2019

Mathe mit dem Känguru

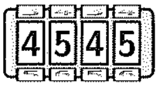
Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

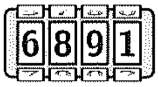
Klassenstufen 7 und 8

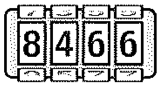
1. Der Code für Lenas Fahrradschloss besteht aus 4 geraden Ziffern. Welcher Code könnte das sein?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: Die geraden Ziffern sind 0, 2, 4, 6 und 8. Code (**E**) besteht als einziger der fünf Codes aus vier geraden Ziffern. In den anderen Codes ist immer mindestens eine ungerade Ziffer.

2. Um sich in Spanisch zu verbessern, hat Carl an 10 Tagen Vokabeln gelernt, jeden Tag eine Viertelstunde. Wie viele Stunden hat Carl in diesen 10 Tagen insgesamt Vokabeln gelernt?

(**A**) zwei (**B**) zweieinhalb (**C**) drei (**D**) dreieinhalb (**E**) vier

Lösung: Carl hat insgesamt 10 Viertelstunden Vokabeln gelernt. Da $\frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ ist, sind 10 Viertelstunden also zweieinhalb Stunden.

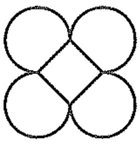
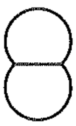
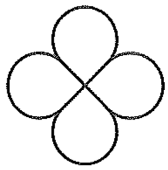
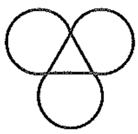
3. $1 - \big(2 - \big(3 - (4 - 5)\big)\big) =$

(**A**) 1 (**B**) -2 (**C**) 3 (**D**) -4 (**E**) 5

Lösung: Wir berechnen die Ausdrücke in den Klammern von innen nach außen und beachten dabei, dass ein Minus vor einer Klammer einen Wechsel des Vorzeichens in der Klammer bewirkt:

$$1-\big(2-\big(3-(4-5)\big)\big) = 1-\big(2-\big(3-(-1)\big)\big) = 1-\big(2-\big(3+1\big)\big) = 1-\big(2-4\big) = 1-\big(-2\big) = 1+2 = 3\,.$$

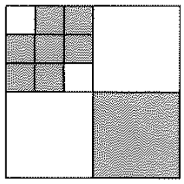
4. Eine der folgenden Figuren kann *nicht* in einem Zug gezeichnet werden, ohne dabei den Stift abzusetzen oder eine Linie zweimal zu zeichnen. Welche?

(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

Lösung: (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) können in einem Zug gezeichnet werden, ohne dabei den Stift abzusetzen oder eine Linie zweimal zu zeichnen. Bei (**D**) klappt das nicht.
Dass (**D**) tatsächlich nicht auf diese Weise gezeichnet werden kann, lässt sich so begründen: Für jeden Punkt, der beim Zeichnen weder Anfangs- noch Endpunkt ist, gilt: Kommt man beim Zeichnen mit einer Linie an diesem Punkt an, so kommt man mit einer anderen Linie auch wieder weg. Wenn also eine Figur auf die beschriebene Weise gezeichnet werden kann, dann treffen sich an allen Punkten, die beim Zeichnen weder Anfangs- noch Endpunkt sind, eine *gerade* Anzahl von Linienenden. Bei (**D**) treffen sich an 4 Schnittpunkten 3 Linienenden. Es gibt also mehr als 2 Schnittpunkte mit einer ungeraden Anzahl von Linienenden. Daher kann (**D**) nicht auf die beschriebene Weise gezeichnet werden.

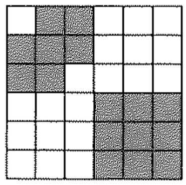
Lösung: Die 5 Nullen können nur an der Einerstelle einer (mindestens) zweistelligen Seitenzahl vorkommen. Da die Seiten mit 1 beginnend nummeriert sind, sind es daher mindestens 50, aber weniger als 60 Seiten. Da genau 6 Achten vorkommen, gibt es die Seitenzahlen 8, 18, 28, 38, 48 und 58. Also sind es 58 oder 59 Seiten. Und da alle Blätter vorn und hinten Seitenzahlen tragen, ist die Anzahl der Seiten gerade. Also hat Romys Rätselbuch 58 Seiten.

10. Das große Quadrat rechts im Bild wurde wie abgebildet in kleinere Quadrate zerlegt. Welcher Anteil der Fläche des großen Quadrats ist grau?



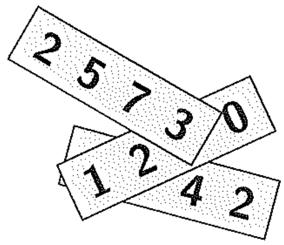
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{4}{9}$ **(E)** $\frac{5}{12}$

Lösung: Das große Quadrat ist zunächst in 4 gleich große Quadrate aufgeteilt, von denen eines komplett grau ist (ein Viertel des großen Quadrats). Das Quadrat links oben ist in 9 kleine, gleich große Quadrate unterteilt, von denen 7 grau sind (7 Neuntel eines Viertels des großen Quadrats). Der gesuchte Anteil der grauen Fläche ist also $\frac{1}{4} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9+7}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.



Eine andere Möglichkeit besteht darin, das große Quadrat vollständig in kleine Quadrate zu zerlegen. Von den $6 \cdot 6 = 36$ kleinen Quadraten sind $7 + 9 = 16$ grau. Also ist der gesuchte Anteil der grauen Fläche $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

11. Auf drei Papierstreifen stehen wie rechts abgebildet drei vierstellige Zahlen. Ihre Summe ist 7635. Welches sind die drei verdeckten Ziffern?



(A) 2, 3, 8 **(B)** 1, 2, 9 **(C)** 2, 4, 8 **(D)** 2, 3, 9 **(E)** 3, 8, 9

Lösung: Wir schreiben die Summanden und die Summe wie bei der schriftlichen Addition üblich untereinander. Die Einer der Summanden addieren sich zu 5, und das ist der Einer der Summe. Die beiden sichtbaren Zehner der Summanden addieren sich zu 11. Da der Zehner der Summe 3 ist, ist der verdeckte Zehner 2. Die beiden sichtbaren Hunderter der Summanden und der Übertrag vom Zehner addieren sich zu 8. Da der Hunderter der Summe 6 ist, ist der verdeckte Hunderter 8. Die beiden sichtbaren Tausender der Summanden und der Übertrag vom Hunderter addieren sich zu 4. Da der Tausender der Summe 7 ist, ist der verdeckte Tausender 3. Die gesuchten Ziffern sind 2, 3, 8.

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 5 & 7 & 3 \\ & 1 & 2 & \mathbf{2} & 0 \\ + & \mathbf{3}_1 & \mathbf{8}_1 & 4 & 2 \\ \hline & 7 & 6 & 3 & 5 \end{array}$$

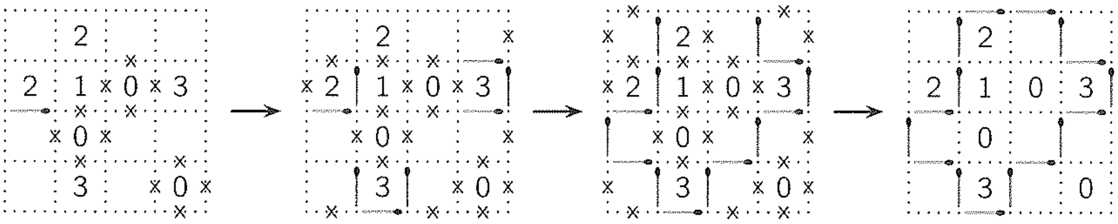
— *Eine Lösungsvariante ist bei der ähnlichen Aufgabe 10 in Klassenstufe 9/10 zu finden.* —

12. Nicola hat Schrauben in Päckchen zu je 6 Stück gekauft. Die passenden Muttern gibt es in Päckchen zu je 5 Stück. Damit sie gleich viele Schrauben wie Muttern hat, braucht Nicola von den Muttern 2 Päckchen mehr als von den Schrauben. Wie viele Muttern muss Nicola kaufen?

(A) 60 **(B)** 66 **(C)** 70 **(D)** 84 **(E)** 90

Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir aus jedem Päckchen Schrauben eine Schraube herausnehmen. Dann enthalten alle Päckchen mit Schrauben oder Muttern jeweils 5 Stück. Damit es insgesamt gleich viele Schrauben und Muttern sind, muss die Anzahl an herausgenommenen Schrauben gleich der Anzahl der Muttern in den 2 zusätzlichen Päckchen sein, das heißt $2 \cdot 5 = 10$. Daher sind es genau 10 Päckchen Schrauben, also insgesamt $10 \cdot 6 = 60$ Schrauben. Somit muss Nicola 60 Muttern kaufen.

