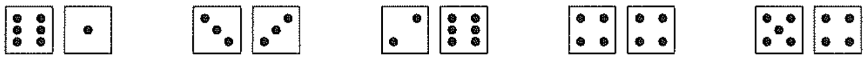
Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Klassenstufen 3 und 4

1. Amy, Bert, Carl, Doris und Emil würfeln mit 2 Würfeln:



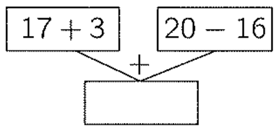
Amy Bert Carl Doris Emil

Jedes Kind zählt seine Punkte zusammen. Wer hat die meisten Punkte?

(A) Amy **(B)** Bert **(C)** Carl **(D)** Doris **(E)** Emil

Lösung: Amy hat 7 Punkte, Bert hat 6 Punkte, Carl hat 8 Punkte, Doris hat 8 Punkte, und Emil hat 9 Punkte gewürfelt. Emil hat die meisten Punkte.

2. Welche Zahl gehört in das leere Kästchen des Rechenbaums?



(A) 24 **(B)** 28 **(C)** 36 **(D)** 46 **(E)** 54

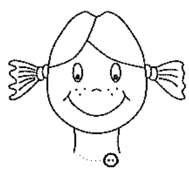
Lösung: Wir rechnen die beiden oberen Aufgaben im Rechenbaum: $17+3=20$ und $20-16=4$. In das leere Kästchen gehört die Summe dieser Zahlen, also $20+4=24$.

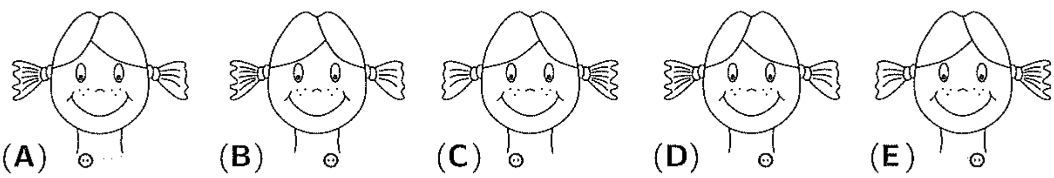
3. Mein Hamsterbaby Wuschel ist 2 Wochen und 2 Tage alt. In wie vielen Tagen ist Wuschel 3 Wochen alt?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Lösung: Da die Woche 7 Tage hat und von der 3. Woche schon 2 Tage vergangen sind, muss Wuschel noch 5 Tage wachsen, bevor er 3 Wochen alt ist.

4. Heute trägt Klara Zöpfe und eine Kette (Bild rechts).
Was sieht Klara, wenn sie in den Spiegel guckt?





(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

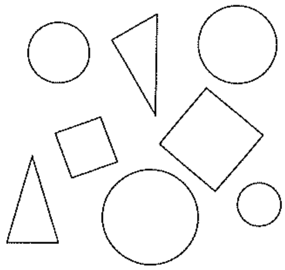
Lösung: Wir suchen im Bild von Klara all die Dinge, die nicht symmetrisch sind. Das sind die Zöpfe, die Halskette und der Scheitel. Und diese müssen alle drei im Lösungsbild gespiegelt erscheinen. Das ist nur bei **(C)** der Fall.

9. Lena hat sich ein Passwort ausgedacht. Es hat mehr als 6 Zeichen. Die beiden letzten Zeichen sind Ziffern. Die Buchstaben L, E, N und A sind enthalten, aber nur zwei davon sind groß geschrieben. Welches könnte Lenas Passwort sein?

(**A**) elan184 (**B**) L5e1n2A (**C**) 1AneL73 (**D**) LEnA63 (**E**) le592na

Lösung: Da Lenas Passwort mehr als 6 Zeichen hat, kommt (**D**) nicht als Lösung infrage, denn bei (**D**) stehen nur 6 Zeichen. Da die beiden letzten Zeichen Ziffern sind, kommen auch (**B**) und (**E**) nicht infrage, denn in beiden Fällen ist mindestens ein Buchstabe unter den letzten 2 Zeichen. Da genau zwei der Buchstaben L, E, N, A groß geschrieben sind, fällt auch (**A**) als Lösung weg, weil hier alle Buchstaben klein geschrieben sind. Es bleibt (**C**), wo alle Bedingungen zutreffen.

10. Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Bild richtig?



(**A**) Es sind gleich viele Kreise und Quadrate.
(**B**) Es sind weniger Kreise als Dreiecke.
(**C**) Es sind mehr Quadrate als Dreiecke.
(**D**) Es sind zwei Dreiecke mehr als Quadrate.
(**E**) Es sind doppelt so viele Kreise wie Dreiecke.

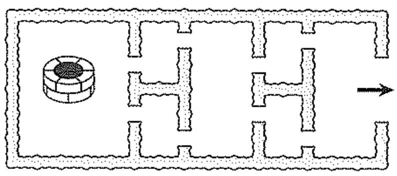
Lösung: Wir zählen die einzelnen geometrischen Figuren: Es sind 2 Dreiecke, 2 Quadrate und 4 Kreise. Es sind also doppelt so viele Kreise wie Dreiecke. Die anderen Aussagen treffen nicht zu.

11. Auf den abgebildeten Karten steht vorn und hinten eine Zahl. Die Summe der 2 Zahlen auf der linken Karte ist gleich der Summe der 2 Zahlen auf der rechten Karte. Alle 4 Zahlen zusammen haben die Summe 32.
Welche Zahl steht auf der linken Karte hinten?

(**A**) 7 (**B**) 5 (**C**) 3 (**D**) 6 (**E**) 4

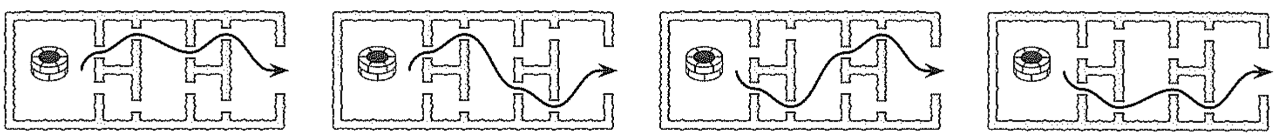
Lösung: Da die Summe aller 4 Zahlen 32 ist und die Summe der beiden Zahlen auf der linken Karte gleich der Summe der beiden Zahlen auf der rechten Karte ist, ist diese Summe gleich $32 : 2 = 16$. Darum muss auf der linken Karte hinten die Differenz $16 - 12 = 4$ stehen.

12. Im Park ist ein kleiner Irrgarten. Es gibt mehrere Möglichkeiten, Brunnen zurück zum Ausgang zu gelangen. Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn kein Durchgang mehrmals passiert wird?

