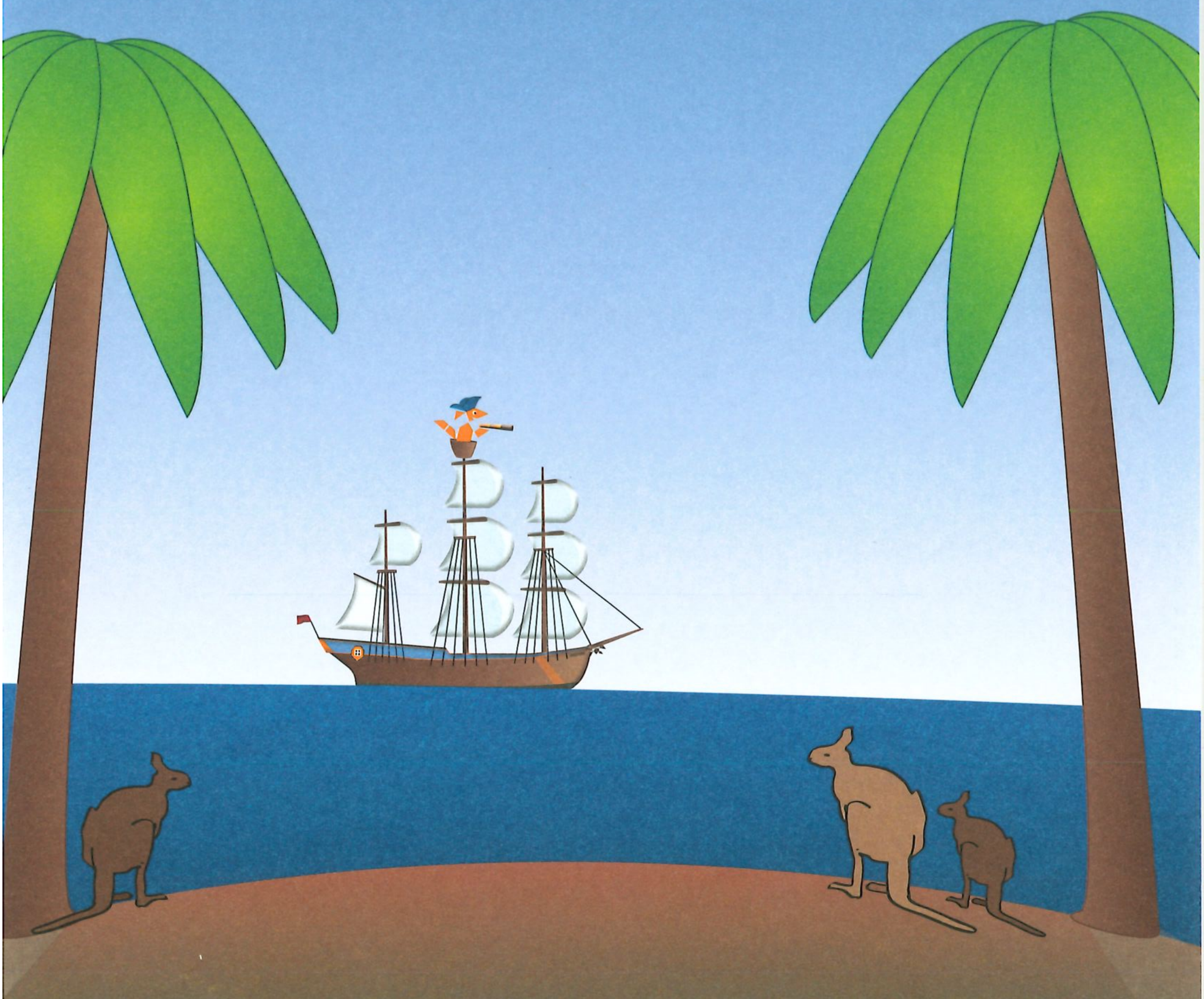
Mathe mit dem Känguru

2018



Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

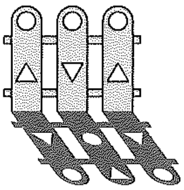
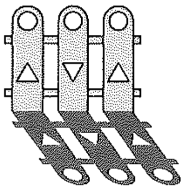
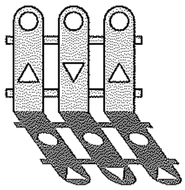
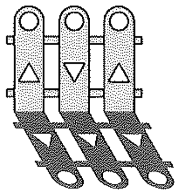
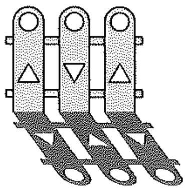
Klassenstufen 7 und 8

1. $(20 + 18) : (20 - 18) =$

(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: Es ist $(20 + 18) : (20 - 18) = 38 : 2 = 19$.

2. Welches Bild zeigt das Stück Zaun mit seinem Schatten?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

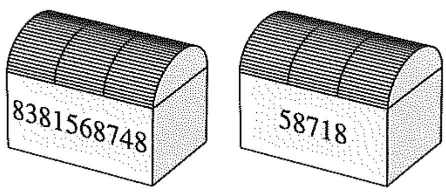
Lösung: Den richtigen Schatten des Zaunes zeigt Bild (**E**).

3. Der Bambus im botanischen Garten wächst pro Tag 15 cm. Wie viele Tage braucht der Bambus, um insgesamt 3 m zu wachsen?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 15 (**D**) 20 (**E**) 25

Lösung: Die gesuchte Anzahl an Tagen ist $3\,\text{m} : 15\,\text{cm} = 300\,\text{cm} : 15\,\text{cm} = 20$. Man kann sich auch überlegen, dass der Bambus an 2 Tagen 30 cm wächst, und für insgesamt $3\,\text{m} = 300\,\text{cm}$ folglich 10-mal 2 Tage, also 20 Tage braucht.

4. Kapitän Grimmbart lagert seinen Besitz sortiert in Truhen. Er hat alle Aufschriften so verschlüsselt, dass gleiche Ziffern für gleiche Buchstaben stehen. Auf der linken Truhe steht verschlüsselt EDELSTEINE. Was steht verschlüsselt auf der rechten Truhe?



(**A**) SEILE (**B**) EISEN (**C**) SIEBE (**D**) LEDER (**E**) SEIFE

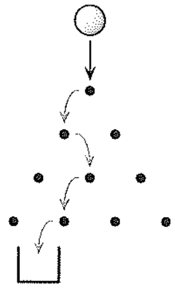
Lösung: Das Wort EDELSTEINE beginnt und endet mit einem E, was der 8 entspricht. Es kommt daher nur ein Wort mit E am Ende und als 2. Buchstaben infrage, also (**A**) oder (**E**). Die beiden Worte SEILE und SEIFE unterscheiden sich nur im vorletzten Buchstaben, L oder F, was der 1 entspricht. Die 1 steht auf der linken Truhe an der 4. Position und steht somit für L. Also ist (**A**) richtig.

5. Vorgestern Abend dachte ich: „Noch zwei Tage Schule, dann ist Wochenende und meine Tante kommt zu Besuch." Übermorgen habe ich Geburtstag. An welchem Wochentag ist mein Geburtstag?

(**A**) am Dienstag (**B**) am Mittwoch (**C**) am Donnerstag (**D**) am Samstag (**E**) am Sonntag

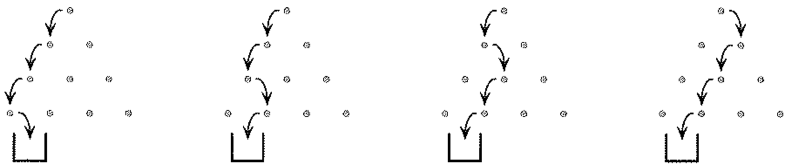
Lösung: Wenn ich vorgestern Abend dachte „Noch zwei Tage Schule ...", dann war vorgestern Mittwoch. Heute ist also Freitag und mein Geburtstag übermorgen folglich am Sonntag.

11. In der abgebildeten Versuchsanordnung fällt eine Kugel auf das oberste Hindernis. Dann fällt sie an jedem Hindernis entweder nach links oder nach rechts auf das nächste Hindernis. Im Beispiel landet die Kugel schließlich unten in der Kiste. Wie viele Wege gibt es insgesamt, bei denen die Kugel in der Kiste landet?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 15

Lösung: Die Kugel landet genau dann in der Kiste, wenn sie an genau drei Hindernissen nach links (L) und an genau einem Hindernis nach rechts (R) fällt. Dafür gibt es wie abgebildet insgesamt 4 Möglichkeiten: LLLR, LLRL, LRLL und RLLL.