Lösung: Schrittweise platzieren wir Streichhölzer, deren Lage feststeht, oder schließen Linien aus, auf denen sicher kein Streichholz liegt (mit „x" markiert). Der Rundweg besteht aus 16 Streichhölzern.

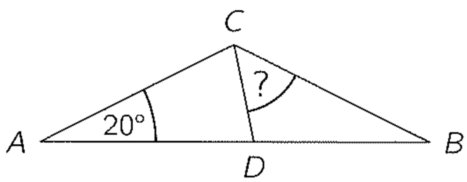


17. Unsere Nachbarn haben im Garten schon Ostereier aufgehängt: rote, gelbe, blaue und violette, insgesamt 36 Stück. Ein Sechstel der Ostereier ist rot. Drei Viertel der Ostereier sind nicht gelb. Zwei Drittel der Ostereier sind nicht blau. Wie viele Ostereier sind violett?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Von den 36 Ostereiern sind $\frac{1}{6}$ rot, also $\frac{1}{6} \cdot 36 = 6$ Ostereier. Da $\frac{3}{4}$ der Ostereier *nicht* gelb sind, ist $\frac{1}{4}$ der 36 Ostereier gelb, also $\frac{1}{4} \cdot 36 = 9$ Ostereier. Da $\frac{2}{3}$ der Ostereier *nicht* blau sind, ist $\frac{1}{3}$ der 36 Ostereier blau, also $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ Ostereier. Also sind $36 - 6 - 9 - 12 = 9$ Ostereier violett.

18. In einem Dreieck ABC liegt der Punkt D auf der Seite $\overline{AB}$. Die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang, und der Winkel BAC ist 20° groß (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der Winkel DCB?



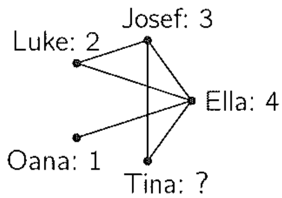
(**A**) 50° (**B**) 60° (**C**) 65° (**D**) 70° (**E**) 75°

Lösung: Da die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind, ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$. Daher ist $\measuredangle CBA = \measuredangle BAC = 20°$ und, weil die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, $\measuredangle ACB = 180° - 2 \cdot 20° = 140°$. Da die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ gleich lang sind, ist das Dreieck ADC gleichschenklig mit Basis $\overline{CD}$. Daher ist $\measuredangle CDA = \measuredangle ACD = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Somit erhalten wir für den gesuchten Winkel $\measuredangle DCB = \measuredangle ACB - \measuredangle ACD = 140° - 80° = 60°$.

19. Ella, Josef, Luke, Oana und Tina lesen gern und tauschen manchmal ihre Lieblingsbücher miteinander. Ella hat schon mit allen vier Freunden getauscht, Josef mit drei, Luke mit zwei und Oana mit einem. Mit wie vielen ihrer vier Freunde hat Tina bereits getauscht?

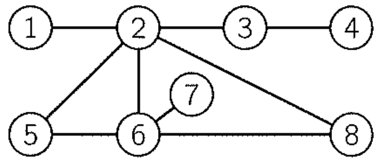
(**A**) mit keinem (**B**) mit einem (**C**) mit zwei (**D**) mit drei (**E**) mit allen vier

Lösung: Ella hat mit allen 4 Freunden getauscht, also mit Josef, Luke, Oana und Tina. Oana hat nur mit einer Person getauscht, und das ist Ella. Josef hat mit 3 Freunden getauscht, und das sind (weil er nicht mit Oana getauscht hat) Ella, Luke und Tina. Luke hat mit 2 Freunden getauscht, und das sind wie erwähnt Ella und Josef. Damit ist vollständig klar, wer mit wem getauscht hat. Tina hat mit Ella und Josef, also mit 2 Freunden getauscht.



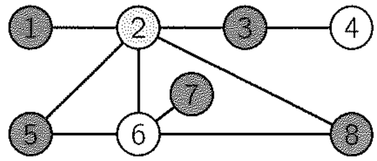
Wenn man die Tauschbeziehungen wie im Bild rechts grafisch darstellt, behält man gut den Überblick.

23. Yves malt die Kreise im Bild entweder rot, gelb oder blau aus. Direkt miteinander verbundene Kreise sollen stets verschiedene Farben haben. Welche zwei Kreise muss Yves sicher mit derselben Farbe ausmalen?

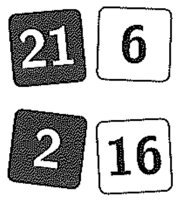


(**A**) 5 und 8 (**B**) 1 und 6 (**C**) 2 und 7 (**D**) 4 und 5 (**E**) 3 und 6

Lösung: Da die Kreise 2 und 6 miteinander verbunden sind, müssen sie voneinander verschiedene Farben haben. Da der Kreis 5 sowohl mit 2 als auch mit 6 verbunden ist, muss er eine andere Farbe haben als 2 und 6, also die dritte mögliche Farbe. Dasselbe gilt für den Kreis 8. Somit müssen 5 und 8 sicher mit derselben Farbe ausgemalt werden.
Dass die beiden Kreise in jeder der anderen Antwortmöglichkeiten verschiedene Farben haben können, zeigt das Beispiel rechts.



Fridolin hat schwarze Plättchen mit den Zahlen von 1 bis 30 und weiße Plättchen mit den Zahlen von 1 bis 20.
Fridolin legt nun immer ein schwarzes Plättchen und rechts daneben ein weißes Plättchen.
So entstehen 2-stellige, 3-stellige oder 4-stellige Zahlen.
Welche Zahlen kann er auf verschiedene Weise erhalten?

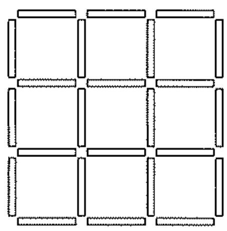


24. Zwei Kerzen wurden gleichzeitig angezündet. Sie sind beide zylinderförmig, haben aber unterschiedliche Durchmesser und Höhen. Die Brenndauer der ersten Kerze beträgt 6 Stunden, die Brenndauer der zweiten 8 Stunden. Nach 3 Stunden sind beide Kerzen auf die gleiche Höhe heruntergebrannt. Die erste Kerze war vor dem Anzünden 35 cm hoch. Wie hoch war die zweite Kerze vor dem Anzünden?

(**A**) 10,5 cm (**B**) 15 cm (**C**) 17,5 cm (**D**) 20 cm (**E**) 28 cm

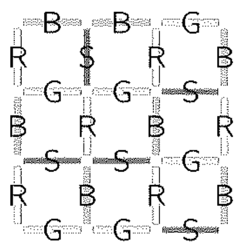
Lösung: Nach 3 Stunden ist die erste Kerze genau zur Hälfte abgebrannt. Daher sind die beiden Kerzenreste nun 35 cm : 2 = 17,5 cm hoch. Der Rest der zweiten Kerze brennt $8 - 3 = 5$ Stunden. In einer Stunde brennt die zweite Kerze also 17,5 cm : 5 = 3,5 cm nieder. Da ihre gesamte Brenndauer 8 Stunden beträgt, war sie vor dem Anzünden $3{,}5\,\text{cm} \cdot 8 = 28\,\text{cm}$ hoch.

25. Mit roten, grünen, blauen und schwarzen Stäbchen möchte Tatjana wie abgebildet ein 3×3-Feld legen. Jedes der kleinen 1×1-Quadrate soll von vier verschiedenfarbigen Stäbchen begrenzt sein. Welches ist die kleinste Anzahl an schwarzen Stäbchen, die Tatjana benutzen muss?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Jedes Stäbchen kann höchstens zu 2 der 9 kleinen 1×1-Quadrate gleichzeitig gehören. Also kann die Anzahl an schwarzen Stäbchen nicht kleiner als 5 sein. Dass 5 schwarze Stäbchen tatsächlich reichen, um das 3×3-Feld zu legen, zeigt das Bild. Die kleinste Anzahl an schwarzen Stäbchen, die Tatjana benutzen muss, ist 5.



29. Bei der „Langen Schachnacht" wird Schach in Dreierteams gespielt. Jedes Team tritt gegen jedes andere Team genau einmal an. Dabei spielt jeder Spieler des einen Teams gegen jeden Spieler des anderen Teams genau eine Partie. Aus Zeitgründen können höchstens 200 Partien gespielt werden. Wie viele Teams können höchstens am Turnier teilnehmen?