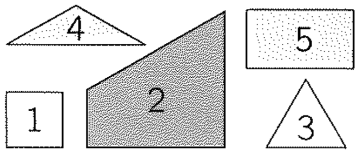


(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Vom Brunnen aus kann ich nach links oder nach rechts gehen. Auf beiden Wegen gelange ich nach Durchqueren jeweils zweier Durchgänge in den mittleren Bereich des Irrgartens. Von dort gibt es zwei Möglichkeiten, zum Ausgang zu gelangen. Ein Weg führt nach links, ein zweiter Weg führt nach rechts. Kombiniere ich die beiden Wegstücke, so ergeben sich insgesamt 4 Möglichkeiten:

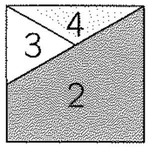


16. Aus welchen der 5 Teile lässt sich ein Quadrat puzzeln?

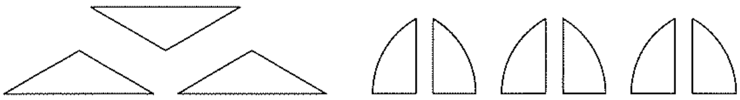


(**A**) 1, 2, 3 (**B**) 2, 3, 4 (**C**) 1, 2, 5
(**D**) 2, 4, 5 (**E**) 3, 4, 5

Lösung: Das nebenstehende Bild zeigt, wie aus den Teilen 2, 3 und 4 ein Quadrat gepuzzelt werden kann.



Wie lässt sich aus den 9 Teilen ein Kreis legen?

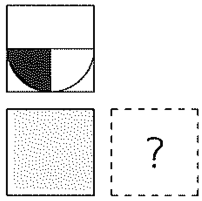


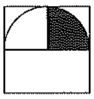
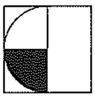
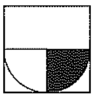
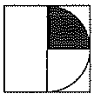
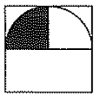
17. Jules Kette soll aus 20 Perlen in 4 Farben bestehen. Jule hat schon 3 blaue und 9 silberne Perlen ausgesucht. Mindestens eine Perle soll rot sein und mindestens eine weiß. Wie viele Möglichkeiten für die Anzahl der roten Perlen gibt es?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

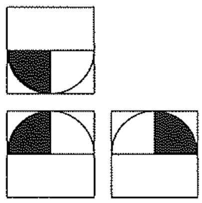
Lösung: Jule hat für ihre Kette schon festgelegt, dass sich unter den insgesamt 20 Perlen 3 blaue und 9 silberne Perlen befinden sollen. Es kommen also noch $20 - 3 - 9 = 8$ Perlen dazu. Von diesen 8 Perlen können höchstens 7 rot sein, da mindestens eine davon weiß ist. Und jede Anzahl von 1 bis 7 ist für die roten Perlen möglich.

18. Die Karte rechts hat eine graue Rückseite. Sie wird zuerst nach unten und danach nach rechts umgeklappt. Was ist jetzt zu sehen?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wenn wir durch die Karte hindurchsehen könnten, würden wir nach dem ersten Klappen das an der Unterkante der Karte gespiegelte Muster sehen. Nach dem zweiten Klappen sehen wir das an der rechten Kante gespiegelte Muster. In der Abbildung ist dargestellt, was nach dem ersten und nach dem zweiten Klappen zu sehen wäre, wenn wir durch die Karte hindurchsehen könnten.



Dieselbe Aufgabe mit einer anderen Karte ist Aufgabe 10 in Klassenstufe 7/8.

19. Claudio hat 3 Zahlen addiert und die Summe 777 erhalten. Einer der Summanden war 201. Was hätte Claudio erhalten, wenn er 102 statt 201 addiert hätte?

(**A**) 678 (**B**) 878 (**C**) 676 (**D**) 876 (**E**) 666

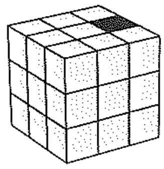
Lösung: Würde Claudio den Summanden 201 durch den kleineren Summanden 102 ersetzen, so wäre seine Summe um $201 - 102 = 99$ kleiner, also $777 - 99 = 678$.

23. Ich habe 2 Zahlen addiert und als Summe 170 erhalten. Die größere Zahl endet auf 5, und wenn ich die 5 wegstreiche, bleibt die kleinere Zahl übrig. Wie groß ist die Differenz der beiden Zahlen?

(**A**) 110 (**B**) 120 (**C**) 130 (**D**) 140 (**E**) 150

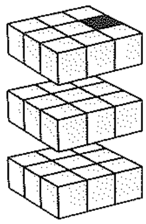
Lösung: Da die größere Zahl auf 5 endet und da die Summe aus der größeren und der kleineren Zahl nach Voraussetzung auf 0 endet, muss auch die kleinere Zahl auf 5 enden. Somit ist der Zehner der größeren Zahl ebenfalls 5. Da die Summe 170 ist, muss die größere Zahl den Hunderter 1 haben und folglich 155 sein. Die kleinere Zahl ist dann 15, und die gesuchte Differenz ist $155 - 15 = 140$.

24. Der Würfel rechts besteht aus 27 kleinen Würfeln – genau einer davon ist schwarz. Pia ersetzt die 4 grauen Würfel, die den schwarzen Würfel mit einer Seitenfläche berühren, durch schwarze Würfel. Dann ersetzt sie wieder alle grauen Würfel, die einen schwarzen Würfel mit einer Seitenfläche berühren, durch schwarze Würfel. Wie viele Würfel sind nun insgesamt schwarz?

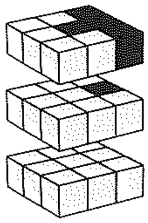


(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 15

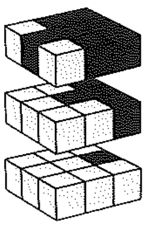
Lösung: Wir stellen uns den Würfel von oben nach unten in 3 Schichten zerlegt vor:



Nach Pias erster Tauschaktion ergibt sich folgendes Bild:



Nach dem zweiten Tauschen erhalten wir:

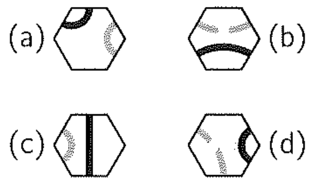


Es sind dann also insgesamt 12 Würfel schwarz.

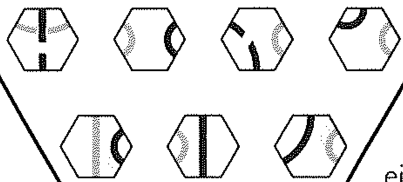
DOPPEL-TANTRIX

Knobeleien mit dem „Preis für alle" 2016

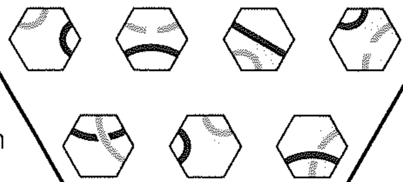
Wie viele verschiedene Tantrix-Blumen lassen sich mit 7 gleichen Steinen legen?



Wie viele verschiedene Tantrix-Blumen mit zwei Kringeln lassen sich aus diesen sieben Steinen legen?



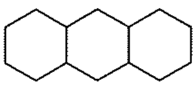
Die 7 Steine sind, ohne sie zu drehen oder zu wenden, zu einer Tantrix-Blume zusammenzuschieben.



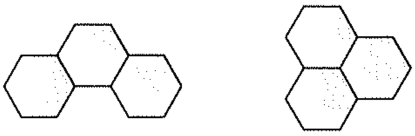
Schätzfragen

Wie viele Tantrix-Blumen lassen sich mit den 7 Steinen eines Sets legen?

