^2 positiv ist, ist $x^2 = 3$ und somit $x = \sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{3}$. Es gibt also zwei reelle Zahlen x, die die Gleichung erfüllen.

8. In der Addition rechts stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern. Wie groß ist die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E}$?

$$\begin{array}{r} \mathbf{A\,B\,C} \\ +\ \mathbf{B\,C\,D} \\ +\ \mathbf{C\,D\,E} \\ +\ \mathbf{D\,E\,A} \\ +\ \mathbf{E\,A\,B} \\ \hline \mathbf{2\,6\,6\,4} \end{array}$$

(A) 14 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 26 **(E)** 34

Lösung: Eine dreistellige Zahl **XYZ** lässt sich als $100 \cdot \mathbf{X} + 10 \cdot \mathbf{Y} + 1 \cdot \mathbf{Z}$ schreiben. In der Addition in der Aufgabe stehen alle Buchstaben jeweils einmal an der 1-er, der 10-er und der 100-er Stelle. Wegen $100 + 10 + 1 = 111$ ist $2664 = 111 \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E})$, das heißt $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E} = \frac{2664}{111} = 24$.

— *Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 7 gestellt.* —

9. Für die drei natürlichen Zahlen a, b und c gilt $1 \leq a \leq b \leq c$ sowie $a \cdot b \cdot c = 10\,000$. Wie groß kann b höchstens sein?

(**A**) 10 (**B**) 25 (**C**) 50 (**D**) 100 (**E**) 200

Lösung: Da $a \geq 1$ gilt, ist $b \cdot c \leq 10\,000$. Und da $b \leq c$ gilt, ist $b^2 \leq b \cdot c \leq 10\,000$ und somit $b \leq \sqrt{10\,000} = 100$. Da für $a = 1$, $b = 100$, $c = 100$ die Ungleichungen erfüllt sind, kann b höchstens gleich 100 sein.

10. Ein Vater lebt mit seinen drei Kindern zusammen. Jedes Jahr zu Weihnachten stimmen sie darüber ab, wohin es in den Sommerurlaub geht. Das Alter jedes Einzelnen ergibt die Anzahl seiner Stimmen. Dieses Jahr hat der Vater 36 Stimmen, die Kinder haben 10, 8 und 5. Also gewinnt der Vater, egal wie die Kinder abstimmen. Wie viele Jahre müssen vergehen, bis der Vater überstimmt werden kann?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 13 (**E**) 14

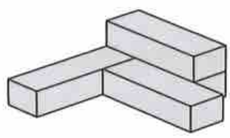
Lösung: Dieses Jahr haben die Kinder zusammen 23 Stimmen, und der Vater hat 36 Stimmen, also 13 mehr als die Kinder. Jedes Jahr nimmt die Anzahl der Stimmen des Vaters um 1 zu, und die Anzahl der Stimmen der Kinder nimmt zusammen um 3 zu. Der „Vorsprung" des Vaters verringert sich also jedes Jahr um 2. Folglich können die Kinder den Vater in 7 Jahren zum ersten Mal überstimmen.

11. Auf dem Tisch liegen 5 Münzen. Alle zeigen „Kopf". In jedem Zug werden genau 3 Münzen umgedreht. Wie viele Züge sind <u>mindestens</u> nötig, damit alle Münzen „Zahl" zeigen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Nach dem ersten Zug zeigen 2 Münzen „Kopf" und 3 Münzen „Zahl". Ein weiterer Zug reicht sicher nicht, damit alle Münzen „Zahl" zeigen. Drehen wir im zweiten Zug zweimal „Zahl" und einmal „Kopf" um, so zeigen anschließend 3 Münzen „Kopf" und 2 Münzen „Zahl". Im dritten Zug können wir die drei „Kopf" umdrehen und sind fertig. Es sind also mindestens drei Züge nötig.

12. Vier identische Kisten wurden wie in der Abbildung zusammengeklebt. Um alle 6 Seitenflächen einer Kiste vollständig zu streichen, wird 200 ml Farbe benötigt. Wie viel Farbe wird benötigt, um alle Seitenflächen des gesamten Bauwerks (einschließlich des Bodens) vollständig zu streichen?



