Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru-Wettbewerb 2014!

In diesem Jahr wurde der Känguru-Wettbewerb an fast 290 Schulen in der Schweiz durchgeführt und es nahmen rund 25'000 Schülerinnen und Schüler daran teil. Die nochmals gewachsene Zahl an Teilnehmenden ermuntert uns, auch im kommenden Jahr dafür zu sorgen, dass sich alle daran interessierten Schulen aus der Deutschschweiz mit wenig Aufwand und online anmelden können. Und ebenso werden wir uns bemühen, dass das gesamte Aufgabenmaterial wieder rechtzeitig, also noch vor Mitte März 2015 mit der Post bei den Schulen eintrifft.

Auch dieses Jahr musste gerechnet oder geschätzt werden, mal kam es auf ein gutes Vorstellungsvermögen an oder dann war die richtige Strategie gefragt. Die Fragestellungen sind meist spannend und oft herausfordernd, vor allem auch wegen der doch knappen Zeit, die zur Verfügung steht. Das Interessante und Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben rührt vor allem auch daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus über 50 Teilnehmerländern in den Wettbewerb einfliessen.

Die Mitglieder des deutschschweizerischen Känguru-Komitees hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall an ihren Schulen organisiert haben, dass sich die Teilnehmenden mit Freude den mathematischen Aufgaben zugewandt hatten und Lust auf weitere bekommen haben. Dazu finden sich in der Broschüre neben den Aufgaben der Klassenstufen 3/4, 5/6 und 7/8 samt Lösungshinweisen viele zusätzliche Knobeleien.

Und auch das Umschlagbild der Broschüre hat es in sich: Vorderseite und Rückseite unterscheiden sich in 20 Kleinigkeiten, die es zu entdecken gilt. Der Grund dafür ist, dass der Wettbewerb in Deutschland bereits zum 20. Mal durchgeführt worden ist in diesem März.

Beim Känguru-Wettbewerb sind in den Klassenstufen 3 bis 6 jeweils 24 Aufgaben zu lösen, ab Klassenstufe 7/8 sind es 30. Für das erste Drittel der 24 bzw. 30 Aufgaben sind jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte zu erreichen. Bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe werden 0.75 Punkte, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe 1 Punkt und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe 1.25 Punkte abgezogen. Wird eine Aufgabe nicht bearbeitet, gibt es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer erhält 24 bzw. 30 Punkte als Startpunktzahl. So ist 0 die niedrigste mögliche Gesamtpunktzahl, die erreichbare Höchstpunktzahl beträgt 120 bzw. 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise haben M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von K. Battaglia, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, Dr. A. Noack, R. Schelldorfer, Hj. Stocker und Dr. D. Vigerske erarbeitet. Ein Teil der zusätzlichen Knobeleien stammt aus der Feder von Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

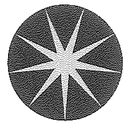
Klassenstufen 3 und 4

1. $20 - 14 + 2 - 0 + 1 - 4 =$

(**A**) 21 (**B**) 15 (**C**) 13 (**D**) 9 (**E**) 5

Lösung: Es ist $20 - 14 + 2 - 0 + 1 - 4 = 5$.

2. Welche der fünf Zeichnungen unten zeigt einen Ausschnitt der Zeichnung rechts?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

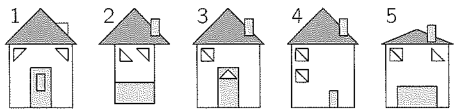
Lösung: Wir zählen die Strahlen des Sterns, es sind 9. Das sind ebenso viele wie im Ausschnitt (**D**).

3. Onkel Oskar gießt im Sommer seine Blumen zweimal täglich, einmal am Morgen und einmal am Abend. Wie oft gießt Onkel Oskar die Blumen im Laufe von 2 Wochen?

(**A**) 14-mal (**B**) 18-mal (**C**) 24-mal (**D**) 28-mal (**E**) 30-mal

Lösung: Zwei Wochen, das sind 14 Tage. Onkel Oskar gießt 2-mal täglich, also in zwei Wochen wegen $14 \cdot 2 = 28$ insgesamt 28-mal.