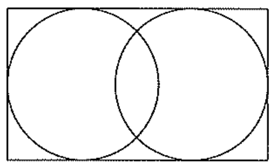
12. Am letzten Sonntag hat es den ganzen Tag geregnet, laut Wetterbericht 24 Liter pro Quadratmeter. Unser Blumenbeet vor dem Haus ist 3 m lang und 1,50 m breit. Wie viel Liter Regen sind am letzten Sonntag auf unser Blumenbeet gefallen?

(**A**) 108 Liter (**B**) 120 Liter (**C**) 132 Liter (**D**) 144 Liter (**E**) 156 Liter

Lösung: Der Flächeninhalt des Blumenbeets beträgt $3\,\mathrm{m} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 4{,}5\,\mathrm{m}^2$. Da pro Quadratmeter 24 Liter Regen fielen, sind auf das Blumenbeet insgesamt $4{,}5 \cdot 24 = 108$ Liter Regen gefallen.

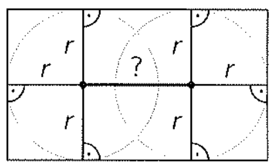
In Klassenstufe 9/10 wurde in Aufgabe 6 ein ähnliches Problem gestellt.

13. Im Inneren eines Rechtecks mit den Seitenlängen 11 cm und 7 cm berühren zwei Kreise jeweils drei Seiten des Rechtecks (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der Abstand zwischen den Mittelpunkten der beiden Kreise?



(**A**) 1 cm (**B**) 2 cm (**C**) 3 cm (**D**) 4 cm (**E**) 5 cm

Lösung: Der Durchmesser der Kreise ist genauso lang wie die kürzere Rechteckseite, also 7 cm. Ziehen wir von der längeren Rechteckseite diesen Durchmesser ab, genauer gesagt zweimal den Radius, bleibt der gesuchte Abstand der Mittelpunkte übrig. Er beträgt $11\,\mathrm{cm} - 7\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$.



14. Lilly, Mark und Claas drehen ihre Fidget Spinner und stoppen die Zeit. Lilly dreht halb so lange wie Mark. Mark dreht dreimal so lange wie Claas. Wie lange dreht Lilly im Vergleich zu Claas?

(**A**) halb so lange (**B**) eineinhalbmal so lange (**C**) doppelt so lange
(**D**) zweieinhalbmal so lange (**E**) sechsmal so lange

Lösung: Mark dreht seinen Fidget Spinner dreimal so lange wie Claas. Lilly dreht ihren halb so lange wie Mark, also die Hälfte von dreimal so lange wie Claas. Folglich dreht Lilly ihren Fidget Spinner eineinhalbmal so lange wie Claas.

Übersichtlicher wird es, wenn wir Variablen benutzen: Wenn Claas seinen Fidget Spinner t Sekunden dreht, dann dreht Mark $3t$ Sekunden, weil er dreimal so lange dreht wie Claas. Da Lilly halb so lange dreht wie Mark, dreht sie $1{,}5t$ Sekunden, also eineinhalbmal so lange wie Claas.

18. Ein Narr will im Scherzamt seinen neuen Ausweis abholen. Ausweise gibt es nur an einem einzigen Schalter. Die Schilder sind verwirrend, aber es ist, wie im Scherzamt üblich, nur eine Aufschrift wahr.

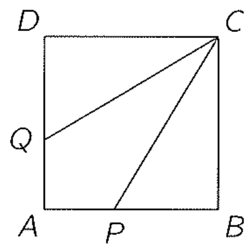
Wo gibt es Ausweise?

(**A**) am Schalter 1 (**B**) am Schalter 2 (**C**) am Schalter 3 (**D**) am Schalter 4 (**E**) am Schalter 5

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe können wir für jede Antwortmöglichkeit ermitteln, wie viele der Aufschriften wahr und wie viele falsch sind. Ohne die Antwortmöglichkeiten im Einzelnen durchzugehen, gelangt zur Lösung, wer erkennt, dass die Aufschrift am Schalter 2 besonders hilfreich ist. Wäre die Aufschrift am Schalter 2 falsch, dann gäbe es am Schalter 2 Ausweise und auch alle anderen Aufschriften wären falsch, was ausgeschlossen ist. Folglich ist die Aufschrift am Schalter 2 wahr und alle anderen Aufschriften sind falsch. Also gibt es an den Schaltern 1, 2, 4 und 5 keine Ausweise. Übrig bleibt Schalter 3, an dem es die Ausweise gibt.

Ein ähnliches, etwas komplizierteres Problem wurde in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 22 gestellt.

19. Ein Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 30 cm. Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ liegen die Punkte P und Q so, dass die Strecken $\overline{CP}$ und $\overline{CQ}$ das Quadrat in drei Teile mit demselben Flächeninhalt zerlegen (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie lang ist die Strecke $\overline{PB}$?



(**A**) 16 cm (**B**) 18 cm (**C**) 20 cm (**D**) 21 cm (**E**) 24 cm

Lösung: Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt $30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 900\,\text{cm}^2$. Da die drei Teile den gleichen Flächeninhalt haben, ist der Flächeninhalt des Dreiecks PBC gleich $900\,\text{cm}^2 : 3 = 300\,\text{cm}^2$. Da das Dreieck PBC rechtwinklig ist, ist sein Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot 30\,\text{cm} = 300\,\text{cm}^2$. Die Strecke $\overline{PB}$ ist somit 20 cm lang.

20. „Jedes Jahr 350 Sonnentage!" liest Petru in der Anzeige eines Hotels. Er beschließt, 2019 dort Urlaub zu machen. Wie viele zusammenhängende Tage muss Petru – wenn man der Werbung glaubt – dort mindestens verbringen, um garantiert zwei *aufeinanderfolgende* Sonnentage dabei zu haben?

(**A**) 17 (**B**) 21 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 35

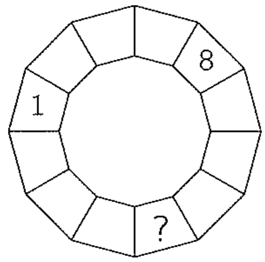
Lösung: Wenn es 350 Sonnentage gibt, gibt es 2019 schlimmstenfalls $365-350 = 15$ Wolkentage. Würde Petru 31 oder weniger Tage Urlaub dort verbringen, so könnten sich im ungünstigsten Fall mit einem Sonnentag beginnend Sonnen- und Wolkentage abwechseln, S-W-S-W-S-W-. . . , sodass es keine zwei aufeinanderfolgenden Sonnentage gibt. Bliebe Petru aber 32 Tage, so würde er auf jeden Fall zwei aufeinanderfolgenden Sonnentage dabei haben. Wäre das nicht der Fall, so wäre von Tag 1 und Tag 2 mindestens einer ein Wolkentag und ebenso von Tag 3 und Tag 4, Tag 5 und Tag 6, . . . , Tag 31 und Tag 32. Dann gäbe es aber mindestens 16 Wolkentage, also mehr als die Werbung verspricht. Petru muss also mindestens 32 Tage dort verbringen.

24. Bei der Wahl des Klassensprechers der 8a gibt es drei Kandidaten: Marie, Levin und Henja. Jeder der 30 Schülerinnen und Schüler hat einen Stimmzettel erhalten, um sich in geheimer Wahl für einen der drei Kandidaten zu entscheiden. Wer die meisten Stimmen hat, wird neuer Klassensprecher. Bei der Auszählung wird ein Zwischenstand angesagt: Marie hat bereits 3 Stimmen, Levin 5 und Henja sogar 9. Wie viele weitere Stimmen reichen für Henja aus, um sicher als neue Klassensprecherin festzustehen?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 8

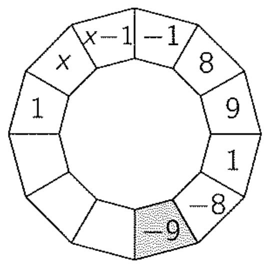
Lösung: Da Levin bereits mehr Stimmen als Marie hat, genügt es, sich zu überlegen, wie viele Stimmen Henja braucht, um sicher mehr Stimmen als Levin zu erreichen. Nach Bekanntwerden des Zwischenstandes ist klar, dass Henja und Levin zusammen maximal $30 - 3 = 27$ Stimmen erhalten können, denn 3 Stimmen entfallen auf Marie. Sobald Henja 14 Stimmen erreicht, hat sie sicher mehr als Levin. Dazu fehlen Henja noch $14 - 9 = 5$ Stimmen.

25. In jedes Feld des abgebildeten Rings soll eine Zahl so geschrieben werden, dass jede der eingetragenen Zahlen gleich der Summe ihrer beiden Nachbarn ist. Zwei Zahlen sind schon eingetragen. Für welche Zahl steht das Fragezeichen?