Wie viele „Anti-Tantrix-Blumen", bei denen alle aneinanderstoßenden Linien verschiedenfarbig sind, gibt es?

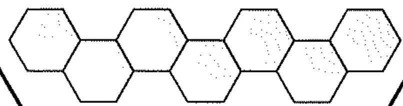


Aus 3 Steinen lassen sich 3 verschiedene Figuren legen.

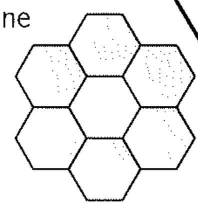


Wie viele verschiedene Figuren lassen sich aus 5 Steinen legen?

Wie viele verschiedene Reihen lassen sich mit den 7 Steinen eines Sets legen?

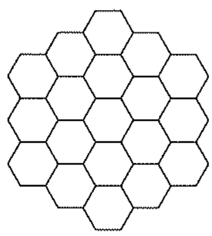


Um eine Figur mit einem Loch zu legen, werden 6 Steine benötigt.



Wie viele Steine sind nötig, um eine Figur mit 5 Löchern zu legen?

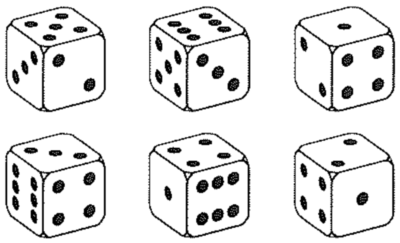
Färbe einige der Sechsecke so, dass in jeder der 5 Spalten und in jeder der 10 Diagonalen genau ein blaues und ein gelbes Sechseck zu sehen sind. Gibt es verschiedene Möglichkeiten?



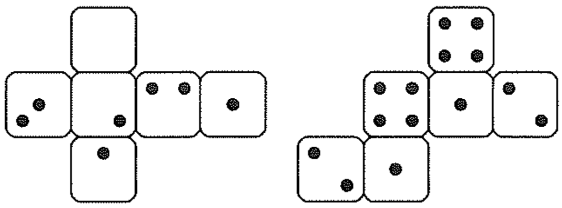
Würfelspielereien

Spielwürfel sind üblicherweise mit den Augenzahlen von 1 bis 6 so beschriftet, dass auf gegenüberliegenden Seiten insgesamt jeweils 7 Augen sind.

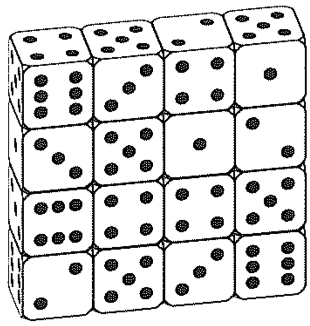
Welche der folgenden Würfel sind ganz sicher keine Spielwürfel?



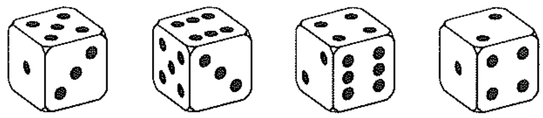
Die Würfelnetze sollen so bemalt werden, dass sich daraus Spielwürfel falten lassen. Einige Punkte sind schon aufgemalt. Wer findet alle Möglichkeiten?



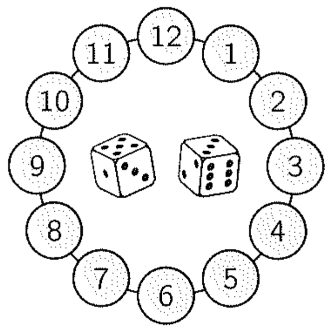
Wie viele Punkte sind auf der Rückseite der Spielwürfelmauer?



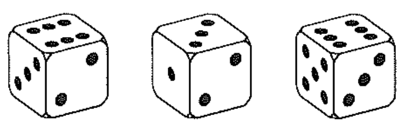
Drei der folgenden Bilder zeigen denselben Spielwürfel aus verschiedenen Richtungen. Ein Bild zeigt einen anderen Würfel. Welches?



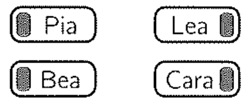
Würfle alle Zahlen auf der Uhr!
Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf darf eine Zahl gestrichen werden: entweder eine Zahl, die von einem der beiden Würfel gezeigt wird, oder die Summe der gewürfelte Augenzahlen.
Wird zum Beispiel eine 5 und eine 3 gewürfelt, darf entweder die 5 oder die 3 oder die 8 gestrichen werden.
Nach jedem Wurf darf immer nur eine Zahl gestrichen werden.
Spiel allein und versuch, das mit möglichst wenigen Würfen zu schaffen.
Oder such dir einen Gegner: Wer hat zuerst alle Zahlen gestrichen?



Rechts ist dreimal derselbe Würfel zu sehen. Auf den ersten Blick wirkt er wie ein ganz normaler Spielwürfel. Doch etwas passt nicht. Wie viele Punkte liegen gegenüber von der 6?



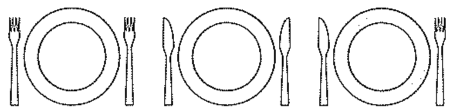
5. Im Schullandheim teilen sich Bea, Pia, Cara und Lea ein Zimmer. Alle vier schlafen mit dem Kopf auf ihrem Kissen. Links schlafen Bea und Pia mit dem Gesicht zueinander. Rechts schlafen Cara und Lea mit dem Rücken zueinander. Wie viele der vier schlafen mit dem rechten Ohr auf dem Kissen?



(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle vier

Lösung: Von den beiden Mädchen, die links schlafen, schläft eine auf dem linken, die andere auf dem rechten Ohr – ebenso, wie die beiden Mädchen, die rechts im Zimmer schlafen. Das heißt, auf jeder Seite des Zimmers schläft ein Mädchen auf dem rechten Ohr. Insgesamt sind das also zwei Mädchen, die auf dem rechten Ohr schlafen. Das sind übrigens Pia und Lea.

6. Beim Tischdecken ist Ella zwar flink, aber heute war sie etwas schusselig. Das Messer gehört nämlich rechts neben den Teller, die Gabel links. Wie oft muss Ella ein Messer gegen eine Gabel tauschen, damit alles in Ordnung ist?



(**A**) einmal (**B**) zweimal (**C**) dreimal (**D**) fünfmal (**E**) siebenmal

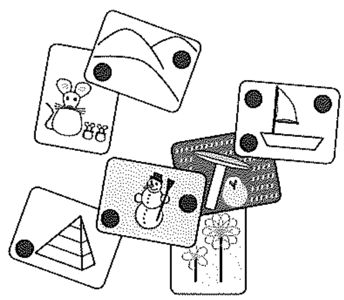
Lösung: Auf dem Tisch liegen 2 Gabeln rechts neben dem Teller und 2 Messer links neben dem Teller, also nicht da, wo sie hingehören. Daher muss mindestens zweimal getauscht werden. Wenn Ella die rechts liegende Gabel vom 1. Teller gegen das links liegende Messer vom 2. Teller tauscht, sind die beiden ersten Gedecke in Ordnung. Nun tauscht Ella noch beim 3. Teller das Messer gegen die Gabel und ist damit fertig. Sie hat zweimal getauscht.