4. Zwei der fünf Häuser wurden aus denselben Figuren gelegt. Welche?

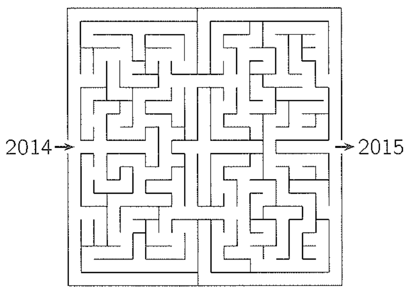


(**A**) 1 und 4 (**B**) 2 und 4 (**C**) 1 und 3 (**D**) 4 und 5 (**E**) 1 und 5

Lösung: Die Häuser 1 und 3 bestehen aus den gleichen Teilen. Das sind ein großes und drei kleine Dreiecke sowie drei unterschiedlich große Rechtecke.

Im abgebildeten Labyrinth gibt es genau einen Weg, der vom Jahr 2014 zum Jahr 2015 führt.

Wer findet diesen Weg?

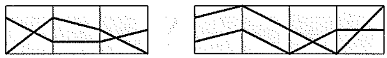


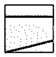
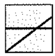
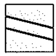
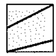
5. Um 14:20 Uhr steigen wir in Hamburg in den Zug nach Basel. Um 20:14 Uhr kommen wir an. Wie viele Minuten sind wir unterwegs?

(**A**) 344 (**B**) 354 (**C**) 364 (**D**) 374 (**E**) 384

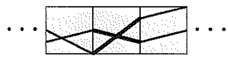
Lösung: Von 14:20 Uhr bis 20:20 Uhr wären es genau 6 Stunden bzw. $6 \cdot 60 = 360$ Minuten. Der Zug ist aber schon 6 Minuten früher in Basel. Also sind wir nur $360 - 6 = 354$ Minuten unterwegs.

6. Welches Teil passt in die Lücke, sodass 2 durchgehende Linien entstehen?

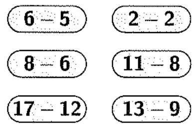


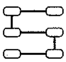
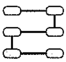
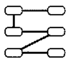
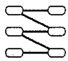
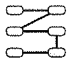
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Striche auf dem passenden Teil beginnen links ganz unten und in der Mitte. Das trifft nur für (**A**), (**C**) und (**E**) zu. Auf der rechten Seite enden die beiden Striche etwas unterhalb und etwas oberhalb der Mitte. Das ist bei den verbleibenden Möglichkeiten nur bei (**A**) der Fall.

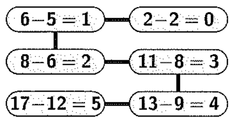


7. Luise löst die 6 Aufgaben rechts und erhält als Ergebnisse die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sie verbindet die Aufgabenkästchen in der Reihenfolge der Ergebnisse von 0 bis 5. Wie sieht das aus?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

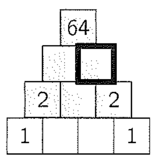
Lösung: Schreiben wir die Lösungen der kleinen Subtraktionsaufgaben in die Kästchen, so sehen wir sofort, dass (**A**) die richtige Reihenfolge zeigt.



Aus 8 Stäben, von denen 4 halb so lang sind wie die 4 übrigen, sollen 3 gleich große Quadrate gelegt werden.

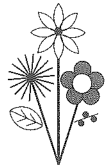
Wer findet die Lösung?

8. Nikolai füllt die Zahlenpyramide aus. Als er fertig ist, steht in jedem grauen Kästchen das Produkt der beiden Zahlen darunter. Welche Zahl hat er in das dick umrandete Kästchen eingetragen?

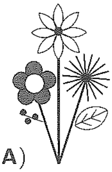
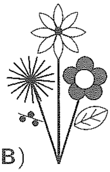
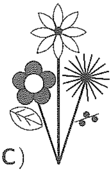
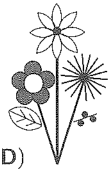
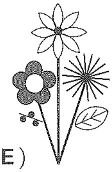


(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) 8

Lösung: In der unteren Reihe müssen beide einzutragenden Zahlen 2 sein, denn $2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$. In der Zeile darüber steht dann in dem auszufüllenden Feld wegen $2 \cdot 2 = 4$ eine 4. Daraus ergibt sich für das dick umrandete Feld eine 8, denn $4 \cdot 2 = 8$.



9. Herr Wiese hat von innen einen Strauß an das Schaufenster seines Blumenladens gemalt (siehe Bild). Wie sieht der Strauß von draußen aus?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

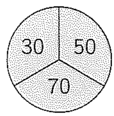
Lösung: Die richtige Antwort ist (**E**).