(**A**) -9 (**B**) -7 (**C**) -1 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wie abgebildet bezeichnen wir die Zahl, die im Uhrzeigersinn neben der 1 steht, mit x. Nun berechnen wir in Abhängigkeit von x der Reihe nach, was in den folgenden Feldern stehen muss. Im nächsten Feld steht $x - 1$ und dann $(x - 1) - x = -1$. In den Feldern nach der 8 stehen dann der Reihe nach $8 - (-1) = 9$, $9 - 8 = 1$, $1 - 9 = -8$ und schließlich im Feld mit dem Fragezeichen $-8 - 1 = -9$.



Der Ring kann auf eindeutige Weise ausgefüllt werden. In den nächsten Feldern stehen -1, 8, 9, die gegebene 1, $x = -8$ und $x - 1 = -9$.

Diese Aufgabe wurde in Klassenstufe 9/10 mit anderen Zahlen als Aufgabe 24 gestellt. In dieser Broschüre ist dort eine etwas andere Lösung angegeben.

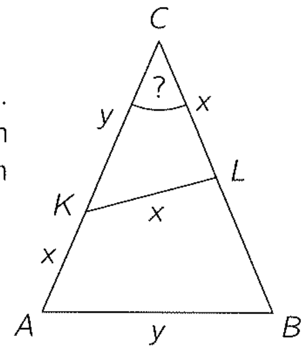
26. Beim Känguru-Wettbewerb hat Josip die Zeit gestoppt, die er für die 3-Punkt-, die 4-Punkt- und die 5-Punkt-Aufgaben verwendet hat. Er hat ein paar Aufgaben ausgelassen und die kompletten 75 Minuten genutzt. Für die 3-Punkt-Aufgaben hat er 15 % weniger Zeit verwendet als für die 4-Punkt-Aufgaben und für die 5-Punkt-Aufgaben 90 % mehr Zeit als für die 4-Punkt-Aufgaben. Wie lange hat Josip an den 5-Punkt-Aufgaben gearbeitet?

(**A**) 38 min (**B**) 40 min (**C**) 42 min (**D**) 49 min (**E**) 57 min

Lösung: Wir bezeichen mit t die Zeit, die Josip für die 4-Punkt-Aufgaben verwendet hat. Für die 3-Punkt-Aufgaben hat er 15 % weniger Zeit verwendet, also $\frac{85}{100}t$. Für die 5-Punkt-Aufgaben hat er 90 % mehr Zeit verwendet, also $\frac{190}{100}t$. Insgesamt hat Josip 75 Minuten gearbeitet und wir erhalten $75\,\text{min} = \frac{85}{100}t + t + \frac{190}{100}t = \frac{85 + 100 + 190}{100}t = \frac{375}{100}t = \frac{75}{20}t$, woraus $t = 20\,\text{min}$ folgt. Josip hat an den 5-Punkt-Aufgaben folglich $\frac{190}{100} \cdot 20\,\text{min} = 38\,\text{min}$ gearbeitet.

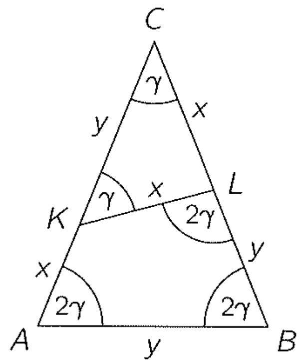
Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Sprünge vor der Pause mit N und die gesuchte Weite des nächsten Sprungs mit W. Da die Durchschnittsweite vor der Pause 3,80 m betrug, beträgt die Summe aller Weiten mit dem ersten Sprung nach der Pause $N \cdot 3{,}80\,\text{m} + 3{,}99\,\text{m}$. Andererseits beträgt sie $(N+1)\cdot 3{,}81\,\text{m}$, da sich mit diesem Sprung die Durchschnittsweite auf 3,81 m erhöhte. Folglich gilt $N \cdot 3{,}80\,\text{m} + 3{,}99\,\text{m} = (N+1) \cdot 3{,}81\,\text{m} = N \cdot 3{,}81 + 3{,}81$, woraus $0{,}18\,\text{m} = N \cdot 0{,}01\,\text{m}$, also $N = 18$ folgt. Der nächste Sprung ist Violas 20. Sprung. Die Summe aller Weiten beträgt dann einerseits $19 \cdot 3{,}81\,\text{m} + W$ und andererseits $20 \cdot 3{,}82\,\text{m}$, wenn sich mit diesem Sprung die Durchschnittsweite auf 3,82 m erhöht. Dann gilt folglich $19 \cdot 3{,}81\,\text{m} + W = 20 \cdot 3{,}82\,\text{m} = 19 \cdot 3{,}82\,\text{m} + 3{,}82\,\text{m}$, woraus $W = 0{,}19\,\text{m} + 3{,}82\,\text{m} = 4{,}01\,\text{m}$ folgt.
Wir geben noch eine Lösungsvariante an: Da der Sprung, der 19 cm weiter als die Durchschnittsweite war, eine Steigerung des Durchschnitts um 1 cm bewirkt, sind es nun insgesamt 19 Sprünge. Wenn mit dem 20. Sprung wieder eine Steigerung der Durchschnittsweite um 1 cm bewirkt wird, muss die Weite des 20. Sprungs entsprechend 20 cm größer als die Durchschnittsweite 3,81 m sein, also 4,01 m.

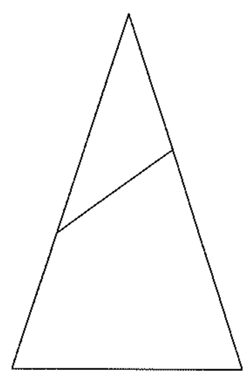
30. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sind die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang. Auf $\overline{AC}$ liegt ein Punkt K und auf $\overline{BC}$ ein Punkt L so, dass die Strecken $\overline{AK}$, $\overline{KL}$ und $\overline{LC}$ die Länge x und die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{KC}$ die Länge y haben (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der Winkel ACB?



(A) 30° **(B)** 32° **(C)** 36° **(D)** 40° **(E)** 45°

Lösung: Wir bezeichnen die Größe des Winkels ACB mit γ. Da das Dreieck CKL gleichschenklig mit Basis $\overline{CK}$ ist, gilt $\angle LKC = \angle KCL = \gamma$. Wer den Außenwinkelsatz kennt, findet damit $\angle KLB = 2\gamma$. Alternativ folgt aus dem Innenwinkelsatz $\angle CLK = 180° - 2\gamma$ und dann aus dem Nebenwinkelsatz $\angle KLB = 180° - \angle CLK = 2\gamma$.
Aus $|AC| = |BC|$ folgt zum einen, dass die Strecke $\overline{BL}$ die Länge y hat, das Viereck $ABLK$ somit ein Drachenviereck und $\angle BAK = \angle KLB = 2\gamma$ ist. Alternativ folgt dies aus der Kongruenz der Dreiecke ABK und LBK, die drei gleich lange Seiten haben (Kongruenzsatz sss).
Zum anderen folgt aus der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC, dass seine Basiswinkel gleich groß sind, also $\angle CBA = \angle BAC = \angle BAK = 2\gamma$.
Im Dreieck ABC gilt nun schließlich $\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180°$, woraus $5\gamma = 180°$ und schließlich $\gamma = 36°$ folgt.
Rechts unten ist das Dreieck maßstabsgerecht abgebildet. Hier lässt sich das Drachenviereck $ABLK$ gut erkennen.
Und hier ist eine Lösungsvariante: Wir zeichnen die Strecke $\overline{AL}$ und berechnen den Winkel ACB mithilfe der gleichschenkligen Dreiecke ABC, CKL, ALK und LAB. Zunächst finden wir $\angle LKC = \gamma$, $\angle AKL = 180° - \gamma$ und $\angle LAK = \frac{\gamma}{2}$. Wegen $\angle BAC = \angle CBA = 90° - \frac{\gamma}{2}$ folgt nun $\angle BAL = 90° - \gamma$. Mit $\angle ALB = 90° - \gamma$ folgt aus dem Innenwinkelsatz für das Dreieck LAB schließlich $180° = 90° - \gamma + 90° - \gamma + 90° - \frac{\gamma}{2}$ und daraus $\gamma = 36°$.