(**A**) 500 ml (**B**) 550 ml (**C**) 600 ml (**D**) 700 ml (**E**) 750 ml

Lösung: Wir zählen, wie viel von den Seitenflächen der einzelnen Kisten gestrichen wird. Von den großen Seitenflächen zeigen 3 nach oben und 3 nach unten, davon gibt es also insgesamt 6. Von den kleinen zeigen eine nach links vorn, 3 nach rechts vorn und 2 nach links hinten, davon gibt es also insgesamt 6. Von den mittelgroßen zeigen 2 nach links vorn, 2 nach rechts hinten und eine nach links hinten, davon gibt es also insgesamt 5. Des Weiteren zeigt ein Teil einer mittelgroßen Seitenfläche nach rechts vorn und ein Teil nach rechts hinten; diese beiden haben zusammen denselben Flächeninhalt wie eine mittelgroße Seitenfläche. Zusammen ist eine Fläche zu streichen, die so groß ist wie die dreifache Oberfläche einer Kiste. Dafür werden 600 ml Farbe benötigt.

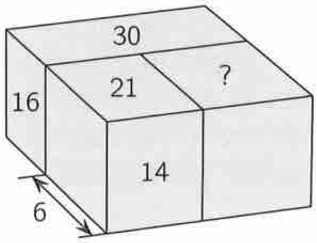
Im Tanzkurs stehen 12 Jungen und 12 Mädchen zufällig angeordnet in einer Reihe. Der Tanzlehrer guckt die Reihe scharf an und greift einen Block von 6 nebeneinanderstehenden Personen heraus, aus denen er 3 Tanzpaare bilden kann. Er meint, das ginge immer, egal wie die Jungen und Mädchen aufgereiht sind. Hat er Recht?

13. Die ersten beiden Stellen einer 10-stelligen Zahl sind 2 und 9. Wie viele Stellen hat das Quadrat dieser Zahl?

(**A**) 11 (**B**) 15 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: Eine 10-stellige Zahl liegt zwischen 10^9 und 10^{10}. Die erste Ziffer der gegebene Zahl ist eine 2, also liegt die gegebene Zahl zwischen $2 \cdot 10^9$ und $3 \cdot 10^9$. Ihr Quadrat liegt folglich zwischen $4 \cdot 10^{18}$ und $9 \cdot 10^{18}$. Das Quadrat hat daher genauso viele Stellen wie 10^{18}, und das sind 19.

14. Drei Quader wurden zu einem größeren Quader zusammengestellt. In der Abbildung sind die Länge einer Quaderkante angegeben sowie die Flächeninhalte von vier Quaderflächen. Welchen Flächeninhalt hat die Quaderfläche mit dem Fragezeichen?



(**A**) 21 (**B**) 24 (**C**) 25,5 (**D**) 27 (**E**) 28,5

Lösung: Wir berechnen nacheinander die Längen der Quaderkanten. Die Breite des vorderen, linken Quaders ist $21 : 6 = 3{,}5$. Die Höhe aller Quader ist folglich $14 : 3{,}5 = 4$. Der hintere Quader ist dann $16 : 4 = 4$ breit und $30 : 4 = 7{,}5$ lang, und die Breite des vorderen, rechten Quaders ist $7{,}5 - 3{,}5 = 4$. Somit ist der gesuchte Flächeninhalt gleich $6 \cdot 4 = 24$.

15. Wenn a, b und c ganze Zahlen sind, welches Ergebnis kann die Summe $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ sicher <u>nicht</u> haben?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Durch Ausmultiplizieren und anschließendes Ausklammern erhalten wir, dass die Summe gleich $2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, also eine gerade ganze Zahl ist. Folglich kann das Ergebnis sicher nicht 1 sein.
Dass die anderen Zahlen das Ergebnis der Summe sein können, zeigen die folgenden Beispiele: (**A**) $a = b = c = 0$; (**C**) $a = b = 0$, $c = 1$; (**D**) $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$; (**E**) $a = b = 0$, $c = 2$.

16. Wenn s Schrauben g Gramm wiegen und m Muttern genauso viel wiegen wie n Schrauben, wie viel Gramm wiegt dann eine Mutter?

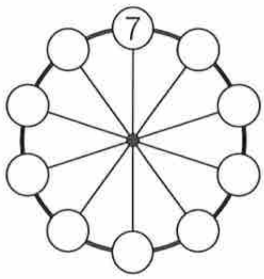
(**A**) $\frac{gn}{sm}$ (**B**) $sgmn$ (**C**) $\frac{sg}{mn}$ (**D**) $\frac{gm}{sn}$ (**E**) $\frac{sn}{gm}$

Lösung: Es wiegen s Schrauben g Gramm, also wiegt eine Schraube $\frac{g}{s}$ Gramm. Dann wiegen n Schrauben $n \cdot \frac{g}{s} = \frac{gn}{s}$ Gramm, was dem Gewicht von m Muttern entspricht. Also wiegt eine Mutter $\frac{1}{m} \cdot \frac{gn}{s} = \frac{gn}{sm}$ Gramm.