10. Ich habe 20-Cent-Münzen, 10-Cent-Münzen, 2-Cent-Münzen und 1-Cent-Münzen. Du darfst dir von einer Sorte eine Münze, von einer 2. Sorte 2 Münzen und von einer 3. Sorte 3 Münzen nehmen. Wie viel Cent kannst du dir höchstens nehmen?

(**A**) 96 Cent (**B**) 82 Cent (**C**) 75 Cent (**D**) 62 Cent (**E**) 61 Cent

Lösung: Um möglichst viel Cent zu nehmen, musst du dir von den 20-Cent-Münzen die höchstmögliche Zahl, also 3 Stück, nehmen. Von den 10-Cent-Münzen musst du dir 2 nehmen. Für die eine Münze, die du noch nehmen darfst, wählst du die jetzt noch wertvollste, also eine 2-Cent-Münze. Insgesamt hast du dann $3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 2 = 82$ Cent.

11. Wilhelm trifft zweimal die abgebildete Zielscheibe. Für jeden Treffer bekommt er die entsprechende Punktzahl. Welche der folgenden Zahlen kann *nicht* die Summe seiner Trefferpunkte sein?



(**A**) 60 (**B**) 80 (**C**) 90 (**D**) 100 (**E**) 140

Lösung: Von den angegebenen Summen aus 2 Trefferpunkten hat nur eine eine *ungerade* Zehnerstelle, die 90. Die 90 kann gewiss nicht als Summe zweier Zahlen mit *ungerader* Zehnerstelle entstanden sein.

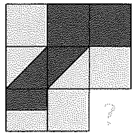
Die Aufgabe kann auch gelöst werden, indem alle möglichen Summen der Trefferpunkte ausgerechnet werden: 60, 80, 100, 120, 140. Die 90 ist nicht dabei.

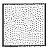
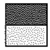
12. Mutter Maus hat eine Packung Käsewürfel gefunden. Die teilt sie unter ihren Söhnen auf. Der älteste bekommt die Hälfte. Der zweitälteste bekommt die Hälfte vom Rest. Der drittälteste bekommt die Hälfte der restlichen Käsewürfel. Jetzt sind noch 6 Käsewürfel übrig, die bekommt der jüngste. Wie viele Käsewürfel waren in der Packung?

(**A**) 12 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 48

Lösung: Wenn von einer Anzahl Käsewürfel die Hälfte vergeben wird, bleibt als Rest die andere Hälfte, also dieselbe Anzahl. Bevor der drittälteste Mausesohn seine Käsewürfel bekommt, waren also $2 \cdot 6 = 12$ Käsewürfel in der Packung. Genauso finden wir: Bevor der zweitälteste seine Käsewürfel bekommt, waren $2 \cdot 12 = 24$ Käsewürfel in der Packung. Und zu Beginn der Aufteilung waren $2 \cdot 24 = 48$ Käsewürfel in der Packung.

13. Welches Teil muss angelegt werden, damit im vollständigen 3×3-Feld die hellgraue Fläche ebenso groß ist wie die dunkelgraue?

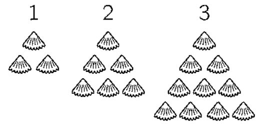


(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Die 3 zweifarbigen Quadrate im 3×3-Feld sind mit den beiden Farben je genau zur Hälfte gefärbt. Da wir durch das Hinzufügen des 9. Quadrats eine mit beiden Farben genau zur Hälfte gefärbte Gesamtfläche haben wollen, brauchen wir diese 3 Teile also nicht zu berücksichtigen. Von den restlichen Quadraten sind 3 hellgrau und 2 dunkelgrau. Folglich muss das dunkelgraue Quadrat **(B)** angelegt werden.

Eine ähnliche, jedoch etwas schwierigere Aufgabe ist Aufgabe 14 in Klassenstufe 5/6.

14. Janoš hat Muscheln gesammelt. Er legt daraus Dreiecke. Im 1. Dreieck sind 3 Muscheln. In jedes weitere Dreieck legt er jeweils eine Reihe Muscheln mehr. Wie viele Muscheln braucht Janoš für das 6. Dreieck?