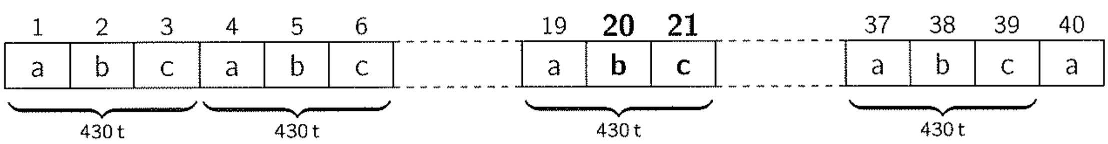
(**A**) 11 (**B**) 10 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Teams mit n. Dann gibt es $3n$ Spieler und für jeden von ihnen $3n-3$ Gegner. Kombinieren wir die Spieler beliebig, so finden wir $3n\cdot(3n-3)$ Partien. Auf diese Weise zählen wir jede Begegnung zweimal, denn wir zählen pro Partie jeden der beiden Spieler einmal als ersten und einmal als zweiten. Bei n Teams werden daher $3n \cdot (3n-3)/2$ Partien gespielt.
Damit die „Lange Schachnacht" stattfinden kann, muss $3n \cdot (3n-3)/2 \le 200$ gelten, das heißt $3n \cdot (3n-3) \le 400$ bzw. $9n \cdot (n-1) \le 400$. Wir teilen durch 9 und dürfen abrunden, da n eine natürliche Zahl ist, und erhalten so die Bedingung $n \cdot (n-1) \le 44$.
Nun lohnt es sich, diese Bedingung mit den Zahlen aus den Antwortmöglichkeiten zu überprüfen: Für $n=6$ gilt $n\cdot(n-1) = 6\cdot 5 = 30 \le 44$. Für $n=7$ gilt $n \cdot (n-1) = 7\cdot 6 = 42 \le 44$. Für $n=8$ gilt $n\cdot(n-1) = 8\cdot 7 = 56 > 44$. Für $n > 8$ wird das Produkt $n\cdot(n-1)$ noch größer. Also können höchstens 7 Teams am Turnier teilnehmen.
Ohne die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten zu verwenden, können wir das Ergebnis wie folgt finden: Da $n\cdot(n-1) = (n-1)^2 + (n-1)$ gilt, folgt aus $n\cdot(n-1) \le 44$ wegen $n-1 \ge 0$ insbesondere $(n-1)^2 \le 44$, also $n-1 \le 6$, d. h. $n \le 7$. Da $n = 7$ die Bedingung erfüllt, ist 7 die gesuchte Anzahl.

30. Der schwerste Zug Europas transportiert Eisenerz vom Hamburger Hafen zum Stahlwerk Salzgitter in Niedersachsen. Die 40 Waggons wiegen insgesamt etwa 5700 t. Sie sind unterschiedlich schwer, aber jeder Block aus drei zusammenhängenden Waggons wiegt insgesamt etwa 430 t. Wie viel wiegen die beiden mittleren Waggons des Zugs zusammen?

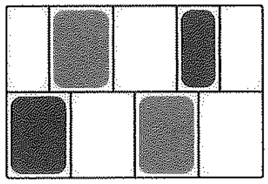
(**A**) etwa 270 t (**B**) etwa 280 t (**C**) etwa 300 t (**D**) etwa 310 t (**E**) etwa 320 t

Lösung: Wir stellen uns die Waggons von 1 bis 40 nummeriert vor. Gesucht ist die Gesamtmasse der beiden mittleren Waggons, also der Waggons 20 und 21.
Wir bezeichnen die Massen der Waggons 1, 2 und 3 mit a, b und c und die des Waggons 4 mit x. Nach Aufgabenstellung gilt $a+b+c = 430\,\text{t} = b+c+x$ und somit $x = a$. Bezeichnen wir die Masse des Waggons 5 mit y, gilt analog $b+c+a = 430\,\text{t} = c+a+y$ und somit $y = b$. Indem wir dieses Argument fortsetzen, sehen wir, dass die Massen der Waggons eine periodische Folge bilden. Die Waggons 20 und 21 haben dabei die Massen b und c.



In der Abbildung sind die Waggons außerdem vorn beginnend in Dreiergruppen zusammengefasst, die jeweils 430 t wiegen. Da es 13 solcher Dreiergruppen gibt und alle Waggons zusammen 5700 t wiegen, wiegt der letzte Waggon folglich $a = 5700\,\text{t} - 13\cdot 430\,\text{t} = 110\,\text{t}$.
Die Waggons 20 und 21 wiegen zusammen somit $b + c = 430\,\text{t} - 110\,\text{t} = 320\,\text{t}$.

Kunterbunte Eisvielfalt



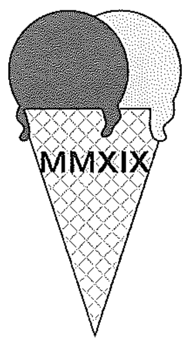
In der Auslage eines Eisladens sind verschiedene Eissorten in den rechteckigen Eisschalen. Es gibt große und kleine Eisschalen. Je nachdem wie viele kleine und große Eisschalen benutzt werden, gibt es in der vollen Auslage unterschiedlich viele Eissorten im Angebot.

Wie viele Sorten kann der Eisverkäufer höchstens anbieten, wenn er nur kleine Eisschalen benutzt? Wie viele Sorten sind es, wenn er nur große Eisschalen benutzt?

Die großen und die kleinen Eisschalen lassen sich unterschiedlich in der Auslage anordnen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Anordnung der Eisschalen in der unteren Reihe? Und wie viele sind es für die gesamte Auslage?

Cäsars Eissorten



In der Eisdiele „Cäsar" hat sich Cleo, die Chefin, etwas Besonderes einfallen lassen. Die Namen der Eissorten sind alle verschlüsselt. Dazu wird für jedes Wort eine Zahl zwischen 1 und 25 gewählt. Jeder Buchstabe wird nun durch den Buchstaben ersetzt, der im Alphabet so viele Stellen hinter ihm steht. Wenn man das Ende des Alphabets erreicht, fängt man wieder von vorne an.
Für die Sorte ZITRONE wurde die Zahl 3 gewählt. Hier wurde Z durch C ersetzt, I durch L, T durch W und so weiter. Am Ende steht CLWURQH für die Sorte ZITRONE. Zum Entschlüsseln geht man nun genau anders herum vor.

Welche beliebten Sorten verbergen sich hinter den folgenden „Wörtern"?

WBOJMMF RBGNJNKZCD REQORRER KDVHOQXVV
VWUDFFLDWHOOD EFJYBBOB RFSLT OTLMZWY

Die schrägen Zahlen aus Pisa

Leonardo da Pisa, besser bekannt als Fibonacci, war ein italienischer Mathematiker. Nach ihm wurde die Fibonacci-Folge benannt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Die erste und zweite Fibonacci-Zahl sind jeweils 1. Die dritte Fibonacci-Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger, also $1+1=2$. Ebenso ist die vierte Fibonacci-Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger, also $1+2=3$. Und jetzt geht es immer so weiter: $2+3=5$, $3+5=8$, $5+8=13$, $8+13=21$, ...

Wenn wir nun statt der zwei Einsen zwei andere Startzahlen wählen und auf dieselbe Weise fortsetzen, erhalten wir eine andere Folge. Mit 4 und 8 erhalten wir zum Beispiel 4, 8, 12, 20, 32, 52, 84, ...

(a) Mit welchen beiden einstelligen Startzahlen erhalten wir eine Folge, die 49 und 128 enthält?

(b) Welche einstelligen Startzahlen sollte man wählen, damit in der Folge 27 und 115 vorkommen?

(c) Welche einstelligen Startzahlen sollte man wählen, damit in der Folge 11 und 215 vorkommen?

(d) Nun sollen beide Startzahlen gleich sein.
Welche Startzahlen muss man wählen, wenn später in der Folge 2019 vorkommen soll?
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn 1320 in der Folge vorkommen soll?

Klassenstufen 9 und 10

1. Eine Modelleisenbahn braucht genau 1 min 11 s für eine Runde. Wie lange braucht sie für 6 Runden?

(**A**) 6 min 56 s (**B**) 7 min 6 s (**C**) 7 min 16 s (**D**) 7 min 26 s (**E**) 7 min 36 s

Lösung: Die Eisenbahn braucht für 6 Runden 6 min und 66 s. Da 66 s gleich 1 min 6 s sind, braucht die Bahn für 6 Runden also 7 min 6 s.