7. Taps, der Hundertfüßer, möchte an jedem seiner 100 Füße einen Schuh haben. Er besitzt schon 40 Paar Schuhe. Wie viele Schuhe muss er noch kaufen?

(**A**) 10 (**B**) 20 (**C**) 40 (**D**) 50 (**E**) 60

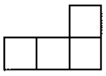
Lösung: Taps besitzt 40 Paar Schuhe, das heißt 80 Schuhe. Dann fehlen ihm noch 20 Schuhe, damit er an jedem seiner 100 Füße einen Schuh hat.

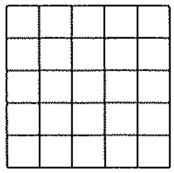
8. Mein Großvater heftet jede Ansichtskarte, die er bekommt, mit starken Magneten an den Kühlschrank. Die Karten würden auch so hängen bleiben, wenn er einige Magnete wegnehmen würde.
Wie viele der 8 Magnete könnte er *höchstens* wegnehmen?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die beiden Ansichtskarten mit der Maus und mit den Bergen bleiben auch am Kühlschrank, wenn der rechte der beiden Magneten entfernt wird. Der Magnet, der die Schneemann-Karte, die Karte mit den Blumen und die Karte mit dem Käuzchen unterm Fliegenpilz hält, kann nicht entfernt werden, da es der einzige ist, der die Karte mit den Blumen hält. Von den beiden Magneten, die die Pyramidenkarte halten, kann einer – egal, welcher – entfernt werden. Von den drei Magneten, die die Segelbootkarte halten, können zwei – egal, welche – entfernt werden. Insgesamt können also höchstens $1 + 1 + 2 = 4$ Magnete entfernt werden.

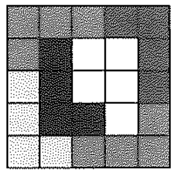
12. Wie viele Figuren der Form  lassen sich aus dem rechts abgebildeten Stück Karopapier ausschneiden?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Im 5×5-Karopapier gibt es 25 Kästchen. Da die L-Figur, die wir dort möglichst oft ausschneiden wollen, 4 Kästchen groß ist, können wir wegen $6 \cdot 4 = 24$ höchstens 6 L-Figuren unterbringen.

Dass das auch möglich ist, ist auf dem Bild rechts zu sehen.



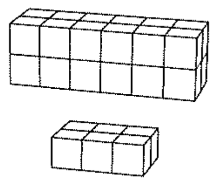
13. In unserem Schulchor singen 36 Kinder. Bei der Probe sitzen alle auf Zweierbänken. Heute saß neben jedem Jungen ein Mädchen, aber nur die Hälfte der Mädchen hatte einen Jungen als Nachbarn. Wie viele Jungen sind im Chor?

(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 15 (**D**) 17 (**E**) 18

Lösung: Die 36 Kinder des Schulchores teilen sich auf in eine Hälfte der Mädchen, die mit einem Mädchen auf der Bank sitzt, eine Hälfte der Mädchen, die mit einem Jungen die Bank teilt und ebenso viele Jungen. Es gibt also 3 gleich große Teile, von denen einer aus allen Jungen besteht. Folglich gibt es $36 : 3 = 12$ Jungen im Chor.

Eine ähnliche, aber etwas schwierigere Aufgabe ist Aufgabe 21 in Klasse 7/8.

14. Aus gleich großen Würfeln hat Kalil einen Quader gebaut (Bild oben). Jolanda baut mit derselben Anzahl von Würfeln auch einen Quader. Die unterste Schicht hat sie schon fertig (Bild unten).
Wie viele Schichten wird Jolandas Quader haben?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

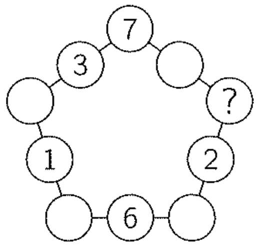
Lösung: In Kalils Quader sind $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ Bausteine verbaut. Da Jolanda die unterste Schicht ihres Quaders mit $2 \cdot 3 = 6$ Bausteinen bereits fertig hat, wird ihr Quader insgesamt $24 : 6 = 4$ Schichten haben.

15. Auf einem Papierstreifen steht die Zahl 2581953764. Marwin schneidet den Streifen so in 3 Teile, dass er dabei die Zahl 2581953764 in 3 Zahlen zerlegt, deren Summe so klein wie möglich ist. Wie groß ist diese Summe?

(**A**) 2975 (**B**) 3775 (**C**) 4298 (**D**) 4217 (**E**) 2878

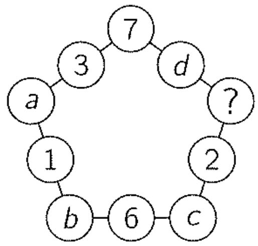
Lösung: Die Zahl auf Marwins Papierstreifen ist 10-stellig. Da die Summe der drei Zahlen auf den Abschnitten so klein wie möglich sein soll, ist also beim Zerschneiden mindestens eine der 3 Zahlen, die er dabei erhält, 4-stellig (keine ist 5-stellig oder noch größer). Die anderen beiden sind 3-stellig, denn schon die beiden kleinsten möglichen 4-stelligen Zahlen haben eine Summe, die größer als alle Lösungsvorschläge ist. Dafür gibt es genau drei Möglichkeiten. Da sowohl $258 + 195 + 3746 > 3000$ als auch $2581 + 953 + 764 > 3000$ ist, aber $258 + 1953 + 764 = 2975$ ist, ist (**A**) die Lösung.

19. Paola will in die 10 Kreise Zahlen schreiben, sodass die 3 Zahlen auf jeder Fünfeckseite dieselbe Summe haben. Sie hat bereits 5 Zahlen geschrieben. Welche Zahl muss Paola für das Fragezeichen schreiben?



(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 15

Lösung: In die auszufüllenden Kreise sind verschiedene Buchstaben eingetragen, damit wir unsere Lösung besser darstellen können. Wir betrachten zuerst die beiden linken Fünfeckseiten. Es muss $7+3+a = a+1+b$ sein. Da a in beiden Summen auftaucht, muss $7+3 = b+1$ sein. Also ist $b = 9$. Nun betrachten wir die untere und die rechte Fünfeckseite. Hier muss $b+6+c = c+2+?$ sein. Wir setzen $b = 9$ ein und erhalten, da c in beiden Summen auftaucht, $9+6 = 2+?$. Also ist $? = 13$.



Für a und für c und ebenso für d können beliebige Zahlen eingetragen werden, wobei allerdings stets $a + 10 = c + 15 = d + 20$ gelten muss.