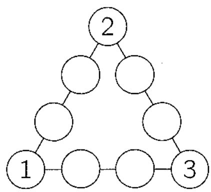


(A) 28 **(B)** 27 **(C)** 25 **(D)** 24 **(E)** 21

Lösung: Wir erkennen, dass vom 1. zum 2. Dreieck 3 Muscheln, vom 2. zum 3. Dreieck 4 Muscheln und so in jedem Schritt eine um 1 größere Zahl von Muscheln hinzugefügt wird. Für das 6. Dreieck braucht Janoš also insgesamt $3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ Muscheln.

In den Eckfeldern des Dreiecks stehen die Zahlen 1, 2 und 3. Auf die übrigen Felder sind die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8 und 9 so zu verteilen, dass die Summe der Zahlen auf jeder Dreiecksseite 17 ist.

Wer kann die Figur geeignet vervollständigen?

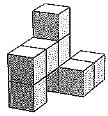


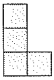
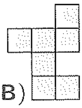
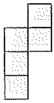
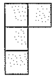
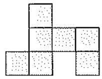
15. Im Ferienlager haben die Kinder gelernt, wie man einen Kranich faltet. Adam hat nicht so viele gefaltet wie Nele, allerdings mehr als Iris. Otto hat mehr Kraniche gefaltet als Adam und mehr als Nele. Lulu hat zwar mehr Kraniche als Nele gefaltet, jedoch weniger als Otto. Welches der Kinder hat die meisten Kraniche gefaltet?

(A) Adam **(B)** Nele **(C)** Iris **(D)** Otto **(E)** Lulu

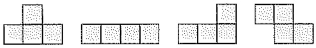
Lösung: Da wir hier nur nach dem Kind suchen, das die größte Anzahl Kraniche gefaltet hat, gehen wir den Text von vorn nach hinten durch und halten dabei immer das Kind „fest“, das dann gerade die größte Zahl gefaltet hat. Adam hat weniger als Nele gefaltet, also ist Nele im Moment die mit der größten Anzahl, denn dass Adam mehr als Iris gefaltet hat, ändert daran nichts. Otto hat mehr als Nele gefaltet, also ist nun Otto der mit der größten Anzahl. Und da Otto auch mehr als Lulu gefaltet hat, ist er das gesuchte Kind mit den meisten Kranichen.

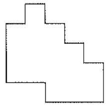
16. Der abgebildete Körper besteht aus 8 gleich großen Würfeln. Wie sieht er von oben aus?

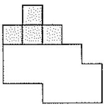
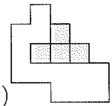
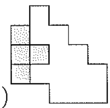
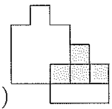
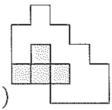


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

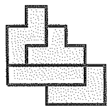
Lösung: Der Blick von oben ist in (**C**) dargestellt.

17. Yona will mit den 4 Teilen  die Figur rechts ausfüllen. Wohin muss sie das erste Teil legen?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: Das Bild mit der vollständigen Auslegung zeigt, dass (**B**) die Lösung ist. Es ist übrigens nicht schwer zu zeigen, dass dies die einzige mögliche Auslegung ist.



18. Kai wollte mit Magnetbuchstaben die Nachricht BIN BEI ANTON an den Kühlschrank heften. Aber die Buchstaben kamen durcheinander. TON EIB ANBIN ist jetzt zu lesen. „So ein Quatsch", denkt Kai und tauscht Schritt für Schritt immer 2 Buchstaben gegeneinander aus, bis es richtig ist. Wie oft muss er mindestens tauschen?

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal

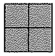
Lösung: Von den Buchstaben, die Kai an den Kühlschrank geklebt hat, sind 7 am falschen Platz. Da er immer zwei gegeneinander tauschen will, braucht er mindestens 4 Schritte, denn mit 3 Schritten kann er höchstens $2 \cdot 3 = 6$ Buchstaben gegeneinander tauschen. Mit 4 Schritten ist der Tausch möglich, wie das Beispiel zeigt:

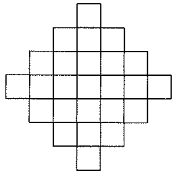
→ TON **IE**B ANBIN → TON **B**E**I** ANBIN → **B**ON BEI ANT**I**N → B**I**N BEI ANT**O**N

19. Die Kinder im Hort proben für das Theaterstück „Schneewittchen". Die 7 Zwerge werden von Jungen und Mädchen gespielt. In ihren Kostümen stehen sie im Kreis. Nirgendwo stehen 2 Jungen nebeneinander und nirgendwo stehen 3 Mädchen nebeneinander. Wie viele der 7 Zwerge werden von Mädchen gespielt?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