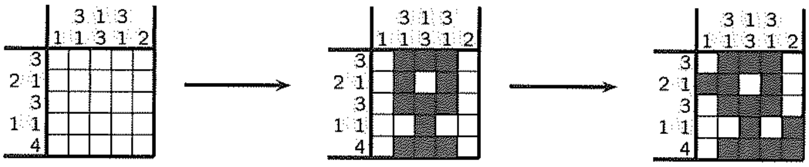




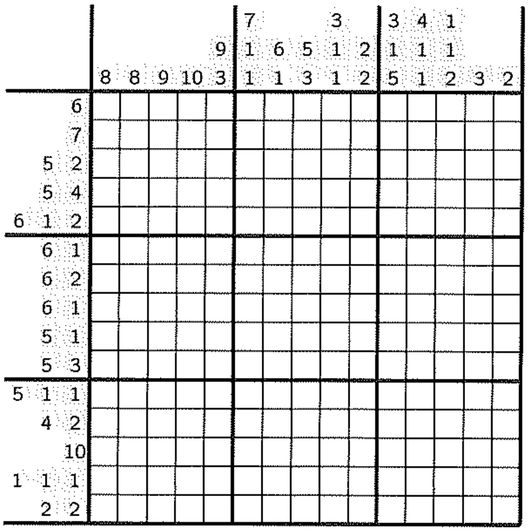
Nonogramme

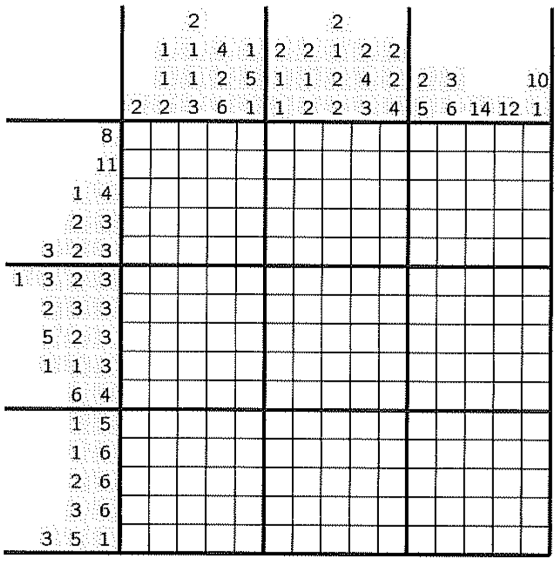
In den Diagrammen sollen einige Kästchen schwarz ausgemalt werden. Die Zahlen am Rand geben für jede Zeile und für jede Spalte die Anzahl der *zusammenhängenden* schwarzen Kästchen in der richtigen Reihenfolge an. Es folgt ein Beispiel:

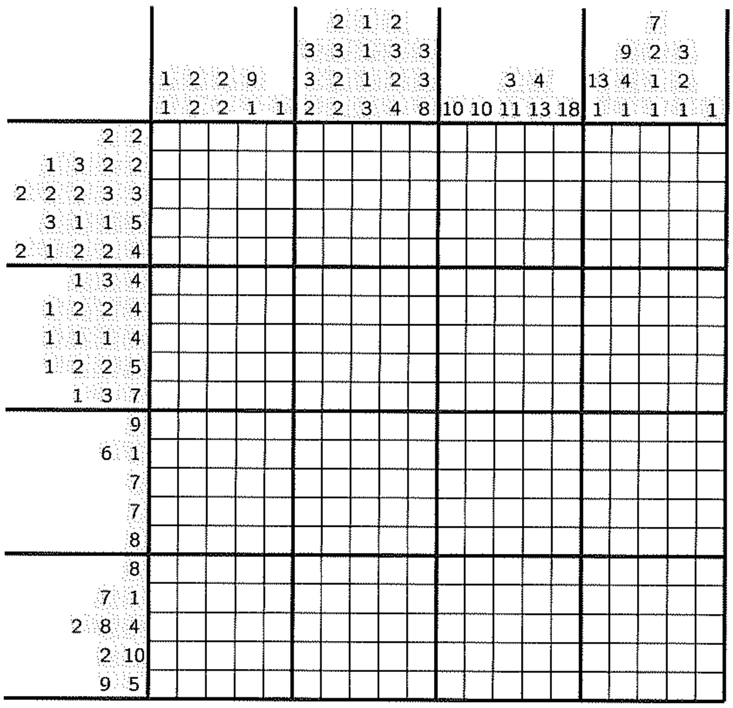
Wie die kleine Ente zeigt, können beim Ausfüllen schöne Bilder entstehen.



Was verbirgt sich in den folgenden Nonogrammen?







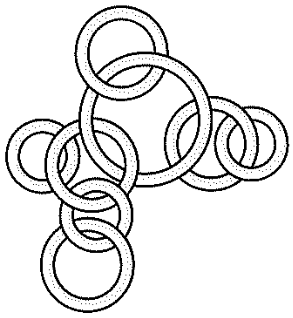
Klassenstufen 9 und 10

1. $\dfrac{2017+2018+2019}{2018} =$

(**A**) 2 (**B**) 6026 (**C**) $\dfrac{6025}{2018}$ (**D**) 3 (**E**) 6054

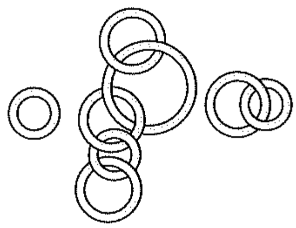
Lösung: $\dfrac{2017+2018+2019}{2018} = \dfrac{(2018-1)+2018+(2018+1)}{2018} = \dfrac{3\cdot 2018}{2018} = 3$

2. Wie viele Ringe befinden sich in der längsten Kette zusammenhängender Ringe?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Das Bild zeigt, welche Ringe zusammenhängen. Die längste Kette enthält 5 Ringe.

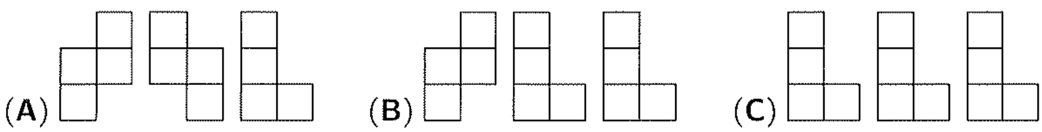


3. In meiner Familie hat jedes Kind mindestens zwei Brüder und mindestens zwei Schwestern. Wie viele Kinder sind wir mindestens?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Da jedes Mädchen mindestens 2 Schwestern hat, gibt es in der Familie mindestens 3 Mädchen. Da jeder Junge mindestens 2 Brüder hat, gibt es mindestens 3 Jungen. Insgesamt gibt es in der Familie mindestens $3+3=6$ Kinder.

Wer schafft es in jedem der drei Beispiele, die jeweils drei Tetrominos ohne Überlappung zu einer Figur zu legen, die eine Symmetrieachse hat? Dabei dürfen die Tetrominos nur geschoben, nicht umgedreht werden.

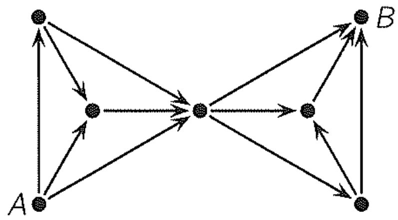


8. Was ist die Summe von 25 % von 250 und 250 % von 25?

(**A**) 125 (**B**) 150 (**C**) 200 (**D**) 225 (**E**) 275

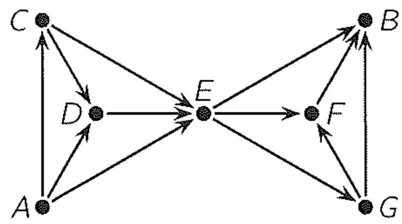
Lösung: 25 % von 250 ist gleich $\frac{25}{100} \cdot 250 = \frac{25 \cdot 250}{100}$ und 250 % von 25 ist $\frac{250}{100} \cdot 25 = \frac{25 \cdot 250}{100}$. Die Summe der beiden Werte ist gleich $2 \cdot \frac{25 \cdot 250}{100} = \frac{25 \cdot 500}{100} = 25 \cdot 5 = 125$.

9. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in Pfeilrichtung vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen?



(**A**) 20 (**B**) 16 (**C**) 12 (**D**) 9 (**E**) 6

Lösung: Alle Wege von A nach B führen über E. Von A nach E gibt es genau 4 Wege: $A \to E$, $A \to D \to E$, $A \to C \to E$ und $A \to C \to D \to E$. Von E nach B gibt es ebenfalls genau 4 Wege: $E \to B$, $E \to F \to B$, $E \to G \to B$ und $E \to G \to F \to B$. Da sich alle Wege von A nach B aus einem Weg von A nach E und einem Weg von E nach B beliebig kombinieren lassen, gibt es $4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten, von A nach B zu gelangen.