> *Die Jahreszahl 2016 soll als Summe von 5 natürlichen Zahlen geschrieben werden. Dabei soll der 2. Summand das 2-fache, der 3. Summand das 4-fache, der 4. Summand das 6-fache und der 5. Summand das 8-fache des 1. Summanden sein.*
>
> *Wer findet die Summanden?*
>
> $\square + \square + \square + \square + \square = 2016$

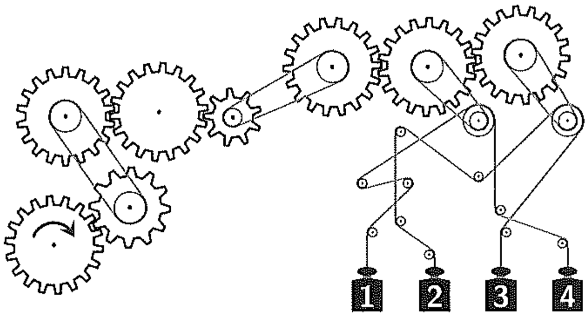
20. Meine Tante Marla eröffnet ein Café. Ihr Freund Pietro schenkt ihr quadratische Tische und Stühle. Um die Tische einzeln mit je 4 Stühlen zu stellen, fehlen Marla 6 Stühle. Stellt sie jedoch immer 2 Tische zusammen und je 6 Stühle dazu, bleiben 4 Stühle übrig. Wie viele Tische hat Marla von Pietro bekommen?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

Lösung: Bei dieser Aufgabe ist das Probieren mit den Lösungsvorschlägen eine gute Strategie. Wir beginnen mit (**A**): Angenommen Marla hätte 8 Tische bekommen. Dann hätte sie laut Aufgabenstellung $8 \cdot 4 - 6 = 26$ Stühle dazu. Nach dem Zusammenstellen von je 2 Tischen hat sie 4 Tische mit je 6 Stühlen und 4 Stühle zu viel, das sind $4 \cdot 6 + 4 = 28$ Stühle und nicht 26. (**A**) ist also falsch. Mit 10 Tischen finden wir, dass $10 \cdot 4 - 6 = (10 : 2) \cdot 6 + 4 = 34$ gilt. (**B**) ist also die Lösung, denn nach den Regeln des Känguru-Wettbewerbs gibt es stets nur genau eine richtige Antwort. Dass es nur diese eine Möglichkeit gibt, lässt sich natürlich auch ausrechnen.

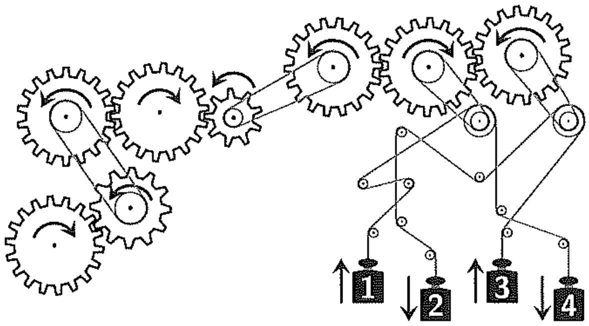
> *Für welche drei Ziffern A, B, C gilt*
>
> $BB + BB = ABC$?

23. Welche beiden Gewichte bewegen sich aufwärts, wenn das Zahnrad links unten in Pfeilrichtung gedreht wird?



(**A**) 1 und 2 (**B**) 3 und 4
(**C**) 2 und 4 (**D**) 1 und 4
(**E**) 1 und 3

Lösung: Wir lösen das Problem, indem wir nacheinander die Bewegung der Zahnräder durch Pfeile markieren. Ineinander greifende Zahnräder drehen sich in entgegengesetzte Richtungen, über Riemen verbundene Zahnräder drehen sich in dieselbe Richtung. Das Bild zeigt, dass sich die beiden Gewichte 1 und 3 aufwärts bewegen.



24. Jeder der Eckpunkte A, B, C, D eines Quadrats $ABCD$ soll entweder gelb, blau oder rot gefärbt werden, sodass jeweils benachbarte Eckpunkte verschiedenfarbig sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Färbung aller vier Eckpunkte?

(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 24

Lösung: Wir betrachten mehrere Fälle:

1. Fall: Der Punkt A und der diagonal gegenüberliegende Punkt C sind gleichfarbig und die Punkte B und D sind ebenfalls gleichfarbig. Wenn A und C beide rot sind, gibt es 2 Möglichkeiten: B und D können beide gelb oder beide blau sein. Da A und C auch beide gelb oder blau sein können, gibt es in diesem Fall insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

2. Fall: Der Punkt A und der diagonal gegenüberliegende Punkt C sind gleichfarbig und die Punkte B und D sind unterschiedlich gefärbt. Wenn A und C beide rot sind, gibt es 2 Möglichkeiten: B kann gelb und D blau sein oder umgekehrt. Da A und C wiederum auch beide die Farben gelb und blau haben können, gibt es auch in diesem Fall insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

3. Fall: Die Punkte A und C sind unterschiedlich gefärbt. Dann müssen die Punkte B und D in der 3. Farbe gleichfarbig sein. Ist A rot, so gibt es 2 Möglichkeiten: C kann gelb sein oder blau. Da für A drei Farbmöglichkeiten existieren, sind es also wieder insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Aus allen drei Fällen zusammen erhalten wir 18 Möglichkeiten für die Färbung.

Der Übersicht halber schreiben wir das noch in einer Tabelle auf:

1. Fall

A	B	C	D
rot	gelb	rot	gelb
rot	blau	rot	blau
gelb	blau	gelb	blau
gelb	rot	gelb	rot
blau	rot	blau	rot
blau	gelb	blau	gelb

2. Fall

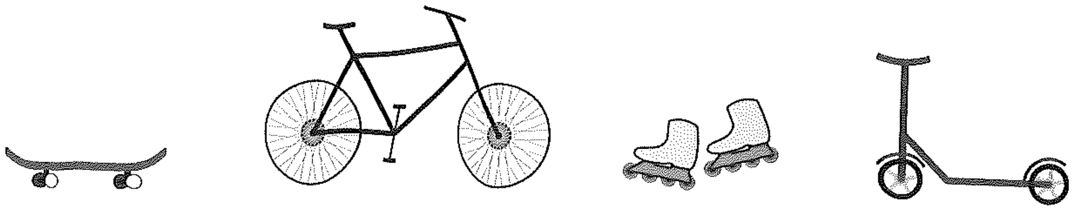
A	B	C	D
rot	gelb	rot	blau
rot	blau	rot	gelb
gelb	blau	gelb	rot
gelb	rot	gelb	blau
blau	rot	blau	gelb
blau	gelb	blau	rot

3. Fall

A	B	C	D
rot	blau	gelb	blau
rot	gelb	blau	gelb
gelb	blau	rot	blau
gelb	rot	blau	rot
blau	rot	gelb	rot
blau	gelb	rot	gelb

Runde Sachen: Lustvolle Logik

① Lisa, Tom, Helene und Max sind heute auf Rädern zur Schule gekommen: ein Kind auf dem Skateboard, ein Kind mit dem Fahrrad, ein Kind auf Inline-Skates und ein Kind mit dem Roller.



1. Lisa ist auf mehr als 2 Rädern zur Schule gekommen.
2. Tom war auf dem Schulweg auf doppelt so vielen Rädern unterwegs wie Helene.
3. Max ist nicht mit dem Fahrrad gefahren.

