2015

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru-Wettbewerb 2015

In diesem Jahr wurde der Känguru-Wettbewerb an über 330 Schulen in der Schweiz durchgeführt und es nahmen rund 26'000 Schülerinnen und Schüler daran teil. Die nochmals gewachsene Zahl an Teilnehmenden ermuntert uns, auch im kommenden Jahr dafür zu sorgen, dass sich alle daran interessierten Schulen aus der Deutschschweiz mit wenig Aufwand und online anmelden können. Und ebenso werden wir uns bemühen, dass das gesamte Aufgabenmaterial wieder rechtzeitig, also noch vor Mitte März 2016 mit der Post bei den Schulen eintrifft.

Es ging um personalisierte Regenschirme, die Wochentage im Sommercamp, einen eigensinnigen Pudel beim Gassi gehen und das Bemalen von Ostereiern. Prinzessin Doras Blumenstrauss, Karins Quietsche-Entchen und die Startnummern beim Marathonlauf bereiteten ebenso einiges Kopfzerbrechen. Immer steckte eine kleine Matheaufgabe dahinter, und mit geschicktem Rechnen, etwas Logik oder gutem Vorstellungsvermögen liess sich das Gesuchte finden. Solch kleine mit mathematischem Denken zu lösende Aufgaben begegnen uns überall im täglichen Leben. Die Fertigkeiten, die uns helfen, ihnen klug zu begegnen, werden im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt: Logisches Schliessen, Kombinieren und Strukturieren, aber auch Schätzen, ein gutes Gefühl für Grössenordnungen oder das Erkennen von Zusammenhängen und von Widersprüchen.

Die Mitglieder des deutschschweizerischen Känguru-Komitees hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall an ihren Schulen organisiert haben, dass sich die Teilnehmenden mit Freude den mathematischen Aufgaben zugewandt hatten und Lust auf weitere bekommen haben. Dazu finden sich in der Broschüre neben den Aufgaben der Klassenstufen 3/4, 5/6 und 7/8 samt Lösungshinweisen viele zusätzliche Knobeleien.

Beim Känguru-Wettbewerb sind in den Klassenstufen 3 bis 6 jeweils 24 Aufgaben zu lösen, ab Klassenstufe 7/8 sind es 30. Für das erste Drittel der 24 bzw. 30 Aufgaben sind jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte zu erreichen. Bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe werden 0.75 Punkte, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe 1 Punkt und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe 1.25 Punkte abgezogen. Wird eine Aufgabe nicht bearbeitet, gibt es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer erhält 24 bzw. 30 Punkte als Startpunktzahl. So ist 0 die niedrigste mögliche Gesamtpunktzahl, die erreichbare Höchstpunktzahl beträgt 120 bzw. 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise haben M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von K. Battaglia, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, F. Meier, Dr. A. Noack, Hj. Stocker und Dr. D. Vigerske erarbeitet. Ein Teil der zusätzlichen Knobeleien stammt aus der Feder von Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 3 und 4

1. Was ist das Ergebnis der Rechenaufgabe mit den Ziffern der Jahreszahl?

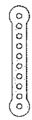
$$2 \xrightarrow{-0} \bigcirc \xrightarrow{+1} \bigcirc \xrightarrow{\cdot 5} ?$$

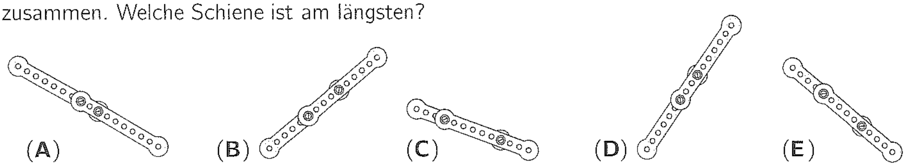
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 15

Lösung: Wir tragen die Zwischenergebnisse in die kleinen Ellipsen ein und erhalten:

$$2 \xrightarrow{-0} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{\cdot 5} 15$$

2. Hanna hat 10 gleiche Leisten mit je 10 Löchern. Sie schraubt immer 2 Leisten zu einer Schiene zusammen. Welche Schiene ist am längsten?





Lösung: Da sich bei Schiene (**A**) nur 3 der 10 Löcher überlappen, weniger als bei den anderen Schienen, ist Schiene (**A**) die längste.

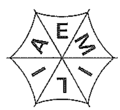
3. Oma Anita strickt jedem ihrer 3 Enkelsöhne ein Paar grüne Socken und jeder ihrer 4 Enkeltöchter ein Paar gelbe Socken. Wie viele Socken strickt sie insgesamt?

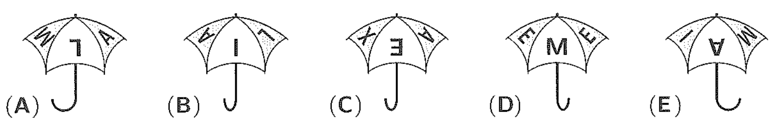
(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 17 (**E**) 18

Lösung: Oma Anita hat $3 \cdot 2 = 6$ grüne Socken und $4 \cdot 2 = 8$ gelbe Socken gestrickt. Das sind insgesamt $6 + 8 = 14$ Socken.

Die umgekehrte Frage nach der Anzahl der Enkel ist in Aufgabe 3 in Klassenstufe 7/8 gestellt.

4. Auf meinem Regenschirm steht obendrauf EMILIA.
Welches Bild zeigt meinen Regenschirm?





Lösung: Nur auf dem Regenschirm (**B**) kann obendrauf EMILIA stehen. Bei allen anderen stimmt irgendetwas nicht. Zum Beispiel steht bei Schirm (**A**) das A falsch herum. Bei Schirm (**C**) hat sich ein X dazugeschummelt und bei Schirm (**D**) ein zweites E. Bei Schirm (**E**) sind fälschlicherweise A und M benachbart.

5. Zur Fütterung im Tierpark stehen die 7 Pinguine im Kreis um Tierpfleger Ede. Ede verteilt im Uhrzeigersinn 25 Fische, jeweils einen, bis alle Fische verteilt sind. Wie viele Pinguine haben mehr als 3 Fische bekommen?

(**A**) keiner (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) vier (**E**) sechs

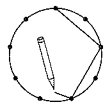
Lösung: Nachdem jeder 7 Pinguine 3 Fische bekommen hat, sind noch $25 - 7 \cdot 3 = 4$ Fische im Eimer. Also erhalten 4 Pinguine mehr als 3 Fische.

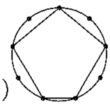
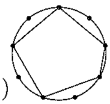
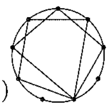
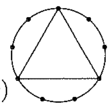
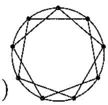
6. Durch welche Zahlen müssen das Dreieck und das Quadrat ersetzt werden, damit $\blacktriangle + 4 = 7$ und $\blacksquare + \blacktriangle = 9$ gilt?

(**A**) 3 und 1 (**B**) 1 und 8 (**C**) 3 und 6 (**D**) 3 und 7 (**E**) 2 und 7

Lösung: Aus der ersten Gleichung folgt, dass das Dreieck durch die Differenz aus 7 und 4 ersetzt werden muss, also durch 3. Aus der zweiten Gleichung folgt dann, dass das Quadrat durch die Differenz aus 9 und 3 ersetzt werden muss, also durch 6. Die gesuchten Zahlen sind 3 und 6.

7. Mario hat 9 Punkte auf einem Kreis markiert. Er verbindet fortlaufend jeden 2. Punkt (siehe Bild rechts), bis er wieder am Startpunkt ankommt. Wie sieht Marios Zeichnung aus?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Mario hat die Zeichnung bei (**E**) angefertigt. Bei den vier anderen Zeichnungen ist in keinem Fall fortlaufend jeder 2. Punkt verbunden worden. Bei (**A**) und bei (**B**) gibt es Verbindungen von unmittelbar aufeinander folgenden Punkten und bei (**C**) und (**D**) gibt es Verbindungen zum 3. Punkt, statt zum 2. Punkt.

8. Tabea multipliziert zwei einstellige Zahlen. Das Ergebnis ist 15. Wie groß ist die Summe der beiden einstelligen Zahlen?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Die Zahl 15 lässt sich nur auf zwei Weisen als Produkt von zwei Zahlen schreiben: $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$. Nur bei der zweiten Zerlegung sind beide Faktoren einstellig. Die gesuchte Summe ist $3 + 5 = 8$.

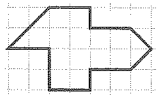
Dasselbe Problem, allerdings mit dem Produkt 35, ist in Aufgabe 4 in Klassenstufe 5/6 gestellt.

9. Als Ben zu Luis in die Werkstatt kommt, hat Luis 2 Schrauben und 7 Muttern in der Hand. Er gibt Ben 2 der Muttern. Ben reicht Luis einige Schrauben. Jetzt hat Luis genauso viele Schrauben wie Muttern in der Hand. Wie viele Schrauben hat Luis von Ben bekommen?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

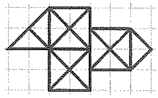
Lösung: Nachdem Ben von Luis 2 Muttern erhalten hat, besitzt Luis noch $7 - 2 = 5$ Muttern. Nachdem Luis von Ben Schrauben bekommen hat, besitzt Luis davon genauso viele wie er jetzt Muttern hat, also 5. Folgich hat ihm Ben $5 - 2 = 3$ Schrauben gegeben.

10. Gundula zerschneidet die dick umrandete Figur rechts in kleine Dreiecke  . Wie viele kleine Dreiecke erhält sie?



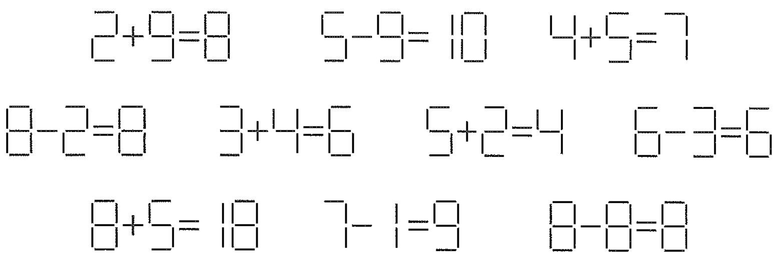
(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 15 **(E)** 16

Lösung: Die Zeichnung zeigt eine mögliche Zerlegung. Wir zählen die kleinen Dreiecke, es sind 15.



In jeder der Streichholz-Gleichungen ist ein Hölzchen an eine andere Stelle zu legen, sodass aus den falschen Gleichungen richtige Gleichungen werden.

Wer sehen die richtigen Gleichungen aus?



11. Maya vertauscht in der Zahl 512 zwei Ziffern, sodass sie eine möglichst kleine Zahl erhält. Frieder vertauscht in derselben Zahl 512 zwei Ziffern, sodass er eine möglichst große Zahl erhält. Wie groß ist die Differenz aus Frieders und Mayas Zahl?

(A) 369 **(B)** 387 **(C)** 360 **(D)** 306 **(E)** 396

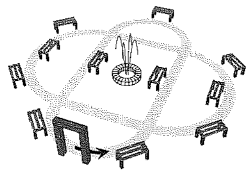
Lösung: Da Maya nur 2 Ziffern vertauscht, muss sie die 1 und die 5 vertauschen. Mayas Zahl ist 152. Frieder erhält durch den Tausch der beiden Ziffern 1 und 2 sogar die größtmögliche Zahl aus den Ziffern 5, 1 und 2, nämlich 521. Die gesuchte Differenz ist $521 - 152 = 369$.

12. Im Sommercamp überlegten fünf Kinder, welcher Wochentag ist. Roman sagte: Gestern war Mittwoch. Emil sagte: Morgen ist Freitag. Ida sagte: Vorgestern war Dienstag. Bodo sagte: Übermorgen ist Sonntag. Anja sagte: Heute ist Donnerstag. Genau vier der Kinder wussten den richtigen Tag. Wer hat sich geirrt?

(A) Roman **(B)** Emil **(C)** Ida **(D)** Bodo **(E)** Anja

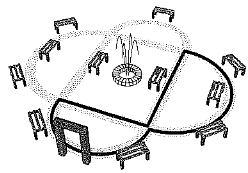
Lösung: Roman dachte, dass der Wochentag, an dem sich die fünf unterhielten, Donnerstag sei. Dasselbe dachten Emil, Ida und Anja. Bodo hingegen dachte, dass es Freitag sei. Da sich nur ein Kind geirrt hat, ist Bodo derjenige, der sich geirrt hat.

13. Pudel Suse zerrt Frau Kruse an der Leine durch den Park. Vom Tor aus jagt Suse in Pfeilrichtung los, an der ersten Kreuzung nach rechts, an der zweiten nach links, an der dritten nach rechts, an der vierten nach links. Wie viele Parkbänke stehen an Suses Weg durch den Park?



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Rechts ist der Weg von Frau Kruse und Pudel Suse gezeichnet. Wir zählen die Bänke, an denen die beiden vorbeiflitzen: Es sind 6 Bänke.



14. Mit einer 10-Cent-Münze, zwei 2-Cent-Münzen und einer 1-Cent-Münze in der Hand gehe ich zur Post. Für 7 Cent kaufe ich Briefmarken. Welche Münzen könnte ich nun insgesamt in der Hand haben?

(**A**) eine 10-Cent-Münze (**B**) zwei 2-Cent- und drei 1-Cent-Münzen
(**C**) zwei 5-Cent-Münzen (**D**) sechs 1-Cent-Münzen
(**E**) drei 2-Cent- und zwei 1-Cent-Münzen

Lösung: Vor dem Kauf hatte ich in meiner Hosentasche insgesamt $10 + 2 \cdot 2 + 1 = 15$ Cent. Nach dem Kauf der Briefmarken besitze ich noch 8 Cent. Nur bei (**E**) ist der Betrag der Münzen 8 Cent. Bei (**A**) und (**C**) liegt der Betrag darüber, bei (**B**) und (**D**) darunter.

15. Vom Gärtner hat mein Vater vier Primeln mitgebracht: eine gelbe, eine weiße, eine rote und eine blaue. Alle vier möchte ich nebeneinander in den Blumenkasten pflanzen. Die blaue und auch die rote Primel will ich direkt neben die gelbe pflanzen. Für die Reihenfolge der vier Primeln im Kasten gibt es mehrere Möglichkeiten. Wie viele?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

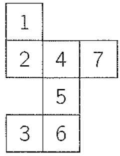
Lösung: Dass im Blumenkasten sowohl die blaue als auch die rote Primel neben der gelben Primel stehen soll, bedeutet, dass diese drei Primelfarben entweder in der Reihenfolge rot–gelb–blau oder blau–gelb–rot vorkommen. Jede dieser beiden Dreiergruppen kann entweder links oder rechts von der weißen Primel im Kasten stehen. Es gibt also $2 \cdot 2 = 4$ verschiedene Möglichkeiten. Ausführlich aufgeschrieben sieht das so aus:
weiß–rot–gelb–blau oder rot–gelb–blau–weiß oder weiß–blau–gelb–rot oder blau–gelb–rot–weiß

16. Beim Frühlingsfest sind heute 10 Kinder zum Sackhüpfen gestartet. Am Abend erzählt Mesut seiner Schwester, dass doppelt so viele Kinder vor ihm über die Ziellinie gehüpft sind wie hinter ihm ins Ziel kamen. Welchen Platz belegte Mesut?

(**A**) den 8. (**B**) den 7. (**C**) den 6. (**D**) den 5. (**E**) den 4.

Lösung: Außer Mesut waren 9 Kinder beim Sackhüpfen dabei. Vor Mesut erreichten doppelt so viele das Ziel wie hinter ihm. Wir stellen uns vor, dass die 9 Kinder in 3 gleich große Gruppen aufgeteilt werden. Zwei der Gruppen sind vor Mesut ins Ziel gekommen, eine hinter ihm. Wegen $9 : 3 = 3$ sind hinter Mesut 3 Kinder ins Ziel gekommen und vor ihm 6. Mesut belegte den 7. Platz.

17. Tilda will einen Würfel aus Papier falten. Beim Aufzeichnen des Netzes hat sie sich geirrt und 7 Quadrate gezeichnet anstatt 6 (siehe Bild). Welches Quadrat ist überflüssig und kann weggeschnitten werden?

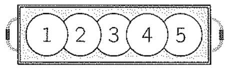


(**A**) $\boxed{1}$ (**B**) $\boxed{2}$ (**C**) $\boxed{3}$ (**D**) $\boxed{6}$ (**E**) $\boxed{7}$

Lösung: Beim Zusammenfalten der gezeichneten Figur sind Quadrat 2 und Quadrat 3 beide auf derselben Würfelseite. Eines dieser Quadrate ist überflüssig. Quadrat 2 kann nicht entfernt werden, da das Netz sonst auseinanderfallen würde. Quadrat 3 kann weggeschnitten werden.

Eine ähnliche Aufgabe mit einer anderen Figur ist Aufgabe 20 in Klassenstufe 5/6.

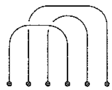
18. Tante Luise hat 5 kleine Pfannkuchen gebraten und sie zum Servieren auf eine Platte gelegt. In welcher Reihenfolge hat sie die Pfannkuchen *ganz gewiss nicht* hingelegt?

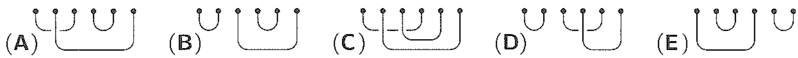


(**A**) 3, 2, 5, 4, 1 (**B**) 5, 3, 4, 2, 1 (**C**) 3, 2, 1, 5, 4 (**D**) 5, 3, 2, 4, 1 (**E**) 3, 5, 1, 2, 4

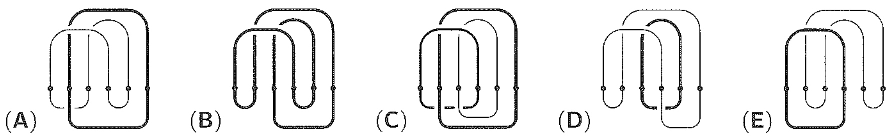
Lösung: Damit die Anordnung der kleinen Pfannkuchen so ist wie auf Tante Luises Servierplatte, darf Pfannkuchen 1 nicht vor Pfannkuchen 2 abgelegt worden sein. Bei der Reihenfolge (**E**) wird aber Pfannkuchen 1 vor Pfannkuchen 2 abgelegt. So geht es gewiss nicht. Alle anderen Abfolgen für das Ablegen der Pfannkuchen sind möglich.

19. Auf dem Tisch liegen 3 Fäden wie im Bild rechts. 3 weitere Fäden sollen so mit diesen verknotet werden, dass ein geschlossener Faden aus allen 6 Fäden entsteht. Mit welcher der fünf Anordnungen der 3 zusätzlichen Fäden funktioniert das?





Lösung: In den Zeichnungen ist dargestellt, was beim Zusammenknoten in den einzelnen Fällen geschieht. In den Fällen (**A**), (**C**), (**D**) und (**E**) entsteht nicht nur ein einziger geschlossener Faden, sondern zwei oder drei. Nur im Fall (**B**) haben wir einen geschlossenen Faden aus allen 6 Fäden.

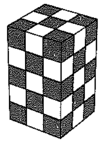


Das Rechteck ist entlang der Linien so in acht deckungsgleiche Teile zu zerlegen, dass die Summe der Zahlen in jedem dieser Teile gleich ist.

Wer findet zwei verschiedene Zerlegungen?

4	2	6	9	8	1	4	8
2	5	4	5	1	2	7	2
9	8	3	3	4	7	8	8
4	2	6	9	6	7	2	7
5	7	5	4	5	6	5	3
6	1	8	3	1	8	3	7

20. Der abgebildete Quader besteht aus 45 gleich großen schwarzen und weißen Würfeln. Nirgendwo liegen gleichgefärbte Seitenflächen aneinander. Wie viele weiße Würfel sind in diesem Quader?



(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

Lösung: Wir stellen uns den Quader von oben nach unten in 5 Scheiben zerlegt vor, jede Scheibe so dick wie ein kleiner Würfel. Die 1., die 3. und die 5. Scheibe sehen völlig gleich aus und bestehen jeweils aus 4 weißen und 5 schwarzen Würfeln. Bei der 2. und der 4. Scheibe sind schwarz und weiß im Vergleich zu den anderen Scheiben vertauscht, es sind also 4 schwarze und 5 weiße Würfel. Insgesamt sind im Würfel $3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 22$ weiße Würfel.

21. Im Sommercamp haben Anja und Bodo fast ihr gesamtes Taschengeld für Eis ausgegeben. Pro Tag hatte jeder entweder 2 oder 3 Kugeln. Naschkatze Anja hat insgesamt 25 Kugeln gegessen, Bodo nur 19 Kugeln. Wie viele Tage waren sie im Camp?

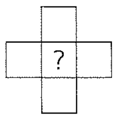
(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Da Bodo insgesamt weniger Kugeln als Anja gegessen hat, hat er häufiger als Anja nur 2 Kugeln gegessen. Bodo hat eine ungerade Zahl von Kugeln gegessen, also an mindestens einem Tag 3 Kugeln. Hätte er an den anderen Tagen stets 2 Kugeln gegessen, also an $(19 - 3) : 2 = 8$ Tagen, so wäre er insgesamt $8 + 1 = 9$ Tage im Camp gewesen. Das ist die größte Anzahl von Tagen, die Bodo im Camp gewesen sein kann.

Da Anja insgesamt mehr Kugeln als Bodo gegessen hat, hat sie häufiger als Bodo 3 Kugeln gegessen. Anjas Kugelzahl ist nicht durch 3 teilbar, sie hat an mindestens 2 Tagen nur 2 Kugeln gegessen. Hätte sie an den anderen Tagen stets 3 Kugeln gegessen, also an $(25 - 2 \cdot 2) : 3 = 7$ Tagen, so wäre sie insgesamt $7 + 2 = 9$ Tage im Camp gewesen. Das ist die kleinste Anzahl von Tagen, die Anja im Camp gewesen sein kann.

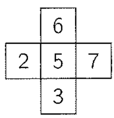
Da die größte Anzahl von Tagen, die Bodo im Camp war, mit der kleinsten Anzahl von Tagen, die Anja im Camp war, übereinstimmt, muss das Camp 9 Tage gedauert haben.

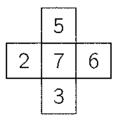
22. In die Felder des Kreuzes sind die Zahlen 2, 3, 5, 6 und 7 einzutragen. Dabei soll die Summe der drei nebeneinander stehenden Zahlen gleich der Summe der drei übereinander stehenden Zahlen sein. Welche Zahl kann dann im mittleren Kästchen mit dem Fragezeichen stehen?



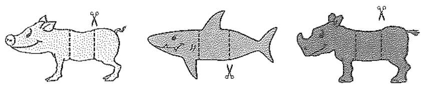
(**A**) nur die 3 (**B**) nur die 5 (**C**) nur die 7
(**D**) nur die 5 oder die 7 (**E**) nur die 3, die 5 oder die 7

Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass von den fünf Zahlen zwei gerade und drei ungerade sind. Würde eine gerade Zahl in der Mitte stehen, so wäre eine der beiden zu bildenden Summen eine gerade, die andere eine ungerade Zahl, Gleichheit also ausgeschlossen. Damit kommen nur 3, 5 und 7 für das Mittelfeld in Frage. Dass es die 3 nicht sein kann, überlegen wir uns, indem wir die möglichen Summen bilden. Mit 5 und 7 in der Mitte geht es.



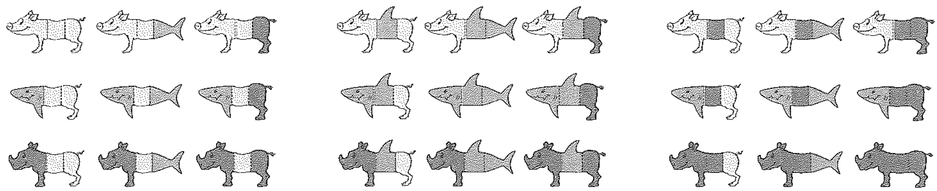


23. Eric hat ein Schwein, einen Hai und ein Nashorn gemalt und zerschnitten. Kopf, Bauch und Hinterteil kann er beliebig zusammenfügen. Eric kann außer Schwein, Hai und Nashorn auch viele Phantasietiere legen. Wie viele verschiedene Tiere – tatsächliche und phantastische – sind möglich?



(**A**) 9 (**B**) 15 (**C**) 24 (**D**) 27 (**E**) 30

Lösung: Zuerst wählen wir den Kopf vom Schwein. Als Bauch fügen wir zuerst einmal den vom Schwein hinzu. Dann gibt es für das Hinterteil 3 Möglichkeiten. Ändern wir jetzt den Bauch, so können wir in jedem der insgesamt 3 Fälle – Schwein, Hai und Nashorn – die Hinterteile dreifach variieren. Bei festem Kopf ergibt das also $3 \cdot 3$ Möglichkeiten. Da es auch für den Kopf 3 Möglichkeiten gibt, erhalten wir insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ verschiedene Tiere. Diese können wir auch im Einzelnen zusammenstellen und auszählen:



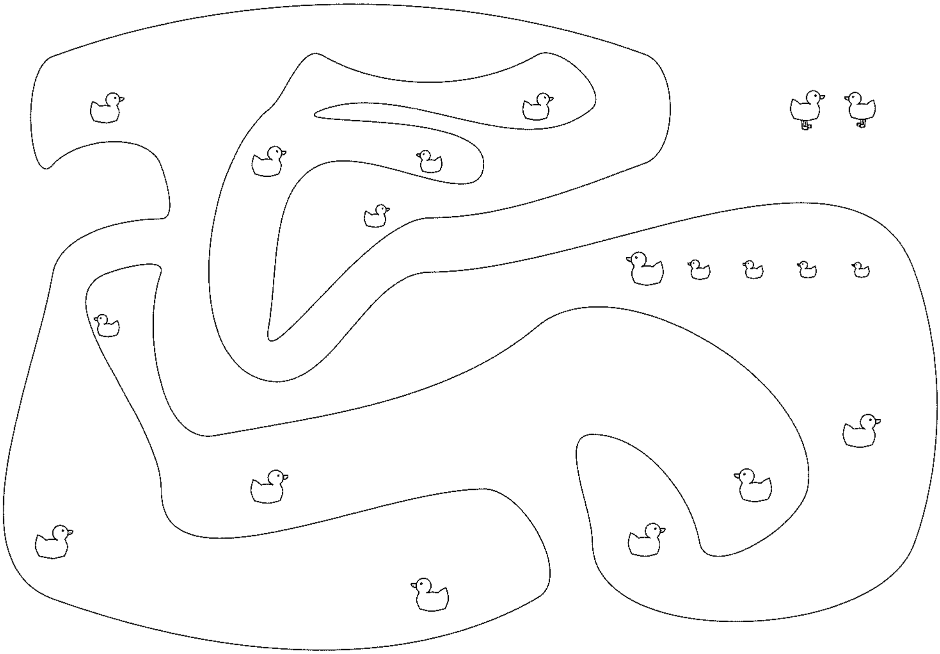
24. Alma, Bela, Coco, David und Elisa haben am Wochenende für Ostern Eier bemalt. Am Samstag waren sie besonders fleißig: Alma hat 24 Eier bemalt, Bela 25, Coco 26, David 27 und Elisa 28. Eines der Kinder hat am Samstag doppelt so viele Eier bemalt wie am Sonntag, eines dreimal, eines viermal, eines fünfmal und eines sechsmal so viele. Wer war am Sonntag am fleißigsten und hat die meisten Eier bemalt?

(**A**) Alma (**B**) Bela (**C**) Coco (**D**) David (**E**) Elisa

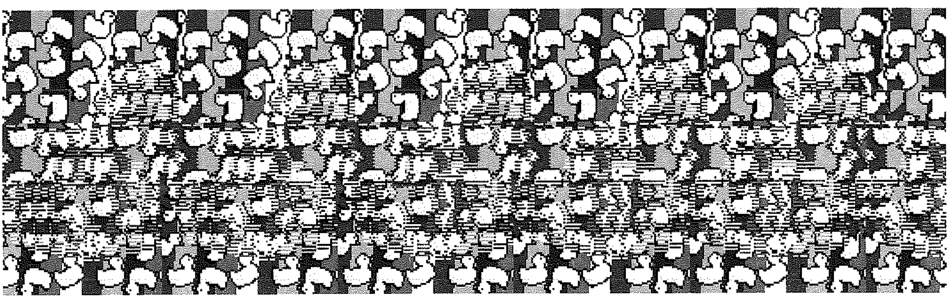
Lösung: Das Kind, das am Samstag fünfmal so viele Eier bemalt hat wie am Sonntag, kann nur Bela sein, denn er hat am Samstag 25 Eier bemalt, seine Zahl ist als einzige durch 5 teilbar. Bela hat am Sonntag $25 : 5 = 5$ Eier bemalt. Das Kind, das am Samstag sechsmal so viele Eier wie am Sonntag bemalt hat, kann mit der analogen Begründung nur Alma gewesen sein, denn nur 24 ist durch 6 teilbar. Alma hat am Sonntag $24 : 6 = 4$ Eier bemalt. Von den verbleibenden Zahlen ist nur 28 durch 4 teilbar. Folglich hat Elisa am Sonntag $28 : 4 = 7$ Eier bemalt. Von den verbleibenden Zahlen ist nur 27 durch 3 teilbar. Also muss es David sein, der am Samstag dreimal so viele Eier bemalt hat wie am Sonntag. David hat am Sonntag $27 : 3 = 9$ Eier bemalt. Schließlich hat Coco am Samstag doppelt so viele Eier wie am Sonntag bemalt, nämlich 26. Am Sonntag war sie aber besonders fleißig und hat $26 : 2 = 13$ Eier bemalt. Das ist die größte Sonntagseierzahl.