17. Die Folge f_n ist gegeben durch $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ und $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für $n \geq 1$. Wie viele der ersten 2020 Folgenglieder sind gerade Zahlen?

(**A**) 673 (**B**) 674 (**C**) 1010 (**D**) 1011 (**E**) 1347

Lösung: Die Folge beginnt mit $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 1 + 3 = 4$, $f_4 = 3 + 4 = 7$. Die ersten beiden Folgenglieder sind ungerade, das dritte ist gerade. Das wiederholt sich ab dem vierten Folgenglied periodisch. Das 2020. Folgenglied ist wie das erste ungerade. Von den ersten 2019 Folgengliedern ist jedes dritte gerade, das sind $2019 : 3 = 673$ Folgenglieder.



18. Matjaz hat in jeden der zehn kleinen Kreise eine natürliche Zahl geschrieben. Im Kreis ganz oben steht eine 7. Rundherum ist die Summe der Zahlen in je vier aufeinanderfolgenden Kreisen stets gleich. Die Summe aller zehn Zahlen in den Kreisen ist eine der folgenden Zahlen. Welche?

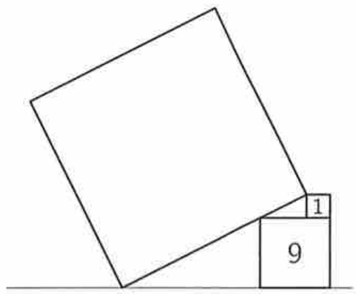
(**A**) 147 (**B**) 325 (**C**) 512 (**D**) 621 (**E**) 777

Lösung: Die Zahlen in den Kreisen rechts vom oberen Kreis seien im Uhrzeigersinn $a, b, c, d, \ldots, i$. Da die Summe der Zahlen in je vier aufeinanderfolgenden Kreisen stets gleich ist, gilt $7+a+b+c = a+b+c+d$, also $d = 7$. Mit demselben Argument sehen wir nacheinander, dass $h = 7$, $b = 7$ und $f = 7$ gilt. In jedem 2. Kreis, also fünfmal, steht eine 7. Mit dem gleichen Argument erhalten wir, dass in den anderen fünf Kreisen auch fünfmal dieselbe Zahl x steht. Die Summe der 10 Zahlen in den Kreisen ist folglich gleich $5 \cdot (7 + x)$ und somit durch 5 teilbar. Das trifft nur auf (**B**) zu. Mithilfe der Antwort lässt sich übrigens auch die Zahl x berechnen: $x = 325 : 5 - 7 = 58$.

19. Die natürliche Zahl N ist durch genau acht der zehn Zahlen von 2 bis 11 teilbar. Welche zwei Zahlen könnten die beiden Zahlen sein, durch die N nicht teilbar ist?

(**A**) 2 und 3 (**B**) 4 und 5 (**C**) 6 und 7 (**D**) 7 und 8 (**E**) 10 und 11

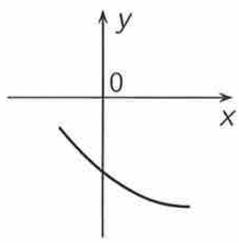
Lösung: Die beiden gesuchten Zahlen sind 7 und 8. N könnte zum Beispiel gleich $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ sein. Die anderen Antworten sind nicht möglich: (**A**) Wenn N nicht durch 2 und nicht durch 3 teilbar ist, so ist N auch nicht durch 4, 6, 8, 9 und 10 teilbar. (**B**) Wenn N nicht durch 4 und nicht durch 5 teilbar ist, so ist N auch nicht durch 8 und 10 teilbar. (**C**) Wenn N nicht durch 6 und nicht durch 7 teilbar ist, so ist N auch nicht durch 2 (und 4, 8 und 10) oder nicht durch 3 (und 9) teilbar. (**E**) Wenn N nicht durch 10 und nicht durch 11 teilbar ist, so ist N auch nicht durch 2 (und 4, 6 und 8) oder nicht durch 5 teilbar.



20. An einem Quadrat mit Flächeninhalt 9 und einem Quadrat mit Flächeninhalt 1 „lehnt" ein größeres Quadrat so wie in der Abbildung rechts. Welchen Flächeninhalt hat dieses Quadrat?