2. Während der Frisör meine Haare schneidet, soll der Lehrling HAARANALYSE so an die Wand hinter mir schreiben, dass ich es vor mir im Spiegel richtig lesen kann. Was muss er schreiben?

(**A**) H∀∀ꓤ∀И∀Γ⅄SE (**B**) ESY⅃AИAЯAAH (**C**) HAAЯAИA⅃YƧƎ
(**D**) ƎƧYLANARAAH (**E**) ƎƧY⅃AИAЯAAH

Lösung: Um ein Wort im Spiegel richtig lesen zu können, muss es an einer vertikalen Achse gespiegelt werden. Im Wort HAARANALYSE sind die Buchstaben H, A und Y gleich ihrem Spiegelbild. Die anderen Buchstaben müssen gespiegelt so erscheinen: Я, И, ⅃, Ƨ und Ǝ. Bei der Lösungsvariante (**A**) ist fälschlich horizontal gespiegelt, bei (**B**) sind E und S nicht gespiegelt, bei (**C**) sind zwar die einzelnen Buchstaben gespiegelt, aber das Wort nicht, und bei (**D**) sind L, N und R nicht gespiegelt. Der Lehrling muss so wie in (**E**) schreiben.

3. Drei Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Wie viele verschiedene Punktesummen sind möglich?

(**A**) 13 (**B**) 14 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 21

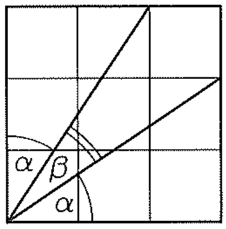
Lösung: Der kleinste mögliche Wert ist $3 \cdot 1 = 3$, der größte mögliche Wert ist $3 \cdot 6 = 18$. Jede Zahl von 3 bis 18, beide einschließlich, ist als Summe möglich. Das sind 16 verschiedene Punktesummen.

4. $\dfrac{20 - 19 \cdot 20 + 19}{19 - 20 \cdot 19 + 20} =$

(**A**) -419 (**B**) -39 (**C**) 1 (**D**) 39 (**E**) 381

Lösung: Zähler und Nenner könnten nacheinander ausgerechnet werden. Dabei würde sich – richtig gerechnet – herausstellen, dass beide Werte gleich sind, das gesuchte Ergebnis also 1 ist.
Ein genauer Blick – bevor die Rechnerei beginnt – auf Zähler und Nenner zeigt, dass sowohl die Summanden wie auch die Faktoren 20 und 19 nur vertauscht sind, Zähler und Nenner also denselben Wert haben. Und schon sind wir fertig, der Bruch hat den Wert 1.

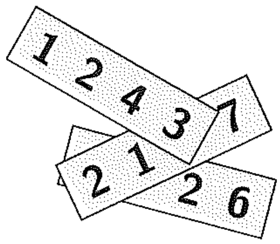
Lösung: Die beiden Strecken, die den Winkel β einschließen, sind Diagonalen in Rechtecken, deren Seitenverhältnis 2 : 3 ist. Folglich sind die beiden an β grenzenden Winkel gleich groß und es gilt $2\alpha + \beta = 90°$.



9. Beim Versand der Pakete mit den Preisen für den Känguru-Wettbewerb hat Martin drei Pakete zusammen auf die Waage gelegt. Sie zeigt 28 kg. Die Gewichte der Pakete, in Kilogramm angegeben, sind drei verschiedene natürliche Zahlen. Wie schwer kann das leichteste dieser Pakete *höchstens* sein?

(A) 1 kg **(B)** 4 kg **(C)** 7 kg **(D)** 8 kg **(E)** 9 kg

Lösung: Das leichteste Paket muss bei verschiedenen Kilogrammzahlen der drei Pakete ganz sicher leichter als ein Drittel von 28 kg, also – da ganzzahlig – leichter als 10 kg sein. Wäre das leichteste Paket 9 kg schwer, würden die drei Pakete zusammen mindestens 9 kg + 10 kg + 11 kg = 30 kg wiegen, also zu viel. Das leichteste Paket kann 8 kg schwer sein, die beiden anderen Pakete bringen dann 9 kg und 11 kg auf die Waage.



10. Auf drei Papierschnipseln steht jeweils eine vierstellige Zahl. Ich weiß, dass die Summe dieser drei Zahlen 10126 ist. Welche drei Ziffern sind verdeckt?

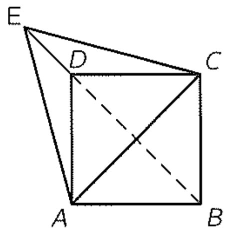
(A) 5, 6, 7 **(B)** 4, 5, 7 **(C)** 4, 6, 7 **(D)** 4, 5, 6 **(E)** 5, 7, 8

Lösung: Wir bezeichnen die verdeckten Ziffern so mit x, y und z, dass wir die Summe wie folgt schreiben können: $1243 + 21x7 + yz26 = 10126$. Daraus folgt $1243 + 2107 + 26 + yzx0 = 10126$, und somit $yzx0 = 10126 - 1243 - 2107 - 26 = 6750$. Also sind die drei verdeckten Ziffern 5, 6 und 7.
— *Eine Lösungsvariante ist bei der ähnlichen Aufgabe 11 in Klassenstufe 7/8 zu finden.* —

11. Über der Diagonale $\overline{AC}$ eines Quadrats $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck ACE so errichtet worden, dass sich der Punkt D im Inneren dieses Dreiecks befindet. Wie groß ist der Winkel EDA?

(A) 30° **(B)** 72° **(C)** 135° **(D)** 144° **(E)** 150°

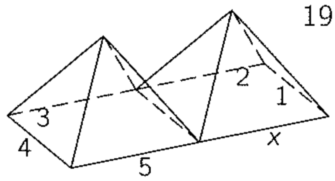
Lösung: Da $ABCD$ ein Quadrat ist, halbiert die Diagonale $\overline{BD}$ den 90°-Winkel bei D. Da das Dreieck ACE gleichseitig ist, verläuft die Gerade BD durch E. Also ist EDA als Nebenwinkel eines 45°-Winkels $180° - 45° = 135°$ groß.



12. Die Zahlen a, b, c und d sind voneinander verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Welches ist der kleinste Wert, den $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ haben kann?

(A) $\frac{14}{45}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{29}{90}$ **(D)** $\frac{3}{19}$ **(E)** $\frac{25}{72}$

Lösung: Sicher müssen die Zähler a und c die kleinstmöglichen Zahlen sein, also 1 und 2, und die Nenner b und d die größtmöglichen, also 9 und 10. Die Summe, deren kleinsten Wert wir suchen, ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$. Da $2 \cdot 10 + 1 \cdot 9 > 1 \cdot 10 + 2 \cdot 9$ ist, ergibt die Wahl $a = 1, b = 9, c = 2, d = 10$ den kleinstmöglichen Wert, und zwar $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 9}{9 \cdot 10} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$.



Lösung: Die Abbildung zeigt, wie das Oktaeder gefaltet werden kann. Es ist zu erkennen, dass Kante 5 mit Kante x beim Falten zusammenfällt.

17. Ein Saft soll hergestellt werden, indem ein Saftkonzentrat mit Wasser im Verhältnis 1 : 7 verdünnt wird. Das Saftkonzentrat befindet sich in einer genau bis zur Hälfte damit gefüllten 1-Liter-Flasche. Welchen Anteil davon muss man nehmen, um 2 Liter Saft zu erhalten?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{2}{7}$ (**D**) $\frac{4}{7}$ (**E**) die gesamte Menge

Lösung: In den $2\,\ell$ Saft sind 1 Teil Konzentrat und 7 Teile Wasser, also $\frac{1}{8} \cdot 2\,\ell = \frac{1}{4}\,\ell$ Konzentrat. Und ein Viertelliter ist genau die Hälfte von einem halben Liter; der gesuchte Anteil beträgt $\frac{1}{2}$.

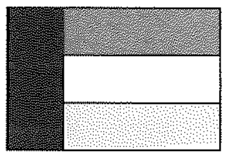
18. Seit Ingrid, Petra und Renate Rentnerinnen sind, gehen sie täglich zusammen spazieren. Wenn Ingrid keinen Hut aufhat, dann trägt Petra einen. Wenn Petra keinen Hut aufhat, dann trägt Renate einen. Heute ist Petra ohne Hut. Wer trägt also heute einen Hut?

(**A**) Ingrid und Renate (**B**) nur Ingrid (**C**) nur Renate
(**D**) weder Ingrid noch Renate (**E**) Das lässt sich nicht mit Sicherheit sagen.