Alle meine Entchen

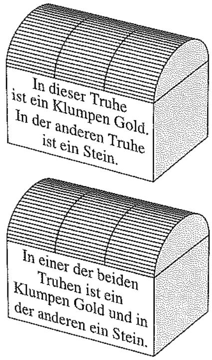
Einige Entchen schwimmen auf dem Krummen See, andere haben es sich am Ufer bequem gemacht. Wie viele Entchen schwimmen auf dem See?



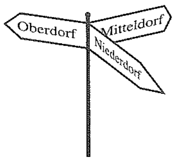
Fixiere mit deinen Augen einen Punkt hinter dem Bild, bis ein dreidimensionales Bild entsteht. Wer erkennt das versteckte Bild im Bild?



Schilderschummeleien

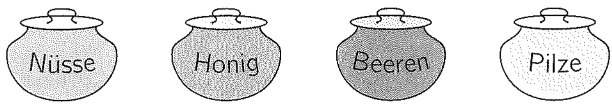


Unter der Wurzel eines alten Baums entdeckte Kobold Knarz zwei kleine, aber recht schwere Truhen. Er fand jedoch nur einen Schlüssel, an dem ein Zettel mit dem Hinweis hing: „Ich passe in das Schloss beider Truhen. Doch wähle gut! Sobald eine Truhe geöffnet ist, zerfalle ich zu Staub, und die andere Truhe bleibt für immer verschlossen."
„Was nun?", rätselte Knarz. Er war unentschlossen, wusste er doch rein gar nichts über den Inhalt der Truhen. Da kam eine Elfe geflogen und flüsterte ihm im Vorbeihuschen ins Ohr: „Auf einer Truhe steht die Wahrheit, auf der anderen steht eine Lüge." Knarz dachte nach und öffnete schließlich eine der beiden Truhen. Welche?



Familie Müller will von Oberdorf nach Niederdorf wandern. Den Weg kennt keiner genau, aber er ist gut beschildert. Unterwegs treffen sie den Förster, der sie auf Folgendes hinweist: „Bald trefft ihr auf eine Weggabelung mit drei Richtungsschildern. Eines weist den Weg nach Oberdorf, eines den Weg nach Mitteldorf und eines den Weg nach Niederdorf. Aber Vorsicht: zwei der Schilder sind vertauscht."
An der Weggabelung angekommen, überlegen die Müllers kurz und folgen dann besonnen dem Schild nach Mitteldorf. Wie geplant erreichten sie wenig später Niederdorf.
Welche beiden Schilder waren vertauscht? Woher wussten die Müllers, welchem Schild zu folgen ist?

Die Bärenmutter hat in der Küche vier Gefäße mit Leckereien. In einem ist Honig, in einem sind Nüsse, in einem Beeren und in einem Pilze. Um ihre naschhaften Bärenkinder zu verwirren, hat die Bärenmutter die Gefäße jedoch so beschriftet, dass für kein Gefäß Inhalt und Beschriftung übereinstimmen.

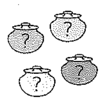


Willi, der neugierigste Bärensohn, hat gut beobachtet und herausgefunden:

1. Der Honig ist ganz sicher nicht im Gefäß, auf dem „Pilze" steht.
2. Das Gefäß, in dem die Nüsse sind, ist entweder mit „Honig" oder mit „Pilze" beschriftet.
3. Die Pilze sind nicht in dem Gefäß, auf dem „Nüsse" steht, und auch nicht in dem Gefäß, das mit „Beeren" beschriftet ist.

Willi will heimlich Honig naschen. Welches Gefäß muss er wählen?

Die Bärenmutter hätte die Gefäße auch ganz anders beschriften können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Gefäße so zu beschriften, dass für keines Inhalt und Beschriftung übereinstimmen?



Zahlenspielereien

Der litauische Mathematiker Genius Strazda hat in einem kleinen Buch, das den hübschen Titel „Wo liegt der Hund begraben?“ trägt, viele Aufgaben zusammengetragen, in denen es darum geht, Zahlen auf unterschiedliche Weise darzustellen. Dabei gibt es stets irgendein Extra, sei es, dass alle 10 Ziffern benutzt werden müssen, sei es, dass Symmetrien auftreten oder, dass eine Darstellung für ein wichtiges Datum gesucht ist. Es folgen Beispiele und Knobeleien mit Zahlen.

1 Der Tag hat 24 Stunden. Und die 24 lässt sich mit den Zahlen von 1 bis 10 überraschend schreiben: $((1\cdot 2)+(2\cdot 3)+(3\cdot 4)+(4\cdot 5)+(5\cdot 6)+(6\cdot 7)+(7\cdot 8)+(8\cdot 9)) : 10 = 24$

Aber es geht auch viel kürzer, zum Beispiel: $1+23=24$ oder $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

Wer findet noch andere Rechnungen mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ und dem Ergebnis 24?

2 Für welche 3 einstelligen Zahlen ist ihre Summe gleich ihrem Produkt?

3 Zwischen die Ziffern 1 2 3 4 5 6 7 8 9 sind zwei oder mehr der Rechenzeichen $+\ -\ \cdot\ :$ zu setzen, sodass als Ergebnis der Rechnung 666 entsteht. Es gibt mehrere Möglichkeiten, zum Beispiel $1+23-45+678+9=666$. Wer findet weitere Möglichkeiten?

4 Zwischen die Ziffern 1 2 3 4 5 6 sind zwei oder mehr der Rechenzeichen $+\ -\ \cdot\ :$ zu setzen, sodass als Ergebnis der Rechnung 13 entsteht.

5 Zwischen die Ziffern 1 2 3 4 5 6 7 sind zwei oder mehr der Rechenzeichen $+\ -\ \cdot\ :$ zu setzen, sodass als Ergebnis der Rechnung 667 entsteht.

6 Zwischen die Ziffern 1 2 3 4 sind Rechenzeichen wie $+\ -\ \cdot\ :$ und an geeigneter Stelle ein $=$ zu setzen, sodass eine richtige Gleichung entsteht.

7 Zwischen die Ziffern 5 6 7 8 sind Rechenzeichen wie $+\ -\ \cdot\ :$ und an geeigneter Stelle ein $=$ zu setzen, sodass eine richtige Gleichung entsteht.

8 Zwischen die Ziffern 3 4 5 6 7 8 9 sind Rechenzeichen wie $+\ -\ \cdot\ :\ ()$ und an geeigneter Stelle ein $=$ zu setzen, sodass eine richtige Gleichung entsteht.

9 Was ist mit dieser Gleichung los?
Die Gleichung $1\cdot 1=40$ ist falsch.
Aber drei Dreien an drei Stellen richtig angefügt, machen daraus die richtige Gleichung $13\cdot 31=403$.
Wie kann aus $1\cdot 1=120$ durch Anfügen ein und derselben Ziffer an jede der drei Zahlen eine richtige Gleichung entstehen?

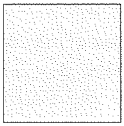
Welches der Rechenzeichen $+\ -\ \cdot\ :$ muss in das Kästchen gesetzt werden, damit gilt:

$$20\cdot 15-2\ \square\ 105=2015:5$$

Welche Zahl erhalte ich, wenn ich von der größten Zahl, die ich aus den Ziffern der Jahreszahl 2015 bilden kann, die kleinste Zahl, die sich aus diesen Ziffern bilden lässt, abziehe?

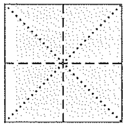
Origami-Oktaeder

Aus 6 quadratischen Blättern Papier lässt sich wie folgt ein Oktaeder basteln.

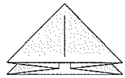


Wir nehmen ein quadratisches Blatt Papier zur Hand.

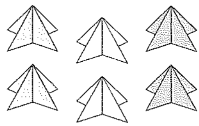
Tipp für die Verwendung von zweifarbigem Papier: Die oben liegende Seite ist am Ende außen zu sehen!



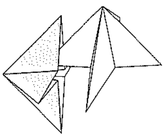
An den gestrichelten Linien wird nach vorn, an den gepunkteten nach hinten gefaltet und wieder auseinandergeklappt.



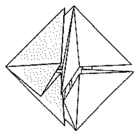
Die rechte und die linke Kante lassen sich nun leicht zwischen die beiden Dreiecke drücken. So entsteht ein Modul.



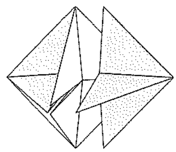
Insgesamt werden 6 solche Module gefaltet.



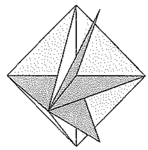
Nun werden die Module mit den Ecken ineinander gesteckt. Die linke Ecke des rechten Moduls wird in die obere Ecke des linken Moduls gesteckt.



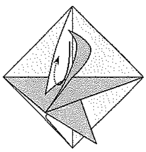
Die linke Ecke des unteren Moduls wird in die untere Ecke des linken Moduls gesteckt.



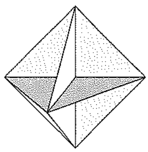
Die rechte Spitze des oberen und des unteren Moduls werden in das rechte Modul gesteckt.



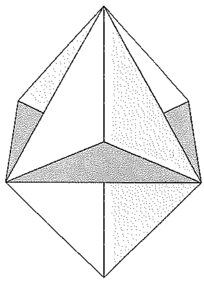
Das fünfte Modul wird auf die vordere Ecke des linken und des rechten Moduls gesteckt.



Nun werden die obere und untere Ecke des fünften Moduls in die vordere Ecke des oberen bzw. unteren Moduls hineingesteckt.

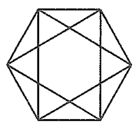


Die letzten beiden Schritte werden mit dem sechsten Modul auf der Rückseite wiederholt.



Fertig ist das Oktaeder!

Wie viele Dreiecke sind in der abgebildeten Figur zu finden?
Wer genau hinschaut und Phantasie hat, kann in der Figur einen dreidimensionalen Körper entdecken. Welchen?



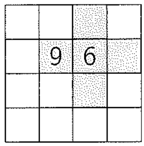
Magische Figuren

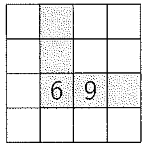
Wer gern knobelt und mathematische Aufgaben löst, ist vielleicht schon einmal mit magischen Quadraten in Berührung gekommen. Das wohl älteste soll in China auf dem Rücken einer Schildkröte gefunden worden sein, das rechts abgebildete 3×3-Quadrat.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

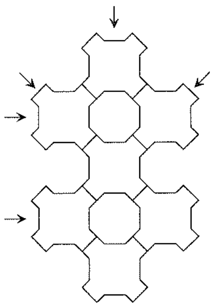
Bei einem magischen 3×3-Quadrat sind die Summen der Zahlen in 8 Richtungen gleich, den 3 waagerechten, den 3 senkrechten und den beiden diagonalen. Bei dem abgebildeten 3×3-Quadrat ist diese „magische Summe" jeweils 15. Es gibt auch größere magische Quadrate. Bei einem magischen 4×4-Quadrat müssen dann die Summen in 10 Richtungen übereinstimmen. Werden die Zahlen von 1 bis 16 eingetragen, so ist die magische Summe 34.

Wer kann die 4×4-Quadrate rechts mit den Zahlen von 1 bis 16 ausfüllen, sodass magische Quadrate entstehen, bei denen außerdem in dem grauen Kreuz bzw. dem grauen „L" nur Zahlen stehen, die durch 3 teilbar sind?

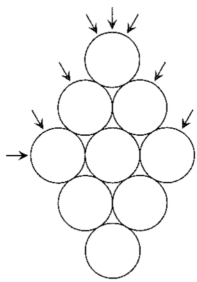




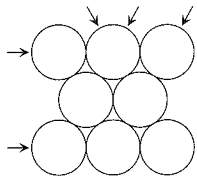
Es gibt nicht nur magische Quadrate. Auch andere Figuren werden zu magischen Figuren, wenn vorgegebene Zahlen so eingetragen werden können, dass die Summen in vorgegebenen Richtungen übereinstimmen. Wer findet die richtige Belegung für die folgenden Figuren?



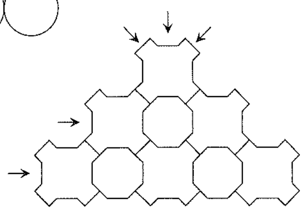
Zahlen von 1 bis 9
magische Summe: 17
5 Richtungen



Zahlen von 1 bis 9
magische Summe: 15
8 Richtungen

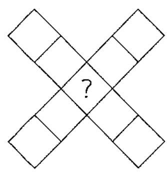


Zahlen von 1 bis 8
magische Summe: 13
5 Richtungen



Zahlen von 1 bis 9
magische Summe: 18
5 Richtungen

Die Zahlen von 1 bis 9 sollen so in die Felder des Kreuzes geschrieben werden, dass die beiden Summen in den jeweils fünf diagonalen Feldern gleich sind.
Welche Zahlen können in der Mitte des Kreuzes stehen?
Welche magischen Summen sind möglich?



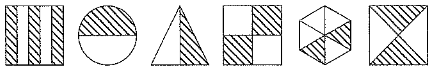
Klassenstufen 5 und 6

1. $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 =$

(**A**) 25 (**B**) 30 (**C**) 56 (**D**) 205 (**E**) 2015

Lösung: Es ist $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 4 + 0 + 1 + 25 = 30$.

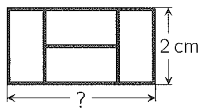
2. Bei wie vielen Figuren ist der gestreifte Teil der Fläche genauso groß wie der weiße Teil?



(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Beim ersten Quadrat in der Reihe ist mehr als die Hälfte gestreift, und beim Sechseck ist weniger als die Hälfte gestreift. Bei den anderen 4 Figuren ist der gestreifte Teil der Fläche genauso groß wie der weiße Teil.

3. Ein großes Rechteck ist aus vier gleichen Rechtecken zusammengesetzt. Wie lang ist die lange Seite des großen Rechtecks?



(**A**) 3 cm (**B**) 4 cm (**C**) 5 cm (**D**) 6 cm (**E**) 7 cm

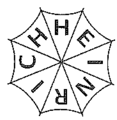
Lösung: Die kurzen Seiten der beiden in der Mitte liegenden Rechtecke sind zusammen genauso lang wie die lange Seite der beiden außen liegenden Rechtecke. Da die 4 Rechtecke gleich sind, folgt, dass die gesuchte lange Seite des großen Rechtecks 4 cm lang ist.

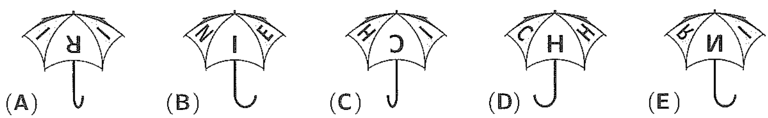
4. Ich multipliziere zwei einstellige Zahlen und erhalte das Ergebnis 35. Wie groß ist die Summe der beiden einstelligen Zahlen?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Es gibt genau zwei Möglichkeiten, 35 in 2 Faktoren zu zerlegen: $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$. Nur bei der zweiten Zerlegung sind beide Faktoren einstellig. Die gesuchte Summe ist $5 + 7 = 12$.

5. Zum Geburtstag hat Heinrich einen neuen Regenschirm bekommen. Obendrauf steht sein Name. Welches Bild zeigt Heinrichs Regenschirm?





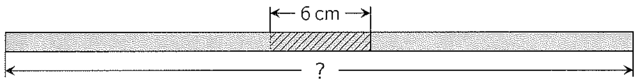
Lösung: Nur das Bild bei (**C**) kann Heinrichs Regenschirm zeigen. Im Bild (**A**) stimmt die Buchstabenfolge nicht. Im Bild (**B**) ist das E falsch herum, im Bild (**D**) das C. Und im Bild (**E**) sind das R und das N falsch herum, genauer gesagt, gespiegelt.

6. Meine Großeltern haben 2 Sorten Hühner: 5 braune und 5 weiße. In den letzten 10 Tagen hat jedes braune Huhn täglich ein Ei gelegt, jedes weiße aber nur jeden zweiten Tag. Wie viele Eier haben die 10 Hühner in den 10 Tagen insgesamt gelegt?

(**A**) 75 (**B**) 72 (**C**) 70 (**D**) 65 (**E**) 60

Lösung: Jedes braune Huhn hat in den vergangenen 10 Tagen genau 10 Eier gelegt, die 5 braunen Hühner haben also alle zusammen 50 Eier gelegt. Jedes weiße Huhn hat in den 10 Tagen nur 5 Eier gelegt, die 5 weißen Hühner zusammen also 25 Eier. Und die gesamte Hühnerschar hat demzufolge 75 Eier gelegt.

7. Von einem Schreibblock hat Dunja zwei 21 cm lange Papierstreifen abgeschnitten. Sie legt die beiden Streifen auf einer Länge von 6 cm übereinander und verklebt sie dort zu einem langen Streifen.



Wie lang ist dieser Streifen?

(**A**) 30 cm (**B**) 32 cm (**C**) 33 cm (**D**) 34 cm (**E**) 36 cm

Lösung: Hätte Dunja die beiden Streifen hintereinander gelegt, so wäre der „Doppelstreifen" $2 \cdot 21\,\text{cm} = 42\,\text{cm}$ lang. Da ein Stück von 6 cm Länge doppelt liegt, ist der verklebte Streifen $42\,\text{cm} - 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$ lang.

8. Bei welcher Aufgabe bleibt beim Teilen ein Rest?

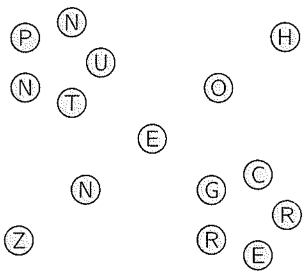
(**A**) 2011 : 1 (**B**) 2012 : 2 (**C**) 2013 : 3 (**D**) 2014 : 4 (**E**) 2015 : 5

Lösung: Wenn wir die 5 Divisionsaufgaben rechnen, stellen wir fest, dass bei Aufgabe (**D**) der Rest 2 bleibt, während die 4 anderen Divisionen ohne Rest aufgehen.

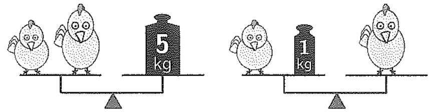
Wer Teilbarkeitsregeln kennt, muss fast gar nicht rechnen: Dass bei Division durch 1 kein Rest bleibt, ist klar. 2012 ist als gerade Zahl durch 2 teilbar. 2013 hat die Quersumme 6, ist also durch 3 teilbar. Die Zahl aus den beiden letzten Ziffern von 2014 ist 14, und da 14 nicht durch 4 teilbar ist, ist auch 2014 nicht durch 4 teilbar. 2015 schließlich endet auf 5 und ist somit durch 5 teilbar.

Die Buchstaben sind in der Reihenfolge des Wortes PROZENTRECHNUNG durch Linien miteinander zu verbinden. Dabei dürfen sich die Linien aber nirgendwo überkreuzen.

Wer findet eine Lösung?



9. Wie viel wiegt das kleinere der beiden Hühner?



(A) 1 kg **(B)** 2 kg **(C)** 3 kg
(D) 4 kg **(E)** 5 kg

Lösung: Da wir vom Gleichstand der rechten Waage wissen, dass das kleine Huhn zusammen mit einem 1-kg-Gewicht genauso viel wiegt wie das große Huhn, können wir uns das große Huhn auf der linken Waage durch das kleine Huhn zusammen mit dem 1-kg-Gewicht ersetzt denken. Dann würden 2 kleine Hühner zusammen mit einem 1-kg-Gewicht 5 kg wiegen, die beiden kleinen Hühner allein also $5\,\text{kg} - 1\,\text{kg} = 4\,\text{kg}$. Ein kleines Huhn wiegt demzufolge 2 kg.

10. Prinz Ali schenkt der lieblichen Prinzessin Dora einen Strauß mit Zweigen vom Zauberbusch. Jeder Zauberzweig hat entweder 2 goldene Blätter und eine funkelnde Blüte oder 5 goldene Blätter, jedoch keine Blüte. Beglückt zählt Prinzessin Dora insgesamt 32 Blätter und 6 Blüten. Wie viele Zauberzweige hat Ali Dora geschenkt?

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 15 **(E)** 16

Lösung: Da Prinzessin Dora 6 Blüten zählt, sind unter den Zweigen, die sie bekam, 6 mit je einer Blüte und 2 Blättern. Dann bleiben $32 - 2 \cdot 6 = 20$ Blätter an Zweigen mit je 5 Blättern. Es gibt folglich $20 : 5 = 4$ Zweige mit 5 Blättern. Insgesamt hat Prinz Ali ihr $6 + 4 = 10$ Zweige geschenkt.

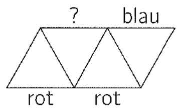
Ähnlich zu diesem Problem ist Aufgabe 16 in Klassenstufe 7/8.

11. Tag für Tag addiert Axel die vier Zahlen, die im Tagesdatum vorkommen. Zum Beispiel addiert er am 19. März, also dem 19.03., $1+9+0+3=13$, und trägt die 13 in seine am Jahresanfang begonnene Tabelle ein. Welches ist die größte Zahl, die am Jahresende in seiner Tabelle stehen wird?

(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 22

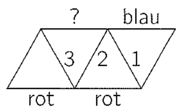
Lösung: Als Tage kommen 01 bis 31 vor. Unter diesen hat 29 die größte Ziffernsumme. Für die Monate stehen 01 bis 12 zur Verfügung, von denen 09 die größte Ziffernsumme hat. Die größte Zahl schreibt Axel am 29.09. in seine Tabelle: $2+9+0+9=20$.

12. Jede der 9 Strecken in der rechts gezeichneten Figur soll blau, rot oder grün sein. Jedes Dreieck soll dabei eine blaue, eine rote und eine grüne Seite haben. Drei Strecken sind bereits gefärbt. Welche Farbe muss die Strecke mit dem Fragezeichen bekommen?



(A) blau **(B)** rot **(C)** grün
(D) Alle Farben sind möglich. **(E)** Eine solche Färbung der Figur gibt es nicht.

Lösung: Im Bild rechts sind einige der Dreiecksseiten nummeriert. Seite 1 muss grün sein, denn sie gehört zu den beiden ganz rechts liegenden Dreiecken, in denen es bereits eine blaue bzw. eine rote Seite gibt. Wenn Seite 1 grün ist, muss Seite 2 blau sein. Seite 3 muss grün sein, denn sie gehört zu den beiden ganz links liegenden Dreiecken, in denen es bereits eine blaue bzw. eine rote Seite gibt. Nun folgt, dass die Strecke mit dem Fragezeichen rot sein muss. Dass die Färbung der Figur möglich ist, ist klar, da auch die beiden äußeren Seiten passend gefärbt werden können, die linke blau, die rechte rot.



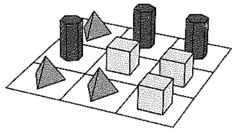
Ein ähnliches Problem mit einer anderen Figur ist als Aufgabe 13 in Klassenstufe 7/8 gestellt.

13. Henry legt aus 12 Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm ein Rechteck ohne Lücken. Dann addiert er die Längen der vier Seiten seines Rechtecks und erhält als Ergebnis eine der folgenden Längenangaben. Welche?

(**A**) 12 cm (**B**) 14 cm (**C**) 15 cm (**D**) 18 cm (**E**) 20 cm

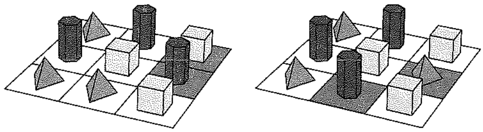
Lösung: Henry könnte die 12 kleinen Quadrate in eine Reihe legen. Das entsprechende Rechteck wäre 1 cm breit und 12 cm lang. Sein Umfang $2 \cdot 1\,\text{cm} + 2 \cdot 12\,\text{cm} = 26\,\text{cm}$ gehört allerdings nicht zu den vorgeschlagenen Längenangaben. Henry könnte die kleinen Quadrate in Zweierreihen ordnen. Das Rechteck wäre dann 2 cm breit und 6 cm lang, hätte also einen Umfang von $2 \cdot 2\,\text{cm} + 2 \cdot 6\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$, und auch diese Zahl ist nicht bei den vorgeschlagenen. Schließlich könnte Henry die kleinen Quadrate in Dreierreihen anordnen. Dann betrüge die Breite 3 cm, die Länge 4 cm. Der Umfang wäre nun $2 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 4\,\text{cm} = 14\,\text{cm}$, und das ist der Lösungsvorschlag (**B**).

14. Auf jedes der 9 Felder ihres Spielfeldes hat Eva eine Figur gestellt (siehe Bild). Sie tauscht solange jeweils zwei Figuren miteinander, bis keine gleichen Figuren mehr nebeneinander stehen, weder waagerecht noch senkrecht. Wie oft muss Eva mindestens tauschen?

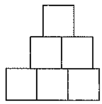


(**A**) einmal (**B**) zweimal (**C**) dreimal (**D**) viermal (**E**) fünfmal

Lösung: Auf Evas Spielbrett gibt es zu jeder Sorte von Figuren Paare, die auf benachbarten Feldern stehen. Da mit jedem Tausch höchstens zwei solche Paare getrennt werden können, muss mindestens zweimal getauscht werden. Und dass zweimaliges Tauschen ausreicht, zeigt die Abbildung.

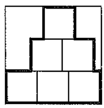


15. Lotte hat an der Tafel 6 quadratische Magnete wie im Bild zusammengeschoben. Jeder Magnet hat eine Seitenlänge von 2 cm. Mit Kreide zieht Lotte säuberlich den Rand der Figur nach. Wie lang ist dieser Rand?



(**A**) 20 cm (**B**) 21 cm (**C**) 23 cm (**D**) 24 cm (**E**) 28 cm

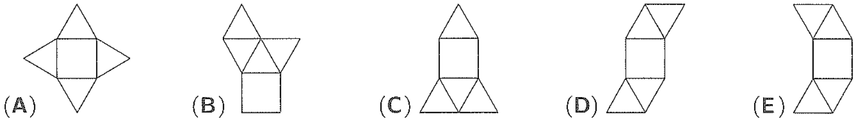
Lösung: Wir stellen uns vor, dass Lotte unten links mit dem Nachziehen des Randes beginnt und zuerst $3 \cdot 2\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$ von links nach rechts zeichnet. Da sie zum Schluss wieder links unten ankommt, zeichnet sie ebenso 6 cm von rechts nach links, allerdings mit Unterbrechungen. Da Lotte bei ihrem Nachziehen auch $3 \cdot 2\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$ oberhalb der untersten Linie zeichnet, muss sie also 6 cm nach oben und wieder zurück zeichnen, ebenfalls mit Unterbrechungen. Lotte zeichnet an keiner Stelle rückwärts und nur in waagerechter und senkrechter Richtung. Also ist die von ihr gezeichnete Linie genauso lang wie der Umfang des abgebildeten Quadrats, $4 \cdot 6\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$.

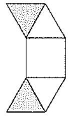


In jedem der folgenden Wörter sind zwei Buchstaben an geeigneter Stelle so einzufügen, dass jeweils ein mathematischer Begriff entsteht.

ADER EILE FANG GERA PISA ZIER

16. Ramses will fünf Pyramiden bauen. Für jede Pyramide will er ein anderes Netz zeichnen. Vier Netze sind ihm gelungen, eine Zeichnung ist jedoch kein Netz für eine Pyramide. Welche?





Lösung: Die Bilder (**A**) bis (**D**) zeigen Pyramidennetze. In Bild (**E**) hingegen überlappen sich beim Falten die beiden grau markierten Dreiecke, das ist kein Netz für eine Pyramide.

Die Jahreszahl 2015 soll als Summe von 4 natürlichen Zahlen geschrieben werden. Dabei soll der 2. Summand das Dreifache, der 3. Summand das Vierfache und der 4. Summand das Fünffache des 1. Summanden sein. Wer findet die Summanden?

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 2015$$

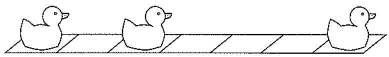
17. In der Aufgabe rechts sollen X, Y und Z durch drei verschiedene Ziffern ersetzt werden, sodass die Rechnung richtig ist. Dann ist X =

$$\begin{array}{rccc} & & & X \\ + & & & X \\ + & & Y & Y \\ \hline & Z & Z & Z \end{array}$$

(**A**) 6 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 3

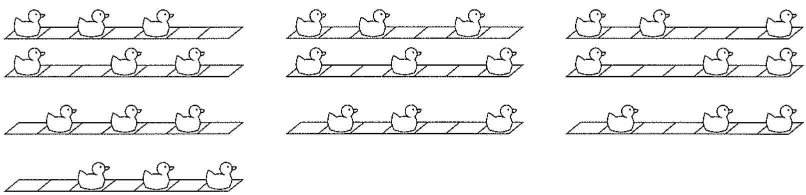
Lösung: Zuerst bemerken wir, dass für den Buchstaben Z nur die 1 stehen kann als Übertrag aus der Addition. Weil $X + X$ höchstens 18 sein kann, ist YY mindestens $111 - 18 = 93$, also gleich 99. Somit ist $X = (111 - 99) : 2 = 6$.

18. Karin sitzt in der Badewanne und spielt mit 3 Bade-Enten. Sie verteilt sie auf die 7 Fliesen am Badewannenrand. Dabei lässt sie wie im Beispiel zwischen je zwei Enten stets mindestens eine Fliese leer. Wie viele Möglichkeiten hat Karin, die 3 Enten auf diese Weise auf die 7 Fliesen zu verteilen?



(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 13

Lösung: Die Verteilung der Bade-Enten auf die 7 Fliesen lässt sich systematisch darstellen, es sind 10 Möglichkeiten:

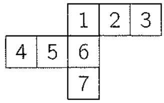


19. Raphael multipliziert die Zahl 100 entweder mit 2 oder mit 3. Zu dem Produkt, das er dabei erhält, addiert er entweder 1 oder 2. Die entstandene Summe teilt er entweder durch 3 oder durch 4. Raphael verrät uns, dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist. Welche?