(**A**) 37 (**B**) 50 (**C**) 65 (**D**) 80 (**E**) 99

Lösung: Die beiden kleinen Quadrate haben die Seitenlängen 1 bzw. 3. Das kleine rechtwinklige Dreieck, das von den drei Quadraten eingeschlossen wird, hat die Kathetenlängen $3 - 1 = 2$ und 1. Seine Hypotenuse hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Das große Dreieck, das von den beiden großen Quadraten und der Geraden eingeschlossen wird, ist ähnlich zu dem kleinen Dreieck. Die Länge seiner kürzeren Kathete ist 3. Die Länge seiner Hypotenuse ist somit gleich $3 \cdot \sqrt{5}$. Also ist die Seitenlänge des großen Quadrates gleich $4 \cdot \sqrt{5}$ und sein Flächeninhalt ist gleich $(4 \cdot \sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 = 80$.



21. In der Abbildung ist ein Teil des Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu sehen. Welche der folgenden Zahlen ist positiv?

(**A**) c (**B**) $b+c$ (**C**) ac (**D**) bc (**E**) ab

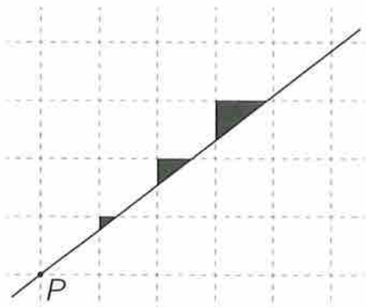
Lösung: Der Graph der quadratischen Funktion ist eine Parabel. Sie ist nach oben geöffnet, also ist $a > 0$. Da der Graph von f die y-Achse unterhalb der x-Achse schneidet und $f(0) = c$ gilt, ist $c < 0$. Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist $-b/(2a) > 0$. Wegen $a > 0$ ist also $b < 0$. Damit gilt $bc > 0$. Um zu zeigen, dass $b < 0$ gilt, lässt sich auch die Ableitung von f verwenden: $f'(x) = 2ax + b$. Es gilt $f'(0) = b$, und da die Steigung des Graphen bei $x = 0$ negativ ist, muss $b < 0$ sein.

22. Im Eisladen an der Ecke wollte Hannah gestern Morgen eine Waffel mit zwei verschiedenen Sorten Eis kaufen. Am Abend wollte Hannahs Schwester eine Waffel mit drei verschiedenen Sorten Eis kaufen. Am Morgen gab es 16 verschiedene Sorten zur Auswahl. Am Abend waren schon einige Sorten ausverkauft. Für die jeweils gewählte Anzahl an Sorten hatte sowohl Hannah als auch ihre Schwester dieselbe Anzahl an möglichen Kombinationen zur Auswahl. Wie viele Sorten waren am Abend ausverkauft?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

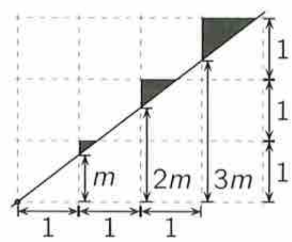
Lösung: Hannah hatte $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$ mögliche Kombinationen zur Auswahl. Wenn n die Anzahl der Sorten bezeichnet, die es am Abend noch gab, dann hatte Hannahs Schwester $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ mögliche Kombinationen zur Auswahl. Da beide Schwestern gleich viele Kombinationen hatten, gilt $120 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$. Daraus folgt $n(n-1)(n-2) = 6 \cdot 120 = 10 \cdot 9 \cdot 8$, und somit $n = 10$. Es waren also am Abend bereits $16 - n = 16 - 10 = 6$ Sorten ausverkauft.

23. Auf einem Blatt mit quadratischem Gitter wurde eine Strecke durch den Gitterpunkt P gezeichnet. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der drei schwarzen Dreiecke zueinander?

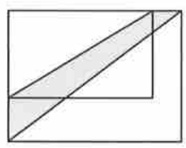


(**A**) 1 : 2 : 3 (**B**) 1 : 2 : 4 (**C**) 1 : 3 : 9
(**D**) 1 : 4 : 8 (**E**) 1 : 4 : 9

Lösung: Die drei schwarzen Dreiecke sind zueinander ähnlich, da ihre Innenwinkel jeweils gleich groß sind (ein rechter Winkel und zwei Stufenwinkel). Die Seitenlänge der Gitterquadrate sei 1, und der Anstieg der Geraden sei m. Dann sind die Längen der linken Seiten der drei Dreiecke gleich $1 - m$, $2 - 2m = 2 \cdot (1 - m)$ bzw. $3 - 3m = 3 \cdot (1 - m)$. Die Seiten des zweiten Dreiecks sind also doppelt so lang wie die des ersten, und die Seiten des dritten Dreiecks sind dreimal so lang wie die des ersten. Der Flächeninhalt des zweiten Dreiecks ist folglich 4-mal so groß wie der des ersten, und der Flächeninhalt des dritten Dreiecks ist 9-mal so groß wie der des ersten. Die Flächeninhalte der drei schwarzen Dreiecke stehen im Verhältnis 1 : 4 : 9.