Lösung: Da Petra keinen Hut trägt, hat Renate einen auf. Außerdem ist klar: Wenn Ingrid *keinen* Hut aufhätte, würde Petra einen tragen, und da das nicht der Fall ist, hat also auch Ingrid einen Hut auf. Sowohl Ingrid als auch Renate tragen heute einen Hut.

— *Dasselbe logische Problem war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 11 verpackt.* —

19. Die Fahne unseres Angelvereins soll neu genäht werden. Sie ist rechteckig, und ihre Höhe verhält sich zur Breite wie 3 : 5. Die vier verschiedenfarbigen Stoffstücke sind rechteckig und haben denselben Flächeninhalt (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie verhält sich bei dem schwarzen Stoffrechteck die kürzere zur längeren Seite?



(**A**) 1 : 3 (**B**) 2 : 5 (**C**) 2 : 7 (**D**) 3 : 10 (**E**) 5 : 12

Lösung: Wir bezeichnen die längere Seite des schwarzen Rechtecks mit a und die kürzere mit b. Dann ist laut Aufgabenstellung die längere Seite der Fahne $\frac{5}{3}a$ lang. Da alle vier Stoffstücke der Fahne denselben Flächeninhalt haben, beträgt der Flächeninhalt A_S des schwarzen Rechtecks ein Viertel des Flächeninhalts des Fahnen-Rechtecks, also $A_S = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \frac{5}{3}a = \frac{5}{12}a^2$. Da $A_S = a \cdot b$ gilt, erhalten wir $a \cdot b = \frac{5}{12}a^2$ und, indem wir durch a^2 teilen, $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$. Das gesuchte Verhältnis ist 5 : 12.

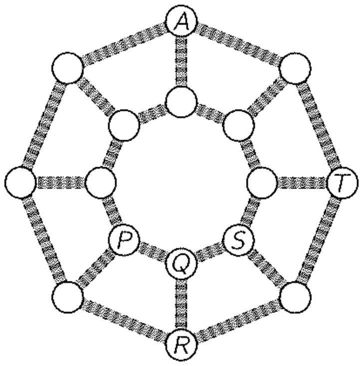
20. Meine siebenstellige Telefonnummer $AAABBBB$ beginnt mit drei gleichen Ziffern A und endet mit vier gleichen Ziffern B. Die Summe aller sieben Ziffern ist die zweistellige Zahl AB. Dann ist $A + B =$

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 10 (**D**) 14 (**E**) 17

Lösung: Wenn wir die Aussage aus der Aufgabe in eine Gleichung „übersetzen", erhalten wir $3A + 4B = 10A + B$ bzw. $3(A + B) = 10A$. Da 3 und 10 teilerfremd sind, muss $A + B$ durch 10 teilbar sein. Und da A und B Ziffern, also kleiner als 10 sind, und $A > 0$ ist, gilt $A + B = 10$. Übrigens können wir mithilfe der Gleichung eindeutig $A = 3$ und $B = 7$ ermitteln.

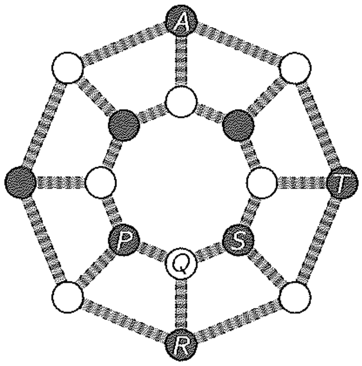
zweistelligen Zahl gehören, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, oder die 2. und 3. Ziffer zu einer zweistelligen Zahl gehören, die durch 3 teilbar ist. Die Dreiergruppe bei (**B**) beginnt und endet mit einer Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, ist unter den Dreiergruppen also nicht zu finden.

24. Im Kindergarten steht das abgebildete Balanciergerät, bei dem die Kinder über die verbindenden Balken balancieren können. Wir bezeichnen den Weg von einer zu einer benachbarten Ecke als Schritt. Zu welcher der Ecken P, Q, R, S, T kann ein Kind, das in A beginnt, nach 33 Schritten gelangen?

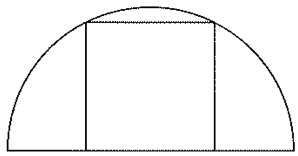


(**A**) nur zu T (**B**) nur zu Q
(**C**) nur zu P, R und S (**D**) nur zu P, R, S und T
(**E**) zu jeder der 5 Ecken

Lösung: Wir können die Ecken abwechselnd schwarz und weiß färben, so wie im Bild. Da sich schwarz und weiß abwechseln, landet man bei jedem Weg, der bei A beginnt, nach einer ungeraden Schrittzahl auf einer weißen Ecke und nach einer geraden Schrittzahl auf einer schwarzen Ecke. Die Ecken P, R, S und T sind schwarz und deshalb nur mit einer geraden Zahl von Schritten zu erreichen. Q ist weiß und kann als einzige der fünf beschrifteten Ecken mit 33 Schritten erreicht werden.

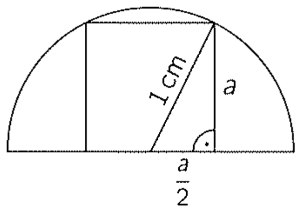


25. Ein Quadrat ist in einen Halbkreis mit Radius 1 cm einbeschrieben, d. h., dass zwei Eckpunkte auf dem Halbkreis und die anderen beiden auf dem Durchmesser liegen (s. Abb.) Welchen Flächeninhalt hat das Quadrat?



(**A**) $\frac{4}{5}$ cm^2 (**B**) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ cm^2 (**C**) 1 cm^2 (**D**) $\frac{4}{3}$ cm^2 (**E**) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2

Lösung: Wir verbinden den Mittelpunkt des Durchmessers mit einem der Berührungspunkte von Quadrat und Halbkreis. Diese Verbindungslinie hat die Länge 1 cm des Radius. Dann ist nach dem Satz des Pythagoras $1^2\,\text{cm}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, woraus sich $1\,\text{cm}^2 = \frac{5}{4}a^2$ und damit der Flächeninhalt des Quadrats $a^2 = \frac{4}{5}\,\text{cm}^2$ ergibt.

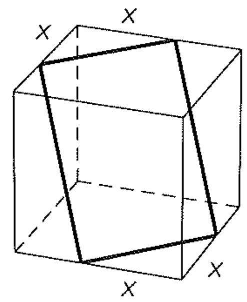


26. Wie viele Lösungen (x, y), wobei x und y positive ganze Zahlen sind, hat die Gleichung $3x + 5y = 2019$?

(**A**) 15 (**B**) 118 (**C**) 119 (**D**) 134 (**E**) 135

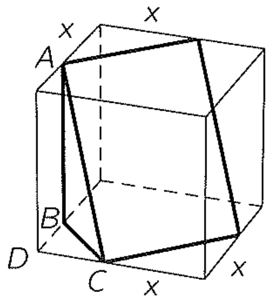
Lösung: Wir stellen die Gleichung um: $5y = 2019 - 3x = 3 \cdot (673 - x)$. Da x und y ganze Zahlen sind, muss y durch 3 teilbar sein, es muss also eine ganze Zahl z geben, sodass $y = 3z$ ist. Das setzen wir ein und erhalten $5z = 673 - x$ oder $x = 673 - 5z$. Da $673 : 5 = 134$ Rest 3 ist und x und y und damit auch z positiv sein sollen, gibt es für $z = 1, \ldots, 134$ jeweils eine Lösung (x, y).

29. Rechts ist ein Rechteck zu sehen, dessen Eckpunkte auf den Kanten eines Würfels mit der Kantenlänge 1 liegen. Für welchen Wert von x ist das Rechteck ein Quadrat?



(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

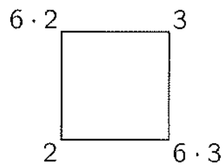
Lösung: Die beiden Rechtecksseiten, die zur oberen bzw. zur unteren Würfelseite gehören, sind nach dem Satz des Pythagoras jeweils $\sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}\cdot x$ lang. Wir wenden nun zweimal den Satz des Pythagoras an, um die Länge der anderen beiden Rechtecksseiten zu berechnen.



Dazu fällen wir von A das Lot auf die darunterliegende Würfelkante, der Lotfußpunkt sei B. Das Dreieck BDC ist rechtwinklig, die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{DC}$ haben jeweils die Länge $1-x$, woraus folgt, dass die Strecke $\overline{BC}$ nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{2}\cdot(1-x)$ lang ist. Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, sind wir nun in der Lage – wieder mit Hilfe des Satzes des Pythagoras – die Länge von $\overline{AC}$ zu errechnen: $|AC| = \sqrt{1^2+2\cdot(1-x)^2}$.
Damit das Rechteck ein Quadrat ist, muss $\sqrt{2}\cdot x = \sqrt{1^2+2\cdot(1-x)^2}$ sein.
Das bedeutet $2x^2 = 1+2\cdot(1-x)^2$, d. h. $2x^2 = 3-4x+2x^2$ bzw. $x = \frac{3}{4}$.