Wie ist jedes der vier Kinder heute zur Schule gekommen?

② Nachdem Arif, Pauline, Laura und Kilian auf den Gipfel gewandert sind, ist Zeit für die Mittagspause. Die vier sitzen an einem runden Tisch. Jeder hat auf etwas anderes Appetit.

1. Arif sitzt dem Kind gegenüber, das eine Banane schält.
2. Das Kind, das einen Nussriegel nascht, sitzt links von Pauline und rechts von Laura.
3. Kilian sitzt rechts neben dem Kind, das genüsslich ein Käsebrot verspeist.

Eines der vier Kinder isst einen Apfel. Welches?

③ Im Nachbarhaus von Johann wohnt die vierköpfige Familie Trops. In Johanns Garten landet ab und zu ein Ball: manchmal ein Volleyball, manchmal ein Fußball, manchmal ein Tennisball und manchmal ein Basketball. Johann weiß nur, dass jeder aus der Familie Trops eine andere Ballsportart betreibt. Als er Stella, die jüngere der beiden Töchter, erwischt, wie sie ihren Basketball aus Johanns Garten holt, fragt er sie neugierig der Reihe nach:

1. Spielt deine Mutter Volleyball?
2. Spielt deine große Schwester Fußball?
3. Spielt dein Vater Tennis?

Stella beantwortet alle drei Fragen mit „Ja". Um Johann zu necken, hat sie im Wechsel richtig oder falsch geantwortet. Wenn sie Johann das verraten würde, dann könnte er herausfinden, wer welcher Sportart nachgeht. Wie könnte das gelingen?

Bei einem Festessen sitzen einige Gäste gleichmäßig um einen großen runden Tisch herum. Wenn die Person, die 3 Plätze rechts von der Person sitzt, die gegenüber der Person sitzt, die links neben dem Gastgeber sitzt, dieselbe Person ist, die 3 Plätze links neben dem Gastgeber sitzt, wie viele Personen sitzen dann an diesem Tisch?

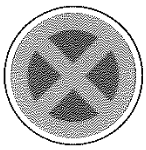
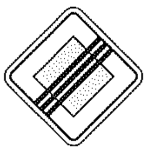
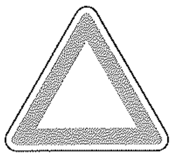
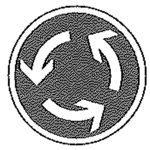
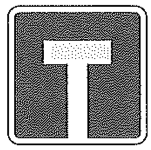
Klassenstufen 7 und 8

1. Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 3,17 und 20,16 ?

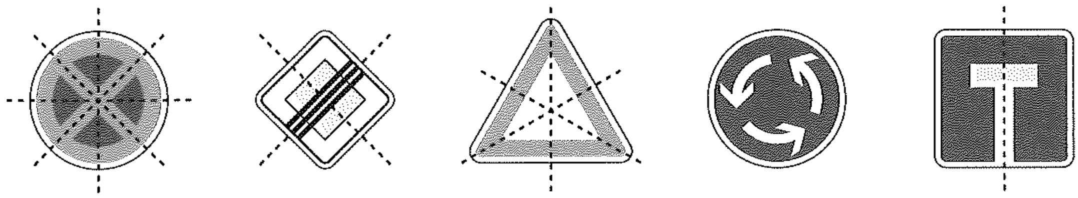
(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 19

Lösung: Zwischen 3,17 und 20,16 liegen die natürlichen Zahlen von 4 bis 20. Das sind 17 Zahlen.

2. Welches der folgenden Verkehrszeichen hat die meisten Symmetrieachsen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Schilder haben der Reihe nach vier, zwei, drei, keine bzw. eine Symmetrieachse:



Die meisten Symmetrieachsen hat das Verkehrszeichen (**A**).

3. „Hier ist es 26°C wärmer als bei euch daheim in Köln", sagt Lolas Tante, die aus Australien anruft. Lola will berechnen, wie warm es dort ist. Doch statt 26°C zur Temperatur in Köln zu addieren, subtrahiert sie 26°C und erhält -14°C. Welches ist die richtige Temperatur bei Lolas Tante?

(**A**) 28°C (**B**) 32°C (**C**) 36°C (**D**) 38°C (**E**) 42°C

Lösung: Da Lola fälschlicherweise subtrahiert hat, statt zu addieren, ist die Temperatur in Köln $-14°\text{C} + 26°\text{C} = 12°\text{C}$ und die bei Lolas Tante in Australien somit $12°\text{C} + 26°\text{C} = 38°\text{C}$.

4. $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} =$

(**A**) $\frac{123}{1000}$ (**B**) $\frac{632}{1110}$ (**C**) $\frac{321}{1000}$ (**D**) $\frac{123}{1110}$ (**E**) $\frac{321}{1110}$

Lösung: Wir erweitern die Brüche auf den gemeinsamen Hauptnenner 1000 und addieren:

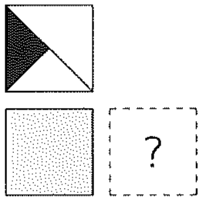
$$\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{100 + 20 + 3}{1000} = \frac{123}{1000}\,.$$

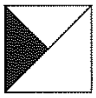
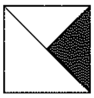
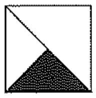
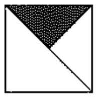
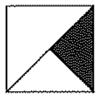
9. Mareike hat eine 1 m lange und eine 2 m lange Leiste gekauft. Sie zersägt die Leisten in mehrere Teile, die alle gleich lang sind. Welche der folgenden Zahlen kann *sicher nicht* die Anzahl dieser Teile sein?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Da alle Teile, die entstanden sind, gleich lang sind, sind aus der 2 m langen Leiste doppelt so viele Teile entstanden wie aus der 1 m langen Leiste. Mareike erhält also insgesamt dreimal so viele Teile wie sie aus der 1 m langen Leiste erhält. Die Gesamtzahl aller Teile ist somit stets durch 3 teilbar. Da 8 als einzige der angebotenen Zahlen nicht durch 3 teilbar ist, ist (**B**) die Lösung.

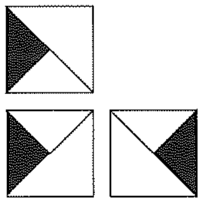
10. John hat die abgebildete Karte zuerst nach unten und dann nach rechts umgeklappt. Welches Bild zeigt die Karte, wie sie jetzt liegt?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir stellen uns vor, dass die Karte wie beschrieben umgeklappt wird. Rechts ist zu sehen, wie das Muster zu liegen kommt, wenn wir durch die Karte hindurchsehen könnten. Wie die Karte zum Schluss liegt, zeigt Bild (**B**).

Eine ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 18 in Klassenstufe 3/4.



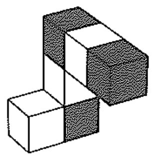
11. In der Schülerzeitung steht, dass 60 % unserer Lehrerinnen mit dem Fahrrad zur Schule radeln. Das sind 45 Lehrerinnen. 12 % kommen mit dem Auto. Wie viele Lehrerinnen fahren mit dem Auto?