(**A**) 50 (**B**) 51 (**C**) 67 (**D**) 77 (**E**) 101

Lösung: Nach der Multiplikation hat Raphael 200 oder 300 erhalten, nach der Addition dann 201, 202, 301 oder 302. Da keine dieser Zahlen durch 4 teilbar und nur 201 durch 3 teilbar ist, hat Raphael also zuerst mit 2 multipliziert, dann 1 addiert und dann durch 3 dividiert. Als Ergebnis hat er $201 : 3 = 67$ erhalten.

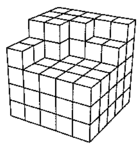
20. Fabian möchte einen Würfel aus Papier falten. Beim Aufzeichnen des Netzes hat er sich geirrt und 7 Quadrate gezeichnet anstatt 6. Welches Quadrat kann er wegschneiden, sodass ein Würfelnetz entsteht?



(**A**) nur 4 (**B**) nur 7 (**C**) nur 3 oder 4
(**D**) nur 3 oder 7 (**E**) nur 3, 4 oder 7

Lösung: Beim Zusammenfalten der gezeichneten Figur sind die Quadrate 3 und 7 beide auf der Würfelseite, die der Seite mit der 1 gegenüber liegt. Jedes der beiden Quadrate, jedoch kein anderes, kann weggeschnitten werden.
Eine ähnliche Aufgabe mit einer anderen Figur ist Aufgabe 17 in Klassenstufe 3/4.

Aus kleinen Würfeln wollte ich einen großen Würfel bauen.
Wie viele kleine Würfel fehlen?
Kann ich aus all den vorhandenen Würfeln drei Würfel bauen, die kleiner sind als der geplante Würfel?

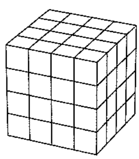


21. Auf dem Markt haben wir Fingerpuppen für ein Puppenspiel gekauft. Es sind 8 Jungspuppen, davon 3 mit roten und 5 mit gelben Locken, sowie 9 Mädchenpuppen, davon 7 mit roten und 2 mit gelben Zöpfen. Wie viele von den Puppen müsste ich – ohne hinzuschauen – aus der Tüte nehmen, um sicher zu sein, dass ich eine Jungspuppe und eine Mädchenpuppe mit gleicher Haarfarbe erwische?

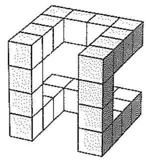
(**A**) 13 (**B**) 11 (**C**) 9 (**D**) 8 (**E**) 6

Lösung: Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn ich – bevor ich eine Jungspuppe und eine Mädchenpuppe von gleicher Haarfarbe erwische – alle 5 gelbgelockten Jungspuppen und alle 7 rotbezopften Mädchenpuppen herausnehme, insgesamt 12. Die 13. Puppe ist entweder eine rotgelockte Jungspuppe oder eine gelbbezopfte Mädchenpuppe. In beiden Fällen habe ich jetzt ein gewünschtes Pärchen.

22. Ich habe einen Würfel der Seitenlänge 4 cm aus kleinen Würfeln der Seitenlänge 1 cm zusammengeklebt. Ich streiche 3 Seiten des großen Würfels rot und die anderen 3 Seiten blau. Als ich fertig bin, merke ich, dass es keinen kleinen Würfel mit 3 roten Seiten gibt. Wie viele der kleinen Würfel haben sowohl rote als auch blaue Seiten?



(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 24 (**E**) 32



Lösung: Wir stellen uns den Würfel so hingelegt vor, dass die vordere Seite rot angestrichen ist. Von den angrenzenden Seiten muss mindestens eine weitere rot gestrichen sein. Wir stellen uns vor, dass der Würfel so liegt, dass die obere Seite rot gestrichen ist. Dann kann weder die linke noch die rechte Seite rot angestrichen sein, denn in beiden Fällen würde es eine total rot gestrichene Würfelecke, also einen kleinen Würfel mit 3 roten Seiten geben, was in der Aufgabe ausgeschlossen ist. Folglich ist entweder die hintere oder die untere Seite rot gestrichen. Wir können den Würfel so drehen, dass die vordere, die obere und die untere Seite rot gestrichen ist. Die kleinen Würfel an den Randkanten der roten Fläche sind alle diejenigen, die auch blaue Seiten haben. Die Abbildung zeigt alle diese kleinen Würfel. Wir können sie zählen, es sind 24.

23. Nina und Leonie starten beim Berlin-Marathon beide mit einer dreistelligen Startnummer, ihre Schwester Jasmin mit einer vierstelligen. Ihr kleiner Bruder Benni entdeckt, dass in den drei Startnummern alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal vorkommen. Er multipliziert die Ziffern der Startnummern und erhält für Nina 0, für Leonie 90 und für Jasmin 72. Wie groß ist die Summe der Ziffern von Ninas Startnummer?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 15

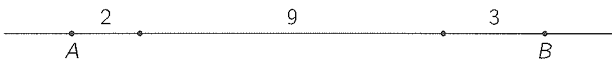
Lösung: Als erstes stellen wir fest, dass in Ninas Startnummer die 0 vorkommt. Außerdem muss die 7 vorkommen, denn weder 90 noch 72 enthält 7 als Faktor. Nun versuchen wir, 90 als Produkt von 3 der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 und 9 darzustellen. Da $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ ist, gibt es die beiden Möglichkeiten $90 = 2 \cdot 9 \cdot 5$ und $90 = 3 \cdot 6 \cdot 5$. Weiter gilt $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Im ersten Fall, wenn $90 = 2 \cdot 9 \cdot 5$ gilt, kann nur $72 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ sein. Im zweiten Fall ist $72 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9$. Die 1 muss im Produkt der Ziffern von Jasmins Startnummer stecken, denn diese ist ja das Produkt von 4 Zahlen. In keinem der beiden Fälle enthalten die Startnummern von Leonie und Jasmin die Ziffer 8. Also besteht Ninas Startnummer aus den Ziffern 0, 7 und 8. Die gesuchte Summe ist $0 + 7 + 8 = 15$.

24. Auf einer Geraden sind vier Punkte markiert. Die Abstände zwischen je zwei dieser vier Punkte sind (in cm gemessen) der Größe nach geordnet: 2, 3, n, 11, 12, 14. Für welche Zahl steht n?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Die beiden am weitesten voneinander entfernten Punkte haben den Abstand 14 cm. Wir nennen diese Punkte A und B. Der Abstand 12 cm muss innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ angenommen werden. Da $2\,\text{cm} + 12\,\text{cm} = 14\,\text{cm}$ ist, befindet sich der dritte Punkt von einem der Punkte A oder B genau 2 cm entfernt, vom anderen 12 cm. Da $3\,\text{cm} + 11\,\text{cm} = 14\,\text{cm}$ ist, befindet sich der vierte Punkt von einem der Punkte A oder B genau 3 cm entfernt, vom anderen 11 cm. Der vierte Punkt hat die Entfernung 3 cm von dem Punkt, von dem der dritte Punkt 12 cm entfernt ist, da es sonst zusätzlich eine Entfernung von 1 cm geben müsste. Der dritte und der vierte Punkt sind demzufolge $14\,\text{cm} - 2\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$ voneinander entfernt. Es ist also $n = 9$.

Die Zeichnung zeigt eine der beiden möglichen Lagen der 4 Punkte, die zweite möglichen Lage ist zu dieser gespiegelt.



Eine ähnliche Aufgabe mit 5 Punkten auf der Geraden ist Aufgabe 26 in Klassenstufe 7/8.

Schwarz-weiße Logik: Mastermind

Beim Spiel Mastermind ist eine Zahlenfolge mit lauter verschiedenen Ziffern gesucht. Zum Finden dieser Zahlenfolge sind andere Zahlenfolgen mit Hinweisen angegeben. Jeder schwarze Punkt steht für eine richtige Zahl an der richtigen Stelle. Jeder weiße Punkt steht für eine Zahl, die zwar in der gesuchten Zahlenfolge vorkommt, aber nicht an der richtigen Stelle steht.

Im Beispiel rechts ist in jeder Zeile ein schwarzer Punkt, also jeweils eine Zahl am richtigen Platz. Außerdem gehört in der dritten Zeile eine der Zahlen zur gesuchten Zahlenfolge, steht aber an der falschen Stelle. Das kann nur die in der ersten Zeile oder die in der zweiten Zeile richtig platzierte Zahl sein, also die 5. Damit ist klar, dass in der dritten Zeile die 6 am richtigen Platz steht. Die zweite Zahl ist die 1. Die gesuchte Zahlenfolge ist 615.

9	8	5	●
2	1	3	●
6	5	0	●○
			●●●

↓

6	1	5

Die folgenden Aufgaben stammen aus dem „Großen Buch der Kopfnüsse“ von W. A. Portugalow, das 2007 für Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus erschien. Wer findet die Zahlenfolgen?

1	3	5	○○
2	7	4	●
4	6	8	○
9	5	0	●
			●●●

2	1	8	○
4	7	0	●
8	6	5	●○
9	5	3	●
			●●●

1	0	9	8	●●
5	3	1	9	●○○
6	2	4	7	●
				●●●●

1	2	3	4	○
3	7	9	6	○○
5	8	2	0	●○
6	3	5	1	●●○
				●●●●

1	2	5	6	○○○
2	3	4	9	○
5	0	2	4	○
6	8	9	1	●○
8	1	3	7	●○
				●●●●

1	8	2	6	0	●○○
3	4	7	0	9	●
6	2	3	5	8	●●○○
7	6	1	8	2	○○○○
					●●●●●

In den folgenden beiden Aufgaben sind sowohl in der richtigen Zahlenfolge als auch in den anderen Zahlenfolgen Lücken. Die Punkte sind vollständig angegeben. Welche Zahlen gehören in die Kästchen?

	0	7	3	5	●●●●
1	2	0		6	●●
7	9	2		8	●○○
4	2	7			●●●●●

7	4	9	0	3	●●
2	5		9	4	
8	4	5	1		●○○
6		3	2	0	●●○○
	1		0		●●●●●

Zu einer Zahlenfolge aus 3 Zahlen können viele andere Zahlenfolgen mit Hinweisen angegeben werden. Wie viele Zahlenfolgen mit 3 verschiedenen Zahlen gibt es mit a) keinem schwarzen und keinem weißen, b) genau einem schwarzen, c) genau einem weißen, d) genau einem schwarzen und genau einem weißen Punkt?

Sportlich, sportlich

An einem Hockey-Turnier nahmen vier Teams (A, B, C, D) teil. Jedes Team spielte gegen jedes andere genau einmal. Die Ergebnistabelle ist rechts zu sehen. G ist die Anzahl der gewonnenen, U die der unentschiedenen und V die der verlorenen Spiele. In der letzten Spalte stehen die Tore und die Gegentore.

Team	G	U	V	Tore
A	3	0	0	5 : 1
B	1	1	1	2 : 2
C	0	2	1	5 : 6
D	0	1	2	3 : 6

a) Wer hat gegen wen gewonnen? Welche Spiele gingen unentschieden aus?

b) Welches waren die genauen Ergebnisse der sechs Spiele?

Die Ergebnistabelle rechts gehört zu einem Turnier mit fünf Mannschaften (A, B, C, D, E).

Wie sind bei diesem Turnier die einzelnen Spiele ausgegangen?

Team	G	U	V	Tore
A	4	0	0	6 : 1
B	2	1	1	6 : 4
C	1	1	2	3 : 4
D	0	3	1	0 : 2
E	0	1	3	0 : 4

Kopf oder Zahl?

Nimm dir ein paar Münzen zur Hand, möglichst gleiche, also zum Beispiel 1-Cent- oder 2-Cent-Stücke.

In der Münzreihe sollen nacheinander jeweils zwei benachbarte Münzen gleichzeitig umgedreht werden.

Wer schafft es in drei Zügen, die Münzen so zu drehen, dass sie abwechselnd Kopf und Zahl zeigen?

Die Münzreihe soll so umgeordnet werden, dass die vier Münzen, die Zahl zeigen, nebeneinander liegen und ebenso die vier Münzen, die Kopf zeigen. In einem Zug dürfen zwei benachbarte Münzen verschoben werden, ohne dabei ihre Anordnung zu ändern. Zwischendurch dürfen in der Reihe Lücken entstehen, aber zum Schluss sollen alle Münzen wieder lückenlos nebeneinander liegen.

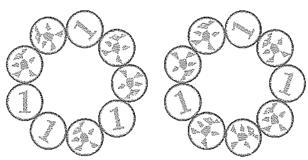
Wem gelingt diese Aufgabe in möglichst wenigen Zügen?

Die abgebildete Münzreihe soll so umgeordnet werden, dass die Münzen in fünf Stapeln zu je zwei Münzen liegen. Wie kann das in möglichst wenigen Zügen erreicht werden, wenn in einem Zug mit einer einzelnen Münze a) stets genau zwei Münzen übersprungen werden, b) stets genau zwei Stapel übersprungen werden? (Dabei zählen auch einzeln liegende Münzen als ein Stapel.)

In den rechts abgebildeten Münzkreisen dürfen in einem Zug jeweils 2 benachbarte Münzen umgedreht werden.

Kann so erreicht werden, dass alle Münzen Kopf zeigen?

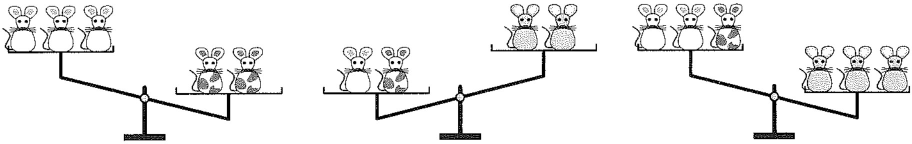
Lässt sich auch so ziehen, dass alle Münzen Zahl zeigen?



Verwegen gewogen

Im Keller der alten Apotheke turnen Mäuse auf einer alten Balkenwaage herum. Unter ihnen sind einige weiße Mäuse, die alle dasselbe Gewicht haben. Auch die grauen Mäuse haben untereinander dasselbe Gewicht und ebenso die gescheckten Mäuse. Allerdings wiegen weiße, graue und gescheckte Mäuse unterschiedlich viel.

Auf der Waage sitzen dreimal ganz still einige Mäuse in folgenden Anordnungen:



Wie viele Mäuse sind mindestens im Keller?

Welche der Mäuse sind am schwersten, welche sind am leichtesten?

Ich habe eine Balkenwaage und vier Gewichte. Zwei der Gewichte wiegen 40 g, eines 70 g und das vierte 100 g. Beim Wiegen kann jedes der Gewichte beliebig auf eine der beiden Waagschalen gelegt oder beiseite gestellt werden.

Mit möglichst wenigen Wiegevorgängen möchte ich Reis abwiegen, einmal 20 g, einmal 50 g, einmal 180 g und zuletzt 310 g. Wie kann ich dazu vorgehen? Wie viele Wägungen reichen jeweils?

Wie gelingt es, 5 g Reis abzuwiegen? Lassen sich 57,5 g Reis abwiegen?

Ein König hatte neun Goldmünzen. Acht der Münzen waren gleich schwer. Die neunte sah den anderen zum Verwechseln ähnlich, doch sie war, mit bloßem Gefühl nicht auszumachen, ein klein wenig schwerer als die anderen acht. Einem Gelehrten, der am Hof weilte, stellte der König die Aufgabe, mithilfe einer Balkenwaage herauszufinden, welche der Münzen die schwerere Münze ist. Allerdings sollte der Gelehrte höchstes dreimal wiegen. Wie konnte das gelingen?

Der Hofnarr, der hörte, dass ein weitgereister Gelehrter eine schwierige Aufgabe des Königs gelöst hätte, wollte sich auch daran versuchen. „Du Schelm", dachte der König, und verriet dem Narren nur, dass eine der Münzen ein anderes Gewicht hat als die anderen. Dass sie schwerer war, behielt er für sich. Der Hofnarr grübelte, doch schließlich gelang es auch ihm, mit nur drei Wägungen die gesuchte Münze zu finden. Beim Weggehen rief er zum König: „Ihr hättet mir ruhig sagen können, dass die Münze schwerer ist als die anderen acht."

Wie ist der Hofnarr beim Wiegen vorgegangen?

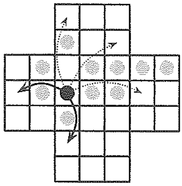
Und wie konnte er dabei sogar herausfinden, dass die gesuchte Münze schwerer ist als die anderen?

Tilman hat bei seinem Großvater auf dem Dachboden 2 Sorten Gewichte für eine Briefwaage gefunden. Die Gewichte haben ganzzahlige Grammzahlen. Ein kleines Gewicht und 4 große Gewichte wiegen zusammen genau 100 g. Und 4 kleine Gewichte zusammen sind leichter als ein großes Gewicht. Welche Grammzahlen haben die Gewichte?

Solohalma

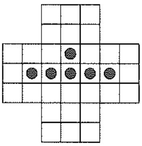
Solohalma ist ein kniffliges Brettspiel für eine Person, das auch als Solitär oder Steckhalma bekannt ist. Beim Känguru-Wettbewerb war es 2003 „Preis für alle". Meist wird auf einem kreuzförmigen Spielbrett mit 33 Feldern gespielt. Beim Standardspiel wird auf 32 Felder ein Spielstein gelegt, ein Feld bleibt frei.

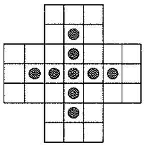
In einem Spielzug darf ein Stein einen einzelnen benachbarten Stein waagerecht oder senkrecht überspringen, sofern direkt hinter diesem ein leeres Feld ist. Der übersprungene Stein wird entfernt. Ziel des Spiels ist es, dass nur ein einziger Stein übrig bleibt.

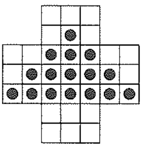


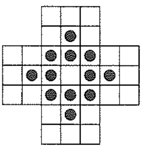
Im Beispiel darf der markierte Spielstein nach unten oder nach links springen. Die gepunktet gezeichneten Sprünge verlaufen diagonal, über mehrere Steine oder nicht über einen benachbarten Stein und sind nicht erlaubt.

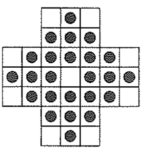
Zum Üben lässt sich Solohalma auch mit anderen Startaufstellungen spielen. Wem gelingt es, so zu ziehen, dass nur ein einziger Stein übrigbleibt?

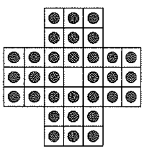


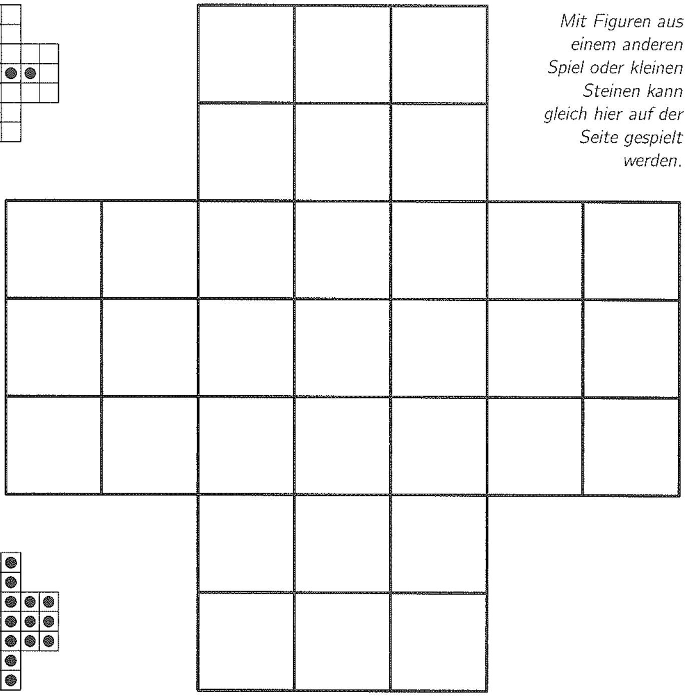












Mit Figuren aus einem anderen Spiel oder kleinen Steinen kann gleich hier auf der Seite gespielt werden.

Die Anzahl der nötigen Sprünge steht bei jeder der Aufgaben von Beginn an fest. Wie viele sind es jeweils?

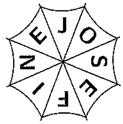
Klassenstufen 7 und 8

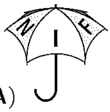
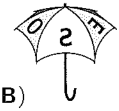
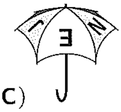
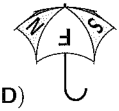
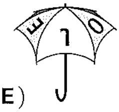
1. Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $510{,}2 \cdot 2{,}015$?

(**A**) 1 (**B**) 10 (**C**) 100 (**D**) 1000 (**E**) 10000

Lösung: Da die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten weit auseinanderliegen, ist das grobe Runden von $510{,}2 \cdot 2{,}015 = 1028{,}053$ durch $500 \cdot 2 = 1000$ ausreichend. (**D**) ist die Lösung.

2. Zum Geburtstag hat Josefine einen Regenschirm bekommen. Obendrauf steht ihr Name. Welches Bild zeigt Josefines Regenschirm?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

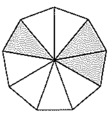
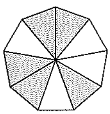
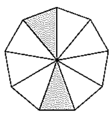
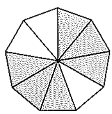
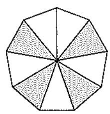
Lösung: Wer das Blatt dreht und von oben auf die Bilder der Schirme schaut, sieht leicht, dass nur (**C**) die Lösung sein kann. In (**A**) steht das F auf dem Kopf. In (**B**) und (**E**) ist die Reihenfolge der Buchstaben verkehrt und das S bzw. das J gespiegelt. Und die Buchstaben in (**D**) sind auf Josefines Schirm gar nicht benachbart.

3. Oma Elke strickt für jeden ihrer Enkelsöhne ein Paar Socken und für jede ihrer Enkeltöchter ein Paar Handschuhe. Insgesamt strickt sie 12 Socken und 8 Handschuhe. Wie viele Enkel hat Oma Elke?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Oma Elke strickt für $12 : 2 = 6$ Enkelsöhne Socken und für $8 : 2 = 4$ Enkeltöchter Handschuhe. Sie hat folglich $6 + 4 = 10$ Enkel.

4. In welchem der regelmäßigen Neunecke ist genau ein Drittel der gesamten Fläche grau?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

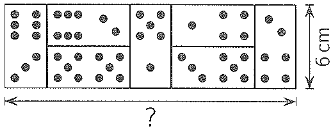
Lösung: Jedes der 5 Neunecke ist in 9 gleich große Teile zerlegt. Es muss ein Drittel der Fläche grau sein, was 3 grauen Teilen entspricht. Das ist nur bei (**A**) der Fall.

5. Der Zug von Bonn nach Mainz fährt durch Bingen. Insgesamt fährt er etwa 1 Stunde und 25 Minuten. Von Bingen nach Mainz braucht er etwa 15 Minuten. Wie lange etwa braucht er von Bonn bis Bingen?

(**A**) 55 Minuten (**B**) 60 Minuten (**C**) 65 Minuten (**D**) 70 Minuten (**E**) 75 Minuten

Lösung: Für die Strecke von Bonn bis Bingen braucht der Zug etwa 15 Minuten weniger als für die gesamte Strecke, d. h. etwa 1 Stunde und 10 Minuten. Das sind 70 Minuten.

6. Sieben gleich große rechteckige Dominosteine sind zu dem abgebildeten Rechteck gelegt. Dieses Rechteck ist 6 cm breit. Wie lang ist es?



(**A**) 12 cm (**B**) 15 cm (**C**) 16 cm (**D**) 18 cm (**E**) 21 cm

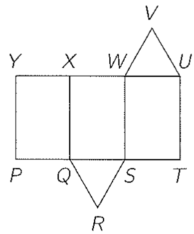
Lösung: Da eine kurze Seite eines Dominosteins genau halb so lang ist wie eine lange Seite, also 3 cm, ist das Rechteck $3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 6\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$ lang.

7. Elias zeichnet ein Dreieck mit den Seitenlängen 6 cm, 10 cm und 11 cm und ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Umfang wie das erste Dreieck hat. Welche Seitenlänge hat das gleichseitige Dreieck?

(**A**) 10 cm (**B**) 9 cm (**C**) 8 cm (**D**) 7 cm (**E**) 6 cm

Lösung: Beide Dreiecke haben denselben Umfang, dieser beträgt $6\,\text{cm} + 10\,\text{cm} + 11\,\text{cm} = 27\,\text{cm}$. Da das zweite Dreieck gleichseitig ist, beträgt seine Seitenlänge $27\,\text{cm} : 3 = 9\,\text{cm}$.

8. Aus dem rechts abgebildeten Netz wird ein dreiseitiges Prisma gefaltet. Mit welchen Punkten fallen dabei die Punkte U und V zusammen?



(**A**) mit X und W (**B**) mit Y und X (**C**) mit W und Y
(**D**) mit T und R (**E**) mit R und S

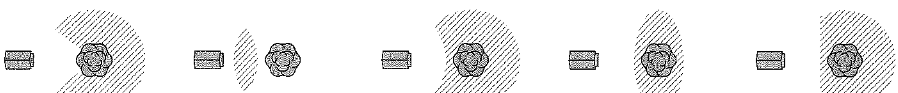
Lösung: Wir stellen uns vor, dass die Deckfläche, also das Dreieck WUV, nach vorn geklappt und dann die Mantelfläche von links nach rechts vorn herum gefaltet wird. Dabei fällt U mit Y zusammen und V mit X.

9. Welcher der folgenden Brüche ist kleiner als 3 ?

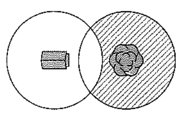
(**A**) $\frac{31}{8}$ (**B**) $\frac{32}{9}$ (**C**) $\frac{33}{10}$ (**D**) $\frac{34}{11}$ (**E**) $\frac{35}{12}$

Lösung: Ein Bruch ist genau dann kleiner als 3, wenn sein Zähler weniger als dreimal so groß wie sein Nenner ist. Das ist nur bei (**E**) der Fall: $\frac{35}{12} < \frac{36}{12} = 3$.

10. Die Eichhörnchen im Garten bewegen sich auf dem Boden nie weiter als 5 m von ihrem Baum weg und halten von der Hundehütte immer mindestens 5 m Abstand. In einem der folgenden Bilder ist der gesamte Bereich schraffiert, in dem sich die Eichhörnchen auf dem Boden aufhalten. In welchem?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)



Lösung: Die Eichhörnchen bewegen sich stets <u>innerhalb</u> eines Kreises mit Radius 5 m um ihren Baum, aber stets <u>außerhalb</u> eines Kreises mit Radius 5 m um die Hundehütte. Wären Baum und Hundehütte mindestens 10 m voneinander entfernt, würden sich diese beiden Kreise nicht schneiden und der Aufenthaltsbereich der Eichhörnchen auf dem Boden wäre eine komplette Kreisfläche. Das zeigt keines der Bilder in den Antwortmöglichkeiten. Folglich müssen Baum und Hundehütte weniger als 10 m voneinander entfernt sein. Den Aufenthaltsbereich der Eichhörnchen auf dem Boden zeigt dann Bild (**C**).

11. Jeder Stern in $2 \star 0 \star 1 \star 5 \star 2 \star 0 \star 1 \star 5 \star 2 \star 0 \star 1 \star 5 = 0$ soll so durch $+$ oder $-$ ersetzt werden, dass eine korrekte Gleichung entsteht. Welches ist die kleinste Anzahl an Sternen, die durch $+$ ersetzt werden müssen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Durch Probieren lässt sich leicht herausfinden, dass ein $+$ nicht genügt, das Ergebnis der Rechnung wäre stets negativ. Zwei $+$ genügen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$2-0-1+5-2-0-1+5-2-0-1-5=0$$

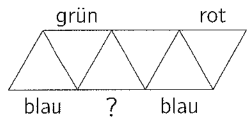
Die Aufgabe lässt sich aber auch ohne Probieren lösen: Damit das Ergebnis der Rechnung 0 ist, muss die Summe der Zahlen, die positiv in die Rechnung eingehen, ebenso groß sein wie die Summe der Zahlen, die negativ in die Rechnung eingehen. Die Summe der Zahlen, die positiv in die Rechnung eingehen, muss somit halb so groß wie die Summe <u>aller</u> Zahlen sein, also $3 \cdot (2+0+1+5) : 2 = 12$. Abzüglich der 2 vorn bleibt die Summe 10, die sich mit möglichst wenigen Pluszeichen erreichen lässt, wenn man vor zwei Fünfen ein $+$ schreibt.

12. Im Jugendorchester wurden alle Jungen in verschiedenen Monaten geboren und alle Mädchen an verschiedenen Wochentagen. Käme jedoch ein weiteres Mitglied zum Orchester dazu, so wäre ganz sicher eine dieser beiden Aussagen falsch. Wie viele Jugendliche sind im Jugendorchester?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 23

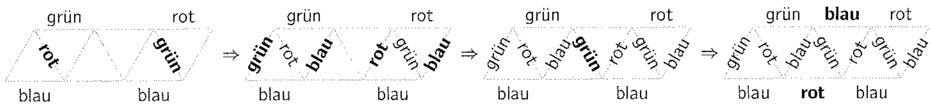
Lösung: Die Anzahl der Jungen ist höchstens 12, und die Anzahl der Mädchen ist höchstens 7. Da eine der Aussagen ganz sicher falsch wird, sobald ein neues Mitglied zum Orchester dazukommt, muss die Anzahl der Jungen genau 12 und die Anzahl der Mädchen genau 7 sein. Das Orchester hat folglich $12 + 7 = 19$ Mitglieder.

13. Jede Dreiecksseite in der rechts abgebildeten Figur soll entweder rot, grün oder blau gefärbt werden. Dabei soll jedes Dreieck eine rote, eine grüne und eine blaue Seite haben. Vier Dreiecksseiten sind bereits gefärbt. Welche Farbe muss die Seite mit dem Fragezeichen bekommen?