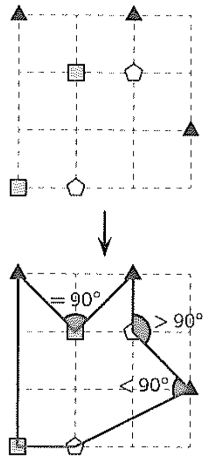
30. An jede Ecke eines Quadrats ist eine positive ganze Zahl geschrieben. Dabei gilt: Wenn zwei der Zahlen zur selben Quadratseite gehören, ist eine ein Vielfaches der anderen – und – von je zwei einander diagonal gegenüberliegenden Zahlen ist keine ein Vielfaches der anderen. Welches ist die kleinstmögliche Summe der vier Zahlen?

(A) 24 **(B)** 31 **(C)** 35 **(D)** 47 **(E)** 53



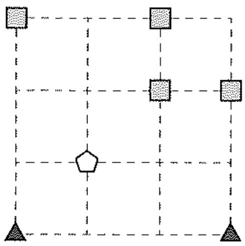
Lösung: Die kleinste der vier Zahlen bezeichnen wir mit a. Die beiden an a angrenzenden Zahlen sind Vielfache von a, da a die kleinste Zahl ist. Wäre die Zahl gegenüber von a ein Vielfaches einer der an sie angrenzenden Zahlen, so wäre sie ebenfalls ein Vielfaches von a, was nicht erlaubt ist. Also steht gegenüber von a die zweitkleinste Zahl.
Da wir die kleinstmögliche Summe suchen, beginnen wir mit 2 und 3 in gegenüberliegenden Ecken. In jeder der beiden anderen Ecken muss ein Vielfaches von 2 und von 3, also von 6 stehen. Da keine der diagonal gegenüberliegenden Zahlen ein Vielfaches der anderen ist, haben beide einen weiteren Faktor, von denen keiner ein Vielfaches des anderen ist. Dafür sind wiederum 2 und 3 die kleinstmöglichen Zahlen. An den beiden anderen Ecken stehen somit 12 und 18, wie rechts abgebildet. Die kleinstmögliche Summe ist $2+3+12+18 = 35$.

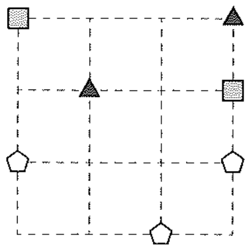
Verwinkelte Wege

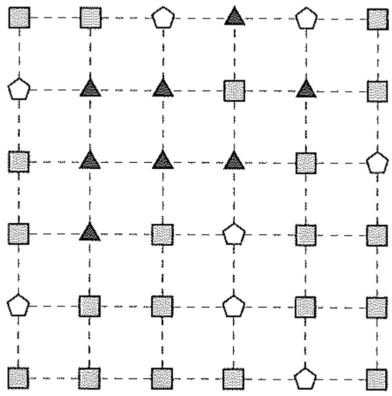


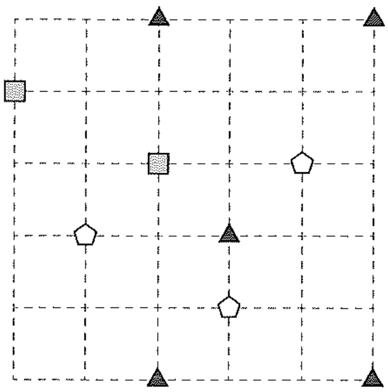
Die Figuren in den Diagrammen sollen so durch Strecken verbunden werden, dass die Strecken einen einzigen Rundweg bilden. Der Weg soll durch alle Figuren verlaufen und darf sich selbst nicht kreuzen. Wir betrachten den kleineren Winkel, den die Strecken an den Figuren bilden. Dieser Winkel muss an Dreiecken ein spitzer Winkel ($< 90°$), an Quadraten ein rechter Winkel ($= 90°$) und an Fünfecken ein stumpfer Winkel ($> 90°$) sein. Rechts ist ein Beispiel abgebildet.

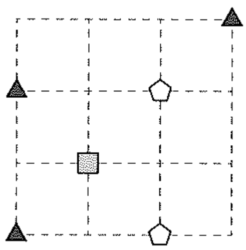
Wer findet die Rundwege in den folgenden Diagrammen?

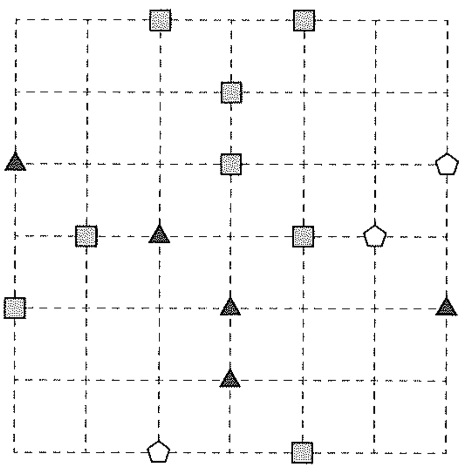


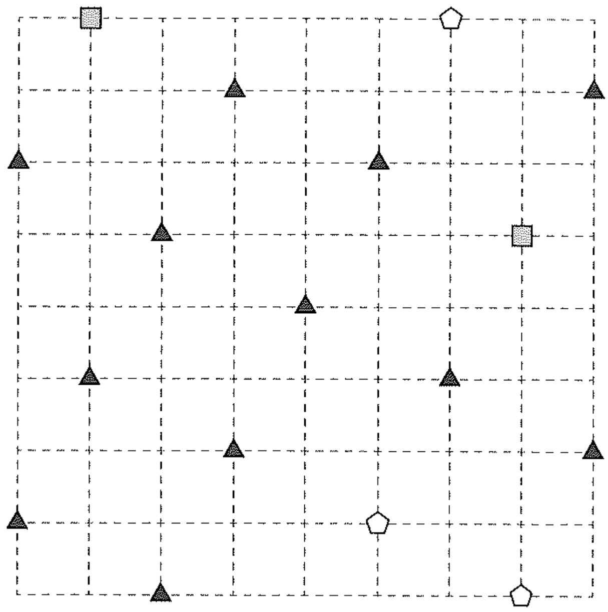






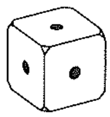






Diese Aufgaben hat Dr. Robert Vollmert erstellt, der seit Jahren bei den Logic Masters erfolgreich ist.

5. Auf den Seiten von Kiras Glückswürfel sind jeweils 1, 2 oder 3 Punkte. Die Wahrscheinlichkeit, damit eine 1 zu würfeln, beträgt $\frac{1}{2}$, eine 2 zu würfeln, beträgt $\frac{1}{3}$ und eine 3 zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$. Nur einer der folgenden Würfel könnte Kiras Glückswürfel sein. Welcher?

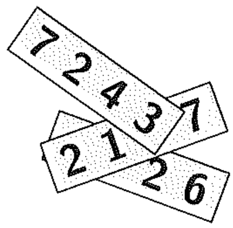
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Aufgrund der gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind auf Kiras Glückswürfel auf drei Seiten 1 Punkt, auf zwei Seiten 2 Punkte und auf einer Seite 3 Punkte. Bei (**C**) sind auf mehr als zwei Seiten 2 Punkte zu sehen und bei (**A**), (**B**) und (**D**) sind auf mehr als einer Seite 3 Punkte zu sehen. Nur der Würfel bei (**E**) kann Kiras Glückswürfel sein.

6. Wie viele Kanten hat eine Pyramide, die genau 23 dreieckige Seitenflächen hat?

(**A**) 23 (**B**) 24 (**C**) 46 (**D**) 48 (**E**) 69

Lösung: Da die Pyramide 23 dreieckige Seitenflächen hat, besitzt die Grundfläche 23 Kanten und es verlaufen 23 Kanten zwischen Grundfläche und Spitze. Das sind insgesamt 46 Kanten.



7. Auf den drei Papierstreifen rechts im Bild stehen drei vierstellige Zahlen. Ihre Summe ist 11126. Welche drei Ziffern sind verdeckt?