10. Die Klasse 9a spielt Basketball. Julians Team gewinnt mit 5 Punkten Vorsprung vor Charlottes Team. Charlotte beschwert sich: „Alles wegen Julian! Würden Julians Punkte für uns zählen, hätten wir mit 7 Punkten Vorsprung gewonnen." Wie viele Punkte hat Julian gemacht?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Wenn wir alle Punkte, die Julian gemacht hat, für Charlottes Team zählen, ändert sich die Punktedifferenz der beiden Teams aus Charlottes Sicht von -5 zu $+7$, also um 12 Punkte. Jeder einzelne der Punkte, die Julian gemacht hat, bewirkt dabei eine Änderung der Punktedifferenz um 2, da wir ihn bei Julians Team abziehen und bei Charlottes Team dazuzählen. Julian hat also $12 : 2 = 6$ Punkte erzielt.

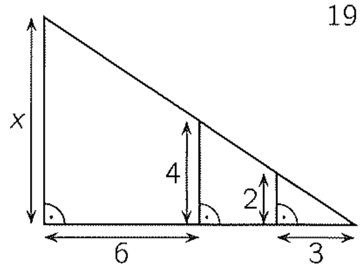
11. Eine quaderförmige Kiste mit den Kantenlängen 42 cm, 60 cm und 90 cm ist mit gleich großen Würfeln exakt vollgepackt. Welche Seitenlänge kann solch ein Würfel höchstens haben?

(**A**) 3 cm (**B**) 4 cm (**C**) 6 cm (**D**) 7 cm (**E**) 12 cm

Lösung: Da die Kiste exakt vollgepackt ist und alle Würfel gleich groß sind, müssen 42, 60 und 90 geteilt durch die Seitenlänge der Würfel (in cm) ganzzahlig sein. Die *größte* mögliche Seitenlänge der Würfel ist folglich der *größte* gemeinsame Teiler dieser drei Zahlen. Diesen finden wir, indem wir 42, 60 und 90 in Primfaktoren zerlegen. Wegen $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ und $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ist der größte gemeinsame Teiler von 42, 60 und 90 das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren, also $2 \cdot 3 = 6$. Die größtmögliche Seitenlänge der Würfel ist somit 6 cm.

16. Wie groß ist x in der rechts abgebildeten Figur?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 12



Lösung: In der Figur sind ein kleines, ein mittelgroßes und ein großes Dreieck zu erkennen. Da die Strecken mit den Längen 2, 4 und x zueinander parallel sind, können wir die Strahlensätze anwenden. Da 4 das Doppelte von 2 ist, ist die Länge der unteren Seite des mittelgroßen Dreiecks das Doppelte der Länge der unteren Seite des kleinen Dreiecks, also 6. Die Länge der unteren Seite des großen Dreiecks ist somit gleich $6 + 6 = 12$, also doppelt so groß wie die Länge der unteren Seite des mittelgroßen Dreiecks. Daher ist x das Doppelte von 4, also $x = 8$.

17. Jolitas externe Festplatte ist voll. Ein Teil der Festplatte ist mit Videos belegt. Von dem Speicherplatz der Videos sind 65 % durch ihre Lieblingsserie belegt. Die restlichen Videos sind privat und machen 7 % des Gesamtspeicherplatzes aus. Wie viel Prozent der Festplatte sind mit Jolitas Lieblingsserie belegt?

(**A**) 13 % (**B**) 15 % (**C**) 18 % (**D**) 21 % (**E**) 25 %

Lösung: Vom Speicherplatz der Videos sind $100\,\% - 65\,\% = 35\,\%$ mit privaten Videos belegt. Jolitas Lieblingsserie belegt also $\frac{65\,\%}{35\,\%} = \frac{13}{7}$-mal so viel Speicherplatz wie ihre privaten Videos. Da von der gesamten Festplatte 7 % des Speicherplatzes mit privaten Videos belegt sind, sind $\frac{13}{7} \cdot 7\,\% = 13\,\%$ der Festplatte mit Jolitas Lieblingsserie belegt.

18. Wie oft steht der Summand 8^2 in der Gleichung $\sqrt{8^2 + 8^2 + \ldots + 8^2} = 8^4$ unter der Wurzel?

(**A**) 8^2-mal (**B**) 8^3-mal (**C**) 8^4-mal (**D**) 8^6-mal (**E**) 8^8-mal

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Summanden auf der linken Seite mit n, quadrieren beide Seiten der Gleichung und erhalten so $n \cdot 8^2 = (8^4)^2 = 8^{4\cdot 2} = 8^8$. Also gilt $n = 8^8 : 8^2 = 8^{8-2} = 8^6$.

19. Fynn, Josie und Rajk haben ihrer Mutter ein Buch zum Geburtstag gekauft. Fynn hat halb so viel Geld gegeben wie die beiden anderen zusammen. Josie hat ein Drittel dessen gegeben, was ihre beiden Brüder zusammen gegeben haben. Rajk hat genau 10 Euro gegeben. Welchen Preis hatte das Buch?

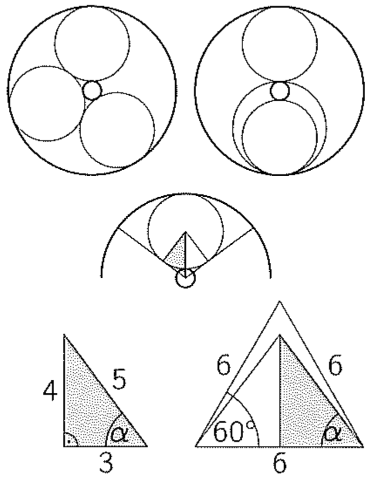
(**A**) 24 Euro (**B**) 26 Euro (**C**) 28 Euro (**D**) 30 Euro (**E**) 32 Euro

Lösung: Wir bezeichnen die Eurobeträge, die Fynn, Josie und Rajk beigesteuert haben, mit F, J und R. Dann gilt $F = \frac{1}{2}(J + R)$, $J = \frac{1}{3}(F + R)$ und $R = 10$. Setzen wir für R in der ersten und zweiten Gleichung 10 ein und stellen um, erhalten wir $2F = J + 10$ und $F = 3J - 10$. Nun können wir in der vorletzten Gleichung F durch $3J - 10$ ersetzen und erhalten $2(3J - 10) = J + 10$, also $J = 6$ und damit $F = 3 \cdot 6 - 10 = 8$. Das Buch hat also $F + J + R = 8 + 6 + 10 = 24$ Euro gekostet.

An einer Straße stehen 4 Bäume. Herr Messgern hat die Abstände zwischen je zwei Bäumen gemessen, sich allerdings nur 4 der 6 Abstände gemerkt, und zwar 4 m, 4 m, 6 m *und* 6 m. *Welche beiden Angaben fehlen?*

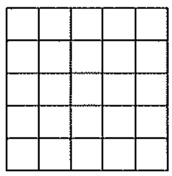
23. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt und den Radien 1 und 9 bilden einen Kreisring. Wie viele Kreise, die sowohl den großen als auch den kleinen Kreis berühren und die einander nicht schneiden, passen höchstens in diesen Kreisring?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

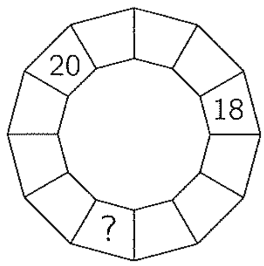


Lösung: Wer sauber und exakt zeichnet, der erkennt, dass bis zu 3 Kreise in den Kreisring eingezeichnet werden können. Dafür gibt es zwei Varianten wie rechts abgebildet.
Bei der rechten Variante kann sicher kein weiterer Kreis gezeichnet werden, der den Bedingungen genügt. Um exakt zu beweisen, dass auch bei der linken Variante nicht mehr als drei Kreise möglich sind, berechnen wir den Winkel des Kreissegments des großen Kreises, in den ein solcher Kreis passt. Das grau markierte Dreieck ist rechtwinklig, da Radius und Tangente senkrecht aufeinander stehen. Die obere Kathete hat die Länge 4 (Radius des gezeichneten Kreises) und die Hypotenuse die Länge 5 (Summe der Radien 1 und 4). Nach dem Satz des Pythagoras ist die Länge der anderen Kathete 3. Der Winkel α ist folglich der größere der beiden spitzen Winkel in diesem Dreieck und daher größer als 45°. Folglich ist der Winkel des Kreissegments größer als 90°, weshalb kein weiterer Kreis in den Kreisring passt. Das Bild ganz rechts verdeutlicht, dass α kleiner als 60° ist, weswegen der Winkel des Kreissegments kleiner als 120° ist, sodass 3 Kreise tatsächlich in den Kreisring passen.