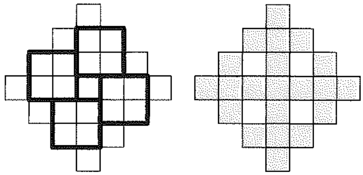
Lösung: Da 7 Kinder, also eine ungerade Anzahl von Kindern, im Kreis stehen, können es nicht gleich viele Jungen und Mädchen sein. Da Jungen nur einzeln im Kreis stehen und Mädchen höchstens zu zweit, muss es mindestens eine Mädchenzweiergruppe geben. In beide Richtungen schließt sich dann an diese Mädchenzweiergruppe – da keine 2 Jungen nebeneinanderstehen – je ein Junge an und daran je mindestens ein Mädchen. Das 7. Kind muss ein Junge sein, weil ja nirgendwo 3 Mädchen nebeneinanderstehen. Also befinden sich genau 4 Mädchen im Kreis.

20. In der rechts abgebildeten Figur male ich einige Felder grau aus. Dabei darf *nirgendwo* ein graues 2×2-Quadrat  entstehen. Wie viele Felder kann ich dann höchstens grau ausmalen?



(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: In der Figur finden wir vier 2×2-Quadrate, die sich nicht überlappen, wie im linken Bild zu sehen ist. Folglich muss in jedem dieser $2{\times}2$-Quadrate mindestens ein Kästchen weiß bleiben. Dafür, dass es ausreicht, 4 Kästchen weiß zu lassen, ist das rechte Bild ein Beispiel.



21. Olli hat zu Weihnachten ein Kaninchen bekommen. Sein Vater passt auf, dass das Kaninchen gesund ernährt wird. Olli darf täglich füttern: entweder 9 Petersilienstängel oder 2 Möhren oder eine Möhre und 4 Petersilienstängel. Letzte Woche hat Olli 30 Petersilienstängel verfüttert. Wie viele Möhren hat er letzte Woche verfüttert?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wir gucken uns an, wie das Füttern innerhalb der 7 Tage abgelaufen sein kann.

1. Fall: Olli füttert an keinem Tag 9 Petersilienstängel. Dann kann er an den 7 Tagen wegen $7 \cdot 4 = 28$ höchstens 28 Stängel verfüttert haben, es waren aber 30. Also kann dieser Fall nicht vorliegen.

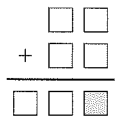
2. Fall: Olli füttert an genau einem Tag 9 Petersilienstängel. Die restlichen $30 - 9 = 21$ Stängel muss er in 4er-Päckchen verfüttern. Das ist aber nicht möglich, da die ungerade Zahl 21 nicht durch 4 teilbar ist. Also kann auch dieser Fall nicht vorliegen.

3. Fall: Olli füttert an genau 2 Tagen je 9 Petersilienstängel. Dann hat er für die Tage mit 4er-Päckchen noch $30 - 18 = 12$ Stängel übrig, die für genau 3 Tage reichen. An diesen Tagen füttert er je eine Möhre. An den $7 - 2 - 3 = 2$ Tagen, an denen es keine Petersilienstängel gibt, füttert er je 2 Möhren. Insgesamt füttert er also $3 + 2 \cdot 2 = 7$ Möhren.

4. Fall: Olli füttert an 3 Tagen je 9 Petersilienstängel. Dann bleiben $30 - 3 \cdot 9 = 3$ Stängel übrig, die aber nicht für ein 4er-Päckchen und erst recht nicht für weitere Tage mit nur Petersilienstängeln reichen. Dieser Fall kann also auch nicht vorliegen.

Ein ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 20 in Klassenstufe 5/6.

22. Benjamin verteilt die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 so auf die Kästchen, dass eine richtige Additionsaufgabe entsteht. Welche der Ziffern muss er in das graue Kästchen schreiben?



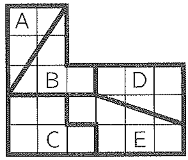
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Summe wird am größten, wenn die Zehner der Summanden 6 und 5 sind und die Einer 4 und 3. Die größtmögliche Summe ist $5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 + 3 = 117$. Die Summe liegt also zwischen 100 und 117. Da alle Ziffern verschieden sind, ist der Hunderter der Summe 1 und der Zehner 0. Würden die Einer der Summanden einen Übertrag liefern, so wären sie 4 und 6 oder 5 und 6. Im grauen Kästchen wäre dann eine 0 oder eine 1, was nicht möglich ist. Folglich liefern die Einer der Summanden keinen Übertrag. Die Summe der Zehner der Summanden ist daher 10, die beiden Zehner also 4 und 6. Übrig bleiben 2, 3, 5 und wegen $2+3 = 5$ ist 5 die gesuchte Ziffer für das graue Kästchen.