(**A**) 1, 4, 7 (**B**) 1, 5, 7 (**C**) 3, 3, 3 (**D**) 4, 5, 6 (**E**) 4, 5, 7

Lösung: Wir bezeichnen die verdeckten Ziffern so mit x, y und z, dass wir die Summe wie folgt schreiben können: $7243 + 21x7 + yz26 = 11126$. Daraus folgt $7243 + 2107 + 26 + yzx0 = 11126$, und somit $yzx0 = 11126 - 7243 - 2107 - 26 = 1750$. Also sind die drei gesuchten Ziffern 1, 5 und 7.
— *Eine Lösungsvariante ist bei der ähnlichen Aufgabe 11 in Klassenstufe 7/8 zu finden.* —

8. Antonia feiert Geburtstag. Sie sitzt mit 5 Freunden beim Kartenspielen an einem runden Tisch. Antonia sitzt direkt zwischen Maats und Luis, Zorah sitzt rechts neben Gustav, und Denise sitzt nicht direkt gegenüber von Luis. Was ist richtig?

(**A**) Denise sitzt neben Luis. (**B**) Maats sitzt neben Denise. (**C**) Gustav sitzt neben Luis.
(**D**) Maats sitzt neben Luis. (**E**) Luis sitzt neben Zorah.

Lösung: Laut der ersten Aussage sitzt Antonia zwischen Maats und Luis. Da Zorah und Gustav nebeneinander sitzen, muss Denise entweder neben Maats oder neben Luis sitzen. Denise kann aber nicht neben Maats sitzen, da sie dort gegenüber von Luis sitzen würde. Folglich sitzt Denise neben Luis. Es gibt übrigens genau zwei Möglichkeiten für die Reihenfolge der sechs Freunde am Tisch.

9. Mit welcher Ziffer beginnt die kleinste natürliche Zahl, deren Quersumme 42 ist?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

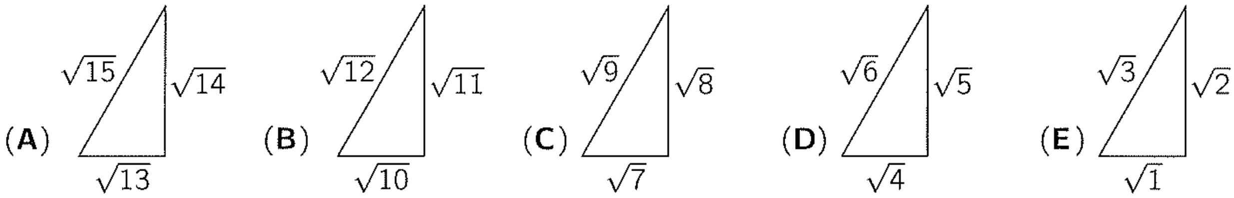
Lösung: Eine 4-stellige Zahl hat höchstens die Quersumme $4 \cdot 9 = 36$. Eine 5-stellige Zahl, die mit einer Ziffer kleiner oder gleich 5 beginnt, hat eine Quersumme kleiner oder gleich $5 + 4 \cdot 9 = 41$. Die kleinste natürliche Zahl mit Quersumme 42 ist die Zahl 69999, und sie beginnt mit 6.

13. In diesem Schuljahr sind in Lauras Informatikkurs 20 % mehr Mädchen und 20 % weniger Jungen als im letzten Schuljahr. Insgesamt ist die Kursstärke im Vergleich zum letzten Schuljahr um 1 gestiegen. Wie viele Schülerinnen und Schüler könnten insgesamt in diesem Schuljahr in Lauras Informatikkurs sein?

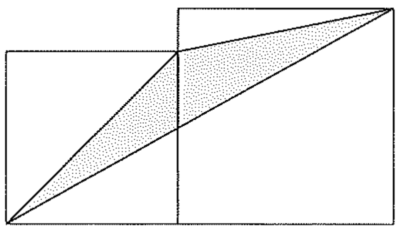
(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 24 (**E**) 27

Lösung: Da 20 % der Anzahl der Mädchen eine ganze Zahl ist, war im letzten Schuljahr die Anzahl der Mädchen ein Vielfaches von 5. Analog war auch die Anzahl der Jungen ein Vielfaches von 5. Wenn es $5M$ Mädchen und $5J$ Jungen waren, dann sind es in diesem Schuljahr $6M$ Mädchen und $4J$ Jungen. Außerdem ist die Kursstärke in diesem Schuljahr gleich $6M + 4J = 5M + 5J + 1$, woraus $M = J+1$ folgt. Die Kursstärke in diesem Schuljahr ist also gleich $6M+4J = 6(J+1)+4J = 10J+6$. Von den Antwortmöglichkeiten lässt nur 16 beim Teilen durch 10 den Rest 6.

14. Die folgenden fünf Dreiecke mit ihren Seitenlängen sind so skizziert, dass es so aussieht, als wären sie alle rechtwinklig. Tatsächlich ist aber nur eines davon rechtwinklig. Welches?

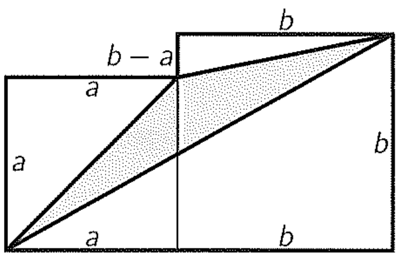


Lösung: Nach dem Satz des Pythagoras gilt in einem rechtwinkligen Dreieck: Die Summe der Quadrate der Kathetenlängen ist gleich dem Quadrat der Hypotenusenlänge. Das ist nur bei (**E**) der Fall: $(\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3 = (\sqrt{3})^2$.



15. Im Bild rechts hat das linke Quadrat die Seitenlänge a und das rechte Quadrat die Seitenlänge b. Welchen Flächeninhalt hat das graue Dreieck?

(**A**) $b^2 - a^2$ (**B**) $\frac{a^2}{2}$ (**C**) $\frac{a^2 + b^2}{4}$ (**D**) $4(b-a)^2$ (**E**) $\frac{ab}{2}$



Lösung: Die Gesamtfläche der beiden Quadrate ist $a^2 + b^2$. Wenn wir davon den Flächeninhalt der drei dick umrandeten weißen rechtwinkligen Dreiecke abziehen, erhalten wir den Flächeninhalt des grauen Dreiecks. Der Flächeninhalt des grauen Dreiecks ist folglich gleich $(a^2 + b^2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (b - a) \cdot b = \frac{a^2}{2}$.
Dies lässt sich auch so ermitteln: Das graue Dreieck hat denselben Flächeninhalt wie die rechte untere Hälfte des linken Quadrats, denn beide Dreiecke haben eine Seite gemeinsam (die Diagonale) und die zugehörigen Höhen sind gleich lang, da die Diagonalen der beiden Quadrate zueinander parallel sind.

16. Wie viele der natürlichen Zahlen von 2^{10} bis 2^{13}, beide Zahlen eingeschlossen, sind durch 2^{10} teilbar?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 16

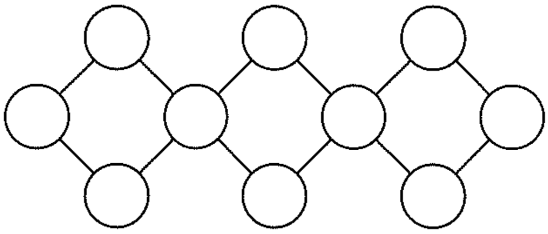
Lösung: In dem gegebenen Bereich gibt es genau 8 natürliche Zahlen, die durch 2^{10} teilbar sind: $1 \cdot 2^{10} = 2^{10}$, $2 \cdot 2^{10}$, $3 \cdot 2^{10}$, $4 \cdot 2^{10}$, $5 \cdot 2^{10}$, $6 \cdot 2^{10}$, $7 \cdot 2^{10}$ und $8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$.

20. Auf einer kreisförmigen Scheibe, die um ihren Mittelpunkt rotiert, sind zwei Punkte P und Q markiert. P ist 3 cm weiter vom Mittelpunkt der Scheibe entfernt als Q. Der Betrag der Geschwindigkeit, mit der sich P bewegt, ist konstant und zweieinhalbmal so groß wie der Betrag der Geschwindigkeit, mit der sich Q bewegt. Wie weit ist P vom Mittelpunkt der Scheibe entfernt?