(**A**) rot (**B**) grün (**C**) blau
(**D**) Alle Farben sind möglich. (**E**) Eine solche Färbung der Figur existiert nicht.

Lösung: Die Farbe einer Dreiecksseite kann eindeutig bestimmt werden, wenn sie zu einem Dreieck gehört, in dem die Farben der beiden anderen Dreiecksseiten bekannt sind, oder wenn sie zu zwei Dreiecken mit je einer bekannten Farbe gehört und diese beiden Farben unterschiedlich sind. Mit dieser Überlegung finden wir nacheinander die Farben der Dreiecksseiten wie folgt:



Die Farbe der Seite mit dem Fragezeichen ist eindeutig bestimmt: Sie muss rot sein.

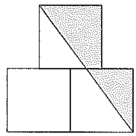
Ähnlich hierzu ist Aufgabe 12 in Klassenstufe 5/6.

14. Samuel hat die Längen von drei der vier Seiten eines Rechtecks addiert und als Ergebnis 26 cm erhalten. Semira hat bei demselben Rechteck ebenfalls die Längen von drei der vier Seiten addiert und als Ergebnis 28 cm bekommen. Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?

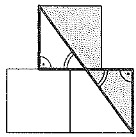
(**A**) 27 cm^2 (**B**) 40 cm^2 (**C**) 45 cm^2 (**D**) 64 cm^2 (**E**) 80 cm^2

Lösung: Da Samuel und Semira unterschiedliche Ergebnisse erhalten haben, müssen die Rechtecksseiten unterschiedlich lang sein. Die Länge der beiden längeren Seiten sei a, die der beiden kürzeren sei b. Samuel hat $a + b + b = 26$ cm berechnet und Semira $a + a + b = 28$ cm. Also ist a um 28 cm $-$ 26 cm $=$ 2 cm größer als b. Setzen wir $a = b + 2$ cm in Samuels Rechnung ein, erhalten wir $b = 8$ cm und daraus $a = 10$ cm. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 8 cm $\cdot$ 10 cm $=$ 80 cm^2.

15. Jedes der rechts abgebildeten Quadrate hat die Seitenlänge 1 cm. Das obere Quadrat liegt genau mittig über der gemeinsamen Seite der beiden unteren Quadrate. Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche?

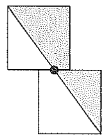


(**A**) $\frac{2}{3}$ cm^2 (**B**) $\frac{3}{4}$ cm^2 (**C**) 1 cm^2 (**D**) $1\frac{1}{4}$ cm^2 (**E**) $1\frac{1}{3}$ cm^2



Lösung: Die beiden dick umrandeten Dreiecke sind zueinander kongruent, denn sie stimmen in den Größen ihrer Innenwinkel sowie der Länge der dem Scheitelwinkel $\sphericalangle$ gegenüberliegenden Seite überein. Insbesondere haben sie denselben Flächeninhalt. Der Flächeninhalt der grauen Fläche ist somit genauso groß wie der Flächeninhalt von einem der Quadrate, also 1 cm^2.

Wer wie im unteren Bild das weiße Quadrat weglässt, erhält übrigens eine Figur, die punktsymmetrisch zu dem dick markierten Punkt ist. Bei dieser Punktspiegelung werden die weiße und die graue Fläche gerade vertauscht. Die graue Fläche macht also die Hälfte dieser Figur aus, 1 cm^2.



16. Frau Müller hat einen großen Strauß mit 10 Stängeln herrlich duftender Lilien bekommen. Einige sind elegante weiße Lilien mit jeweils 2 Blüten, die anderen sind leuchtend gelbe Lilien mit jeweils 5 Blüten. Wie viele Blüten kann Frau Müllers Strauß *ganz gewiss nicht* haben?

(**A**) 26 (**B**) 29 (**C**) 35 (**D**) 37 (**E**) 44

Lösung: Wir überlegen, wie viele Blüten Frau Müllers Strauß haben könnte. Da es einige Stängel von beiden Sorten gibt, sind es gewiss mindestens 2 weiße und mindestens 2 gelbe Lilien. Wären es 8 weiße Lilien und 2 gelbe, so hätte der Strauß 26 Blüten. Wären es 7 weiße Lilien und 3 gelbe, so wären es insgesamt 29 Blüten – das sind wegen $5 - 2 = 3$ also 3 Blüten mehr als 26. Wären es 6 weiße Lilien und 4 gelbe, so wären es wieder 3 Blüten mehr, also 32 Blüten. Mit dieser Überlegung finden wir, dass alle möglichen Blütenzahlen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. In Frage kommen $26, 29, 32, 35, 38, 41, 44$. Die 37 ist nicht in dieser Liste zu finden, (**D**) ist die Lösung.

Ähnlich zu diesem Problem ist Aufgabe 10 in Klassenstufe 5/6.

Wie groß ist p, wenn die Zahlen $p + 1$, $p + 5$ und $p + 15$ Primzahlen sind? Gibt es mehrere Möglichkeiten oder nur eine?

17. Auf unserer dreitägigen Radtour in den Niederlanden sind wir von Sluis an der Grenze zu Belgien bis Den Haag auf dem Europaradweg R1 geradelt. Die erste Nacht haben wir nach einem Drittel der Gesamtstrecke in Veere verbracht. Am zweiten Tag sind wir 75 km bis Brielle gefahren und am dritten Tag das letzte Viertel der Gesamtstrecke. Wie viele Kilometer waren wir insgesamt unterwegs?

(**A**) 150 (**B**) 160 (**C**) 165 (**D**) 175 (**E**) 180

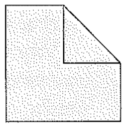
Lösung: Die 75 km, die am zweiten Tag zurückgelegt wurden, sind $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{12-4-3}{12}=\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Die Länge der Gesamtstrecke ist damit $75\,\text{km} : 5 \cdot 12 = 180\,\text{km}$.

18. In der Zeitung stand, dass bei dem starken Regen gestern 15 Liter Wasser pro Quadratmeter fielen. Um wie viel stieg dabei der Wasserspiegel im großen Schwimmbecken im Freibad?

(**A**) um 150 cm (**B**) um 15 cm (**C**) um 1,5 cm
(**D**) um 0,15 cm (**E**) Das hängt von der Größe des Schwimmbeckens ab.

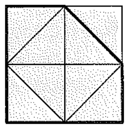
Lösung: Der Anstieg der Wasserhöhe ist relativ pro Quadratmeter, hängt also nicht von den genauen Maßen des Beckens ab. Da das Wasservolumen das Produkt aus dem Flächeninhalt der Grundfläche und der Wasserhöhe ist, ergibt sich der gesuchte Anstieg, wenn wir das Wasservolumen pro Quadratmeter durch den Inhalt eines Quadratmeters teilen. Da $1\,\ell = 1\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{cm}^3$ sind, stieg der Wasserspiegel folglich um $15\,\ell : 1\,\text{m}^2 = 15000\,\text{cm}^3 : 10000\,\text{cm}^2 = 1{,}5\,\text{cm}$.

19. Eine Ecke eines Quadrats wurde auf den Mittelpunkt des Quadrats gefaltet. Der Flächeninhalt des dabei entstandenen unregelmäßigen Fünfecks und der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Welchen Flächeninhalt hat das Fünfeck?



(**A**) 7 (**B**) 15 (**C**) 25 (**D**) 31 (**E**) 49

Lösung: Das Quadrat kann wie abgebildet in 8 kongruente und damit flächengleiche Dreiecke zerlegt werden. Das Fünfeck besteht aus 7 dieser Dreiecke. Da sich die Flächeninhalte des Quadrats und des Fünfecks um genau 1 unterscheiden, hat jedes dieser Dreiecke den Flächeninhalt 1. Der Flächeninhalt des Fünfecks beträgt 7.



20. Zauberin Minerva wollte von ihren Schülern Albus, Severus, Phineas, Quirinus und Rubeus wissen, wie viele von ihnen fleißig die neuen Zaubersprüche auswendig gelernt haben. Die fünf gaben seltsamerweise jeder eine andere Antwort:

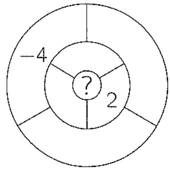
„Keiner." „Genau einer." „Genau zwei." „Genau drei." „Genau vier."

Belegt mit einem Wahrheitszauber sprachen nur genau diejenigen die Wahrheit, die wirklich fleißig waren – die anderen logen. Wie viele der fünf Schüler waren wirklich fleißig?

(**A**) keiner (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

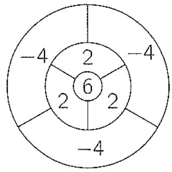
Lösung: Da die Anzahl der fleißigen Schüler eine feste Zahl ist, kann nur höchstens eine der Antworten wahr sein. Und da diejenigen Schüler, die die Wahrheit sprechen, genau die fleißigen Schüler sind, kann folglich höchstens ein Schüler fleißig gewesen sein. Wäre kein Schüler fleißig gewesen, so wären alle Aussagen gelogen, insbesondere die erste, die in diesem Fall jedoch der Wahrheit entspräche. Also war genau ein Schüler fleißig, und zwar derjenige, der „Genau einer." geantwortet hat.

21. In jedes der sieben Felder in der Figur soll eine Zahl so eingetragen werden, dass jede Zahl gleich der Summe aller Zahlen in den angrenzenden Feldern ist. Zwei Zahlen sind bereits eingetragen. Welche Zahl gehört in das mittlere Feld?



(**A**) −2 (**B**) 1 (**C**) −4 (**D**) 0 (**E**) 6

Lösung: An das Feld mit der 2 grenzt genau ein Feld mehr als an das Feld mit der −4, und zwar das mittlere Feld mit dem Fragezeichen. Da die Summe der an das Feld mit der 2 angrenzenden Felder um $2-(-4)=6$ größer ist als die Summe der an das Feld mit der −4 angrenzenden Felder, gehört in das mittlere Feld also die 6. Die einzige mögliche Eintragung ist rechts zu sehen.



22. Einst hatte ein Bäcker vom Müller mehrere Säcke Mehl geholt, ein jeder unterschiedlich schwer. Sein Geselle, der sich im Rechnen übte, fand, dass die beiden leichtesten Säcke 25 % der Gesamtmasse ausmachten. Die drei schwersten Säcke entsprachen 60 % der Gesamtmasse. Wie viele Säcke Mehl hatte der Bäcker vom Müller insgesamt geholt?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Die Säcke, die nicht zu den beiden leichtesten und nicht zu den drei schwersten gehören, machen $100\,\% - 25\,\% - 60\,\% = 15\,\%$ der Gesamtmasse aus. Der leichteste aller Säcke macht sicher weniger als $25\,\% : 2 = 12{,}5\,\%$ der Gesamtmasse aus und der zweitleichteste sicher mehr als 12,5 %. Folglich machen auch alle anderen Säcke sicher mehr als 12,5 % der Gesamtmasse aus. Da bereits $2 \cdot 12{,}5\,\% = 25\,\% > 15\,\%$ ist, können die 15 % der Gesamtmasse, die nicht in den Rechnungen des Gesellen vorkommen, nur dem Gewicht eines einzelnen Sacks entsprechen, also dem Gewicht des drittleichtesten Sacks. Der viertleichteste gehört bereits zu den drei schweren Säcken. Also hat der Bäcker genau 6 Säcke Mehl geholt. Ihr genauer Anteil an der Gesamtmasse ist nicht eindeutig bestimmt, es könnten zum Beispiel 11 %, 14 %, 15 %, 16 %, 18 % und 26 % sein.

23. In einem englischen Mathebuch hat unsere Lehrerin eine Knobelaufgabe entdeckt und sie für uns übersetzt: „In $ODD + ODD = EVEN$ sind die Buchstaben O, D, E, V, N durch fünf verschiedene Ziffern zu ersetzen, sodass eine korrekte Gleichung entsteht." Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Da die Summe zweier dreistelliger Zahlen ganz sicher kleiner als $1000+1000=2000$ ist, folgt $E=1$. Da $D+D=2D$ gerade ist, muss, da in der Summe an der Zehnerstelle eine 1 steht, an der Einerstelle ein Übertrag entstehen. Somit endet $2D$ auf 0, das heißt $D=5$ und $N=0$. Da $O \geq 5$ und $D=5$ ist, kann O nur eine der Zahlen 6, 7, 8 oder 9 sein und V entsprechend 3, 5, 7 bzw. 9. Der zweite Fall ($O=7$, $V=5$) entfällt, da bereits $D=5$ gilt, und ebenso entfällt der letzte Fall, da hier O und V nicht verschieden sind. Also gibt es zwei Möglichkeiten, das Kryptogramm zu lösen: $655+655=1310$ und $855+855=1710$.

Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die durch die Primzahl 13 teilbar ist und bei Division durch die Primzahlen 2, 3, 5 und 7 den Rest 1 lässt?

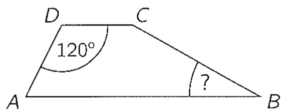
24. Bei einer Aufnahmeprüfung erreichten die Teilnehmer im Durchschnitt 18 Punkte. 60 % der Teilnehmer haben bestanden, die anderen sind durchgefallen. Diejenigen, die bestanden haben, erreichten im Durchschnitt 24 Punkte. Welche Durchschnittspunktzahl hatten diejenigen, die durchgefallen sind?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Wenn wir die Anzahl aller Teilnehmer mit n bezeichnen, dann haben von diesen insgesamt $\frac{60}{100} \cdot n = 0{,}6 \cdot n$ Teilnehmer bestanden, $0{,}4 \cdot n$ Teilnehmer sind durchgefallen. Die Gesamtzahl aller vergebenen Punkte ist $18 \cdot n$, da die Teilnehmer im Durchschnitt 18 Punkte erreichten. An diejenigen, die bestanden haben, wurden insgesamt $24 \cdot 0{,}6 \cdot n$ Punkte vergeben, an diejenigen, die durchgefallen sind, insgesamt $18 \cdot n - 24 \cdot 0{,}6 \cdot n$ Punkte. Ihr Punktedurchschnitt betrug somit

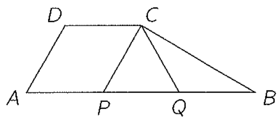
$$\frac{18 \cdot n - 24 \cdot 0{,}6 \cdot n}{0{,}4 \cdot n} = \frac{18 \cdot n}{0{,}4 \cdot n} - \frac{24 \cdot 0{,}6 \cdot n}{0{,}4 \cdot n} = \frac{180}{4} - \frac{24 \cdot 6}{4} = 45 - 36 = 9\,.$$

25. Im Viereck $ABCD$ sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zueinander parallel. Die Seite $\overline{AD}$ ist genauso lang wie die Seite $\overline{CD}$, die Seite $\overline{AB}$ ist dreimal so lang wie die Seite $\overline{CD}$. Der Winkel ADC ist 120° groß. (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*) Wie groß ist der Winkel CBA?



(**A**) 22,5° (**B**) 25° (**C**) 30° (**D**) 37,5° (**E**) 45°

Lösung: Auf der Seite $\overline{AB}$ seien P und Q diejenigen Punkte, für die $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}| = |\overline{QB}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}|$ gilt. Dann ist das Viereck $APCD$ ein Rhombus und, da $\measuredangle CPA = \measuredangle ADC = 120°$ ist, $\measuredangle QPC = 180° - 120° = 60°$. Dreieck PQC ist gleichschenklig mit $|\overline{PQ}| = |\overline{PC}|$, seine Basiswinkel sind $\frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$ groß. Dreieck PQC ist also gleichseitig. Es ist $\measuredangle BQC = 180° - 60° = 120°$, und wegen $|\overline{QC}| = |\overline{QB}|$ ist Dreieck QBC gleichschenklig. Der gesuchte Winkel CBA ist gleich dem Basiswinkel CBQ im gleichschenkligen Dreieck QBC und somit $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$ groß.

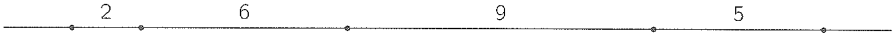


26. Adrian hat auf einer Geraden fünf Punkte markiert und alle Abstände zwischen je zwei beliebigen dieser Punkte gemessen. Die Zahlenwerte, die Adrian erhalten hat, sind in aufsteigender Reihenfolge: 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 und 22. Für welche Zahl steht k?

(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

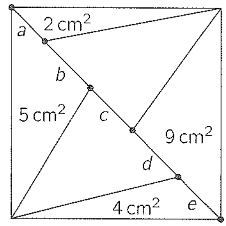
Lösung: Die beiden äußeren der fünf markierten Punkte haben ganz sicher den größten Abstand, also 22. Gewiss ist der Abstand 2 ein Abstand zwischen zwei benachbarten der markierten Punkte und ebenso die Abstände 5 und 6, da es keine kleineren Abstände gibt, die sich zu 5 oder 6 addieren. Der vierte Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten ist folglich $22 - 2 - 5 - 6 = 9$. Da $8 = 2 + 6$ die einzige mögliche Kombination der kleineren Zahlenwerte ist, sind die Strecken der Länge 2 und 6 benachbart. Der zweitgrößte Zahlenwert 20 kann als Abstand nur gemessen werden, wenn 2 der Abstand zwischen den beiden linken oder den beiden rechten der markierten Punkte ist. Dann sind die beiden Strecken der Längen 5 und 9 ganz sicher benachbart. Die Strecke, die sich aus diesen beiden zusammensetzt, hat die Länge $5 + 9 = 14$. Das muss die gesuchte Zahl sein.

Die korrekte Anordnung der Punkte mit den dazugehörigen Abständen zwischen benachbarten Punkten ist in dieser oder in umgekehrter Reihenfolge:



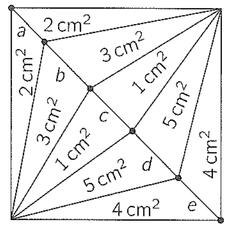
Die Abstände zwischen je zwei dieser Punkte sind wie gegeben bzw. berechnet: 2, 6, 9, 5, $2+6=8$, $6+9=15$, $9+5=14$, $2+6+9=17$, $6+9+5=20$ und $2+6+9+5=22$.

27. Ein Quadrat ist durch eine Diagonale und vier Strecken in Dreiecke zerlegt. Für einige dieser Dreiecke ist der Flächeninhalt angegeben. Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt $30\,\text{cm}^2$. (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*) Welcher der Diagonalenabschnitte ist am längsten?



(**A**) a (**B**) b (**C**) c (**D**) d (**E**) e

Lösung: Die eingezeichnete Diagonale zerlegt das Quadrat in zwei kongruente Dreiecke mit dem Flächeninhalt $30\,\text{cm}^2 : 2 = 15\,\text{cm}^2$. Zeichnen wir alle Verbindungsstrecken zwischen markierten Punkten und Quadratecken ein, so wird das Quadrat in 10 Dreiecke zerlegt, die je einen der Abschnitte a, b, c, d oder e als Grundseite und alle dieselbe zugehörige Höhe haben. Dreiecke mit derselben Grundseite sind dabei zueinander kongruent und haben denselben Flächeninhalt, sodass sich der Flächeninhalt aller 10 Dreiecke ermitteln lässt. Der Flächeninhalt der beiden Dreiecke mit Grundseite c ergibt sich dabei jeweils als Differenz zu $15\,\text{cm}^2$. Weil alle 10 Dreiecke dieselbe Höhe haben, haben diejenigen mit dem größten Flächeninhalt auch die längste Grundseite. Also ist d am längsten.



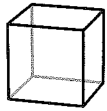
28. An der Tafel stehen fünf natürliche Zahlen. Peter berechnet alle möglichen Summen von je zwei dieser Zahlen, erhält aber nur drei verschiedene Ergebnisse: 57, 70 und 83. Welches ist die größte Zahl an der Tafel?

(**A**) 69 (**B**) 56 (**C**) 53 (**D**) 48 (**E**) 42

Lösung: Wir bezeichnen die fünf Zahlen mit a, b, c, d, e und betrachten die vier Summen $a+b$, $a+c$, $a+d$ und $a+e$. Da Peter nur drei verschiedene Ergebnisse erhalten hat, müssen zwei dieser vier Summen und somit mindestens zwei der fünf Zahlen an der Tafel gleich sein. Wählt Peter zwei gleiche Zahlen als Summanden, dann erhält er eine geradzahlige Summe, was nur die 70 sein kann. Also kommt die 35 unter den 5 Zahlen vor, und zwar mindestens zweimal. Da Peter Summen verschieden von 70 erhalten hat, ist sicher, dass nicht fünfmal die 35 an der Tafel steht. Dabei treten Zahlen, die ungleich 35 sind, nicht mehrfach auf, da es keine geradzahlige Summe außer 70 gibt. Wäre nur eine der Zahlen verschieden von 35, hätte Peter nur zwei verschiedene Summen erhalten. Also gibt es mindestens zwei von 35 verschiedene Zahlen x und y an der Tafel und es gilt $35+x=57$ und $35+y=83$ (oder umgekehrt). An der Tafel stehen also die Zahlen $57-35=22$ und $83-35=48$, ihre Summe $22+48=70$ ist eines von Peters Ergebnissen. Wäre die fünfte Zahl z größer als 48, so wäre $48+z > 2 \cdot 48 = 96 > 83$. Also ist die größte Zahl an der Tafel 48.

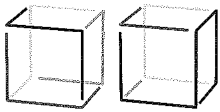
Für die fünfte Zahl z kann nur $22+z=57$, $35+z=70$ und $48+z=83$ gelten, also $z=35$. An der Tafel stehen die Zahlen 22, 35, 35, 35 und 48.

29. Aila will einen Drahtwürfel mit der Kantenlänge 10 cm bauen. Sie hat dafür biegsame Drähte der Längen 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm, 60 cm und 70 cm, von jeder Sorte ausreichend viele. Welches ist die kleinste Anzahl an Drähten, die Aila benötigt, wenn sich die Drähte nicht überlappen dürfen?



(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Lösung: Da der Würfel 12 Kanten hat, die Gesamt-Kantenlänge also 120 cm beträgt, liegt es nahe, zunächst mit zwei Drähten der Länge 50 cm und 70 cm oder 60 cm und 60 cm zu probieren. Wer das versucht, wird keine Lösung des Problems finden, aber vielleicht dabei bemerken, dass an jeder Ecke nur jeweils ein Draht „abknicken“ kann, die dritte an diese Ecke grenzende Kante jedoch zu einem Draht<u>ende</u> gehören muss. Da es 8 Ecken gibt, kann es folglich nicht weniger als 8 Drahtenden, also ganz sicher nicht weniger als 4 Drähte geben. Dass sich der Würfel mit 4 Drähten tatsächlich bauen lässt, zeigen die beiden Beispiele. Die kleinste Anzahl an Drähten, die Aila benötigt, ist folglich 4.



30. Gestern hat mir meine Freundin Ekin ihre 7-stellige Telefonnummer diktiert. Auf meinen Zettel habe ich jedoch nur 6 Ziffern geschrieben. Ich weiß nicht, welche Ziffer fehlt und auch nicht an welcher Stelle. Natürlich kann die Telefonnummer auch mit einer 0 beginnen. Wie viele 7-stellige Nummern kommen für Ekins Telefonnummer in Frage?

(A) 55 **(B)** 60 **(C)** 62 **(D)** 64 **(E)** 68

Lösung: Wir bezeichnen die aufgeschriebene Ziffernfolge mit $ABCDEF$. Es gibt 7 Stellen, an die die fehlende Ziffer gehören kann und, da es für jede Ziffer 10 Möglichkeiten gibt, lassen sich leicht $7 \cdot 10 = 70$ mögliche Nummern finden, von denen jedoch einige gleich sind. An der ersten Stelle kann jede der 10 möglichen Ziffern von 0 bis 9 fehlen. Das entspricht 10 verschiedenen Nummern. Für die zweite Stelle kommen zunächst ebenfalls 10 Ziffern in Frage. Allerdings haben wir die Nummer $AABCDEF$, die entsteht, wenn wir an die zweite Stelle die Ziffer A setzen, bereits erhalten, als wir an die erste Stelle die Ziffer A gesetzt haben. Wir erhalten also nur 9 weitere mögliche Nummern. Ebenso kommen für die dritte Stelle nur 9 Ziffern in Frage, denn die Nummer $ABBCDEF$, die entsteht, wenn wir an die dritte Stelle die Ziffer B setzen, haben wir bereits erhalten, als wir an die zweite Stelle die Ziffer B bzw., falls $A = B$ ist, an die erste Stelle die Ziffer B gesetzt haben. Analog finden wir für jede der anderen Stellen 9 mögliche Nummern, sodass insgesamt für Ekins Telefonnummer $10 + 6 \cdot 9 = 64$ Nummern in Frage kommen. Unter den zuerst gezählten 70 Nummern gibt es also nur 64 unterschiedliche Nummern.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

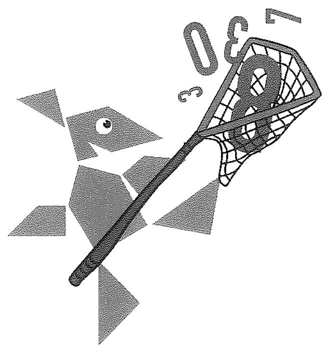
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	A	A	B	D	C	E	E
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	A	D	A	D	C	E	A	B
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	C	E	B	D	B	D	D	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	B	C	B	A	C	A	E	D
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	B	A	D	B	B	B	D	E
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	A	C	C	D	A	D	E	E

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	E	A	D	E	B	B	E	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	A	A	E	C	D	E	C	A	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	A	B	B	C	E	D	D	C	D



mathe-kaenguru.de
mathe-kaenguru.ch

2015

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru-Wettbewerb 2015

In diesem Jahr wurde der Känguru-Wettbewerb an über 330 Schulen in der Schweiz durchgeführt und es nahmen rund 26'000 Schülerinnen und Schüler daran teil. Die nochmals gewachsene Zahl an Teilnehmenden ermuntert uns, auch im kommenden Jahr dafür zu sorgen, dass sich alle daran interessierten Schulen aus der Deutschschweiz mit wenig Aufwand und online anmelden können. Und ebenso werden wir uns bemühen, dass das gesamte Aufgabenmaterial wieder rechtzeitig, also noch vor Mitte März 2016 mit der Post bei den Schulen eintrifft.

Es ging um die Geburtstage im Jugendorchester, die Planung einer Radtour und die Niederschlagsmenge bei einem starken Regen. Es galt, eine Tafel Schokolade gerecht aufzuteilen oder das Alter des Mathelehrers herauszufinden. Ein zu lang geratener Schal, die Windlichter beim Gartenfest und der Verkauf wertvoller Uhren im Antiquitätenladen bereiteten ebenso Kopfzerbrechen. Immer steckte eine kleine Matheaufgabe dahinter, und mit geschicktem Rechnen, etwas Logik oder gutem Vorstellungsvermögen liess sich das Gesuchte finden. Solch kleine mit mathematischem Denken zu lösende Aufgaben begegnen uns überall im täglichen Leben. Die Fertigkeiten, die uns helfen, ihnen klug zu begegnen, werden im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt: Logisches Schliessen, Kombinieren und Strukturieren, aber auch Schätzen, ein gutes Gefühl für Grössenordnungen oder das Erkennen von Zusammenhängen und von Widersprüchen.

Die Mitglieder des deutschschweizerischen Känguru-Komitees hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall an ihren Schulen organisiert haben, dass sich die Teilnehmenden mit Freude den mathematischen Aufgaben zugewandt hatten und Lust auf weitere bekommen haben. Dazu finden sich in der Broschüre neben den Aufgaben der Klassenstufen 7/8, 9/10 und 11–13 samt Lösungshinweisen viele zusätzliche Knobeleien.

Beim Känguru-Wettbewerb sind in den Klassenstufen 7 bis 13 jeweils 30 Aufgaben zu lösen. Für die Aufgaben 1 bis 10 können jeweils 3, für die Aufgaben 11 bis 20 jeweils 4 und für die Aufgaben 21 bis 30 jeweils 5 Punkte erreicht werden. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen. Wird eine Aufgabe nicht bearbeitet, gibt es für die entsprechende Aufgabe 0 Punkte. Jeder Teilnehmer erhält 30 Punkte als Startpunktzahl. So ist 0 die niedrigste mögliche Gesamtpunktzahl, die erreichbare Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, M. Manni, F. Meier, Dr. A. Noack, Hj. Stocker und Dr. D. Vigerske erarbeitet. Ein Teil der Knobeleien stammt aus der Feder von Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

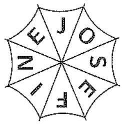
Klassenstufen 7 und 8

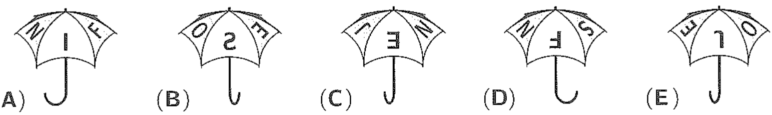
1. Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $510{,}2 \cdot 2{,}015$?

(**A**) 1 (**B**) 10 (**C**) 100 (**D**) 1000 (**E**) 10000

Lösung: Da die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten weit auseinanderliegen, ist das grobe Runden von $510{,}2 \cdot 2{,}015 = 1028{,}053$ durch $500 \cdot 2 = 1000$ ausreichend. (**D**) ist die Lösung.

2. Zum Geburtstag hat Josefine einen Regenschirm bekommen. Obendrauf steht ihr Name. Welches Bild zeigt Josefines Regenschirm?





(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

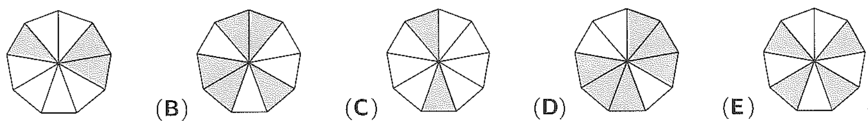
Lösung: Wer das Blatt dreht und von oben auf die Bilder der Schirme schaut, sieht leicht, dass nur (**C**) die Lösung sein kann. In (**A**) steht das F auf dem Kopf. In (**B**) und (**E**) ist die Reihenfolge der Buchstaben verkehrt und das S bzw. das J gespiegelt. Und die Buchstaben in (**D**) sind auf Josefines Schirm gar nicht benachbart.