24. Das größere Rechteck in der Abbildung ist 20 % länger und 50 % breiter als das kleinere. Der Flächeninhalt des grau markierten Bereichs zwischen den zwei Diagonalen der Rechtecke beträgt $30\,\mathrm{m}^2$. Welchen Flächeninhalt hat das kleinere Rechteck?



(**A**) $60\,\mathrm{m}^2$ (**B**) $65\,\mathrm{m}^2$ (**C**) $70\,\mathrm{m}^2$ (**D**) $75\,\mathrm{m}^2$ (**E**) $80\,\mathrm{m}^2$

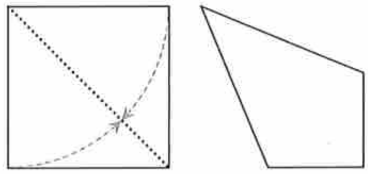
Lösung: Die beiden Rechtecke werden durch ihre Diagonalen in jeweils zwei kongruente Teile zerlegt. Sei A der Flächeninhalt des kleinen Rechtecks. Der Flächeninhalt des großen Rechtecks ist dann $(1 + 20\,\%) \cdot (1 + 50\,\%) \cdot A = \frac{120}{100} \cdot \frac{150}{100} \cdot A = \frac{9}{5} \cdot A$. Die obere Hälfte des großen Rechtecks zerlegt sich in die obere Hälfte des kleinen Rechtecks und den grau markierten Bereich. Also ist der Flächeninhalt des grauen markierten Bereichs gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot A = \frac{2}{5} \cdot A = 30\,\mathrm{m}^2$. Der Flächeninhalt des kleinen Rechtecks ist also gleich $A = \frac{5}{2} \cdot 30\,\mathrm{m}^2 = 75\,\mathrm{m}^2$.

25. Toni bäckt für das Schulfest eine große Anzahl Maxi-Salami-Pizzas mit je 30 Salamischeiben. Im Kühlschrank liegen 71 Salamischeiben in einer Dose und zusätzlich einige Packungen mit je 18 Salamischeiben. Wie viele Salamischeiben werden am Ende des Tages mindestens übrig bleiben?

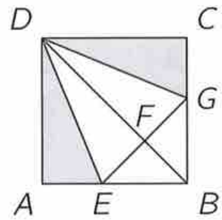
(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Beim Backen werden jeweils $30 = 5 \cdot 6$ Salamischeiben verbraucht und beim Öffnen einer neuen Packung kommen $18 = 3 \cdot 6$ Salamischeiben dazu. Bei beiden Aktionen ändert sich die Anzahl der übrigen Salamischeiben also um ein Vielfaches von 6. Daher ändert sich der Rest der vorhandenen Salamischeiben beim Teilen durch 6 nicht. Wegen $71 : 6 = 11$ Rest 5, ist dieser Rest gleich 5. Somit bleiben definitiv nicht weniger als 5 Salamischeiben übrig. Dass 5 Scheiben wirklich übrig bleiben können, zeigt das Beispiel: Mit drei extra Packungen haben wir $71 + 3 \cdot 18 = 125$ Scheiben. Damit lassen sich vier Maxi-Salami-Pizzas backen und es bleiben 5 Salamischeiben übrig.

26. Helena hat ein quadratisches Blatt Papier mit Seitenlänge 1. Sie faltet zwei Seiten des Quadrats auf die Diagonale (s. Abb.). Welchen Flächeninhalt hat das so entstandene Drachenviereck?