Zerlege das 5 × 5*-Quadrat entlang der Linien in möglichst viele* *<u>unterschiedliche</u> Rechtecke.*
Wie viele Rechtecke sind möglich?

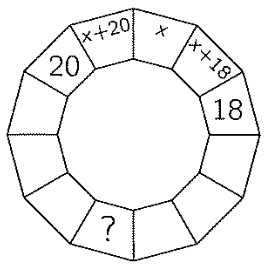


24. In jedes Feld des abgebildeten Rings soll eine Zahl so geschrieben werden, dass jede der eingetragenen Zahlen gleich der Summe ihrer beiden Nachbarn ist. Zwei Zahlen sind schon eingetragen. Für welche Zahl steht das Fragezeichen?



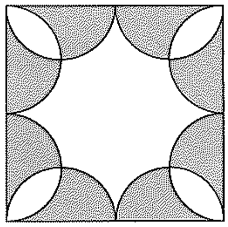
(A) 2 **(B)** −20 **(C)** 18 **(D)** 38 **(E)** −38

Lösung: Wir schreiben für die Zahl im Feld oben in der Mitte zwischen 20 und 18 die Variable x und berechnen, was in den beiden Nachbarfeldern steht. Dann gilt $(x+20)+(x+18)=x$, also $x=-38$. Somit sind die Einträge von der 20 aus im Uhrzeigersinn: 20, −18, −38, −20, 18, 38, 20, −18, −38, −20, 18, 38. Das Fragezeichen steht für −38.



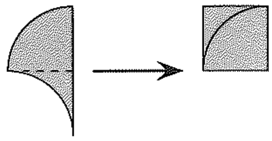
Diese Aufgabe wurde in Klassenstufe 7/8 mit anderen Zahlen als Aufgabe 25 gestellt. In dieser Broschüre ist dort eine etwas andere Lösung angegeben.

28. Acht kongruente Halbkreise sind in ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 gezeichnet. Welchen Flächeninhalt hat die graue Teilfläche?



(**A**) 2π (**B**) 8 (**C**) $6+\pi$ (**D**) $3\pi-2$ (**E**) 3π

Lösung: Jede der 8 kongruenten, grauen Flächenstücke lässt sich in einen Viertelkreis mit Radius 1 und ein „Außenstück" eines solchen Viertelkreises zerlegen. Jedes dieser Flächenstücke hat also den Flächeninhalt 1 und alle zusammen somit den Flächeninhalt 8.

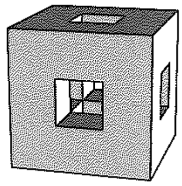


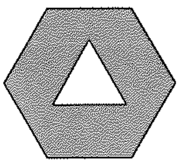
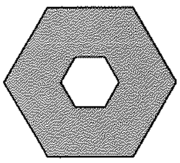
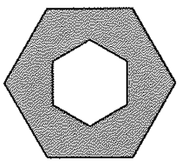
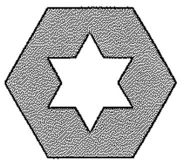
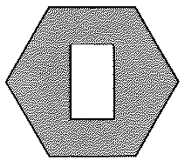
29. Gegeben sind vier Zahlen. Wir wählen drei davon, bilden ihren Durchschnitt und addieren die vierte Zahl. Das können wir auf vier verschiedene Arten tun. Als Ergebnisse dieser vier Rechnungen erhalten wir 17, 21, 23 und 29. Welches ist die größte der gegebenen vier Zahlen?

(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 24

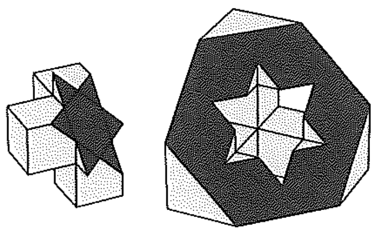
Lösung: Wir bezeichnen die vier gegebenen Zahlen so mit a, b, c und d, dass $a \leq b \leq c \leq d$ gilt. Die erste Rechnung ist dann $\frac{b+c+d}{3} + a = \frac{a+b+c+d}{3} + \frac{2}{3}a$ und die drei anderen analog $\frac{a+b+c+d}{3} + \frac{2}{3}b$, $\frac{a+b+c+d}{3} + \frac{2}{3}c$ und $\frac{a+b+c+d}{3} + \frac{2}{3}d$. Addieren wir diese vier Ergebnisse, so erhalten wir $2(a+b+c+d)$, was gleich der Summe $17+21+23+29 = 90$ ist. Also gilt $a+b+c+d = 45$. Da d die größte der vier gegebenen Zahlen ist, hat von den vier Rechnungen $\frac{a+b+c+d}{3} + \frac{2}{3}d$ das größte Ergebnis, nämlich 29. Daraus folgt $\frac{45}{3} + \frac{2}{3}d = 29$ und somit $d = 21$. (Die anderen drei gegebenen Zahlen lassen sich auf die gleiche Weise berechnen, es sind 12, 9 und 3.)

30. Durch einen Würfel wurden parallel zu den Würfelkanten drei Tunnel so gestoßen, dass in der Mitte jeder Seite ein quadratisches Loch zu sehen ist (s. Abb. rechts). Die Breite der Tunnel beträgt jeweils ein Drittel der Kantenlänge des Würfels. Wird dieser Würfel mit einer Ebene geschnitten, die senkrecht zu einer Raumdiagonalen durch den Mittelpunkt des Würfels verläuft, entsteht eine sechseckige Schnittfläche mit einem Loch. Wie sieht diese Schnittfläche aus?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir stellen uns die Tunnel als festen Körper vor. Dann entspricht die Schnittfläche der Ebene mit diesem Körper der Form des Lochs. Die drei Tunnel treffen sich in einem kleinen Würfel in der Mitte. Die Schnittfläche mit diesem Würfel ist ebenfalls ein Sechseck. Von den sechs angrenzenden Würfeln wird durch die Ebene jeweils eine kleine Ecke abgeschnitten, sodass als Schnittfläche jeweils ein kleines Dreieck zu sehen ist. Es ergibt sich ein Stern wie bei (**D**).



Japanische Summen

In einige Kästchen der Diagramme sollen Zahlen aus dem Bereich, der unter dem Diagramm steht, eingetragen werden. Dabei darf in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Zahl des Bereichs höchstens einmal vorkommen. Die restlichen Kästchen werden schwarz ausgemalt. Die schwarzen Kästchen zerlegen so die Zeilen bzw. Spalten in Gruppen von Zahlen. Am oberen und am linken Rand der Diagramme stehen jeweils die Summen der Zahlen in diesen Gruppen und zwar in der richtigen Reihenfolge von links nach rechts bzw. von oben nach unten.

Hier ist ein Beispiel:

	6	4 2	2 3	3 3
6				
5				
1 5				
5 1				

1 bis 3

→

	6	4 2	2 3	3 3
6				
5				
1 5	1			
5 1		2		1

1 bis 3

→

	6	4 2	2 3	3 3
6		1	2	3
5	2	3		
1 5	1		3	2
5 1	3	2		1

1 bis 3

Wer findet die Lösungen der folgenden Aufgaben?

	3 3	1 5	2 3	4
4				
5				
5 1				
6				

1 bis 3

	7 8	11	1 5 3	15	6 1	5 10
2 1 9						
5 3						
4 3 1						
12 3						
8 2 4						
4 11						

1 bis 5

	3 5 5	16	17 3	16	4 3 8	14 7	6 13
3 5 5							
10 4							
9 12							
14 6							
1 9 6							
4 11							
5 16							

1 bis 6

	4	3 2	4	3 3
3 2				
4				
3 1				
3 3				

1 bis 3

	6 4	5 7	4 11	10 5	9 2 1	12
15						
1 14						
7 2 5						
15						
4 2 1						
10						

1 bis 5

	3 2 5 6	6 9	8 10	6 4 3	11 2	14 1	21
3 11 6							
3 10							
8 9							
10							
19 2							
9 4							
17							

1 bis 6

Diese Aufgaben wurden freundlicherweise von Otto Janko (www.janko.at) zur Verfügung gestellt.

5. Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung 0,435 : 0,0821 ?

(**A**) 0,2 (**B**) 0,5 (**C**) 5 (**D**) 20 (**E**) 50

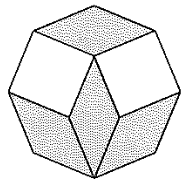
Lösung: Da die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten weit auseinander liegen, können wir großzügig runden: $0{,}435 : 0{,}0821 \approx 0{,}4 : 0{,}08 = 40 : 8 = 5$.