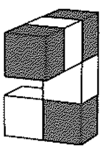
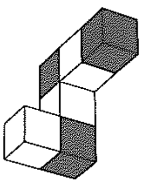
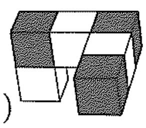
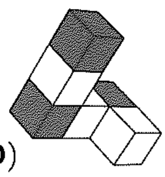
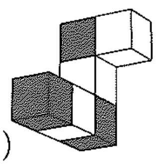
(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Aus den Angaben, dass 60 % der Lehrerinnen mit dem Fahrrad fahren und dies genau 45 Lehrerinnen sind, berechnen wir die Anzahl aller Lehrerinnen: $\frac{100}{60} \cdot 45 = 75$. Mit dem Auto kommen daher $\frac{12}{100} \cdot 75 = 9$.

Ebenso gelangen wir zur Lösung, wenn wir beachten, dass die Anzahl der Lehrinnen und der zugehörige Prozentsatz zueinander proportional sind. Daher fahren $\frac{12}{60} \cdot 45 = 9$ Lehrerinnen mit dem Auto.

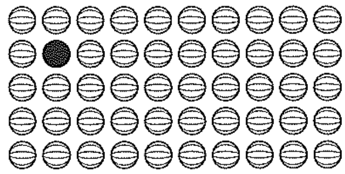
12. Finja hat den rechts abgebildeten Körper aus 6 kleinen Würfeln zusammengeklebt und betrachtet ihn aus verschiedenen Richtungen. Was sieht Finja dabei *ganz sicher nicht*?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir drehen den Körper in Gedanken und können uns die Ansichten (**A**), (**B**), (**D**) und (**E**) vorstellen. Ansicht (**C**) können wir nicht erhalten. Dieses Bild zeigt einen anderen Körper, und zwar den, der zu Finjas Körper gespiegelt ist.

16. Wie viele der abgebildeten hellen Kugeln müssen weggenommen werden, damit von den verbleibenden Kugeln 90 % helle Kugeln sind?



(**A**) 4 (**B**) 10 (**C**) 29 (**D**) 39 (**E**) 40

Lösung: Wenn 90 % der verbleibenden Kugeln hell sind, dann sind 10 % dunkel. Da es nur eine dunkle Kugel gibt, entsprechen 10 % der verbleibenden Kugeln einer einzigen Kugel und 100 % folglich $\frac{100}{10} \cdot 1 = 10$ Kugeln. Da es 5 Reihen zu je 10 Kugeln, also insgesamt $5 \cdot 10 = 50$ Kugeln sind, müssen somit 40 Kugeln weggenommen werden.

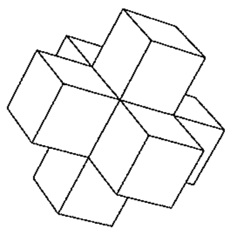
17. Welcher der folgenden Brüche liegt am nächsten bei $\frac{1}{2}$?

(**A**) $\frac{29}{57}$ (**B**) $\frac{25}{79}$ (**C**) $\frac{57}{92}$ (**D**) $\frac{27}{59}$ (**E**) $\frac{52}{97}$

Lösung: Statt die Abstände der fünf Brüche zu $\frac{1}{2}$ miteinander zu vergleichen, ist es einfacher, die Brüche mit 2 zu multiplizieren und die Abstände zu $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ zu betrachten. Das Doppelte der Brüche ist: (**A**) $\frac{58}{57}$, (**B**) $\frac{50}{79}$, (**C**) $\frac{114}{92}$, (**D**) $\frac{54}{59}$, (**E**) $\frac{104}{97}$. Wer ein gutes Gefühl für Zahlen hat, sieht, dass $\frac{58}{57}$ am nächsten bei 1 und somit der Bruch in (**A**) am nächsten bei $\frac{1}{2}$ liegt.

Das kann aber auch durch Rechnen und Abschätzen gefunden werden. Die Abstände zu 1 sind: (**A**) $\frac{1}{57}$, (**B**) $\frac{29}{79}$, (**C**) $\frac{22}{92}$, (**D**) $\frac{5}{59}$, (**E**) $\frac{7}{97}$. Für (**B**) gilt $\frac{29}{79} > \frac{29}{29 \cdot 57} = \frac{1}{57}$, weil 79 kleiner als $29 \cdot 57$ ist. Für (**C**) gilt $\frac{22}{92} > \frac{22}{22 \cdot 57} = \frac{1}{57}$, weil 92 kleiner als $22 \cdot 57$ ist. Und ebenso finden wir für (**D**) $\frac{5}{59} > \frac{1}{57}$ und für (**E**) $\frac{7}{97} > \frac{1}{57}$.

18. Sieben Spielwürfel sind wie abgebildet miteinander verklebt. Auf den Seiten der Spielwürfel stehen wie üblich die Augenzahlen von 1 bis 6. Die Seiten, die miteinander verklebt sind, haben jeweils dieselbe Augenzahl. Wie groß ist die Summe aller sichtbaren Augen auf der Oberfläche dieses Körpers?



(**A**) 84 (**B**) 90 (**C**) 95 (**D**) 105 (**E**) 126

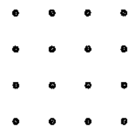
Lösung: Jede der Augenzahlen von 1 bis 6 kommt insgesamt 7-mal auf den Würfeloberflächen vor. Da miteinander verklebte Seitenflächen dieselbe Augenzahl tragen und jede Augenzahl von 1 bis 6 in genau einem Paar miteinander verklebter Seitenflächen vorkommt, ist jede der Augenzahlen von 1 bis 6 insgesamt $(7-2=)$ 5-mal auf der Oberfläche des Körpers zu sehen. Die Summe der sichtbaren Augen ist somit $5 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 5 \cdot 21 = 105$.

22. In Carinas Café gingen im letzten Jahr durchschnittlich 1,5 Tassen pro Monat kaputt. Es gibt keinen Monat, in dem mehr als 2 Tassen kaputtgingen. Mai und August waren die einzigen beiden Monate, in denen keine Tasse kaputtging. In wie vielen Monaten gingen genau 2 Tassen kaputt?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

Lösung: Wenn durchschnittlich 1,5 Tassen pro Monat kaputtgingen, gingen im gesamten Jahr $1{,}5 \cdot 12 = 18$ Tassen entzwei. Weil in genau 2 Monaten keine einzige Tasse kaputtging, gab es in jedem der übrigen 10 Monaten ganz sicher eine kaputte Tasse, zusammen also 10. Die restlichen $18 - 10 = 8$ sind dann in Monaten kaputtgegangen, in denen es mehr als einmal Scherben gab. Da es aber keinen Monat gab, in dem mehr als zwei Tassen kaputtgingen, sind diese 8 Tassen folglich in verschiedenen Monaten kaputtgegangen. In 8 Monaten sind demzufolge 2 Tassen kaputtgegangen.

Wer schafft es, einen Streckenzug zu zeichnen, der aus genau 6 Strecken besteht und durch alle 16 Punkte verläuft?