3. Oma Elke strickt für jeden ihrer Enkelsöhne ein Paar Socken und für jede ihrer Enkeltöchter ein Paar Handschuhe. Insgesamt strickt sie 12 Socken und 8 Handschuhe. Wie viele Enkel hat Oma Elke?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Oma Elke strickt für $12 : 2 = 6$ Enkelsöhne Socken und für $8 : 2 = 4$ Enkeltöchter Handschuhe. Sie hat folglich $6 + 4 = 10$ Enkel.

4. In welchem der regelmäßigen Neunecke ist genau ein Drittel der gesamten Fläche grau?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

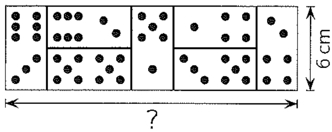
Lösung: Jedes der 5 Neunecke ist in 9 gleich große Teile zerlegt. Es muss ein Drittel der Fläche grau sein, was 3 grauen Teilen entspricht. Das ist nur bei (**A**) der Fall.

5. Der Zug von Bonn nach Mainz fährt durch Bingen. Insgesamt fährt er etwa 1 Stunde und 25 Minuten. Von Bingen nach Mainz braucht er etwa 15 Minuten. Wie lange etwa braucht er von Bonn bis Bingen?

(**A**) 55 Minuten (**B**) 60 Minuten (**C**) 65 Minuten (**D**) 70 Minuten (**E**) 75 Minuten

Lösung: Für die Strecke von Bonn bis Bingen braucht der Zug etwa 15 Minuten weniger als für die gesamte Strecke, d. h. etwa 1 Stunde und 10 Minuten. Das sind 70 Minuten.

6. Sieben gleich große rechteckige Dominosteine sind zu dem abgebildeten Rechteck gelegt. Dieses Rechteck ist 6 cm breit. Wie lang ist es?



(**A**) 12 cm (**B**) 15 cm (**C**) 16 cm (**D**) 18 cm (**E**) 21 cm

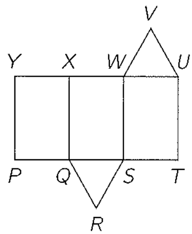
Lösung: Da eine kurze Seite eines Dominosteins genau halb so lang ist wie eine lange Seite, also 3 cm, ist das Rechteck $3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 6\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$ lang.

7. Elias zeichnet ein Dreieck mit den Seitenlängen 6 cm, 10 cm und 11 cm und ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Umfang wie das erste Dreieck hat. Welche Seitenlänge hat das gleichseitige Dreieck?

(**A**) 10 cm (**B**) 9 cm (**C**) 8 cm (**D**) 7 cm (**E**) 6 cm

Lösung: Beide Dreiecke haben denselben Umfang, dieser beträgt $6\,\text{cm} + 10\,\text{cm} + 11\,\text{cm} = 27\,\text{cm}$. Da das zweite Dreieck gleichseitig ist, beträgt seine Seitenlänge $27\,\text{cm} : 3 = 9\,\text{cm}$.

8. Aus dem rechts abgebildeten Netz wird ein dreiseitiges Prisma gefaltet. Mit welchen Punkten fallen dabei die Punkte U und V zusammen?



(**A**) mit X und W (**B**) mit Y und X (**C**) mit W und Y
(**D**) mit T und R (**E**) mit R und S

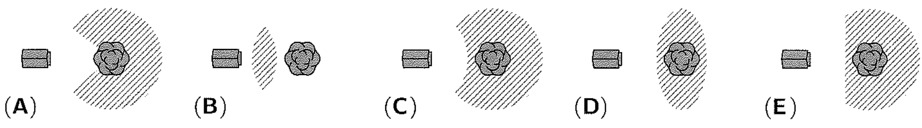
Lösung: Wir stellen uns vor, dass die Deckfläche, also das Dreieck WUV, nach vorn geklappt und dann die Mantelfläche von links nach rechts vorn herum gefaltet wird. Dabei fällt U mit Y zusammen und V mit X.

9. Welcher der folgenden Brüche ist kleiner als 3?

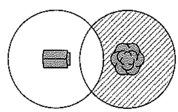
(**A**) $\frac{31}{8}$ (**B**) $\frac{32}{9}$ (**C**) $\frac{33}{10}$ (**D**) $\frac{34}{11}$ (**E**) $\frac{35}{12}$

Lösung: Ein Bruch ist genau dann kleiner als 3, wenn sein Zähler weniger als dreimal so groß wie sein Nenner ist. Das ist nur bei (**E**) der Fall: $\frac{35}{12} < \frac{36}{12} = 3$.

10. Die Eichhörnchen im Garten bewegen sich auf dem Boden nie weiter als 5 m von ihrem Baum weg und halten von der Hundehütte immer mindestens 5 m Abstand. In einem der folgenden Bilder ist der gesamte Bereich schraffiert, in dem sich die Eichhörnchen auf dem Boden aufhalten. In welchem?



Lösung: Die Eichhörnchen bewegen sich stets <u>innerhalb</u> eines Kreises mit Radius 5 m um ihren Baum, aber stets <u>außerhalb</u> eines Kreises mit Radius 5 m um die Hundehütte. Wären Baum und Hundehütte mindestens 10 m voneinander entfernt, würden sich diese beiden Kreise nicht schneiden und der Aufenthaltsbereich der Eichhörnchen auf dem Boden wäre eine komplette Kreisfläche. Das zeigt keines der Bilder in den Antwortmöglichkeiten. Folglich müssen Baum und Hundehütte weniger als 10 m voneinander entfernt sein. Den Aufenthaltsbereich der Eichhörnchen auf dem Boden zeigt dann Bild (**C**).



11. Jeder Stern in $2 \star 0 \star 1 \star 5 \star 2 \star 0 \star 1 \star 5 \star 2 \star 0 \star 1 \star 5 = 0$ soll so durch $+$ oder $-$ ersetzt werden, dass eine korrekte Gleichung entsteht. Welches ist die kleinste Anzahl an Sternen, die durch $+$ ersetzt werden müssen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Durch Probieren lässt sich leicht herausfinden, dass ein $+$ nicht genügt, das Ergebnis der Rechnung wäre stets negativ. Zwei $+$ genügen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$2-0-1+5-2-0-1+5-2-0-1-5=0$$

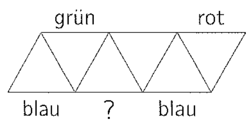
Die Aufgabe lässt sich aber auch ohne Probieren lösen: Damit das Ergebnis der Rechnung 0 ist, muss die Summe der Zahlen, die positiv in die Rechnung eingehen, ebenso groß sein wie die Summe der Zahlen, die negativ in die Rechnung eingehen. Die Summe der Zahlen, die positiv in die Rechnung eingehen, muss somit halb so groß wie die Summe aller Zahlen sein, also $3 \cdot (2+0+1+5) : 2 = 12$. Abzüglich der 2 vorn bleibt die Summe 10, die sich mit möglichst wenigen Pluszeichen erreichen lässt, wenn man vor zwei Fünfen ein $+$ schreibt.

12. Im Jugendorchester wurden alle Jungen in verschiedenen Monaten geboren und alle Mädchen an verschiedenen Wochentagen. Käme jedoch ein weiteres Mitglied zum Orchester dazu, so wäre ganz sicher eine dieser beiden Aussagen falsch. Wie viele Jugendliche sind im Jugendorchester?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 23

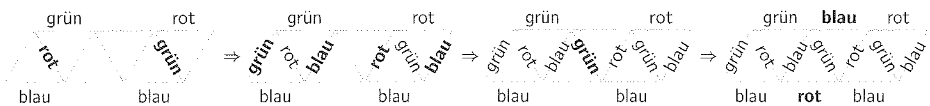
Lösung: Die Anzahl der Jungen ist höchstens 12, und die Anzahl der Mädchen ist höchstens 7. Da eine der Aussagen ganz sicher falsch wird, sobald ein neues Mitglied zum Orchester dazukommt, muss die Anzahl der Jungen genau 12 und die Anzahl der Mädchen genau 7 sein. Das Orchester hat folglich $12 + 7 = 19$ Mitglieder.

13. Jede Dreiecksseite in der rechts abgebildeten Figur soll entweder rot, grün oder blau gefärbt werden. Dabei soll jedes Dreieck eine rote, eine grüne und eine blaue Seite haben. Vier Dreiecksseiten sind bereits gefärbt. Welche Farbe muss die Seite mit dem Fragezeichen bekommen?



(**A**) rot (**B**) grün (**C**) blau
(**D**) Alle Farben sind möglich. (**E**) Eine solche Färbung der Figur existiert nicht.

Lösung: Die Farbe einer Dreiecksseite kann eindeutig bestimmt werden, wenn sie zu einem Dreieck gehört, in dem die Farben der beiden anderen Dreiecksseiten bekannt sind, oder wenn sie zu zwei Dreiecken mit je einer bekannten Farbe gehört und diese beiden Farben unterschiedlich sind. Mit dieser Überlegung finden wir nacheinander die Farben der Dreiecksseiten wie folgt:



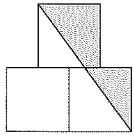
Die Farbe der Seite mit dem Fragezeichen ist eindeutig bestimmt: Sie muss rot sein.

14. Samuel hat die Längen von drei der vier Seiten eines Rechtecks addiert und als Ergebnis 26 cm erhalten. Semira hat bei demselben Rechteck ebenfalls die Längen von drei der vier Seiten addiert und als Ergebnis 28 cm bekommen. Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?

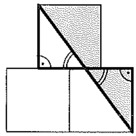
(**A**) $27\,\text{cm}^2$ (**B**) $40\,\text{cm}^2$ (**C**) $45\,\text{cm}^2$ (**D**) $64\,\text{cm}^2$ (**E**) $80\,\text{cm}^2$

Lösung: Da Samuel und Semira unterschiedliche Ergebnisse erhalten haben, müssen die Rechtecksseiten unterschiedlich lang sein. Die Länge der beiden längeren Seiten sei a, die der beiden kürzeren sei b. Samuel hat $a + b + b = 26\,\text{cm}$ berechnet und Semira $a + a + b = 28\,\text{cm}$. Also ist a um $28\,\text{cm} - 26\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$ größer als b. Setzen wir $a = b + 2\,\text{cm}$ in Samuels Rechnung ein, erhalten wir $b = 8\,\text{cm}$ und daraus $a = 10\,\text{cm}$. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $8\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 80\,\text{cm}^2$.

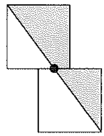
15. Jedes der rechts abgebildeten Quadrate hat die Seitenlänge 1 cm. Das obere Quadrat liegt genau mittig über der gemeinsamen Seite der beiden unteren Quadrate. Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche?



(**A**) $\frac{2}{3}\,\text{cm}^2$ (**B**) $\frac{3}{4}\,\text{cm}^2$ (**C**) $1\,\text{cm}^2$ (**D**) $1\frac{1}{4}\,\text{cm}^2$ (**E**) $1\frac{1}{3}\,\text{cm}^2$



Lösung: Die beiden dick umrandeten Dreiecke sind zueinander kongruent, denn sie stimmen in den Größen ihrer Innenwinkel sowie der Länge der dem Scheitelwinkel $\sphericalangle$ gegenüberliegenden Seite überein. Insbesondere haben sie denselben Flächeninhalt. Der Flächeninhalt der grauen Fläche ist somit genauso groß wie der Flächeninhalt von einem der Quadrate, also $1\,\text{cm}^2$.



Wer wie im unteren Bild das weiße Quadrat weglässt, erhält übrigens eine Figur, die punktsymmetrisch zu dem dick markierten Punkt ist. Bei dieser Punktspiegelung werden die weiße und die graue Fläche gerade vertauscht. Die graue Fläche macht also die Hälfte dieser Figur aus, $1\,\text{cm}^2$.

16. Frau Müller hat einen großen Strauß mit 10 Stängeln herrlich duftender Lilien bekommen. Einige sind elegante weiße Lilien mit jeweils 2 Blüten, die anderen sind leuchtend gelbe Lilien mit jeweils 5 Blüten. Wie viele Blüten kann Frau Müllers Strauß *ganz gewiss nicht* haben?

(**A**) 26 (**B**) 29 (**C**) 35 (**D**) 37 (**E**) 44

Lösung: Wir überlegen, wie viele Blüten Frau Müllers Strauß haben könnte. Da es einige Stängel von beiden Sorten gibt, sind es gewiss mindestens 2 weiße und mindestens 2 gelbe Lilien. Wären es 8 weiße Lilien und 2 gelbe, so hätte der Strauß 26 Blüten. Wären es 7 weiße Lilien und 3 gelbe, so wären es insgesamt 29 Blüten – das sind wegen $5 - 2 = 3$ also 3 Blüten mehr als 26. Wären es 6 weiße Lilien und 4 gelbe, so wären es wieder 3 Blüten mehr, also 32 Blüten. Mit dieser Überlegung finden wir, dass alle möglichen Blütenzahlen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. In Frage kommen $26, 29, 32, 35, 38, 41, 44$. Die 37 ist nicht in dieser Liste zu finden, (**D**) ist die Lösung.

Für welche vier Ziffern A, B, C, D gilt

$$AA \cdot AA + BB = CCDD\,?$$

17. Auf unserer dreitägigen Radtour in den Niederlanden sind wir von Sluis an der Grenze zu Belgien bis Den Haag auf dem Europaradweg R1 geradelt. Die erste Nacht haben wir nach einem Drittel der Gesamtstrecke in Veere verbracht. Am zweiten Tag sind wir 75 km bis Brielle gefahren und am dritten Tag das letzte Viertel der Gesamtstrecke. Wie viele Kilometer waren wir insgesamt unterwegs?

(**A**) 150 (**B**) 160 (**C**) 165 (**D**) 175 (**E**) 180

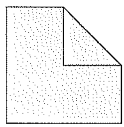
Lösung: Die 75 km, die am zweiten Tag zurückgelegt wurden, sind $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Die Länge der Gesamtstrecke ist damit $75\,\text{km} : 5 \cdot 12 = 180\,\text{km}$.

18. In der Zeitung stand, dass bei dem starken Regen gestern 15 Liter Wasser pro Quadratmeter fielen. Um wie viel stieg dabei der Wasserspiegel im großen Schwimmbecken im Freibad?

(**A**) um 150 cm (**B**) um 15 cm (**C**) um 1,5 cm
(**D**) um 0,15 cm (**E**) Das hängt von der Größe des Schwimmbeckens ab.

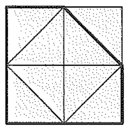
Lösung: Der Anstieg der Wasserhöhe ist relativ pro Quadratmeter, hängt also nicht von den genauen Maßen des Beckens ab. Da das Wasservolumen das Produkt aus dem Flächeninhalt der Grundfläche und der Wasserhöhe ist, ergibt sich der gesuchte Anstieg, wenn wir das Wasservolumen pro Quadratmeter durch den Inhalt eines Quadratmeters teilen. Da $1\,\ell = 1\,\text{dm}^3 = 1000\,\text{cm}^3$ sind, stieg der Wasserspiegel folglich um $15\,\ell : 1\,\text{m}^2 = 15000\,\text{cm}^3 : 10000\,\text{cm}^2 = 1{,}5\,\text{cm}$.

19. Eine Ecke eines Quadrats wurde auf den Mittelpunkt des Quadrats gefaltet. Der Flächeninhalt des dabei entstandenen unregelmäßigen Fünfecks und der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Welchen Flächeninhalt hat das Fünfeck?



(**A**) 7 (**B**) 15 (**C**) 25 (**D**) 31 (**E**) 49

Lösung: Das Quadrat kann wie abgebildet in 8 kongruente und damit flächengleiche Dreiecke zerlegt werden. Das Fünfeck besteht aus 7 dieser Dreiecke. Da sich die Flächeninhalte des Quadrats und des Fünfecks um genau 1 unterscheiden, hat jedes dieser Dreiecke den Flächeninhalt 1. Der Flächeninhalt des Fünfecks beträgt 7.



20. Zauberin Minerva wollte von ihren Schülern Albus, Severus, Phineas, Quirinus und Rubeus wissen, wie viele von ihnen fleißig die neuen Zaubersprüche auswendig gelernt haben. Die fünf gaben seltsamerweise jeder eine andere Antwort:

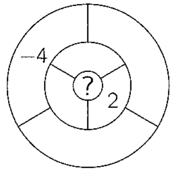
„Keiner.“ „Genau einer.“ „Genau zwei.“ „Genau drei.“ „Genau vier.“

Belegt mit einem Wahrheitszauber sprachen nur genau diejenigen die Wahrheit, die wirklich fleißig waren – die anderen logen. Wie viele der fünf Schüler waren wirklich fleißig?

(**A**) keiner (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

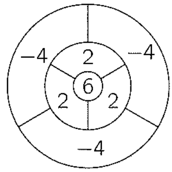
Lösung: Da die Anzahl der fleißigen Schüler eine feste Zahl ist, kann nur höchstens eine der Antworten wahr sein. Und da diejenigen Schüler, die die Wahrheit sprechen, genau die fleißigen Schüler sind, kann folglich höchstens ein Schüler fleißig gewesen sein. Wäre kein Schüler fleißig gewesen, so wären alle Aussagen gelogen, insbesondere die erste, die in diesem Fall jedoch der Wahrheit entspräche. Also war genau ein Schüler fleißig, und zwar derjenige, der „Genau einer.“ geantwortet hat.

21. In jedes der sieben Felder in der Figur soll eine Zahl so eingetragen werden, dass jede Zahl gleich der Summe aller Zahlen in den angrenzenden Feldern ist. Zwei Zahlen sind bereits eingetragen. Welche Zahl gehört in das mittlere Feld?



(**A**) −2 (**B**) 1 (**C**) −4 (**D**) 0 (**E**) 6

Lösung: An das Feld mit der 2 grenzt genau ein Feld mehr als an das Feld mit der −4, und zwar das mittlere Feld mit dem Fragezeichen. Da die Summe der an das Feld mit der 2 angrenzenden Felder um $2-(-4)=6$ größer ist als die Summe der an das Feld mit der −4 angrenzenden Felder, gehört in das mittlere Feld also die 6. Die einzige mögliche Eintragung ist rechts zu sehen.



22. Einst hatte ein Bäcker vom Müller mehrere Säcke Mehl geholt, ein jeder unterschiedlich schwer. Sein Geselle, der sich im Rechnen übte, fand, dass die beiden leichtesten Säcke 25 % der Gesamtmasse ausmachten. Die drei schwersten Säcke entsprachen 60 % der Gesamtmasse. Wie viele Säcke Mehl hatte der Bäcker vom Müller insgesamt geholt?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Die Säcke, die nicht zu den beiden leichtesten und nicht zu den drei schwersten gehören, machen $100\,\%-25\,\%-60\,\%=15\,\%$ der Gesamtmasse aus. Der leichteste aller Säcke macht sicher weniger als $25\,\%:2=12{,}5\,\%$ der Gesamtmasse aus und der zweitleichteste sicher mehr als 12,5 %. Folglich machen auch alle anderen Säcke sicher mehr als 12,5 % der Gesamtmasse aus. Da bereits $2\cdot 12{,}5\,\%=25\,\%>15\,\%$ ist, können die 15 % der Gesamtmasse, die nicht in den Rechnungen des Gesellen vorkommen, nur dem Gewicht eines einzelnen Sacks entsprechen, also dem Gewicht des drittleichtesten Sacks. Der viertleichteste gehört bereits zu den drei schweren Säcken. Also hat der Bäcker genau 6 Säcke Mehl geholt. Ihr genauer Anteil an der Gesamtmasse ist nicht eindeutig bestimmt, es könnten zum Beispiel 11 %, 14 %, 15 %, 16 %, 18 % und 26 % sein.

23. In einem englischen Mathebuch hat unsere Lehrerin eine Knobelaufgabe entdeckt und sie für uns übersetzt: „In $ODD+ODD=EVEN$ sind die Buchstaben O, D, E, V, N durch fünf verschiedene Ziffern zu ersetzen, sodass eine korrekte Gleichung entsteht." Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Da die Summe zweier dreistelliger Zahlen ganz sicher kleiner als $1000+1000=2000$ ist, folgt $E=1$. Da $D+D=2D$ gerade ist, muss, da in der Summe an der Zehnerstelle eine 1 steht, an der Einerstelle ein Übertrag entstehen. Somit endet $2D$ auf 0, das heißt $D=5$ und $N=0$. Da $O\geq 5$ und $D=5$ ist, kann O nur eine der Zahlen 6, 7, 8 oder 9 sein und V entsprechend 3, 5, 7 bzw. 9. Der zweite Fall ($O=7$, $V=5$) entfällt, da bereits $D=5$ gilt, und ebenso entfällt der letzte Fall, da hier O und V nicht verschieden sind. Also gibt es zwei Möglichkeiten, das Kryptogramm zu lösen: $655+655=1310$ und $855+855=1710$.

Wie groß ist p, wenn die Zahlen $p+1$, $p+5$ und $p+15$ Primzahlen sind? Gibt es mehrere Möglichkeiten oder nur eine?

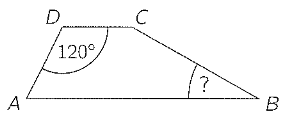
24. Bei einer Aufnahmeprüfung erreichten die Teilnehmer im Durchschnitt 18 Punkte. 60 % der Teilnehmer haben bestanden, die anderen sind durchgefallen. Diejenigen, die bestanden haben, erreichten im Durchschnitt 24 Punkte. Welche Durchschnittspunktzahl hatten diejenigen, die durchgefallen sind?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Wenn wir die Anzahl aller Teilnehmer mit n bezeichnen, dann haben von diesen insgesamt $\frac{60}{100} \cdot n = 0{,}6 \cdot n$ Teilnehmer bestanden, $0{,}4 \cdot n$ Teilnehmer sind durchgefallen. Die Gesamtzahl aller vergebenen Punkte ist $18 \cdot n$, da die Teilnehmer im Durchschnitt 18 Punkte erreichten. An diejenigen, die bestanden haben, wurden insgesamt $24 \cdot 0{,}6 \cdot n$ Punkte vergeben, an diejenigen, die durchgefallen sind, insgesamt $18 \cdot n - 24 \cdot 0{,}6 \cdot n$ Punkte. Ihr Punktedurchschnitt betrug somit

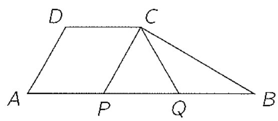
$$\frac{18 \cdot n - 24 \cdot 0{,}6 \cdot n}{0{,}4 \cdot n} = \frac{18 \cdot n}{0{,}4 \cdot n} - \frac{24 \cdot 0{,}6 \cdot n}{0{,}4 \cdot n} = \frac{180}{4} - \frac{24 \cdot 6}{4} = 45 - 36 = 9\,.$$

25. Im Viereck $ABCD$ sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zueinander parallel. Die Seite $\overline{AD}$ ist genauso lang wie die Seite $\overline{CD}$, die Seite $\overline{AB}$ ist dreimal so lang wie die Seite $\overline{CD}$. Der Winkel ADC ist 120° groß. (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*) Wie groß ist der Winkel CBA?



(**A**) 22,5° (**B**) 25° (**C**) 30° (**D**) 37,5° (**E**) 45°

Lösung: Auf der Seite $\overline{AB}$ seien P und Q diejenigen Punkte, für die $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}| = |\overline{QB}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}|$ gilt. Dann ist das Viereck $APCD$ ein Rhombus und, da $\angle CPA = \angle ADC = 120°$ ist, $\angle QPC = 180° - 120° = 60°$. Dreieck PQC ist gleichschenklig mit $|\overline{PQ}| = |\overline{PC}|$, seine Basiswinkel sind $\frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$ groß. Dreieck PQC ist also gleichseitig. Es ist $\angle BQC = 180° - 60° = 120°$, und wegen $|\overline{QC}| = |\overline{QB}|$ ist Dreieck QBC gleichschenklig. Der gesuchte Winkel CBA ist gleich dem Basiswinkel CBQ im gleichschenkligen Dreieck QBC und somit $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$ groß.

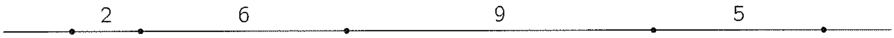


26. Adrian hat auf einer Geraden fünf Punkte markiert und alle Abstände zwischen je zwei beliebigen dieser Punkte gemessen. Die Zahlenwerte, die Adrian erhalten hat, sind in aufsteigender Reihenfolge: 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 und 22. Für welche Zahl steht k?

(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

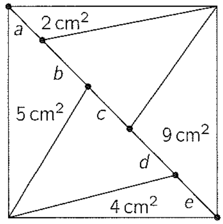
Lösung: Die beiden äußeren der fünf markierten Punkte haben ganz sicher den größten Abstand, also 22. Gewiss ist der Abstand 2 ein Abstand zwischen zwei benachbarten der markierten Punkte und ebenso die Abstände 5 und 6, da es keine kleineren Abstände gibt, die sich zu 5 oder 6 addieren. Der vierte Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten ist folglich $22 - 2 - 5 - 6 = 9$. Da $8 = 2 + 6$ die einzige mögliche Kombination der kleineren Zahlenwerte ist, sind die Strecken der Länge 2 und 6 benachbart. Der zweitgrößte Zahlenwert 20 kann als Abstand nur gemessen werden, wenn 2 der Abstand zwischen den beiden linken oder den beiden rechten der markierten Punkte ist. Dann sind die beiden Strecken der Längen 5 und 9 ganz sicher benachbart. Die Strecke, die sich aus diesen beiden zusammensetzt, hat die Länge $5 + 9 = 14$. Das muss die gesuchte Zahl sein.

Die korrekte Anordnung der Punkte mit den dazugehörigen Abständen zwischen benachbarten Punkten ist in dieser oder in umgekehrter Reihenfolge:



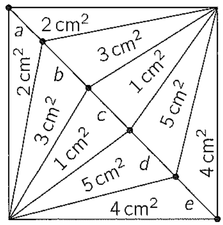
Die Abstände zwischen je zwei dieser Punkte sind wie gegeben bzw. berechnet: 2, 6, 9, 5, $2+6=8$, $6+9=15$, $9+5=14$, $2+6+9=17$, $6+9+5=20$ und $2+6+9+5=22$.

27. Ein Quadrat ist durch eine Diagonale und vier Strecken in Dreiecke zerlegt. Für einige dieser Dreiecke ist der Flächeninhalt angegeben. Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt $30\,\text{cm}^2$. (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*) Welcher der Diagonalenabschnitte ist am längsten?



(**A**) a (**B**) b (**C**) c (**D**) d (**E**) e

Lösung: Die eingezeichnete Diagonale zerlegt das Quadrat in zwei kongruente Dreiecke mit dem Flächeninhalt $30\,\text{cm}^2 : 2 = 15\,\text{cm}^2$. Zeichnen wir alle Verbindungsstrecken zwischen markierten Punkten und Quadratecken ein, so wird das Quadrat in 10 Dreiecke zerlegt, die je einen der Abschnitte a, b, c, d oder e als Grundseite und alle dieselbe zugehörige Höhe haben. Dreiecke mit derselben Grundseite sind dabei zueinander kongruent und haben denselben Flächeninhalt, sodass sich der Flächeninhalt aller 10 Dreiecke ermitteln lässt. Der Flächeninhalt der beiden Dreiecke mit Grundseite c ergibt sich dabei jeweils als Differenz zu $15\,\text{cm}^2$. Weil alle 10 Dreiecke dieselbe Höhe haben, haben diejenigen mit dem größten Flächeninhalt auch die längste Grundseite. Also ist d am längsten.



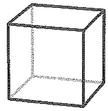
28. An der Tafel stehen fünf natürliche Zahlen. Peter berechnet alle möglichen Summen von je zwei dieser Zahlen, erhält aber nur drei verschiedene Ergebnisse: 57, 70 und 83. Welches ist die größte Zahl an der Tafel?

(**A**) 69 (**B**) 56 (**C**) 53 (**D**) 48 (**E**) 42

Lösung: Wir bezeichnen die fünf Zahlen mit a, b, c, d, e und betrachten die vier Summen $a+b$, $a+c$, $a+d$ und $a+e$. Da Peter nur drei verschiedene Ergebnisse erhalten hat, müssen zwei dieser vier Summen und somit mindestens zwei der fünf Zahlen an der Tafel gleich sein. Wählt Peter zwei gleiche Zahlen als Summanden, dann erhält er eine geradzahlige Summe, was nur die 70 sein kann. Also kommt die 35 unter den 5 Zahlen vor, und zwar mindestens zweimal. Da Peter Summen verschieden von 70 erhalten hat, ist sicher, dass nicht fünfmal die 35 an der Tafel steht. Dabei treten Zahlen, die ungleich 35 sind, nicht mehrfach auf, da es keine geradzahlige Summe außer 70 gibt. Wäre nur eine der Zahlen verschieden von 35, hätte Peter nur zwei verschiedene Summen erhalten. Also gibt es mindestens zwei von 35 verschiedene Zahlen x und y an der Tafel und es gilt $35+x=57$ und $35+y=83$ (oder umgekehrt). An der Tafel stehen also die Zahlen $57-35=22$ und $83-35=48$, ihre Summe $22+48=70$ ist eines von Peters Ergebnissen. Wäre die fünfte Zahl z größer als 48, so wäre $48+z > 2\cdot 48 = 96 > 83$. Also ist die größte Zahl an der Tafel 48.

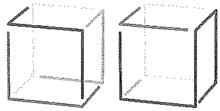
Für die fünfte Zahl z kann nur $22+z=57$, $35+z=70$ und $48+z=83$ gelten, also $z=35$. An der Tafel stehen die Zahlen 22, 35, 35, 35 und 48.