(**A**) $2-\sqrt{2}$ (**B**) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**C**) $\sqrt{2}-1$ (**D**) $\frac{7}{10}$ (**E**) $\frac{3}{5}$



Lösung: Wir falten das Blatt wieder auseinander. In der Abbildung rechts sind die beiden zurückgefalteten Teile grau markiert. Der weiße Teil entspricht dem Drachenviereck. Der Punkt F ist der Punkt, auf den die beiden Ecken A und C gefaltet wurden. Um den Flächeninhalt des Drachenvierecks zu berechnen, berechnen wir die Flächeninhalte der Dreiecke BDE und DBG. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Dreiecke kongruent, und wir beschränken uns auf BDE. Als Grundseite wählen wir die Diagonale $\overline{BD}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|BD| = \sqrt{2}$. Da nach dem Falten das Dreieck AED exakt das Dreieck EFD überdeckt hat, sind diese beiden Dreiecke zueinander kongruent. Also gilt $|FD| = 1$ und $\angle DFE = \angle EAD = 90°$. Folglich ist $\overline{EF}$ die zugehörige Höhe im Dreieck BDE, deren Länge wir nun bestimmen. Das Dreieck EBF hat bei F einen rechten Winkel und bei B einen 45°-Winkel. Folglich ist der Winkel bei E gleich $180° - 90° - 45° = 45°$, und damit ist das Dreieck EBF gleichschenklig mit $|EF| = |BF|$. Also ist die Länge der Diagonalen auch gleich $|BD| = |BF| + |FD| = |EF| + 1$ und somit $|EF| = \sqrt{2} - 1$. Somit ist der Flächeninhalt des Dreiecks BDE gleich $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$. Der Flächeninhalt des Drachenvierecks ist doppelt so groß, das heißt $2 - \sqrt{2}$.

— In Aufgabe 17 in Klassenstufe 7/8 war in einer ähnlichen Faltfigur ein Innenwinkel gesucht. —

27. Im Cocktail vom Riesen Robert sind riesige Eiswürfel. Vom obersten sind 90 % (des Volumens) nicht zu sehen, es guckt nur eine Ecke raus. Die Teile der drei Würfelkanten, die rausgucken, sind 7,2 cm, 7,5 cm bzw. 8,1 cm lang. Welche Kantenlänge hat dieser oberste Eiswürfel im Cocktail vom Riesen Robert?

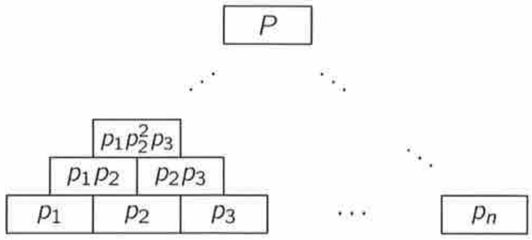
(**A**) 9,0 cm (**B**) 9,9 cm (**C**) 10,2 cm (**D**) 10,5 cm (**E**) 11,7 cm

Lösung: Die Eiswürfelecke hat die Form einer dreiseitigen Pyramide. Als Grundfläche wählen wir das rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen 7,2 cm und 7,5 cm. Dann ist 8,1 cm die Länge der zugehörigen Höhe der Pyramide. Ihr Volumen ist gleich $\frac{1}{3} \cdot \frac{7{,}2\,\text{cm} \cdot 7{,}5\,\text{cm}}{2} \cdot 8{,}1\,\text{cm} = \frac{72 \cdot 75 \cdot 81}{6000}\,\text{cm}^3$.

Da die Ecke 10 % des Eiswürfels ausmacht, ist das Volumen des Eiswürfels gleich $\frac{72 \cdot 75 \cdot 81}{600}\,\text{cm}^3$.

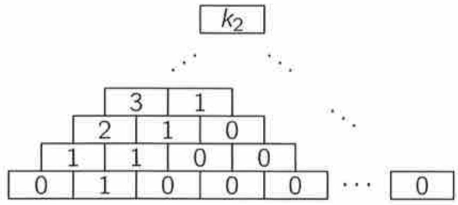
Also ist seine Kantenlänge gleich $\sqrt[3]{\frac{72 \cdot 75 \cdot 81}{600}\,\text{cm}^3} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}}\,\text{cm} = \sqrt[3]{3^6}\,\text{cm} = 3^2\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$.

28. In der untersten Reihe einer Zahlenpyramide stehen n verschiedene Primzahlen (p_1 bis p_n). Von der zweiten Reihe an ist jede Zahl das Produkt der beiden Zahlen, die direkt unter ihr stehen (s. Abb.). Im obersten Feld steht die Zahl $P = (p_1)^{k_1} \cdot (p_2)^{k_2} \cdot (p_3)^{k_3} \cdot (p_4)^{k_4} \cdot \ldots \cdot (p_n)^{k_n}$. Wenn $k_2 = 8$ ist, wie groß ist dann k_4?