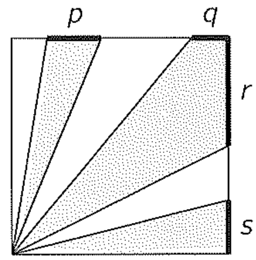
23. Beim Tischtennisturnier in der Schule hat Simone die Ergebnisse der vier Viertelfinalspiele, der beiden Halbfinalspiele und des Finales aufgeschrieben, allerdings ziemlich durcheinander: Georg besiegt Anton, Carl besiegt Bruno, Dennis besiegt Henry, Carl besiegt Georg, Eric besiegt Felix, Dennis besiegt Carl, Dennis besiegt Eric. Welche zwei der acht Spieler haben im Finale gespielt?

(A) Carl und Bruno **(B)** Dennis und Carl **(C)** Eric und Felix
(D) Dennis und Eric **(E)** Carl und Georg

Lösung: Alle Spieler, die im Viertelfinale verlieren, scheiden sofort aus und bestreiten damit jeweils nur ein einziges Spiel. Die Verlierer der Halbfinalspiele bestreiten insgesamt zwei Spiele. Die beiden Finalteilnehmer bestreiten als einzige Spieler insgesamt drei Spiele. Wie sich nun leicht nachzählen lässt, sind die einzigen Spieler, deren Namen dreimal in der Ergebnisliste auftauchen, Dennis und Carl.

Übrigens lässt sich der Turnierverlauf vollständig aus den Spielerergebnissen rekonstruieren.

24. Das abgebildete Quadrat hat einen Flächeninhalt von $36\,\text{cm}^2$. Die Summe der Flächeninhalte der grauen Flächen beträgt $27\,\text{cm}^2$ (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist die Summe $p + q + r + s$ der Längen der vier dick gezeichneten Strecken?



(A) 4 cm **(B)** 6 cm **(C)** 8 cm **(D)** 9 cm **(E)** 10 cm

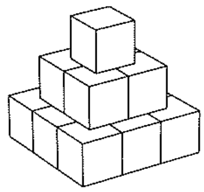
Lösung: Wenn wir das graue Viereck durch eine Diagonale des Quadrats in zwei Dreiecke zerlegen, gibt es vier graue Dreiecke, deren Grundseiten die Längen p, q, r bzw. s haben, und deren zugehörige Höhen alle dieselbe Länge besitzen, nämlich die der Quadratseite. Da der Flächeninhalt des Quadrats $36\,\text{cm}^2$ beträgt, ist die Quadratseite 6 cm lang. Die Summe der Flächeninhalte der grauen Flächen ist also $\frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot (p + q + r + s) = 27\,\text{cm}^2$, woraus $p + q + r + s = 9\,\text{cm}$ folgt.

28. An der Tafel stehen mehrere voneinander verschiedene natürliche Zahlen. Das Produkt der beiden kleinsten dieser Zahlen ist 16. Das Produkt der beiden größten dieser Zahlen ist 225. Wie groß ist die Summe aller Zahlen an der Tafel?

(**A**) 38 (**B**) 42 (**C**) 44 (**D**) 58 (**E**) 59

Lösung: Die Zahl 16 kann nur auf zwei Weisen als Produkt zweier verschiedener natürlicher Zahlen entstehen: $16 = 1 \cdot 16$ oder $16 = 2 \cdot 8$. Da 16 das Produkt der beiden kleinsten und 225 das Produkt der beiden größten Zahlen an der Tafel ist, sind die beiden größten Zahlen, die das Produkt 225 haben, ganz sicher beide größer als oder gleich 8. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit: $225 = 9 \cdot 25$. Damit sind die beiden kleinsten Zahlen an der Tafel 2 und 8 und die beiden größten 9 und 25. Da die Zahlen an der Tafel voneinander verschiedene natürliche Zahlen sind, können an der Tafel keine weiteren Zahlen stehen. Die Summe aller Zahlen an der Tafel ist $2 + 8 + 9 + 25 = 44$.

29. In der abgebildeten Würfelpyramide hat jeder der 14 Würfel eine andere Masse, die in Gramm angegeben ganzzahlig ist. Die Gesamtmasse der 9 Würfel in der unteren Schicht beträgt 50 Gramm. Jeder der anderen 5 Würfel hat dieselbe Masse wie die 4 direkt unter ihm liegenden Würfel zusammen. Welches ist die größtmögliche Masse, die der oberste Würfel haben kann?



(**A**) 80 Gramm (**B**) 98 Gramm (**C**) 104 Gramm (**D**) 110 Gramm (**E**) 118 Gramm

Lösung: In der unteren Schicht liegt jeder Eckwürfel unter genau einem Würfel der mittleren Schicht. Jeder Würfel der unteren Schicht, der in der Mitte einer Kante liegt, liegt unter genau zwei Würfeln der mittleren Schicht. Und der mittlere Würfel der unteren Schicht liegt unter allen vier Würfeln der mittleren Schicht. Da jeder Würfel der mittleren Schicht dieselbe Masse hat wie die vier direkt unter ihm liegenden Würfel zusammen und ebenso der oberste Würfel, steckt in der Masse des obersten Würfels also einmal die Masse jedes Eckwürfels der unteren Schicht, zweimal die Masse jedes Kantenmittenwürfels und viermal die Masse des mittleren Würfels. Wir bezeichnen die Summe der Massen dieser Würfeltypen in der unteren Schicht mit E, K bzw. M. Die Masse des obersten Würfels beträgt also $E + 2 \cdot K + 4 \cdot M$. Damit diese Masse größtmöglich ist, muss M größtmöglich sein, da M vierfach in die Summe eingeht. M ist genau dann größtmöglich, wenn E und K kleinstmöglich sind. Und weil K doppelt in die Summe eingeht, ist zunächst E am kleinsten zu wählen. Da die Maßzahlen der Massen der Würfel voneinander verschiedene ganze Zahlen sind, ist der kleinstmögliche Wert, den E annehmen kann, $E = 1+2+3+4 = 10$. Der kleinstmögliche Wert, den K annehmen kann, ist $K = 5+6+7+8 = 26$. In diesem Fall gilt $M = 50 - E - K = 50 - 10 - 26 = 14$. Die größtmögliche Masse des obersten Würfels ist folglich $E + 2 \cdot K + 4 \cdot M = 10 + 2 \cdot 26 + 4 \cdot 14 = 118$ Gramm.

Dass die Würfel in der unteren Schicht wirklich so verteilt werden können, dass alle 14 Würfel voneinander verschiedene Massen haben, lässt sich durch ein Beispiel zeigen. Also ist (**E**) die Lösung.

In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtige Rechnung entsteht. Gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.

Wer findet eine Lösung?

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathrm{E} & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{L} \\ + & & \mathrm{E} & \mathrm{B} & \mathrm{E} & \mathrm{R} \\ \hline & \mathrm{T} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{R} & \mathrm{E} \end{array}$$

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	A	E	C	D	D	B	D
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	C	E	E	B	B	C	A	B
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	D	A	A	C	E	E	D	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	D	C	E	A	C	B	B	C
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	E	C	B	D	A	C	A	E
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	D	A	D	B	D	B	E	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	D	A	E	A	C	C	B	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	C	B	B	E	E	A	D	B	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	E	B	D	D	B	A	C	E	A