6. Eine Kreisfläche wird in zwei Teile zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie 2 : 7 verhalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Punkt der Kreisfläche zum größeren der beiden Teile gehört?

(**A**) $\frac{7}{9}$ (**B**) $\frac{5}{6}$ (**C**) $\frac{3}{5}$ (**D**) $\frac{5}{9}$ (**E**) $\frac{4}{7}$

Lösung: Da sich die beiden Flächeninhalte wie 2 : 7 verhalten, ist der Anteil des größeren Teils an der gesamten Kreisfläche $\frac{7}{2+7} = \frac{7}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufälliger Punkt zum größeren Teil gehört, ist nun gleich diesem Anteil, also $\frac{7}{9}$.

7. Vier kongruente Rauten und zwei kongruente Quadrate wurden zu einem regelmäßigen Achteck zusammengelegt. Wie groß ist der kleinere Innenwinkel der Rauten?



(**A**) 30° (**B**) 35° (**C**) 36° (**D**) 40° (**E**) 45°

Lösung: Wir bezeichnen den gesuchten Winkel mit α. Da das Achteck regelmäßig ist, sind der linke und der untere Innenwinkel des Achtecks gleich groß. Also gilt $90° + \alpha = 3\alpha$ und somit $\alpha = 45°$.

Wer weiß, dass der Innenwinkel im regelmäßigen Achteck 135° groß ist, kann α auch aus dem unteren Innenwinkel des Achtecks ausrechnen: $\alpha = 135° : 3 = 45°$.

8. Dachse werden in zwei Gattungen unterteilt: Meles und Arctonyx. Die Gattung Arctonyx kommt ausschließlich in Ost- und Südostasien vor. Welche der folgenden Aussagen ist folglich richtig?

(**A**) Alle Dachse leben in Asien.
(**B**) In Asien kommt nur die Gattung Arctonyx vor.
(**C**) Die Gattung Meles kommt in Amerika vor.
(**D**) Die Gattung Meles kommt nur in Afrika vor.
(**E**) Die Gattung Arctonyx kommt nicht in Australien vor.

Lösung: Da die Gattung Arctonyx *ausschließlich* in Ost- und Südostasien vorkommt, kommt sie folglich nicht in Australien vor (denn Australien liegt nicht in Asien). Die anderen Aussagen folgen dagegen nicht aus der gegebenen Aussage über die Gattung Arctonyx.

Übrigens kommt die Gattung Meles ausschließlich in Europa und in Asien vor. Daher sind die Aussagen (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) tatsächlich alle falsch.

9. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 1001 als Summe von zwei Primzahlen zu schreiben?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) drei (**D**) fünf (**E**) acht

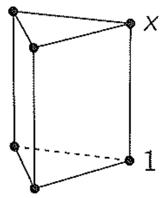
Lösung: Da 1001 eine ungerade Zahl ist, muss einer der beiden Summanden eine gerade Zahl sein. Die einzige gerade Primzahl ist 2, und somit wäre der andere Summand 999. Das ist aber keine Primzahl, denn 999 ist offensichtlich durch 3 teilbar (und auch durch 9, 27, 37, 111 und 333). Folglich gibt es keine Möglichkeit, 1001 als Summe von zwei Primzahlen zu schreiben.

14. Für den Balkon hat Marion Pflanzen gekauft: 3 verschiedenfarbige Stiefmütterchen und 6 verschiedenfarbige Primeln. In eine große Schale will sie 2 Stiefmütterchen und 4 Primeln pflanzen. Wie viele Möglichkeiten hat sie, diese aus den gekauften Pflanzen auszuwählen?

(A) 24 **(B)** 30 **(C)** 45 **(D)** 60 **(E)** 96

Lösung: Marion hat $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten, die 2 Stiefmütterchen auszuwählen, und $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, die 4 Primeln auszuwählen. Wer diese Formel nicht kennt, kann diese Zahlen auch durch systematisches Aufschreiben aller Möglichkeiten ermitteln. Da Marion die Pflanzen für die Schale beliebig kombinieren kann, hat sie insgesamt $3 \cdot 15 = 45$ Möglichkeiten, die 6 Pflanzen auszuwählen.

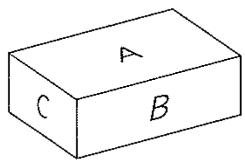
15. An die Ecken des dreiseitigen Prismas in der Abbildung sollen die Zahlen von 1 bis 6 so geschrieben werden, dass die Summen der vier Zahlen an den Eckpunkten jeder rechteckigen Seitenfläche gleich sind. Eine Ecke ist bereits mit 1 beschriftet. Für welche Zahl steht dann x?



(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Lösung: Wir bezeichnen die Summen von je zwei übereinanderstehenden Zahlen mit a, b und c. Nach Aufgabenstellung gilt $a + b = b + c = c + a$, woraus $a = b = c$ folgt. Außerdem gilt $a + b + c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, also $3a = 21$ und daher $a = b = c = 7$. Somit ist $x = 7 - 1 = 6$.

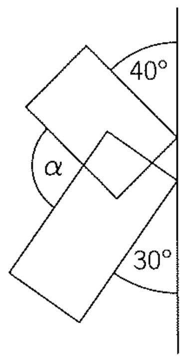
16. Die Seitenflächen eines Quaders haben die Flächeninhalte A, B und C (s. Abb). Welches Volumen hat dieser Quader?



(A) ABC **(B)** $\sqrt{ABC}$ **(C)** $\sqrt[3]{ABC}$
(D) $\sqrt{AB + BC + CA}$ **(E)** $\sqrt{A^3 + B^3 + C^3}$

Lösung: Wir bezeichnen die drei Kantenlängen des Quaders mit a, b und c. Die Flächeninhalte der Seitenflächen sind dann ab, ac und bc, und für das Volumen des Quaders gilt $abc = \sqrt{(abc)^2} = \sqrt{(ab) \cdot (ac) \cdot (bc)} = \sqrt{ABC}$.

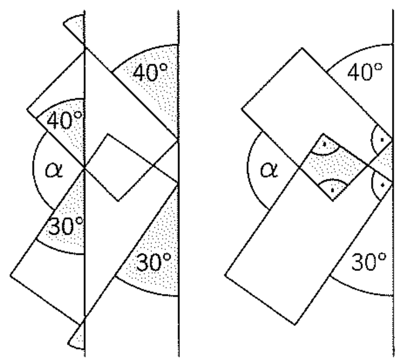
17. Zwei Rechtecke berühren eine Gerade wie abgebildet (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist α?



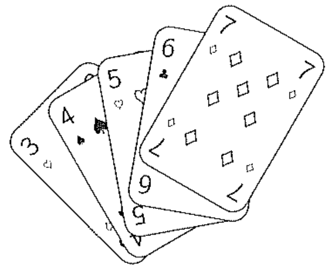
(A) 70° **(B)** 90° **(C)** 105° **(D)** 110° **(E)** 120°

Lösung: Wir verschieben wie im linken Bild die Gerade parallel nach links in den Scheitelpunkt von α. Die eingezeichneten Stufenwinkel sind dann 40° bzw. 30° groß und $\alpha = 180° - 40° - 30° = 110°$.

Lösungsvariante: Wir berechnen die Innenwinkel des grauen Dreiecks (siehe rechtes Bild). Die beiden Winkel an der Geraden sind $180° - 90° - 40° = 50°$ bzw. $180° - 90° - 30° = 60°$ groß und der dritte Winkel folglich $180° - 50° - 60° = 70°$. Damit sind die Größen der Innenwinkel des grauen Vierecks 90° (Ecke des oberen Rechtecks), 70° (Scheitelwinkel), 90° (Ecke des unteren Rechtecks) und α (Scheitelwinkel). Somit gilt $\alpha = 360° - 90° - 70° - 90° = 110°$.



21. Von den fünf abgebildeten Spielkarten nimmt Paula drei Karten und Dominic die beiden anderen. Jeder multipliziert die Werte seiner Karten. Die Summe der beiden Ergebnisse ist eine Primzahl. Was ist die Summe der drei Werte von Paulas Karten?



(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 15 (**D**) 17 (**E**) 18

Lösung: Wären die Karten mit den Werten 3 und 6 *nicht* auf einer Hand, so wären beide Produkte durch 3 teilbar. Damit wäre auch die Summe durch 3 teilbar, also keine Primzahl. Wären die Karten mit den Werten 4 und 6 *nicht* auf einer Hand, so wären beide Produkte durch 2 teilbar. Damit wäre auch die Summe durch 2 teilbar, also keine Primzahl. Folglich müssen die Karten mit den Werten 3, 4 und 6 auf einer Hand sein. Das sind also Paulas Karten. Die Summe der drei Werte von Paulas Karten ist 13. Übrigens ist $3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 72 + 35 = 107$ tatsächlich eine Primzahl.