(**A**) 42 (**B**) 48 (**C**) 49 (**D**) 56 (**E**) 64

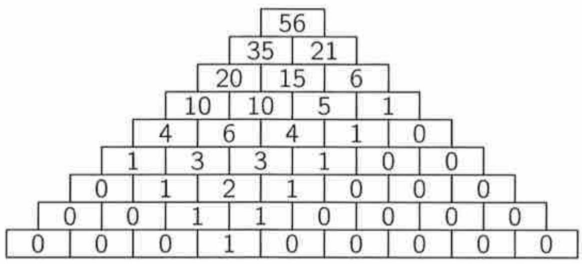
Lösung: Rechts ist für die Felder der Pyramide angegeben, mit welchem Exponenten p_2 in der jeweiligen Zahl vorkommt. Im obersten Feld steht nach Voraussetzung k_2. Die unterste Zeile lautet also $0, 1, 0, 0, \ldots$ und von der zweiten Zeile an ist jede Zahl die Summe der beiden Zahlen, die direkt unter ihr stehen (ähnlich dem Pascalschen Dreieck). Wie zu sehen, stehen ganz links die natürlichen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge (bei 0 beginnend). Wenn $k_2 = 8$ ist, dann besteht die Zahlenpyramide aus genau 9 Zeilen.



Machen wir das gleiche mit den Exponenten von p_4 und benutzen, dass die Pyramide 9 Zeilen hat, so erhalten wir die zweite Pyramide. Im obersten Feld steht k_4, also ist $k_4 = 56$.

Da wie oben ein auf dem Kopf stehendes Pascalsches Dreieck entsteht, lässt sich k_4 auch wie folgt berechnen:

$$k_4 = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$



29. Im Informatikraum haben wir 25 Rennroboter, die alle verschieden schnell sind. Wir sollen die drei schnellsten ermitteln. Auf einer Teststrecke treten jeweils fünf Roboter gegeneinander an. Vor jedem Rennen darf festgelegt werden, welche fünf Roboter fahren sollen. Nach jedem Rennen wird nur die Reihenfolge des Zieleinlaufs bekannt gegeben. Wir haben uns eine Strategie überlegt, wie wir die drei schnellsten Roboter mit N Rennen bestimmen können, egal wie diese Rennen ausgehen. Was ist das kleinstmögliche N?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

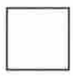
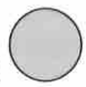
Lösung: Wir lassen in den ersten 5 Rennen alle 25 Roboter genau einmal fahren. Im 6. Rennen lassen wir die fünf Sieger der ersten 5 Rennen fahren. Die ersten drei bei diesem Lauf nennen wir $R1$, $R2$, $R3$. Der Sieger dieses Rennens ($R1$) ist von allen 25 Robotern der schnellste. Für die Plätze 2 und 3 kommen nur noch fünf Roboter in Frage: $R2$, $R3$, der Zweite und der Dritte des Rennens, das $R1$ zuvor gewonnen hat, sowie der Zweite des Rennens, das $R2$ zuvor gewonnen hat. Bei allen anderen Robotern wissen wir, dass jeweils mindestens drei Roboter schneller sind als dieser. Nun lassen wir diese fünf Roboter gegeneinander antreten. Der Erste dieses Rennens ist insgesamt der zweitschnellste und der Zweite dieses Rennens ist insgesamt der drittschnellste Roboter. Damit haben wir die drei schnellsten Roboter mit 7 Rennen bestimmt.

Wir überlegen uns im Folgenden, ob es eine Strategie mit 6 Rennen geben kann. Wir begeben uns in die Situation nach dem 5. Rennen. Wir betrachten die Roboter, die in den ersten 5 Rennen angetreten sind. Unter diesen Robotern gibt es genau u Roboter, die nach diesen 5 Rennen noch ungeschlagen sind. Es gilt $u \geq 1$, da auf jeden Fall der schnellste von ihnen ungeschlagen ist, und es gilt $u \leq 5$, da nur die Sieger der 5 Rennen ungeschlagen sein können. Des Weiteren gibt es genau x Roboter, die in den ersten 5 Rennen nicht gefahren sind.