29. Aila will einen Drahtwürfel mit der Kantenlänge 10 cm bauen. Sie hat dafür biegsame Drähte der Längen 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm, 60 cm und 70 cm, von jeder Sorte ausreichend viele. Welches ist die kleinste Anzahl an Drähten, die Aila benötigt, wenn sich die Drähte nicht überlappen dürfen?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Da der Würfel 12 Kanten hat, die Gesamt-Kantenlänge also 120 cm beträgt, liegt es nahe, zunächst mit zwei Drähten der Länge 50 cm und 70 cm oder 60 cm und 60 cm zu probieren. Wer das versucht, wird keine Lösung des Problems finden, aber vielleicht dabei bemerken, dass an jeder Ecke nur jeweils ein Draht „abknicken" kann, die dritte an diese Ecke grenzende Kante jedoch zu einem Draht<u>ende</u> gehören muss. Da es 8 Ecken gibt, kann es folglich nicht weniger als 8 Drahtenden, also ganz sicher nicht weniger als 4 Drähte geben. Dass sich der Würfel mit 4 Drähten tatsächlich bauen lässt, zeigen die beiden Beispiele. Die kleinste Anzahl an Drähten, die Aila benötigt, ist folglich 4.



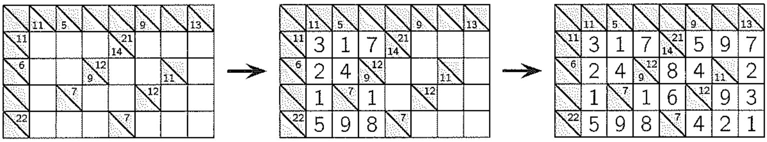
30. Gestern hat mir meine Freundin Ekin ihre 7-stellige Telefonnummer diktiert. Auf meinen Zettel habe ich jedoch nur 6 Ziffern geschrieben. Ich weiß nicht, welche Ziffer fehlt und auch nicht an welcher Stelle. Natürlich kann die Telefonnummer auch mit einer 0 beginnen. Wie viele 7-stellige Nummern kommen für Ekins Telefonnummer in Frage?

(**A**) 55 (**B**) 60 (**C**) 62 (**D**) 64 (**E**) 68

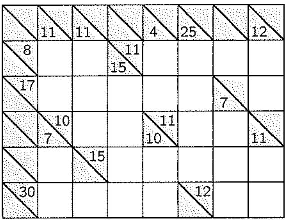
Lösung: Wir bezeichnen die aufgeschriebene Ziffernfolge mit $ABCDEF$. Es gibt 7 Stellen, an die die fehlende Ziffer gehören kann und, da es für jede Ziffer 10 Möglichkeiten gibt, lassen sich leicht $7 \cdot 10 = 70$ mögliche Nummern finden, von denen jedoch einige gleich sind. An der ersten Stelle kann jede der 10 möglichen Ziffern von 0 bis 9 fehlen. Das entspricht 10 verschiedenen Nummern. Für die zweite Stelle kommen zunächst ebenfalls 10 Ziffern in Frage. Allerdings haben wir die Nummer $AABCDEF$, die entsteht, wenn wir an die zweite Stelle die Ziffer A setzen, bereits erhalten, als wir an die erste Stelle die Ziffer A gesetzt haben. Wir erhalten also nur 9 weitere mögliche Nummern. Ebenso kommen für die dritte Stelle nur 9 Ziffern in Frage, denn die Nummer $ABBCDEF$, die entsteht, wenn wir an die dritte Stelle die Ziffer B setzen, haben wir bereits erhalten, als wir an die zweite Stelle die Ziffer B bzw., falls $A = B$ ist, an die erste Stelle die Ziffer B gesetzt haben. Analog finden wir für jede der anderen Stellen 9 mögliche Nummern, sodass insgesamt für Ekins Telefonnummer $10 + 6 \cdot 9 = 64$ Nummern in Frage kommen. Unter den zuerst gezählten 70 Nummern gibt es also nur 64 unterschiedliche Nummern.

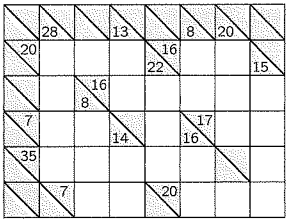
Kakuro – Kreuzsummenrätsel

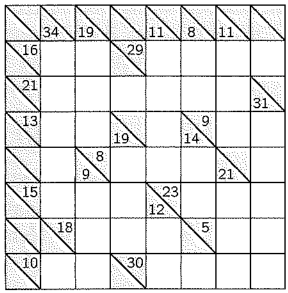
Bei dem logischen Zahlenrätsel Kakuro ist in jedes weiße Kästchen eine der Zahlen von 1 bis 9 einzutragen. Dabei soll die Summe der Zahlen in Streifen waagerecht oder senkrecht benachbarter weißer Felder der vorgegebenen Zahl im grauen Feld links daneben bzw. darüber entsprechen. In keiner Summe darf eine Ziffer mehrfach vorkommen. Eine gute Strategie besteht darin, nach Zahlen zu suchen, bei denen die Zerlegung in eine vorgegebene Anzahl von Summanden eindeutig ist. So lässt sich beispielsweise die Zahl 11 nur auf eine Weise in 4 Summanden zerlegen: $11 = 1 + 2 + 3 + 5$. Hier ist ein Beispiel:

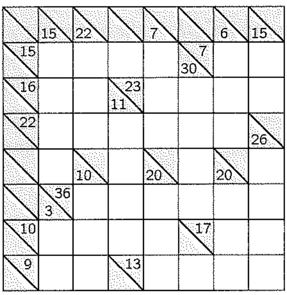


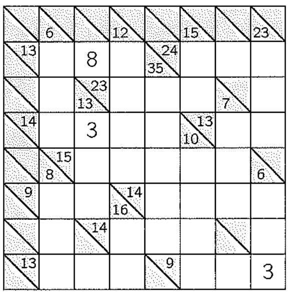
Die folgenden Aufgaben stammen wie auch die Gitterquadrate auf Seite 25 aus dem „Großen Buch der Kopfnüsse" von W. Portugalow, das 2007 für Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus erschien.

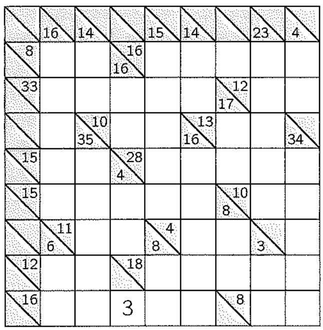








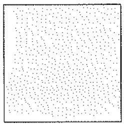




Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 15 als Summe verschiedener natürlicher Zahlen zu schreiben? Wie viele solche Zerlegungen gibt es für die Zahl 20?

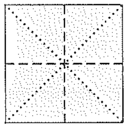
Origami-Oktaeder

Aus 6 quadratischen Blättern Papier lässt sich wie folgt ein Oktaeder basteln.

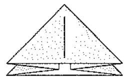


Wir nehmen ein quadratisches Blatt Papier zur Hand.

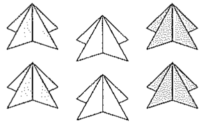
Tipp für die Verwendung von zweifarbigem Papier: Die oben liegende Seite ist am Ende außen zu sehen!



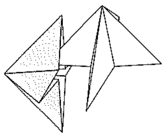
An den gestrichelten Linien wird nach vorn, an den gepunkteten nach hinten gefaltet und wieder auseinandergeklappt.



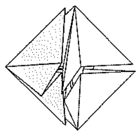
Die rechte und die linke Kante lassen sich nun leicht zwischen die beiden Dreiecke drücken. So entsteht ein Modul.



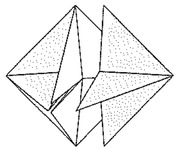
Insgesamt werden 6 solche Module gefaltet.



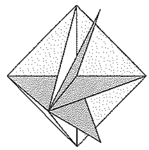
Nun werden die Module mit den Ecken ineinander gesteckt. Die linke Ecke des rechten Moduls wird in die obere Ecke des linken Moduls gesteckt.



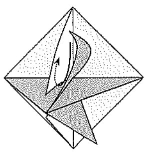
Die linke Ecke des unteren Moduls wird in die untere Ecke des linken Moduls gesteckt.



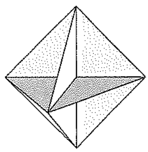
Die rechte Spitze des oberen und des unteren Moduls werden in das rechte Modul gesteckt.



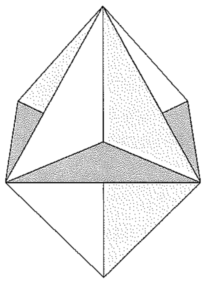
Das fünfte Modul wird auf die vordere Ecke des linken und des rechten Moduls gesteckt.



Nun werden die obere und untere Ecke des fünften Moduls in die vordere Ecke des oberen bzw. unteren Moduls hineingesteckt.

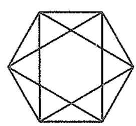


Die letzten beiden Schritte werden mit dem sechsten Modul auf der Rückseite wiederholt.



Fertig ist das Oktaeder!

Wie viele Dreiecke sind in der abgebildeten Figur zu finden?
Wer genau hinschaut und Phantasie hat, kann in der Figur einen dreidimensionalen Körper entdecken. Welchen?



Klassenstufen 9 und 10

1. Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $20{,}15 \cdot 51{,}02$?

(**A**) 100 (**B**) 1000 (**C**) 10000 (**D**) 100000 (**E**) 1000000

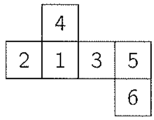
Lösung: Da die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten weit auseinanderliegen, ist das grobe Runden von $20{,}15 \cdot 51{,}02$ durch $20 \cdot 50 = 1000$ ausreichend. (**B**) ist die Lösung.

2. Florian hat T-Shirts und Socken gewaschen. Zuerst hängt er die T-Shirts auf die lange Leine. Dann bittet er seine Freundin Susanne, zwischen je zwei T-Shirts eine Socke zu hängen. Anschließend zählt er stolz 29 Wäschestücke auf der Leine. Wie viele davon sind Socken?

(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Da die Socken stets zwischen zwei T-Shirts gehängt werden, gibt es davon eine weniger als T-Shirts. Also sind es $(29 - 1) : 2 = 14$ Socken.

3. Aus dem abgebildeten Netz faltet Gordon einen Würfel und addiert die Zahlen auf einander gegenüberliegenden Seitenflächen. Welche drei Summen erhält er?



(**A**) 5, 6, 10 (**B**) 4, 7, 10 (**C**) 5, 7, 9 (**D**) 5, 8, 8 (**E**) 4, 6, 11

Lösung: Beim gefalteten Würfel sind die 2 und die 3 sowie die 1 und die 5 auf einander gegenüberliegenden Seiten, also auch die 4 und die 6. Die gesuchten Summen sind 5, 6 und 10.

4. Tamaras neuer USB-Stick hat einen Speicherplatz von 16 Gigabyte, ihr alter hat nur 4 Gigabyte. Der neue USB-Stick ist zu 75 % mit Daten belegt, der alte zu 50 %. Wie viel Gigabyte hat Tamara auf beiden USB-Sticks insgesamt gespeichert?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

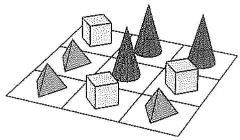
Lösung: Damit das Rechnen einfacher wird, wandeln wir die Prozentzahlen in gekürzte Brüche um: $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ bzw. $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Also sind auf Tamaras neuem Stick $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ Gigabyte, auf dem alten $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ Gigabyte belegt. Insgesamt sind das 14 Gigabyte.

5. In der Zahl 4213 vertauscht Richard zwei Ziffern, sodass er eine möglichst kleine Zahl erhält. Rosi vertauscht in derselben Zahl 4213 zwei Ziffern, sodass sie eine möglichst große Zahl erhält. Wie groß ist die Differenz aus Rosis und Richards Zahl?

(**A**) 2828 (**B**) 3087 (**C**) 1998 (**D**) 2979 (**E**) 3069

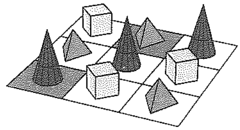
Lösung: Richard muss die 4 gegen die 1 tauschen und erhält 1243. Rosi muss die 2 gegen die 3 tauschen und erhält 4312. Die gesuchte Differenz ist 3069.

6. Auf die neun Felder eines 3×3-Spielfeldes hat Ludwig drei Kegel, drei Würfel und drei Pyramiden gestellt (siehe Bild). Er will solange jeweils zwei Figuren miteinander tauschen, bis in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe ein Kegel, ein Würfel und eine Pyramide steht. Wie oft muss Ludwig mindestens tauschen?



(**A**) einmal (**B**) zweimal (**C**) dreimal (**D**) viermal (**E**) fünfmal

Lösung: Da es zwei waagerechte Reihen gibt, in denen jeweils zwei gleiche Figuren stehen, muss mindestens einmal getauscht werden. Und einmal reicht auch aus, wie das Bild zeigt.



7. Auf der Rückfahrt von einer Exkursion legen Franka, Toni und Angelo ihr letztes Geld zusammen: Franka 80 Cent, Toni 50 Cent, Angelo 20 Cent. Sie kaufen dafür eine Tafel Schokolade und teilen die 30 Stückchen entsprechend ihrem Beitrag zum Kaufpreis auf. Wie viele Stückchen bekommt Angelo?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 10

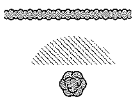
Lösung: Die 30 Schokoladenstückchen der gemeinsam gekauften Tafel kosten 150 Cent. Somit kostet ein Stückchen 150 Cent : 30 = 5 Cent. Dann stehen Angelo, der 20 Cent beigesteuert hat, also 4 Stückchen zu.

8. Welches ist die letzte Ziffer der Summe $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?

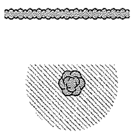
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Es gilt $2015^0 = 1$. Alle Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten von Zahlen, die auf 5 enden, enden selbst auf 5. Die gesuchte letzte Ziffer ist folglich 6.

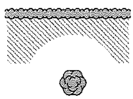
9. Dr. Jekyll sucht einen Schatz, den Mr. Hyde im Garten vergraben hat. Dr. Jekyll weiß, dass der Schatz mindestens 5 m von der Hecke und höchstens 5 m vom Birnbaum entfernt liegt. In einem der folgenden Bilder ist das Gebiet schraffiert, in dem der Schatz mit Sicherheit vergraben liegt. In welchem?



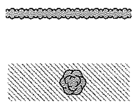
(**A**)



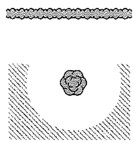
(**B**)



(**C**)

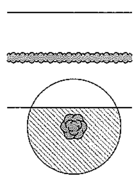


(**D**)



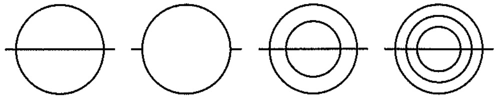
(**E**)

Lösung: Der Schatz liegt mindestens 5 m von der Hecke entfernt, das heißt jenseits von einer der beiden Geraden, die im Abstand von 5 m parallel zur Hecke verlaufen. Er liegt außerdem innerhalb eines Kreises mit Radius 5 m um den Birnbaum. Wäre der Birnbaum mehr als 10 m von der Hecke entfernt, würden sich dieser Kreis und die Gerade nicht schneiden. Dann wäre das Gebiet, in dem der Schatz mit Sicherheit zu finden ist, eine komplette Kreisfläche, die aber in keinem der Bilder in den Antwortmöglichkeiten zu sehen ist. Also muss der Birnbaum weniger als 10 m von der Hecke entfernt sein. Das Gebiet, in dem Dr. Jekyll den vergrabenen Schatz mit Sicherheit findet, zeigt Bild (**B**).



Ein ähnliches Problem ist in Aufgabe 10 in Klassenstufe 7/8 gestellt.

10. Wie viele der abgebildeten Figuren lassen sich zeichnen, ohne dabei den Stift abzusetzen und das Zeichnen neu zu beginnen und ohne eine Linie zweimal zu zeichnen?



(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle vier

Lösung: In einer Zeichnung, die ohne den Stift abzusetzen gezeichnet werden kann, muss an jedem Schnittpunkt von Linien die Anzahl der in diesen Schnittpunkt eingehenden Linien gerade sein (wenn man hinkommt, muss man auch wieder wegkommen). Nur in Anfangs- und Endpunkt darf eine ungerade Anzahl von Linien eingehen. Die erste, dritte und vierte Figur lassen sich in einem Zug zeichnen, bei der zweiten klappt das nicht.

11. Als Else gestern ihr Strickzeug beiseite legte, hatte sie bereits zwei Drittel der geplanten Länge ihres Schals fertig. Sie war jedoch überzeugt, das wäre erst die Hälfte, und strickte tapfer noch einmal genauso viel. Nun ist der Schal 40 cm länger als geplant. Wie lang sollte er ursprünglich werden?

(**A**) 120 cm (**B**) 140 cm (**C**) 160 cm (**D**) 180 cm (**E**) 200 cm

Lösung: Da Else fälschlicherweise insgesamt doppelt so viel strickt, wie sie nach dem gestrigen Weglegen gestrickt hatte, strickt sie ihren Schal bis zu $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ der ursprünglich geplanten Länge, also ein Drittel länger als geplant. Dieses Drittel ist 40 cm lang. Die geplante Länge war demnach $3 \cdot 40\,\text{cm} = 120\,\text{cm}$.

12. Keanu hat aus drei verschiedenen Ziffern alle dreistelligen Zahlen gebildet, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten. Die Summe der beiden größten dieser dreistelligen Zahlen ist 1444. Wie groß ist die Summe der drei Ziffern?

(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

Lösung: Die drei Ziffern seien a, b und c mit $a > b > c$. Die beiden größten Zahlen, die Keanu gebildet hat, sind $100a + 10b + c$ und $100a + 10c + b$. Ihre Summe ist $200a + 11(b + c) = 1444$. Da sie auf 44 endet und $b + c \leq 17$ gilt, kann nur $b + c = 4$ sein. Dann ist $a = 7$ und die gesuchte Summe $a + b + c = 11$. Für b und c gibt es übrigens die beiden Möglichkeiten 1 und 3 bzw. 0 und 4.

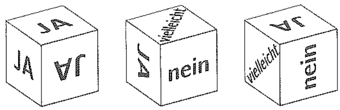
13. Alle vernunftbegabten Wesen auf dem Planeten Horch haben mindestens zwei Ohren. Fernab von allen anderen begegneten sich eines Tages drei Horcher. Da meinte der erste: „Ich sehe 7 Ohren." Der zweite stellte fest: „Ich sehe 8 Ohren." Erstaunt bemerkte der dritte: „Ich sehe nur 5 Ohren." Keiner konnte seine eigenen Ohren sehen. Wie viele Ohren hat der dritte Horcher?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Der dritte Horcher sieht 5 Ohren, und da jeder Horcher mindestens zwei Ohren hat, muss von den beiden Horchern, die er sieht, einer 2 und einer 3 Ohren haben. Folglich hat der dritte Horcher $8 - 3 = 7 - 2 = 5$ Ohren.

Hier ist eine Lösungsvariante, bei der die Mindestzahl an Ohren nicht benutzt wird. Addieren wir 7, 8 und 5, so haben wir jedes Ohr doppelt gezählt. Die Summe der Anzahl der Ohren der drei Horcher ist folglich 10. Ziehen wir davon die Anzahl der Ohren ab, die der dritte Horcher sieht, bleibt die Zahl seiner Ohren übrig. Es sind 5.

14. Abgebildet ist mein Entscheidungswürfel in drei verschiedenen Positionen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit diesem Würfel ein JA zu würfeln?



(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{5}{9}$ (**D**) $\frac{2}{3}$ (**E**) $\frac{5}{6}$

Lösung: Es gibt wegen des ersten Würfelbildes mindestens 3 JA-Seiten. Aus den anderen beiden Ansichten geht hervor, dass es mindestens 3 Seiten gibt, die nicht mit JA beschriftet sind, denn die beiden nein-Seiten sind nicht dieselben. Folglich sind es genau 3 JA-Seiten. Die Wahrscheinlichkeit, ein JA zu würfeln, ist $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

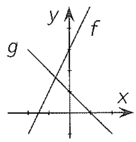
15. Ein würfelförmiger Behälter mit einer Kantenlänge von 10 cm ist genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt. In diesen Behälter wird ein Würfel aus Stahl mit einer Kantenlänge von 2 cm hineingelegt. Welche Höhe hat der Wasserspiegel in dem Behälter jetzt?

(**A**) 5,10 cm (**B**) 5,09 cm (**C**) 5,08 cm (**D**) 5,07 cm (**E**) 5,06 cm

Lösung: Um die Aufgabe zu lösen, ist die Höhe eines Quaders auszurechnen, der eine Grundfläche von $100\,\text{cm}^2$ und ein Volumen von $2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^3$ hat. Wir rechnen also $\frac{8\,\text{cm}^3}{100\,\text{cm}^2} = 0{,}08\,\text{cm}$. Das Wasser steht 5,08 cm hoch.

16. Die Koordinatenebene wird durch die x-Achse, die y-Achse und die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = 2x + 3$ und $g(x) = 1 - x$ in mehrere Gebiete zerlegt. Wie viele Gebiete sind das?

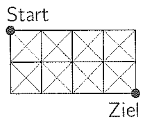
(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12



Lösung: Wir zeichnen die Graphen der beiden gegebenen linearen Funktionen in ein Koordinatensystem und zählen die Gebiete; es sind 11.

Ein ähnliches Problem mit zwei quadratischen Funktionen ist in Aufgabe 13 in Klassenstufe 11–13 gestellt.

17. Die Seitenlänge der 8 kleinen Quadrate im Bild ist 1. Welches ist die kleinste Länge, die ein Weg vom „Start" zum „Ziel" entlang der gezeichneten Linien haben kann?



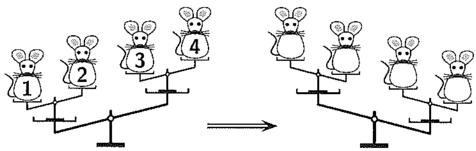
(**A**) $2\sqrt{5}$ (**B**) $2 + 2\sqrt{2}$ (**C**) 6
(**D**) $4\sqrt{2}$ (**E**) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$

Lösung: Der Weg setzt sich aus zwei waagerechten Quadratseiten und 2 Diagonalen, jeweils in einem kleinen Quadrat, zusammen. Die Länge einer solchen Diagonale beträgt nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Die gesuchte kleinste Länge ist also $1 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$.

In jedem der folgenden Wörter sind zwei Buchstaben an geeigneter Stelle so einzufügen, dass jeweils ein mathematischer Begriff entsteht.

ENG *EILE* *BERG* *FANG* *GERA* *SEE* *PISA*

18. Im Keller der alten Apotheke saßen nachts vier weiße Mäuse auf einer antiken Doppelwaage, die sich wie im linken Bild neigte. Als Kater Griesgram um die Ecke schaute, tauschten zwei der Mäuse erschreckt die Plätze, worauf sich die Waage wie im rechten Bild neigte. Welche beiden Mäuse haben die Plätze getauscht?



(**A**) **1** und **2** (**B**) **2** und **4** (**C**) **2** und **3** (**D**) **1** und **3** (**E**) **1** und **4**

Lösung: Tauschen **1** und **2** die Plätze, wie in (**A**) vorgeschlagen, so würde sich nur die kleine linke Schale wie im Bild rechts neigen, nicht aber die ganze Waage. Tauschen **2** und **4** die Plätze, wie in (**B**) vorgeschlagen, ist die leichtere der beiden nach dem Tausch ganz sicher wieder die leichtere der beiden Mäuse auf einer der kleinen Waagschalen. Also bleibt von den kleinen Waagschalen mindestens eine in der Stellung, die sie vor dem Auftauchen des Katers hatte. Tauschen **2** und **3** die Plätze, wie in (**C**) vorgeschlagen, so ändert sich an der Neigung der ganzen Waage ganz sicher nichts, denn **1** und **3** sind zusammen schwerer als **2** und **4** zusammen. Und tauschen **1** und **3** die Plätze, wie in (**D**) vorgeschlagen, so bleibt in Analogie zu (**B**) mindestens eine der kleinen Waagschalen so geneigt wie vor dem Auftauchen des Katers. Nur wenn **1** und **4** getauscht wurden, kann die Waage so wie im rechten Bild geneigt sein.

Die Jahreszahl 2015 soll als Summe von 4 natürlichen Zahlen geschrieben werden. Dabei soll der 2. Summand das 5-fache, der 3. Summand das 10-fache und der 4. Summand das 15-fache des 1. Summanden sein. Wer findet die Summanden?

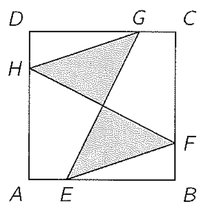
$$\square + \square + \square + \square = 2015$$

19. Dass unser Mathelehrer und sein Vater am selben Tag Geburtstag haben, wussten wir schon. Er hat ausgerechnet, dass in diesem Jahr das Produkt aus seinem Alter und dem seines Vaters gleich der Jahreszahl 2015 ist. Wie viele Jahre ist unser Mathelehrer jünger als sein Vater?

(**A**) 26 Jahre (**B**) 29 Jahre (**C**) 31 Jahre (**D**) 34 Jahre (**E**) 36 Jahre

Lösung: Da das Alter in den Faktoren steckt, deren Produkt 2015 ist, zerlegen wir 2015 in seine Primfaktoren. Offenbar ist 2015 durch 5 teilbar; es ist $2015 : 5 = 403$. Wir stellen fest, dass 403 nicht durch 2, 3, 5, 7, 11 teilbar ist. Aber es ist $403 : 13 = 31$. Damit haben wir die Primfaktorzerlegung gefunden: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Dann ist die Aufteilung zwischen Vater und Sohn nur auf eine Weise möglich: Der Vater ist $5 \cdot 13 = 65$ Jahre alt, der Sohn 31, und die gesuchte Differenz ist 34 Jahre.

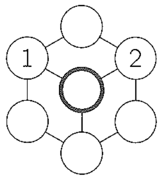
20. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit dem Flächeninhalt $80\,\text{cm}^2$. Die Punkte E, F, G und H liegen so auf den Quadratseiten, dass die längeren Abschnitte $\overline{EB}$, $\overline{FC}$, $\overline{GD}$ und $\overline{HA}$ jeweils dreimal so lang sind wie die kürzeren Abschnitte $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ bzw. $\overline{DH}$ (s. Abb.). Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche?



(**A**) $20\,\text{cm}^2$ (**B**) $25\,\text{cm}^2$ (**C**) $30\,\text{cm}^2$ (**D**) $35\,\text{cm}^2$ (**E**) $40\,\text{cm}^2$

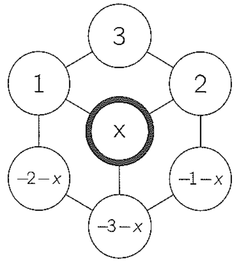
Lösung: Wir setzen die Länge der Quadratseite gleich a und denken uns die Strecken $\overline{FG}$ und $\overline{EH}$ eingezeichnet. Die 4 kleinen Abschnitte auf den Quadratseiten sind ein Viertel so lang wie eine Quadratseite und die großen Abschnitte drei Viertel. Der Flächeninhalt von jedem der 4 rechtwinkligen Dreiecke $\triangle EBF$, $\triangle FCG$, $\triangle GDH$ und $\triangle HAE$ beträgt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{32}a^2$. Die Summe der Flächeninhalte der 4 Dreiecke ist demzufolge $\frac{3}{8}a^2$. Das Viereck $EFGH$ ist ein Quadrat, denn die Seiten sind als Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke gleich lang und die Winkel als Ergänzungswinkel zu den beiden spitzen Winkeln der rechtwinkligen Dreiecke sind rechte Winkel. Folglich ist der Flächeninhalt der grauen Fläche halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrats $EFGH$, also $\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{3}{8}a^2\right) = \frac{5}{16}a^2$. Setzen wir für a^2 nun $80\,\text{cm}^2$ ein, so erhalten wir für die graue Fläche $25\,\text{cm}^2$.

21. In jeden der sieben Kreise in der abgebildeten Figur soll eine ganze Zahl eingetragen werden. Jede Zahl in einem Kreis soll gleich der Summe der Zahlen in den direkt mit diesem Kreis verbundenen Kreisen sein. Zwei Zahlen sind bereits eingetragen. Welche Zahl gehört in den dick umrandeten Kreis in der Mitte?



(**A**) 0 (**B**) −3 (**C**) 3 (**D**) −6 (**E**) 6

Lösung: In den oberen der sieben Kreise gehört $1 + 2 = 3$. Es sei x die gesuchte Zahl im mittleren Kreis. Da die 1 die Summe der Zahlen 3, x und der Zahl im Kreis unterhalb der 1 ist, gehört in den Kreis unterhalb der 1 die Zahl $1 - 3 - x = -2 - x$. In den Kreis unterhalb der 2 gehört analog die Zahl $2 - 3 - x = -1 - x$ und schließlich in den unteren der sieben Kreise $(-2 - x) + x + (-1 - x) = -3 - x$. Für den mittleren Kreis gilt somit die Gleichung $x = 1 + 2 + (-3 - x)$, also $2x = 0$ und folglich $x = 0$.



Damit folgt zudem, dass die Belegung der sieben Kreise eindeutig ist. In die leeren Kreise gehören 3, −2, −1, −3 und in die Mitte 0.

22. Beim Tiberischen Wagenrennen sind nur 4 Wagen ins Ziel gekommen: der blaue, der grüne, der rote und der weiße. Titus, der mit Schnupfen im Bett liegt, erkundigt sich bei Quintus nach dem Ausgang des Rennens, denn er kennt nur Gerüchte: 1. Der blaue sei Vierter geworden. 2. Der grüne sei Erster geworden. 3. Der rote sei nicht Vierter geworden. 4. Der weiße sei weder Erster noch Vierter geworden. „Von diesen Gerüchten sind drei wahr und eines ist falsch“, sagt Quintus. Daraus schließt Titus, welcher Wagen Erster und welcher Vierter geworden ist, und zwar

(**A**) der grüne und der blaue. (**B**) der grüne und der rote. (**C**) der weiße und der blaue.
(**D**) der grüne und der weiße. (**E**) der rote und der blaue.