22. Weißnix und Machtnix sollen im Scherzamt das Formular *A* besorgen. Die Formulare *A*, *B*, *C*, *D* und *E* gibt es jeweils an genau einem der folgenden fünf Schalter.

Schalter 1	Schalter 2	Schalter 3	Schalter 4	Schalter 5
Hier gibt es Formular *B*.	Hier gibt es Formular *C* oder *E*.	Hier gibt es Formular *D*.	Hier gibt es Formular *A*, *C* oder *E*.	Hier gibt es Formular *A*.

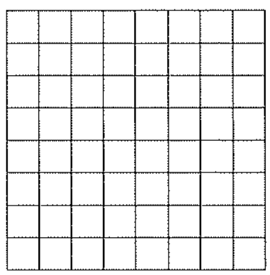
Weißnix ist ratlos, als er die Schilder an den Schaltern liest. Machtnix erinnert sich, was der Pförtner gesagt hat: Genau eine Aussage auf den Schildern ist falsch, die vier anderen Aussagen sind wahr. An welchem Schalter gibt es das Formular *A*?

(**A**) Schalter 1 (**B**) Schalter 2 (**C**) Schalter 3 (**D**) Schalter 4 (**E**) Schalter 5

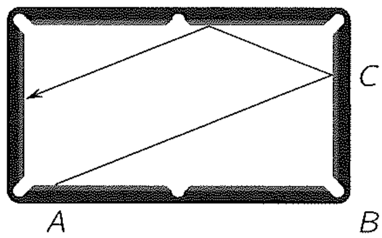
Lösung: Wären die Aussagen 1, 3 und 5 wahr, so gäbe es das Formular B an Schalter 1, das Formular D an Schalter 3 und das Formular A an Schalter 5. Demzufolge gäbe es die Formulare C und E an den Schaltern 2 und 4. Dann wären auch die Aussagen 2 und 4 wahr. Da aber eine Aussage falsch ist, muss eine der Aussagen 1, 3 oder 5 falsch sein.
Wäre die Aussage 1 falsch, so gäbe es an keinem der Schalter das Formular B. Wäre die Aussage 3 falsch, so gäbe es an keinem der Schalter das Formular D. Folglich ist die Aussage 5 falsch.
Das Formular B gibt es somit an Schalter 1 und das Formular D an Schalter 3. Dann muss es an Schalter 4 das Formular A geben und die Formulare C und E gibt es an den Schaltern 2 und 5.
Das Formular A gibt es also am Schalter 4.

Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 18 gestellt.

Zerlege das 8 × 8-Quadrat entlang der Linien in möglichst viele unterschiedliche Rechtecke, die auch nicht durch Drehung auseinander hervorgehen.
Wie viele Rechtecke sind möglich?
Wie viele Rechtecke sind möglich, wenn jede Rechteckseite größer als 1 sein soll?

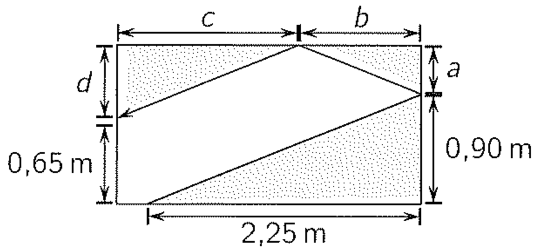


26. Ein Billardspieler trainiert an einem Tisch mit einer $2{,}50\,\text{m} \times 1{,}30\,\text{m}$ großen Spielfläche. Er legt eine Kugel in A an die vordere Bande 2,25 m von Loch B entfernt. Die Kugel trifft in C die rechte Bande 90 cm von B entfernt und kommt wie beabsichtigt nach 2 Reflektionen an der linken Bande zum Stehen. Wie weit ist die Kugel nun von der Mitte der linken Bande entfernt?



(**A**) 2 cm (**B**) 5 cm (**C**) 9 cm (**D**) 10 cm (**E**) 12 cm

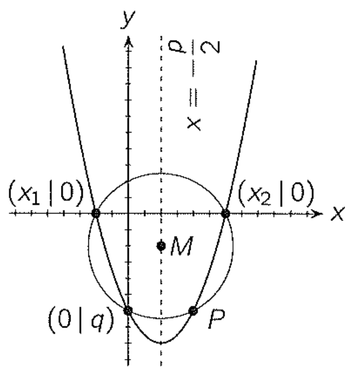
Lösung: Da die Billardkugel an den Banden reflektiert wird, stimmen jeweils an der rechten und der oberen Bande die Eintritts- und Austrittswinkel überein. Die im Bild grau markierten, rechtwinkligen Dreiecke stimmen somit in allen Winkeln überein; sie sind also ähnlich zueinander. Das Verhältnis der Längen ihrer Katheten ist jeweils $\frac{2{,}25}{0{,}90} = 2{,}5$. Die Seitenlänge a ist die Differenz aus der Spielfeldbreite und 0,90 m, also $a = 0{,}40\,\text{m}$. Wegen der Ähnlichkeit gilt $b = 2{,}5 \cdot 0{,}40\,\text{m} = 1{,}00\,\text{m}$. Die Seitenlänge c ist die Differenz aus der Spielfeldlänge und 1,00 m, also $c = 1{,}50\,\text{m}$. Wegen der Ähnlichkeit gilt $d = \frac{1}{2{,}5} \cdot 1{,}50\,\text{m} = 0{,}60\,\text{m}$. Die halbe Spielfeldbreite beträgt 0,65 m. Die Kugel ist folglich $0{,}65\,\text{m} - 0{,}60\,\text{m} = 0{,}05\,\text{m} = 5\,\text{cm}$ von diesem Punkt entfernt zum Stehen gekommen.



27. Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ schneidet die x- und die y-Achse in 3 verschiedenen Punkten. Der Kreis, der durch diese 3 Schnittpunkte verläuft, schneidet den Graphen von f in einem weiteren Punkt. Welche Koordinaten hat dieser Punkt?

(**A**) $\left(-\frac{q}{p} \,\middle|\, \frac{q^2}{p^2}\right)$ (**B**) $(p \mid q)$ (**C**) $(-p \mid q)$ (**D**) $(0 \mid -q)$ (**E**) $(1 \mid p+q+1)$

Lösung: Bei dieser Aufgabe hilft es, eine saubere Skizze anzufertigen. Die Parabel schneidet die y-Achse in einem Punkt und die x-Achse daher in zwei Punkten. Die Strecke, die die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse, $(x_1 \mid 0)$ und $(x_2 \mid 0)$, verbindet, ist eine Sehne in dem Kreis. Die Mittelsenkrechte zwischen den beiden Punkten ist daher eine Spiegelachse des Kreises. Sie entspricht der senkrechten Geraden durch den Scheitelpunkt, ist also auch Spiegelachse der Parabel. Der Spiegelpunkt des Schnittpunkts der Parabel mit der y-Achse, $(0 \mid q)$, an der Spiegelachse liegt folglich sowohl auf dem Kreis als auch auf der Parabel.



Wer weiß, dass die Spiegelachse die Gleichung $x = -\frac{p}{2}$ hat, erhält die gesuchten Koordinaten so: $\left(0 + 2 \cdot \left(-\frac{p}{2} - 0\right) \,\middle|\, q\right) = (-p \mid q)$.

Ohne Benutzung der Gleichung der Spiegelachse erhalten wir q als y-Koordinate des gesuchten Punktes, da er der Spiegelpunkt von $(0 \mid q)$ an der Spiegelachse der Parabel ist. Seine x-Koordinate erhalten wir, indem wir die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = q$ lösen. Wir erhalten $x = 0$ oder $x = -p$. Folglich sind die Koordinaten des gesuchten Punktes $(-p \mid q)$.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	E	D	A	E	C	D	A	E	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	A	D	B	B	E	D	C	C	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	B	D	C	A	A	C	D	C	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	B	A	E	C	B	A	B	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	A	D	D	E	B	A	D	A	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	D	A	E	D	C	C	B	C	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	A	D	B	C	A	E	E	A	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	A	D	C	E	B	D	C	E	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	D	D	A	A	B	C	B	C	E

Die Lösungen der Extra-Knobeleien stehen auf der Webseite
des Känguru-Wettbewerbs Deutschland unter

`www.mathe-kaenguru.de/chronik/broschueren`