Wir betrachten diejenigen u Rennen, in denen die u ungeschlagenen Roboter zum ersten Mal angetreten sind. In den anderen $5 - u$ Rennen hat entweder einer der ungeschlagenen Roboter ein weiteres Mal gewonnen oder ein Roboter, der in einem anderen der 5 Rennen geschlagen wurde. Damit das möglich ist, muss es mindestens $5 - u$ Roboter geben, die noch nicht gefahren sind. Also gilt $x \geq 5 - u$.
Jeder der $u + x$ ungeschlagenen bzw. noch nicht gefahrenen Roboter könnte der Schnellste sein. Also müssen im 6. Rennen alle $u + x$ ungeschlagenen bzw. noch nicht gefahrenen Roboter antreten, wenn wir unabhängig vom Ausgang des Rennens den Schnellsten finden wollen. Das heißt, es muss $u + x = 5$ gelten.
Ist $x \geq 3$, so kommen sowohl die x noch nicht gefahrenen Roboter als auch die drei schnellsten der $25 - x$ Roboter, die schon in den ersten 5 Rennen gefahren sind, für die drei gesuchten Roboter in Frage. Das sind insgesamt $x + 3 \geq 6$ Roboter. Daher reicht ein weiteres Rennen nicht aus, um unabhängig von Ausgang des Rennens die drei schnellsten Roboter zu bestimmen.
Ist $x \leq 2$, so waren unter den ersten 5 Rennen höchstens 4 Rennen, in denen ein Roboter gestartet ist, der mehr als einmal gefahren ist. Also gab es unter den ersten 5 Rennen ein Rennen, bei dem jeder der fünf Roboter genau einmal, das heißt ausschließlich in diesem Rennen dabei war. Von diesem Rennen kann der Zweite einer der drei gesuchten Roboter sein. Da dieser nicht zu den ungeschlagenen und auch nicht zu den noch nicht gefahrenen Robotern gehört, gibt es erneut mindestens 6 Roboter, die für die drei gesuchten Roboter in Frage kommen. Auch in diesem Fall reicht also ein weiteres Rennen nicht aus, um unabhängig von Ausgang des Rennens die drei schnellsten Roboter zu bestimmen.
Damit haben wir begründet, dass 6 Rennen nicht ausreichen, und natürlich gibt es dann auch keine Strategie mit weniger als 6 Rennen.

30. Xenia und Ysette wollen wissen, welche der folgenden Figuren Zita am besten gefällt:

Xenia weiß, dass Zita die Form dieser Figur an Ysette verraten hat, und Ysette weiß, dass Zita die Farbe dieser Figur an Xenia verraten hat. Xenia sagt zu Ysette: „Ich kenne die Figur, die Zita am besten gefällt, nicht. Aber ich weiß auch, dass du sie ebenfalls nicht kennen kannst." Ysette antwortet: „Eben kannte ich die Figur noch nicht, jetzt aber schon." Daraufhin stellt Xenia fest: „Jetzt kenne ich die Figur auch!" Welche Figur gefällt Zita am besten?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Da sich Xenia sicher ist, dass Ysette die Figur nicht kennen kann, wissen wir und Ysette, dass die Figur nicht weiß ist. Wäre die Figur nämlich weiß, so könnte sie das weiße Sechseck sein. Dann aber würde Ysette die Figur kennen, da nur eine der angegebenen Figuren ein Sechseck ist.
Mit dem Wissen, dass die Figur nicht weiß ist, erschließt Ysette die Figur. Das bedeutet, dass die Form der Figur in der angegebenen Reihe einmal in weiß und einmal in einer anderen Farbe vorkommen muss. Es kommen nur noch drei Figuren in Frage: 

Da nun auch Xenia die Figur erschließt, kann sie nicht schwarz sein, da es dafür zwei Möglichkeiten gibt. Damit ist klar, welche Figur Zita am besten gefällt: 

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	E	A	A	E	B	D	D	D	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	C	B	C	A	E	B	D	C	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	A	C	D	B	E	C	D	D	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

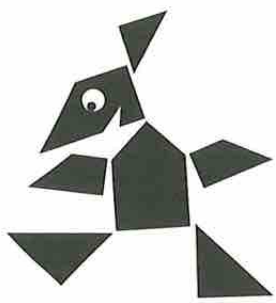
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	A	B	D	C	A	C	C	C	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	D	A	A	D	E	E	B	A	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	B	C	B	A	C	D	E	B	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	E	C	A	B	E	C	C	D	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	C	B	B	A	A	B	D	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	E	D	C	A	A	D	B	C

Die Lösungen der Extra-Knobeleien stehen auf der Webseite
des Känguru-Wettbewerbs Deutschland unter

`www.mathe-kaenguru.de/chronik/broschueren`



www.kaenguru-schweiz.ch