Lösung: Angenommen, das 1. Gerücht ist falsch. Dann ist der blaue Wagen nicht Vierter geworden und, da die drei anderen Gerüchte wahr sind, ebenso wenig die anderen drei. Folglich muss das 1. Gerücht wahr sein, und daher auch das 3. Gerücht. Angenommen, das 2. Gerücht ist falsch. Dann ist außer dem 1. und 3. Gerücht auch das 4. Gerücht wahr, und weder der grüne noch der weiße Wagen ist Erster. Dann muss der rote Wagen Erster geworden sein, und der weiße und der grüne Wagen sind Zweiter und Dritter. Dieser Einlauf ist möglich. Wäre das 4. Gerücht falsch, dann gäbe es zwei Erste oder zwei Vierte – im Widerspruch zu Quintus' vertrauenswürdiger Aussage. Nur das 2. Gerücht kann das falsche Gerücht sein, der rote Wagen wurde Erster, der blaue Letzter.

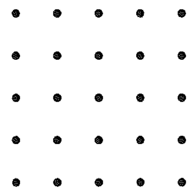
23. Zum Abschluss eines Tennis-Doppelturniers sollen sich die drei erstplatzierten Paare für das Siegerfoto in einer Reihe aufstellen. Die jeweiligen Doppelpartner wollen dabei natürlich nebeneinander stehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der sechs Tennisspieler auf dem Siegerfoto?

(**A**) 24 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 36 (**E**) 48

Lösung: Betrachten wir zuerst die Anordnung der 3 Paare, die wir mit A, B und C bezeichnen. Dafür gibt es $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mögliche Anordnungen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Da jedes der 3 Paare innnerhalb jeder dieser 6 Anordnungen 2 Möglichkeiten hat, sich aufzustellen, muss noch mit $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ multipliziert werden, sodass es insgesamt 48 Anordnungen gibt.

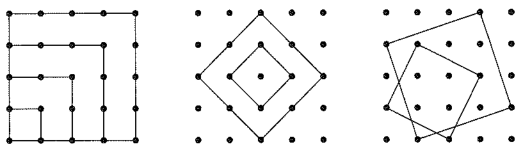
Eine ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 17 in Klassenstufe 11–13.

24. In dem abgebildeten Punktgitter aus 25 Punkten haben waagerecht und senkrecht benachbarte Punkte denselben Abstand. Wie viele unterschiedlich große Quadrate gibt es, die vier von diesen Punkten als Eckpunkte haben?



(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 6 (**E**) 5

Lösung: Wir nehmen an, dass der waagerechte und senkrechte Abstand benachbarter Punkte jeweils 1 beträgt. In das Punktegitter lassen sich wie abgebildet vier Quadrate mit den Seitenlängen 1, 2, 3 bzw. 4 finden, deren Seiten waagerecht bzw. senkrecht liegen, zwei um 45° geneigte Quadrate, deren Seitenlängen nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$ betragen, und zwei weitere schräg liegende Quadrate mit den Seitenlängen $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ bzw. $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$:



Dass diese Vierecke wirklich Quadrate sind, folgt analog wie in Aufgabe 20. Dass sie verschieden groß sind, ist klar, denn ihre Flächeninhalte haben die verschiedenen Werte 1, 4, 9, 16, 2, 8, 5 und 10. Dass es keine weiteren „gerade" liegenden und um 45° geneigten Quadrate gibt, ist klar. Die Seite eines anderen schräg liegenden Quadrats ist Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit verschieden langen Katheten der Längen 1, 2, 3 oder 4. Katheten der Länge 4 entfallen, da dann die Länge der Hypotenuse größer als 4 und der Flächeninhalt des entsprechenden Quadrats damit größer als 16 wäre, womit das Quadrat ganz sicher nicht in das Punktegitter passen würde. Es bleiben die möglichen Hypotenusenlängen $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ und $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$. Die zu den ersten beiden Werten gehörigen Quadrate sind oben angegeben, ein Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{13}$ passt nicht in das Punktegitter, wie sich durch Probieren sehen lässt. Insgesamt gibt es also genau die 8 oben angegebenen Quadrate.

Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die durch die Primzahl 13 teilbar ist und bei Division durch die Primzahlen 2, 3, 5 und 7 den Rest 1 lässt?

25. Wie viele 2-stellige natürliche Zahlen sind die Summe von genau sechs verschiedenen Potenzen von 2, d. h. von Zahlen der Form 2^k, wobei $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ist?

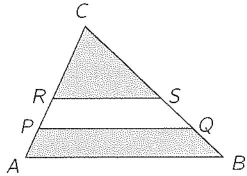
(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

Lösung: Die Zweierpotenzen, die als Summanden in Frage kommen, sind $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ und $2^6 = 64$. In jeder möglichen Summe aus 6 verschiedenen dieser 7 Zweierpotenzen kommt genau eine der genannten Zweierpotenzen nicht vor.

Da $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 1 = 127$ gilt, ist die durch Weglassen einer dieser Zweierpotenzen entstehende Summe genau dann zweistellig, wenn die weggelassene Zweierpotenz größer als 27 und kleiner als 118 ist. Dafür gibt es die 2 Möglichkeiten 32 und 64. Die zugehörigen Summen sind $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^6 = 127-32 = 95$ und $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = 127-64 = 63$.

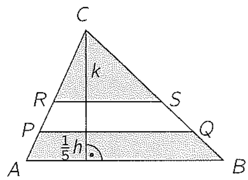
Eine ähnliche Frage mit dreistelligen Zahlen ist in Aufgabe 24 in Klassenstufe 11–13 gestellt.

26. Auf den Seiten des Dreiecks ABC befinden sich vier Punkte P, Q, R und S so, dass PQ und RS parallel zu AB sind. Das Viereck $ABQP$ und das Dreieck RSC haben denselben Flächeninhalt und der Punkt P teilt die Seite $\overline{AC}$ im Verhältnis 1 : 4 (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). In welchem Verhältnis teilt der Punkt R die Seite $\overline{AC}$?



(**A**) 1 : 1 (**B**) 1 : 2 (**C**) 1 : 3 (**D**) 2 : 3 (**E**) 3 : 4

Lösung: Im Dreieck ABC sei die Länge der Höhe von C auf AB mit h bezeichnet und $c = |\overline{AB}|$. Nach Voraussetzung finden wir mithilfe des Strahlensatzes für die Höhe des Trapezes $ABQP$ dann $\frac{1}{5}h$, und es gilt $\frac{|\overline{PQ}|}{c} = \frac{\frac{4}{5}h}{h}$, also $|\overline{PQ}| = \frac{4}{5}c$. Der Flächeninhalt des Trapezes $ABQP$ ist damit gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}h \cdot \left(\frac{4}{5}c + c\right) = \frac{9}{50}hc$.

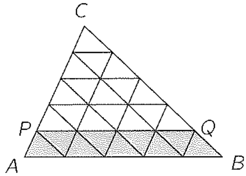


Die Länge des Höhenabschnitts im Dreieck RSC sei k. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|\overline{RS}|}{c} = \frac{k}{h}$, also $|\overline{RS}| = \frac{kc}{h}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks RSC ist somit gleich $\frac{1}{2} \cdot k \cdot |\overline{RS}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2c}{h}$.

Nach Voraussetzung gilt $\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2c}{h} = \frac{9}{50}hc$, woraus $\frac{k^2}{h^2} = \frac{9}{25}$ und somit $\frac{k}{h} = \frac{3}{5}$ bzw. $k = \frac{3}{5}h$ folgt. Nach dem Strahlensatz ist das gesuchte Verhältnis

$$|\overline{AR}| : |\overline{RC}| = (h-k) : k = \frac{2}{5}h : \frac{3}{5}h = 2 : 3\,.$$

Die folgende Lösungsvariante beruht auf einer geschickten Zerlegung. Durch jeweils 4 Parallelen zu jeder der drei Seiten, die jeweils zueinander denselben Abstand haben, wird das Dreieck ABC in kongruente Dreiecke zerlegt. Der „unterste Streifen" ist das Trapez $ABQP$, es besteht aus 9 solcher Dreiecke. Da die drei „oberen Streifen" insgesamt ebenso 9 solche Dreiecke umfassen, muss das aus diesen drei „Streifen" gebildete Dreieck das Dreieck RSC sein. Damit ist das gesuchte Teilungsverhältnis 2 : 3.



27. Von den aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ wird eine Zahl gestrichen. Der Durchschnitt der restlichen $n - 1$ Zahlen beträgt 4,75. Welche Zahl wurde gestrichen?

(**A**) die 4 (**B**) die 5 (**C**) die 6 (**D**) die 7 (**E**) die 8

Lösung: Der Durchschnitt der verbliebenen $n - 1$ Zahlen ist ganz sicher größer als oder gleich dem Durchschnitt der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n - 1$, d. h., wenn die größte Zahl n gestrichen würde, und kleiner als oder gleich dem Durchschnitt der Zahlen $2, 3, 4, \ldots, n$, also wenn die kleinste Zahl 1 gestrichen würde. Da die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n - 1$ bzw. $2, 3, 4 \ldots, n$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, ist ihr Durchschnitt gleich dem Durchschnitt der jeweils größten und kleinsten Zahl, also $\frac{(n-1)+1}{2} = \frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n+2}{2}$. Folglich gilt $\frac{n}{2} \leq 4{,}75 \leq \frac{n+2}{2}$ und somit $n \leq 9{,}5 \leq n+2$. Die einzigen natürlichen Zahlen, die diese Ungleichung erfüllen, sind $n = 8$ und $n = 9$.

Im ersten Fall wäre die gesuchte Zahl $(1 + 2 + 3 + \ldots + 8) - 4{,}75 \cdot 7 = 36 - 33{,}25 = 2{,}75$. Im zweiten Fall wäre sie $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) - 4{,}75 \cdot 8 = 45 - 38 = 7$. Da eine <u>natürliche</u> Zahl gestrichen wurde, muss $n = 9$ gelten. Die gesuchte Zahl ist die 7.

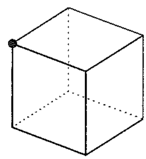
Wer sieht, dass $n - 1$ wegen $4{,}75 \cdot (n - 1) \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar sein muss, kann schneller auf $n = 9$ schließen und die gestrichene Zahl wie angegeben berechnen.

Bert hat mit dem Computer das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19$ *berechnet.*

1 2 1 6 4 5 1 0 0 4 0 8 3 2 0 0

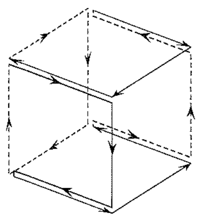
Auf welchen zwei Ziffern sitzen die beiden Fliegen auf Berts Bildschirm?

28. Käfer Klaus krabbelt auf den Kanten eines Würfels der Kantenlänge 10 cm. Er startet im dick markierten Eckpunkt, will jede Kante des Würfels mindestens einmal ablaufen und zum Startpunkt zurückkehren. Dabei soll der zurückgelegte Weg so kurz wie möglich sein. Wie lang ist dieser Weg?



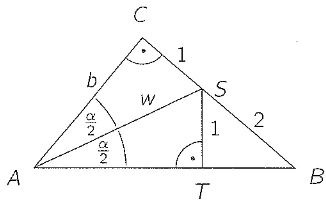
(**A**) 140 cm (**B**) 160 cm (**C**) 180 cm (**D**) 200 cm (**E**) 220 cm

Lösung: Die Antwortmöglichkeiten verraten, dass Käfer Klaus Kanten mehrfach nehmen muss. Da er an jeder der 8 Ecken genauso oft ankommt wie er weggeht – und zwar jeweils mindestens zweimal, da sich an jeder Ecke 3 Kanten treffen – und jede abgelaufene Kante einem Weggehen und einem Ankommen an einer Ecke entspricht, kann Klaus nicht weniger als $8 \cdot 4 : 2 = 16$ Kantenlängen zurücklegen. Er beschreitet also mindestens 4 Kanten mehrfach. Es gibt viele verschiedene Wege mit genau 4 mehrfach beschrittenen Kanten, eine Möglichkeit ist rechts abgebildet. Dieser Weg ist $16 \cdot 10\,\text{cm} = 160\,\text{cm}$ lang.



29. In einem rechtwinkligen Dreieck zerlegt die Winkelhalbierende eines spitzen Innenwinkels die gegenüberliegende Seite in zwei Strecken der Längen 1 cm und 2 cm. Wie lang ist diese Winkelhalbierende?

(**A**) $\sqrt{2}$ cm (**B**) $\sqrt{3}$ cm (**C**) 2 cm (**D**) 3 cm (**E**) $2\sqrt{3}$ cm



Lösung: Es sei ABC das rechtwinklige Dreieck und alle Bezeichnungen wie in der Abbildung. Alle Längen seien in cm angegeben. Wie man sich überlegen kann, ist $\overline{CS}$ die 1 cm und $\overline{BS}$ die 2 cm lange Strecke.

Wir fällen das Lot von S auf AB, der Lotfußpunkt sei T. Die Dreiecke ATS und ASC stimmen in zwei Winkeln und der gemeinsamen Seite $\overline{AS}$ überein, sind also zueinander kongruent. Folglich gilt $|\overline{AT}| = |\overline{AC}| = b$ sowie $|\overline{TS}| = |\overline{CS}| = 1$. Im rechtwinkligen Dreieck TBS finden wir mithilfe des Satzes des Pythagoras $|\overline{TB}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt $b^2 + 3^2 = (b + \sqrt{3})^2 = b^2 + 2\sqrt{3}b + 3$. Folglich ist $b = \sqrt{3}$. Eine erneute Anwendung des Satzes des Pythagoras, und zwar auf das rechtwinklige Dreieck ASC liefert $w = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

Für diese Aufgabe gibt es viele Lösungsvarianten, z. B. unter Ausnutzung des Satzes, dass eine Winkelhalbierende im Dreieck die gegenüberliegende Seite stets im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Ohne Hilfslinien zeichnen zu müssen, geht es mit Hilfe der Trigonometrie: Im rechtwinkligen Dreieck ASC gilt $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{w}$ und im Dreieck ABS nach dem Sinussatz $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} = \frac{2}{w}$, woraus durch Einsetzen $\sin\beta = \frac{1}{2}$ und, da $0 < \beta < 90°$ gilt, $\beta = 30°$ folgt. Dann ist $\alpha = 60°$, $\frac{\alpha}{2} = 30°$, das Dreieck ABS somit gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$ und schließlich $w = |\overline{BS}| = 2$.

30. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Unter diesen gibt es einen Punkt X, sodass es genau 80 Möglichkeiten gibt, zwei der restlichen markierten Punkte so auszuwählen, dass X zwischen den beiden ausgewählten Punkten liegt. Und es gibt unter den markierten Punkten einen Punkt Y, sodass es genau 90 Möglichkeiten gibt, zwei der restlichen markierten Punkte so auszuwählen, dass Y zwischen den beiden ausgewählten Punkten liegt. Wie viele Punkte sind auf der Geraden markiert?

(**A**) 22 (**B**) 25 (**C**) 34 (**D**) 43 (**E**) 48

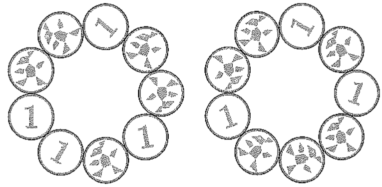
Lösung: Wenn zwei der markierten Punkte so gewählt werden, dass X bzw. Y zwischen den beiden liegt, dann muss einer dieser beiden Punkte links und einer rechts von X bzw. Y liegen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punkte links und rechts von X mit m und n, und zwar so, dass $m \leq n$ gilt, und die Anzahl der Punkte links und rechts von Y mit p und q, und zwar so, dass $p \leq q$ ist. Da die Punkte links und rechts von X bzw. Y unabhängig voneinander gewählt werden können, gilt $80 = m \cdot n$ und $90 = p \cdot q$. In den beiden Tabellen sind alle Möglichkeiten, 80 bzw. 90 entsprechend zu zerlegen, und die dazugehörige Gesamtzahl aller markierten Punkte angegeben:

m	1	2	4	5	8
n	80	40	20	16	10
$m+n+1$	82	43	25	**22**	19

p	1	2	3	5	6	9
q	90	45	30	18	15	10
$p+q+1$	92	48	34	24	**22**	20

Da für die Gesamtzahl der markierten Punkte $m + n + 1 = p + q + 1$ gilt, können auf der Geraden folglich nur 22 Punkte markiert sein. X ist der sechste dieser Punkte (von links oder rechts), Y der siebente (von links oder rechts).

Kopf oder Zahl?



In den abgebildeten Münzkreisen dürfen in einem Zug jeweils 2 benachbarte Münzen umgedreht werden.

Kann so erreicht werden, dass alle Münzen Kopf zeigen?

Lässt sich auch so ziehen, dass alle Münzen Zahl zeigen?

Verwegen gewogen

Ein König hatte zwölf Goldmünzen. Elf der Münzen waren gleich schwer. Die zwölfte sah den anderen zum Verwechseln ähnlich, doch sie war, mit bloßem Gefühl nicht auszumachen, ein klein wenig schwerer als die anderen elf. Einem Gelehrten, der am Hof weilte, stellte der König die Aufgabe, mithilfe einer Balkenwaage herauszufinden, welche der Münzen die schwerere Münze ist. Allerdings sollte der Gelehrte höchstes dreimal wiegen. Wie konnte das gelingen?

Der Hofnarr, der hörte, dass ein weitgereister Gelehrter eine schwierige Aufgabe des Königs gelöst hätte, wollte sich auch daran versuchen. „Du Schelm", dachte der König, und verriet dem Narren nur, dass eine der Münzen ein anderes Gewicht hat als die anderen. Dass sie schwerer war, behielt er für sich. Der Hofnarr grübelte, doch schließlich gelang es auch ihm, mit nur drei Wägungen die gesuchte Münze zu finden. Beim Weggehen rief er zum König: „Ihr hättet mir ruhig sagen können, dass die Münze schwerer ist als die anderen elf."

Wie ist der Hofnarr beim Wiegen vorgegangen? Und wie konnte er dabei sogar herausfinden, dass die gesuchte Münze schwerer ist als die anderen?

Sportlich, sportlich

An einem Hockey-Turnier nahmen fünf Teams (A, B, C, D, E) teil. Jedes Team spielte gegen jedes andere genau einmal.
Die Ergebnistabelle ist rechts zu sehen. G ist die Anzahl der gewonnenen, U die der unentschiedenen und V die der verlorenen Spiele. In der letzten Spalte stehen die Tore und die Gegentore.

a) Wer hat gegen wen gewonnen?
Welche Spiele gingen unentschieden aus?

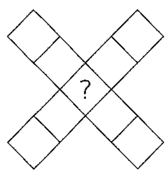
b) Welches waren die genauen Ergebnisse der sechs Spiele?

Team	G	U	V	Tore
A	4	0	0	6 : 1
B	2	1	1	6 : 4
C	1	1	2	3 : 4
D	0	3	1	0 : 2
E	0	1	3	0 : 4

Die Zahlen von 1 bis 9 sollen so in die Felder des Kreuzes geschrieben werden, dass die beiden Summen in den jeweils fünf diagonalen Feldern gleich sind.

Welche Zahlen können in der Mitte des Kreuzes stehen?

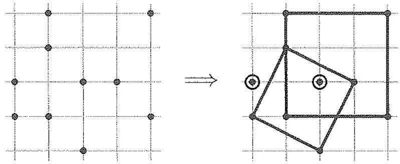
Welche magischen Summen sind möglich?



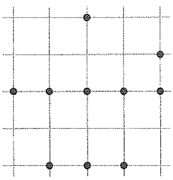
Gitterquadrate

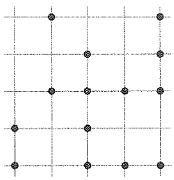
In den abgebildeten Gittern sind einige Kreuzungspunkte dick gezeichnet. Gesucht sind Quadrate, deren vier Eckpunkte solche „dicken" Punkte sind. Dabei sollen bis auf genau zwei der „dicken" Punkte alle „dicken" Punkte als Eckpunkt zu einem Quadrat gehören. Die Quadrate dürfen sich überlappen, aber keiner der „dicken" Punkte soll Eckpunkt von mehr als einem Quadrat sein.

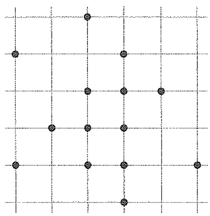
Im Beispiel rechts hat die Suche nach den verborgenen Quadraten zum Erfolg geführt. Die beiden markierten „dicken" Punkte gehören zu keinem der Quadrate.

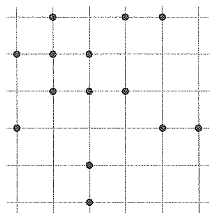


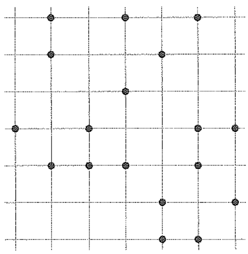
Wer findet die Quadrate in den folgenden Gittern?

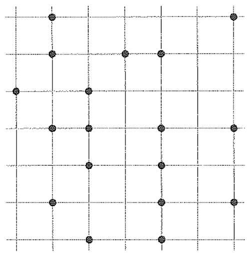


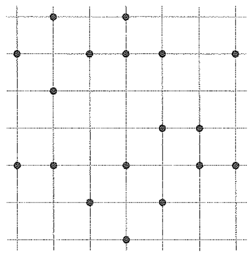






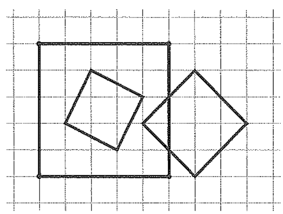






Rechts sind drei Gitterquadrate mit einem Flächeninhalt von 5 Kästchen, 8 Kästchen und 25 Kästchen zu sehen.

Gibt es auch Gitterquadrate mit einem Flächeninhalt von 7 oder 13 Kästchen? Welche natürlichen Zahlen zwischen 1 und 20 sind als Maßzahl für den Flächeninhalt eines Gitterquadrats möglich?



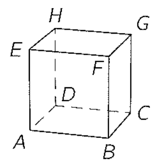
Klassenstufen 11 bis 13

1. Welche der folgenden Zahlen liegt am nächsten am Ergebnis der Rechnung $0{,}2015 \cdot 0{,}5012$?

(**A**) 0,0001 (**B**) 0,001 (**C**) 0,01 (**D**) 0,1 (**E**) 1

Lösung: Da die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten weit auseinanderliegen, ist das grobe Runden von $0{,}2015 \cdot 0{,}5012 = 0{,}1009918$ durch $0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$ ausreichend. (**D**) ist die Lösung.

2. Welche der folgenden Strecken im rechts abgebildeten Würfel $ABCDEFGH$ ist am längsten?



(**A**) $\overline{CD}$ (**B**) $\overline{DE}$ (**C**) $\overline{DF}$ (**D**) $\overline{CH}$ (**E**) $\overline{DG}$

Lösung: Dem Gefühl nach ist $\overline{DF}$ als Raumdiagonale am längsten und somit die gesuchte Strecke. Und so ist es auch wirklich: $\overline{CD}$ ist eine Kante des Würfels, $\overline{DE}$, $\overline{CH}$ und $\overline{DG}$ sind Seitendiagonalen und $\overline{DF}$ ist eine Raumdiagonale. Jede Seitendiagonale ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit zwei Kanten als Katheten, also länger als eine Kante (und zwar nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{2}$-mal so lang). Jede Raumdiagonale ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer Kante und einer Seitendiagonale als Katheten, also länger als eine Seitendiagonale (und zwar nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{3}$-mal so lang wie eine Kante).

3. Andrea wurde 1997 geboren, und ihre Schwester Charlotte wurde 2001 geboren. Dann beträgt der Altersunterschied zwischen den beiden Schwestern *ganz gewiss*

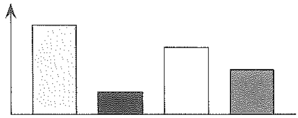
(**A**) weniger als 4 Jahre. (**B**) mindestens 4 Jahre. (**C**) genau 4 Jahre.
(**D**) mehr als 4 Jahre. (**E**) nicht weniger als 3 Jahre.

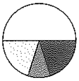
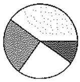
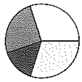
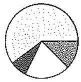
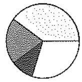
Lösung: Zwischen Andreas und Charlottes Geburt liegen die gesamten Jahre 1998, 1999 und 2000. Also beträgt ihr Altersunterschied gewiss nicht weniger als 3 Jahre.

Wären Andrea am 1.1.1997 und Charlotte am 31.12.2001 geboren worden, so betrüge ihr Altersunterschied mehr als 4 Jahre, also muss (**A**) nicht unbedingt zutreffen. Wären Andrea am 31.12.1997 und Charlotte am 1.1.2001 geboren worden, so betrüge ihr Altersunterschied weniger als 4 Jahre, also müssen (**B**), (**C**) und (**D**) nicht unbedingt zutreffen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Jahreszahl 2015 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu schreiben?

4. Auf einer Biologie-Exkursion hat Diana in einem Waldstück den Bestand der vier häufigsten Baumarten ausgezählt und ihr Ergebnis dann in einem Säulendiagramm dargestellt. Jasper findet, dass für die Darstellung ein Kreisdiagramm besser geeignet wäre. Wie könnte dieses Kreisdiagramm aussehen?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

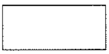
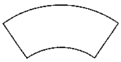
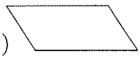
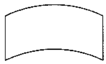
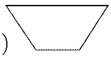
Lösung: Im Säulendiagramm ist zu erkennen, dass die größte Säule kleiner ist als die anderen drei zusammen. Also können (**A**) und (**D**) nicht die Lösung sein. Außerdem sind die vier Säulen verschieden hoch, womit auch (**B**) und (**C**) entfallen. (**E**) zeigt das entsprechende Kreisdiagramm.

5. Die Summe der 31 natürlichen Zahlen von 2001 bis 2031 wird durch 31 dividiert. Was ist das Ergebnis?

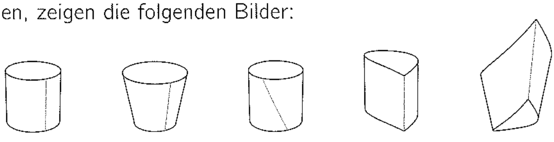
(**A**) 2012 (**B**) 2013 (**C**) 2015 (**D**) 2016 (**E**) 2019

Lösung: Gesucht ist der Durchschnitt der 31 Zahlen von 2001 bis 2031, und der ist gleich 2016. Wenn wir die Summe der 31 Zahlen geschickt aufschreiben, lässt sich der Durchschnitt leicht berechen: $2001+2002+\ldots+2030+2031 = (2016-15)+(2016-14)+\ldots+(2016+14)+(2016+15) = 31\cdot 2016$ Folglich ist diese Summe dividiert durch 31 gleich 2016.

6. Matti ist für die Windlichter beim Gartenfest zuständig. Er will ein altes Glas, das die Form eines Kegelstumpfs hat, von außen vollständig und ohne Überlappungen mit farbigem Transparentpapier bekleben, wobei der Boden frei bleiben soll. Welche Form muss dieses Stück Transparentpapier haben?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Ein Kegel entsteht, wenn ein Kreissektor zusammengerollt wird, ein Kegelstumpf, wenn von dem Kreissektor ein kleinerer Kreissektor mit derselben Spitze und demselben Öffnungswinkel abgeschnitten wird. Das zeigt Bild (**B**). Welche Körper mit den gezeigten Transparentpapier-Stücken beklebt werden können, zeigen die folgenden Bilder:



7. Bauer Meckes Kühe haben insgesamt 2 Beine weniger als Bauer Meckes Enten. Dann hat Bauer Mecke

(**A**) weniger als halb so viele Kühe wie Enten.
(**B**) halb so viele Kühe wie Enten.
(**C**) genauso viele Kühe wie Enten.
(**D**) doppelt so viele Kühe wie Enten.
(**E**) mehr als doppelt so viele Kühe wie Enten.

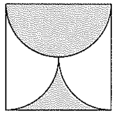
Lösung: Wenn Bauer Meckes Kühe alle zusammen genauso viele Beine hätten wie Bauer Meckes Enten, dann hätte Bauer Mecke halb so viele Kühe wie Enten. Da die Kühe insgesamt aber weniger Beine haben als die Enten, hat Bauer Mecke weniger als halb so viele Kühe wie Enten.

8. $(a-b)^3 + (b-a)^3 =$

(**A**) 0 (**B**) $2(a-b)^3$ (**C**) $2a^3 - 2b^3$ (**D**) $2a^3 + 2b^3$ (**E**) $6a^2b + 6ab^2$

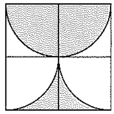
Lösung: Da $(b-a) = -(a-b)$, gilt $(b-a)^3 = (-1)^3(a-b)^3 = -(a-b)^3$. Folglich ist $(a-b)^3 + (b-a)^3 = 0$.

9. Der graue Teil des Quadrats mit der Seitenlänge 2 cm ist von einem Halbkreisbogen und zwei Viertelkreisbögen begrenzt. Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?



(**A**) $\frac{\pi}{2}\,\text{cm}^2$ (**B**) $2\,\text{cm}^2$ (**C**) $\pi\,\text{cm}^2$ (**D**) $1\,\text{cm}^2$ (**E**) $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\text{cm}^2$

Lösung: Durch zwei Strecken kann das Quadrat in vier kongruente Quadrate zerlegt werden. Die dabei entstandenen grauen Viertelkreise haben denselben Radius und somit auch denselben Flächeninhalt wie die weißen Viertelkreise. Also nimmt die graue Fläche genau die Hälfte der Fläche des großen Quadrats ein, das sind $2\,\text{cm}^2$.