(**A**) 10 cm (**B**) 9 cm (**C**) 8 cm (**D**) 6 cm (**E**) 5 cm

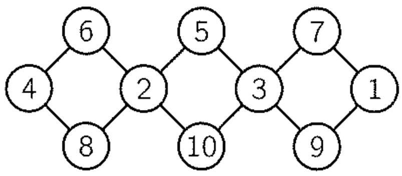
Lösung: Wir bezeichnen mit r_P den Abstand von P und mit r_Q den Abstand von Q zum Mittelpunkt der Scheibe. Wir wissen zum einen, dass $r_Q = r_P - 3\,\text{cm}$ gilt, und zum anderen, dass die Geschwindigkeit von P zweieinhalbmal so groß ist wie die Geschwindigkeit von Q. Daher ist bei einer Umdrehung der Scheibe der von P zurückgelegte Weg zweieinhalbmal so groß ist wie der von Q zurückgelegte Weg. Das heißt, dass der Kreisumfang des Kreises mit Radius r_P zweieinhalbmal so groß ist wie der Kreisumfang des Kreises mit Radius r_Q. Also ist $2\pi \cdot r_P = 2{,}5 \cdot 2\pi \cdot r_Q = 2{,}5 \cdot 2\pi \cdot (r_P - 3\,\text{cm})$. Nach r_P umgestellt ergibt sich daraus $r_P = 5\,\text{cm}$.

21. Die Zahlen von 1 bis 10 sollen so in die 10 Kreise im Bild eingetragen werden, dass in jedem der drei Quadrate die Summe der Zahlen in den vier Ecken gleich ist. Was ist der kleinstmögliche Wert dieser Summe?



(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: In jedem der drei Quadrate ist die Summe der Zahlen in den vier Ecken gleich. Wir bezeichnen diese Summe mit S. Wenn wir die vier Zahlen aus dem linken Quadrat zu den vier Zahlen aus dem mittleren und den vier Zahlen aus dem rechten Quadrat addieren, so erhalten wir zum einen $3 \cdot S$ und zum anderen die Summe der Zahlen von 1 bis 10 plus die beiden Zahlen x und y, die zu zwei Quadraten gehören. Somit gilt $3 \cdot S = 1 + \ldots + 10 + x + y = 55 + x + y$. Aus $55 + x + y \geq 55 + 1 + 2 = 58$ folgt, dass $3 \cdot S \geq 58$ und weiter, dass $S \geq 20$ sein muss. Wir überlegen, ob $S = 20$ möglich ist. In diesem Fall müsste $60 = 55 + x + y$ bzw. $x + y = 5$ gelten. Ein Beispiel für $S = 20$ (mit $x = 2$, $y = 3$) ist rechts abgebildet, also ist 20 der gesuchte kleinstmögliche Wert.



22. Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ist wie folgt definiert: Das erste Folgenglied ist $a_1 = 49$, und für alle $n > 1$ erhalten wir a_n, indem wir die Quersumme von a_{n-1} bilden, 1 addieren und diese Summe quadrieren. Es gilt also $a_2 = \big((4 + 9) + 1\big)^2 = 14^2 = 196$, $a_3 = \big((1 + 9 + 6) + 1\big)^2 = 17^2 = 289$ und so weiter. Welchen Wert hat a_{2019}?

(**A**) 121 (**B**) 25 (**C**) 64 (**D**) 400 (**E**) 49

Lösung: Wir berechnen die nächsten Folgenglieder: $a_4 = (19 + 1)^2 = 400$, $a_5 = (4 + 1)^2 = 25$, $a_6 = (7 + 1)^2 = 64$, $a_7 = (10 + 1)^2 = 121$, $a_8 = (4 + 1)^2 = 25$. Da $a_8 = a_5$ ist, wiederholen sich von nun an die drei Werte 64, 121, 25 periodisch. Die Folgenglieder mit einem Index, der durch 3 teilbar ist, also $a_6, a_9, a_{12}, \ldots$, haben alle den Wert 64, die Folgenglieder mit einem Index, der den Rest 1 beim Teilen durch 3 lässt, also $a_7, a_{10}, a_{13}, \ldots$, haben alle den Wert 121 und die Folgenglieder mit einem Index, der den Rest 2 beim Teilen durch 3 lässt, also $a_8, a_{11}, a_{14}, \ldots$, haben alle den Wert 25. Da 2019 durch 3 teilbar ist, gilt also $a_{2019} = 64$.

Da in den drei linken Spalten und den drei unteren Zeilen bereits eine 5 steht, darf im mittleren Teilgebiet keine 5 eingetragen werden. Also stehen im Teilgebiet oben rechts genau zwei Fünfen. Würden wir dort weniger als drei Vieren eintragen, so wäre die Summe höchstens $5+5+4+4+3+3=24$, es müssen also drei Vieren sein. Als sechste Zahl bleibt dann die $25-5-5-4-4-4=3$. Für das Ausfüllen dieses Teilgebiets gibt es nur eine Möglichkeit, oben rechts steht die 3.
Das gesamte Quadrat lässt sich übrigens eindeutig ausfüllen (s. Abb. rechts).

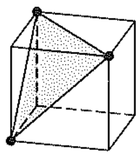
1	2	4	5	3
3	1	2	4	5
5	3	1	2	4
4	5	3	1	2
2	4	5	3	1

26. Wie viele Ebenen gibt es, die mindestens drei Ecken eines gegebenen Würfels enthalten?

(**A**) 6 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 20 (**E**) 24

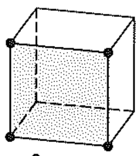
Lösung: Wir unterscheiden nach der Anzahl der Ecken, die die Ebene enthält.

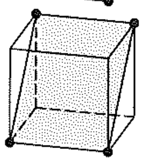
1. Fall: *Die Ebene enthält genau 3 Ecken.*



Die 3 Punkte liegen wie im Bild links. Man erkennt, dass es genau eine Ecke gibt, die zu jedem der 3 Punkte benachbart ist (im Bild: vorn oben links). Und da der Würfel 8 Ecken hat, gibt es 8 solcher Ebenen.
(Eine genaue Herleitung, warum die 3 Punkte nur so liegen können, findet sich in der Lösung zu Aufgabe 28 in Klassenstufe 9/10.)

2. Fall: *Die Ebene enthält mindestens 4 Ecken.*





Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Die Ebene enthält alle Ecken einer Seitenfläche. Da der Würfel 6 Seitenflächen hat, gibt es 6 solcher Ebenen.

(b) Die Ebene enthält keine Seitenfläche. Dann können pro Seitenfläche höchstens zwei Ecken in der Ebene liegen. Betrachtet man gegenüberliegende Seitenflächen, so wird außerdem klar, dass mehr als 4 Ecken in einer Ebene nicht möglich sind. Eine solche Ebene muss 2 diagonal gegenüberliegende Kanten enthalten. Der Würfel hat insgesamt 12 Kanten. Diese bilden 6 Paare von diagonal gegenüberliegenden Kanten, also gibt es 6 solcher Ebenen.

Insgesamt gibt es $8+6+6=20$ verschiedene Ebenen, die mindestens 3 Eckpunkte enthalten.

27. Für wie viele ganze Zahlen k ist $\left|k^2-2k-3\right|$ eine Primzahl?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Für diese Aufgabe ist es hilfreich, den Term k^2-2k-3 in ein Produkt aus zwei Termen zu faktorisieren (zum Beispiel mithilfe quadratischer Ergänzung oder des Satzes von Vieta). Es gilt $\left|k^2-2k-3\right| = |(k+1)\cdot(k-3)| = |k+1|\cdot|k-3|$. Beide Faktoren sind ganze Zahlen. Damit das Produkt eine Primzahl ist, muss einer der beiden Faktoren 1 sein. Das sind 4 Fälle, die wir alle überprüfen müssen:

Ist $k+1=1$, so ist $k=0$ und $\left|k^2-2k-3\right|=3$ eine Primzahl;
ist $k+1=-1$, so ist $k=-2$ und $\left|k^2-2k-3\right|=5$ eine Primzahl;
ist $k-3=1$, so ist $k=4$ und $\left|k^2-2k-3\right|=5$ eine Primzahl;
ist $k-3=-1$, so ist $k=2$ und $\left|k^2-2k-3\right|=3$ eine Primzahl.

In allen 4 Fällen ist das Ergebnis eine Primzahl, also ist (**C**) die Lösung.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	B	C	D	B	C	A	B	C	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	A	E	C	B	B	B	B	C	A
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	E	A	E	C	D	A	C	D	E

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	E	C	C	D	B	A	D	D	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	A	A	D	C	E	B	A	E	C
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	D	B	B	A	D	C	D	E	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	B	E	E	E	C	B	A	D	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	D	A	E	B	D	E	A	A	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	C	A	B	C	D	C	D	B	E

Die Lösungen der Extra-Knobeleien stehen auf der Webseite
des Känguru-Wettbewerbs Deutschland unter

`www.mathe-kaenguru.de/chronik/broschueren`