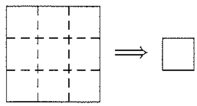


10. Wie viele reelle Zahlen x erfüllen die Gleichung $2^{2x} = 4^{x+1}$?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) unendlich viele

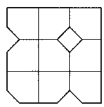
Lösung: Angenommen, es gibt ein x, das die Gleichung $2^{2x} = 4^{x+1}$ erfüllt. Wegen $2^{2x} = 4^x$ und $4^{x+1} = 4 \cdot 4^x$ folgt daraus $4^x = 4 \cdot 4^x$. Wegen $4^x \neq 0$ folgt nach Division durch 4^x die falsche Aussage $1 = 4$. Also war die Annahme falsch. Es gibt kein x, das $2^{2x} = 4^{x+1}$ erfüllt.

11. Ein quadratisches Blatt Papier wird entlang der gestrichelten Linien zusammengefaltet, die Reihenfolge spielt keine Rolle. Dem entstandenen Quadrat wird eine seiner Ecken abgeschnitten. Wie viele Löcher hat das Blatt Papier, wenn es wieder auseinandergefaltet wird?



(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 4
(**D**) 9 (**E**) Es hängt davon ab, welche Ecke abgeschnitten wird.

Lösung: Nach dem Abschneiden einer Ecke fehlt jedem der neun kleinen Quadrate eine Ecke. Dabei sind benachbarte beschnittene Quadrate an der gemeinsamen Faltlinie zueinander gespiegelt, egal, wie gefaltet und welche Ecke abgeschnitten wurde. Das Blatt Papier sieht nun so aus wie im Bild (eventuell gedreht) und hat genau ein Loch. Das lässt sich auch herausfinden, indem vier Quadrate entsprechend gefaltet und jeweils eine andere Ecke abgeschnitten wird.



12. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)} =$

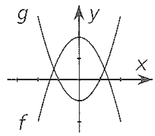
(**A**) $\sqrt{2015}$ (**B**) 2015 (**C**) 2016 (**D**) 2017 (**E**) 4030

Lösung: Mithilfe der ersten binomischen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)}\\&= \sqrt{2\cdot 2015+0+2015^2+1} = \sqrt{(2015+1)^2} = 2016\,.\end{aligned}$$

13. Die Koordinatenebene wird durch die x-Achse, die y-Achse und die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 1$ in mehrere Gebiete zerlegt. Wie viele Gebiete sind das?

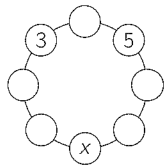
(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 15



Lösung: Wir zeichnen die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem und können 14 Gebiete zählen, davon 6 beschränkte und 8 unbeschränkte. Da die beiden Funktionen f und g sowie die x-Achse und die y-Achse symmetrisch zur y-Achse liegen, reicht es aus, die Gebiete auf der linken oder auf der rechten Seite zu zählen.

Ein ähnliches Problem mit linearen Funktionen ist in Aufgabe 16 in Klassenstufe 9/10 gestellt.

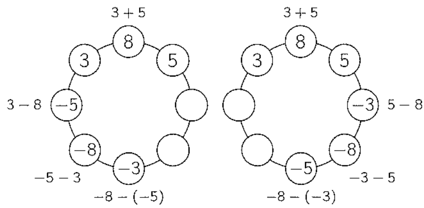
14. In jeden der acht Kreise soll eine Zahl so eingetragen werden, dass jede der Zahlen die Summe der beiden zu ihr benachbarten Zahlen ist. Zwei Zahlen sind bereits eingetragen. Was trifft dann zu?



(**A**) $x = -5$ (**B**) $x = -16$ (**C**) $x = -8$
(**D**) $x = -3$ (**E**) Eine solche Belegung gibt es nicht.

Lösung: Wir füllen die Kreise linksherum und rechtsherum auf eindeutige Weise, wie durch die Rechnungen angeben ist. Da wir auf beiden Wegen verschiedene Werte für x erhalten, kann es keine solche Belegung geben.

Eine ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 21 in Klassenstufe 9/10.

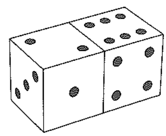


15. Von fünf verschiedenen positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, e ist bekannt, dass $c : e = b$, $a + b = d$ und $e - d = a$ gilt. Welche der fünf Zahlen ist die größte?

(**A**) a (**B**) b (**C**) c (**D**) d (**E**) e

Lösung: Da a, b, c, d, e positiv, ganzzahlig und verschiedenen sind, folgt aus der 1. Gleichung $b < c$ und $e < c$, aus der 2. Gleichung $a < d$ und $b < d$ sowie aus der 3. Gleichung $a < e$ und $d < e$. Da es zu jeder der vier Zahlen b, e, a und d eine größere unter den fünf Zahlen gibt, kann nur c die größte der fünf Zahlen sein. Ein Beispiel ist $a = 1, b = 2, c = 8, d = 3, e = 4$.

16. Rechts sind zwei identische Spielwürfel zu sehen, bei denen sich die Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten jeweils zu 7 addieren. Welche Augenzahl befindet sich auf der rechten Seite des rechten Würfels?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 1 oder 3

Lösung: Wir kippen in Gedanken den linken Würfel nach vorn auf die 1. Nun liegt die 6 oben. Dann drehen wir den linken Würfel in Gedanken eine Vierteldrehung, sodass die 3 hinten und die 4 vorn zu sehen ist. Nun liegt er genauso da wie der identische rechte Würfel. Auf der linken Seite steht die 2 und rechts demnach die 5.

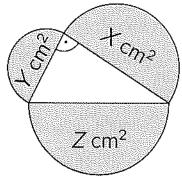
17. Zum Mittelalterfest auf Burg Rabenstein soll es im Vorhof entlang der Festungsmauer nebeneinander fünf Stände geben: je einen für einen Schmied, einen Töpfer und einen Schneider sowie einen mit deftigen Speisen und einen mit Wein. Die Stände der drei Handwerker sollen nebeneinander stehen und ebenso die beiden Stände mit Essen und Getränken. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Anordnung der fünf Stände?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 36 (**D**) 48 (**E**) 60

Lösung: Die 3 Handwerksstände lassen sich auf $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Weisen nebeneinander anordnen, und die beiden Stände mit Essen und Getränken auf 2 Weisen. Somit gibt es $6 \cdot 2 = 12$ Anordnungen, bei denen die 3 Handwerksstände links stehen, und $2 \cdot 6 = 12$, bei denen die 3 Handwerksstände rechts stehen. Insgesamt gibt es 24 verschiedene Anordnungen der fünf Stände.

Ähnlich zu dieser Aufgabe ist Aufgabe 23 in Klassenstufe 9/10.

18. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind Halbkreise errichtet (s. Abb.). Ihre Flächeninhalte betragen $X\,\text{cm}^2$, $Y\,\text{cm}^2$ und $Z\,\text{cm}^2$. Was gilt dann sicher?



(**A**) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = Z$ (**B**) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$ (**C**) $X + Y = Z$
(**D**) $X + Y = Z^2$ (**E**) $X^2 + Y^2 = Z$

Lösung: Die entsprechenden Seitenlängen des Dreiecks seien x cm, y cm, z cm. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$. Für die Flächeninhalte der Halbkreise gilt $X = \frac{1}{8}\pi x^2$, $Y = \frac{1}{8}\pi y^2$, $Z = \frac{1}{8}\pi z^2$. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich $\frac{8}{\pi}X + \frac{8}{\pi}Y = \frac{8}{\pi}Z$, also $X + Y = Z$.

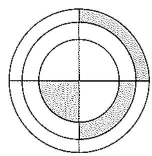
Das gilt übrigens nicht nur für Halbkreise, sondern auch für andere zueinander ähnliche Figuren.

19. Als geometrisches Mittel von n positiven Zahlen wird die n-te Wurzel aus dem Produkt dieser Zahlen bezeichnet. Wenn das geometrische Mittel von drei Zahlen 3 und von drei anderen Zahlen 12 ist, was ist dann das geometrische Mittel aller sechs Zahlen?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) $\frac{15}{2}$ (**D**) $\frac{15}{6}$ (**E**) 36

Lösung: Die 3 Zahlen, deren geometrisches Mittel 3 ist, seien a, b, c, die 3 Zahlen, deren geometrisches Mittel 12 ist, d, e, f. Es gilt $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = 3$ und $\sqrt[3]{d \cdot e \cdot f} = 12$. Das geometrische Mittel aller 6 Zahlen ist dann $\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \cdot \sqrt[3]{d \cdot e \cdot f}} = \sqrt[2]{3 \cdot 12} = 6$.

20. Die senkrechte und die waagerechte Linie auf der abgebildeten Zielscheibe schneiden sich im Mittelpunkt der drei Kreise. Die drei grau markierten Felder haben denselben Flächeninhalt. Der Radius des kleinsten der drei Kreise ist 1. Wie groß ist der Radius des größten der drei Kreise?



(**A**) $\sqrt{3}$ (**B**) $2\sqrt{2}$ (**C**) 3 (**D**) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (**E**) $\sqrt{6}$

Lösung: Da die grauen Felder denselben Flächeninhalt haben, sind der kleine Kreis und die beiden Kreisringe gleich groß. Also ist der Flächeninhalt des großen Kreis dreimal so groß wie der des kleinen Kreises. Der Flächeninhalt des kleinen Kreises ist $\pi \cdot 1^2 = \pi$, der des größten somit 3π. Den Radius r des größten Kreises erhalten wir aus der Formel für den Flächeninhalt $\pi r^2 = 3\pi$, also $r = \sqrt{3}$.

21. Diego hat einen Spielwürfel mit den Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Philipps „Spezialwürfel" trägt die Augenzahlen $2, 2, 2, 5, 5, 5$. Jeder der beiden würfelt mit seinem Würfel. Wer die höhere Augenzahl würfelt, gewinnt. Bei gleicher Augenzahl gewinnt keiner von beiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Philipp gewinnt?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{7}{18}$ **(C)** $\frac{5}{12}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{11}{18}$

Lösung: Philipp gewinnt, wenn er eine 2 und Diego eine 1 oder wenn er eine 5 und Diego eine 1, eine 2, eine 3 oder eine 4 würfelt. Da die beiden Würfel unabhängig voneinander geworfen werden, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

22. Penny besitzt einen Antiquitätenladen. Gestern hat sie zwei wertvolle Uhren verkauft. Für die große Standuhr hat sie 40 % mehr Geld bekommen, als sie dafür bezahlt hat. Für die goldene Armbanduhr hat sie sogar 60 % mehr Geld bekommen, als sie dafür bezahlt hat. Für beide Uhren zusammen hat sie 54 % mehr Geld bekommen, als sie für beide zusammen bezahlt hat. Die Standuhr hat Penny für 120 € gekauft. Wie viel hat Penny für die Armbanduhr bezahlt?

(A) 156 € **(B)** 162 € **(C)** 180 € **(D)** 240 € **(E)** 280 €

Lösung: Wir bezeichnen mit x den Betrag, den Penny für die Standuhr bezahlen musste, und mit y den Betrag, den Penny für die Armbanduhr bezahlen musste. Dann wissen wir, dass Penny für die Standuhr $1{,}4x$, für die Armbanduhr $1{,}6y$ und insgesamt $1{,}54(x+y)$ bekommen hat. Also gilt $1{,}4x + 1{,}6y = 1{,}54(x+y)$ bzw. $0{,}06y = 0{,}14x$. Somit ist $y = \frac{0{,}14}{0{,}06} \cdot x = \frac{7}{3} \cdot 120\,€ = 280\,€$.

23. In der Reihenfolge **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**, welches ist die erste wahre Aussage?

(A) Aussage **(C)** ist wahr. **(B)** Aussage **(A)** ist wahr. **(C)** Aussage **(E)** ist falsch.
(D) Aussage **(B)** ist falsch. **(E)** $1 + 1 = 2$

Lösung: Aussage **(E)** ist wahr. Davon ausgehend finden wir nacheinander heraus, dass Aussage **(C)** falsch, Aussage **(A)** falsch, Aussage **(B)** falsch und Aussage **(D)** wahr ist. **(D)** ist also die erste wahre Aussage.

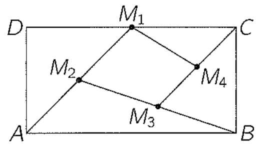
24. Wie viele 3-stellige natürliche Zahlen sind die Summe von genau neun verschiedenen Potenzen von 2, d. h. von Zahlen der Form 2^k, wobei k eine nichtnegative ganze Zahl ist?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Lösung: Als Summanden kommen die zehn Zahlen von 2^0 bis 2^9 in Frage, $2^{10} = 1024$ ist bereits 4-stellig. In einer Summe aus genau neun Summanden kommt genau eine dieser zehn Zahlen nicht vor. Wegen $2^0 + \ldots + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023$, muss der nicht benutzte Summand größer als 23 und kleiner als 924 sein, damit das Ergebnis 3-stellig ist. Die Zweierpotenzen zwischen 23 und 924 sind $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ und $2^9 = 512$, die dazugehörigen dreistelligen Zahlen sind 991, 959, 895, 767 und 511.

Eine ähnliche Frage mit zweistelligen Zahlen ist in Aufgabe 25 in Klassenstufe 9/10 gestellt.

25. Im Rechteck $ABCD$ ist M_1 der Mittelpunkt von $\overline{CD}$, M_2 der Mittelpunkt von $\overline{AM_1}$, M_3 der Mittelpunkt von $\overline{BM_2}$ und M_4 der Mittelpunkt von $\overline{CM_3}$ (s. Abb.). Wie groß ist der Anteil der Fläche des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ am Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$?



(A) $\frac{7}{16}$ **(B)** $\frac{3}{16}$ **(C)** $\frac{7}{32}$ **(D)** $\frac{9}{32}$ **(E)** $\frac{1}{5}$

Lösung: Sei a die Länge der Seite $\overline{AB}$ und b die Länge der Seite $\overline{AD}$. Der Abstand von M_1 zu $\overline{AD}$ ist laut Aufgabe gleich $\frac{1}{2}a$. Mithilfe des Strahlensatzes lassen sich die folgenden Abstände berechnen. Der Abstand von M_2 zu $\overline{AB}$ ist gleich $\frac{1}{2}b$ und zu $\overline{AD}$ gleich $\frac{1}{4}a$. Der Abstand von M_3 zu $\overline{BC}$ ist gleich $\frac{a-\frac{1}{4}a}{2} = \frac{3}{8}a$ und zu $\overline{AB}$ gleich $\frac{1}{4}b$. Schließlich ist der Abstand von M_4 zu $\overline{CD}$ gleich $\frac{b-\frac{1}{4}b}{2} = \frac{3}{8}b$. Jetzt können wir den Flächeninhalt von $M_1M_2M_3M_4$ berechnen:

$$\begin{aligned} A_{M_1M_2M_3M_4} &= A_{ABCD} - A_{AM_1D} - A_{ABM_2} - A_{BCM_3} - A_{CM_1M_4} \\ &= ab - \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{3a}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3b}{8} = \frac{7}{32}\cdot ab = \frac{7}{32}\cdot A_{ABCD}\,. \end{aligned}$$

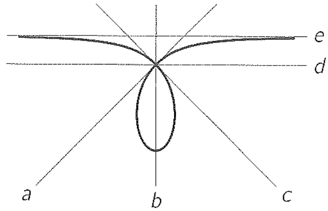
26. Christopher und Timo haben jeder die Buchstaben im englischen Wort KANGAROO so durch Ziffern ersetzt, dass jeder eine 8-stellige Zahl erhalten hat. Jeder der beiden hat gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern ersetzt und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern. Christopher hat die größtmögliche durch 11 teilbare Zahl erhalten und Timo die kleinstmögliche durch 11 teilbare Zahl. Einen der Buchstaben haben beide durch die gleiche Ziffer ersetzt. Welche Ziffer ist das?

(A) 5 **(B)** 0 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 3

Lösung: Wir beginnen mit der größtmöglichen Zahl, die man erhalten kann, 98768544, und dividieren durch 11. Das Ergebnis ist gleich 8978958 Rest 6. Verändern wir die Ziffer für das O, so ändert sich der Rest nicht. Ersetzen wir das R nacheinander durch 4, 3, 2, 1, 0, so wird die Zahl immer um 100 kleiner, der Rest also um 1 kleiner, bleibt also größer als 0. Folglich muss die Zahl kleiner oder gleich 98758644 sein. 98758644:11= 8978058 Rest 6. Nun können wir, wie eben gesehen, $R = 0$ setzen, sodass der Rest verschwindet. Die größtmögliche durch 11 teilbare Zahl ist 98758066. Für die kleinste durch 11 teilbare Zahl erhalten wir auf ähnliche Weise 10250933. Das G musste in beiden Fällen durch 5 ersetzt werden.

Wer die gebräuchlichste Teilbarkeitsregel für 11 kennt, kann die Aufgabe wie folgt lösen: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, in diesem Fall $+K-A+N-G+A-R+O-O = K+N-G-R$. Für die größtmögliche Zahl versuchen wir die ersten drei Ziffern so groß wie möglich zu wählen, also $K=9$, $A=8$, $N=7$, und passende Ziffern für G und R zu finden. Für diese muss $9+7-G-R = 16-G-R$ durch 11 teilbar sein. Da 9 und 8 bereits vergeben sind, muss $16-G-R = 11$ sein. Um die größtmögliche Zahl zu erhalten, setzen wir $G=5$ und $R=0$. Das O ersetzen wir durch die größte verbleibende Ziffer, $O=6$. Wir erhalten 98758066. Für die kleinstmögliche Zahl wählen wir $K=1$, $A=0$, $N=2$ und versuchen wieder, passende Ziffern für G und R zu finden. Es muss $1+2-G-R = 3-G-R$ durch 11 teilbar sein, und da 0 und 1 schon benutzt wurden, muss $3-G-R = -11$ gelten. Die kleinstmögliche Zahl erhalten wir für die Belegung $G=5$, $R=9$, $O=3$, sie lautet 10250933. Die 4. Ziffer stimmt bei den beiden Zahlen überein. Es ist eine 5.

27. Die Abbildung zeigt fünf Geraden und eine sogenannte *algebraische Kurve*, die aus genau denjenigen Punkten (x, y) besteht, welche die Gleichung $x^3 + y^3 = 2xy$ erfüllen. Eine der fünf Geraden ist die x-Achse des Koordinatensystems. Welche?



(A) a **(B)** b **(C)** c **(D)** d **(E)** e

Lösung: Wenn der Punkt (x, y) auf der Kurve liegt, also die Gleichung $x^3 + y^3 = 2xy$ erfüllt, so liegt auch (y, x) auf der Kurve, da $y^3 + x^3 = x^3 + y^3 = 2xy = 2yx$. Daraus folgt, dass die Gerade $y = x$, also die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten, Symmetrieachse der Kurve ist. Die Gerade b im Bild ist Symmetrieachse der Kurve und da die Kurve nur eine Symmetrieachse besitzt, muss b die Gerade $y = x$ sein. Also ist a die x-Achse und c die y-Achse.

Die Lösung kann auch gefunden werden, wenn man bemerkt, dass die Kurve die x-Achse bzw. die y-Achse nur im Punkt $(0, 0)$ schneidet und außerdem $(1, 1)$ ein Punkt auf der Kurve ist.

Diese spezielle Kurve wird übrigens auch Kartesisches Blatt genannt.

28. Es liegen 192 Kugeln im Kreis, der Reihe nach mit 1 bis 192 nummeriert. Ein Roboter läuft den Kreis ab und entfernt der Reihe nach jede zweite Kugel, beginnend mit 2, 4, 6 usw. Er läuft solange weiter und entfernt Kugeln, bis nur noch eine einzige Kugel übrig ist. Welche Nummer hat diese Kugel?

(A) 1 **(B)** 17 **(C)** 65 **(D)** 129 **(E)** 191

Lösung: Am Anfang liegen 192 Kugeln im Kreis. Nach der 1. Runde liegen noch 96 Kugeln im Kreis, und zwar diejenigen mit ungeraden Nummern. Nach der 2. Runde liegen noch die 48 Kugeln mit den Nummern $1, 5, 9, \ldots$ da, also all jene, die beim Teilen durch 4 den Rest 1 lassen. Nach der 3. Runde liegen noch die 24 Kugeln da, deren Nummern den Rest 1 beim Teilen durch 8 lassen. Nach der 4. Runde liegen noch die 12 Kugeln da, deren Nummern den Rest 1 beim Teilen durch 16 lassen. Nach der 5. Runde liegen noch die 6 Kugeln da, deren Nummern den Rest 1 beim Teilen durch 32 lassen. Nach der 5. Runde liegen noch die 3 Kugeln da, deren Nummern den Rest 1 beim Teilen durch 64 lassen, also die Kugeln 1, 65, 129. Anschließend entfernt der Roboter die Kugel mit der 65 und dann die mit der 1. Übrig bleibt Kugel Nummer 129.

29. Wie viele Dreiecke ABC mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es, die bei B einen rechten Winkel haben und deren Seite $\overline{AB}$ die Länge 20 hat?

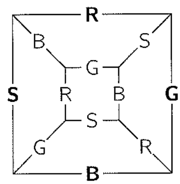
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6

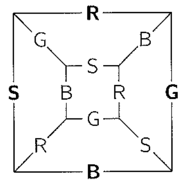
Lösung: Nach dem Satz des Pythagoras und der dritten binomischen Formel gilt nach Aufgabenstellung $20^2 = |\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2 = (|\overline{AC}| + |\overline{BC}|)(|\overline{AC}| - |\overline{BC}|)$. Da die Seitenlängen ganzzahlig sind, sind auch die beiden Faktoren $|\overline{AC}| + |\overline{BC}|$ und $|\overline{AC}| - |\overline{BC}|$ ganzzahlig. Da die Streckenlängen positiv sind und die Hypotenuse $\overline{AC}$ länger ist als $\overline{BC}$, gibt es nur die Möglichkeiten $400 \cdot 1$, $200 \cdot 2$, $100 \cdot 4$, $80 \cdot 5$, $50 \cdot 8$, $40 \cdot 10$ und $25 \cdot 8$. Dabei gilt $|\overline{BC}| = \frac{1}{2}((|\overline{AC}| + |\overline{BC}|) - (|\overline{AC}| - |\overline{BC}|))$ und $|\overline{AC}| = \frac{1}{2}((|\overline{AC}| + |\overline{BC}|) + (|\overline{AC}| - |\overline{BC}|))$. Alle Faktorisierungen mit einem geraden und einem ungeraden Faktor führen zu Dreiecken mit nicht-ganzzahligen Seitenlängen. Es bleiben die 4 Fälle $200 \cdot 2$, $100 \cdot 4$, $50 \cdot 8$ und $40 \cdot 10$, die zu den 4 Dreiecken mit Seitenlängen $(20, 99, 101)$, $(20, 48, 52)$, $(20, 21, 29)$ und $(20, 15, 25)$ führen.

30. Malou und Ana haben über Nacht Erbsen eingeweicht und sich rote, grüne, blaue und schwarze Holzstäbchen besorgt. Mit 8 Erbsen für die Ecken und 12 Holzstäbchen für die Kanten hat Malou flink einen Würfel zusammengesteckt, bei dem jede Seitenfläche von einer roten, einer grünen, einer blauen und einer schwarzen Kante begrenzt wird. Auch Ana will auf diese Weise einen Würfel bauen, bei dem jede Seitenfläche verschiedenfarbige Kanten hat. Ihr Würfel soll jedoch, egal wie sie ihn dreht und wendet, von Malous Würfel verschieden sein. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Anas Würfel?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 5 (**D**) 11 (**E**) 23

Lösung: Um einen solchen Würfel zu bauen, fangen wir mit der vorderen Seite an: Im Uhrzeigersinn und oben beginnend ist das in diesem Fall RGBS (rot, grün, blau, schwarz). Wählen wir eine an die vordere Seite grenzende Kante aus, so gibt es zwei Möglichkeiten für diese, wodurch alle anderen Kanten eindeutig festgelegt sind. Insgesamt gibt es es zwei Möglichkeiten, den Würfel fertig zu bauen, und diese beiden Würfel sind verschieden voneinander (siehe Bild). Sowohl beim linken als auch beim rechten Würfel lässt sich fertstellen, dass die Reihenfolge der 4 farbigen Holzstäbchen auf jeder der 6 Seitenflächen verschieden ist, mit R beginnend im Uhrzeigersinn sind das RGBS, RGSB, RBGS, RBSG, RSGB und RSBG. Das sind alle möglichen Farbkombinationen, die eine Seite haben kann.





Nehmen wir uns nun einen beliebigen Würfel, dessen Seiten von je einem roten, einem grünen, einem blauen und einem schwarzen Stäbchen begrenzt wird. Dann müssen bei diesem Würfel ebenfalls die Stäbchen auf allen 6 Seiten verschiedene Farbkombinationen bilden. Dann drehen wir die Seite mit der Kombination RGBS nach vorn. Dann muss dieser Würfel entweder mit dem linken oder mit dem rechten Würfel übereinstimmen, also gibt es nur diese zwei Würfel und für Ana folglich nur eine Möglichkeit.

Die Lösungen der Extra-Knobeleien sind im Internet auf der Webseite des Känguru-Wettbewerbs unter www.mathe-kaenguru.de/chronik/broschueren zu finden.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

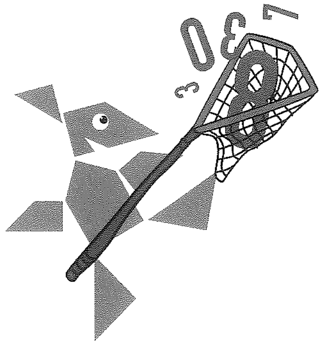
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	E	A	D	E	B	B	E	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	A	A	E	C	D	E	C	A	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	A	B	B	C	E	D	D	C	D

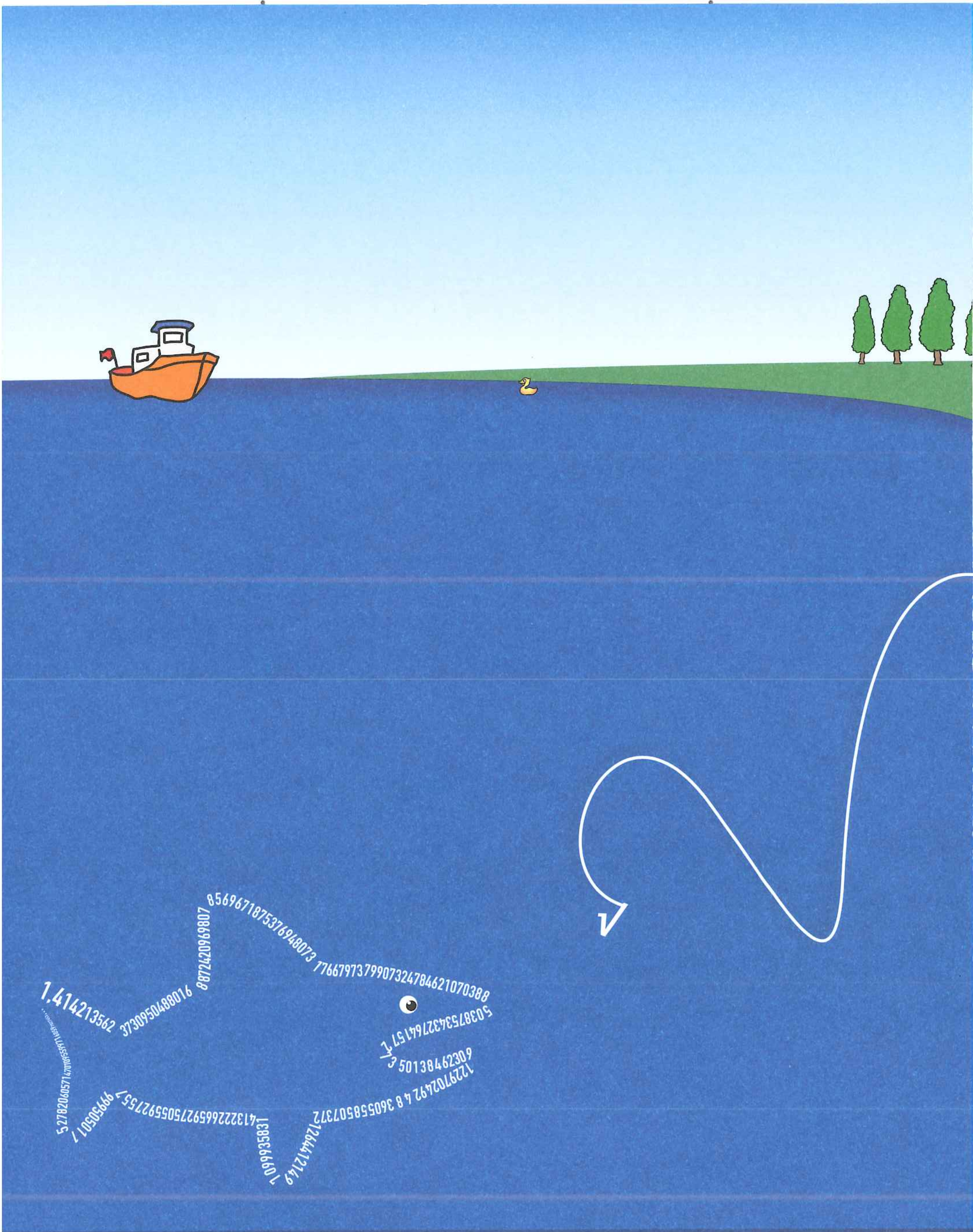
Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	C	A	C	E	A	A	D	B	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	B	D	B	C	D	B	E	D	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	E	E	B	C	D	D	B	C	A

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	E	E	D	B	A	A	B	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	D	E	C	D	B	C	B	A
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	E	D	E	C	A	A	D	D	B





mathe-kaenguru.de

mathe-kaenguru.ch