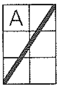
Es gibt 4 Möglichkeiten, die Ziffern so zu verteilen, dass eine richtige Additionsaufgabe entsteht:

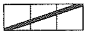
$$\begin{array}{r} \boxed{6}\,\boxed{3} \\ +\ \boxed{4}\,\boxed{2} \\ \hline \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{4}\,\boxed{3} \\ +\ \boxed{6}\,\boxed{2} \\ \hline \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{6}\,\boxed{2} \\ +\ \boxed{4}\,\boxed{3} \\ \hline \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{4}\,\boxed{2} \\ +\ \boxed{6}\,\boxed{3} \\ \hline \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{5} \end{array}$$

23. Camilla hat ein Stück Karopapier in 5 Teile geteilt. Nun möchte sie die Teile nach der Größe ihrer Fläche ordnen. Wie lautet die richtige Reihenfolge, wenn Camilla mit der kleinsten Fläche beginnt?

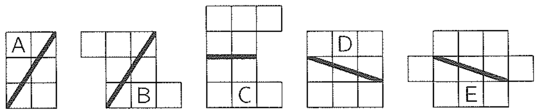


(A) A–B–D–C–E **(B)** D–A–C–B–E **(C)** A–D–C–B–E
(D) C–A–E–D–B **(E)** A–D–E–B–C

Lösung: Um die Fläche A in ihrer Größe abzuschätzen, überlegen wir uns, dass A genau die Hälfte des 2×3-Rechtecks 

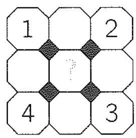
einnimmt. Die Fläche A ist also genau 3 Kästchen groß. Da B ein Kästchen mehr als A umfasst, ist die Fläche von A kleiner als die von B. Die Fläche von B ist 4 Kästchen groß. Die Fläche von D setzt sich aus einem 3 Kästchen großen Rechteck und der Hälfte eines 3 Kästchen großen Rechtecks  zusammen. Folglich ist die Fläche von D größer als die von B. Die Fläche von D ist aber, da die Hälfte von 3 Kästchen kleiner als die Hälfte von 4 Kästchen ist, kleiner als die Fläche von C, die insgesamt $5 = 3 + 2$ Kästchen groß ist. Und die Fläche von E ist schließlich, da sie sich aus 4 ganzen Kästchen und – wie D – der Hälfte eines 3 Kästchen großen Rechtecks zusammensetzt, größer als die von C. Die Reihenfolge der Größe nach ist also: A–B–D–C–E.

Eine gute Methode, um diese Aufgabe zu lösen, ist es, alle Flächen zu verdoppeln. Dann lassen sich die Kästchen einfach auszählen und die Reihenfolge bestimmen.



6 8 10 9 11

24. In die leeren Felder der Figur hat Cathy die Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 eingetragen. Die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 5 ist 13. Die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 6 ist auch 13. Welche Zahl hat Cathy in das mittlere Feld geschrieben?
(*Nachbarfelder* sind alle waagerecht oder senkrecht angrenzenden Felder.)



(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

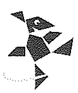
Lösung: Weder die 5 noch die 6 stehen im mittleren Feld, da die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern des mittleren Feldes in jedem Fall größer als 13 ist. Folglich müssen 5 und 6 das mittlere Feld sowie jeweils 2 der Eckfelder als Nachbarfelder haben, wobei die Summe der Zahlen in den Eckfeldern jeweils gleich sein muss. Das ist nur der Fall für $1 + 4 = 2 + 3$. In das mittlere Feld gehört dann wegen $13 - 5 = 8$ die 8.

Ähnlich zu diesem Problem sind die Aufgaben 23 in Klassenstufe 5/6 und 21 in Klassenstufe 7/8.

20 Jahre frisch und froh, Känguru mach weiter so!

Wer findet den Weg von der 1 zur 100? Wer die Kreise richtig ausmalt, kann ein Tier entdecken, das der Mathematik eng verbunden ist.
Doch Vorsicht! An manchen Stellen muss gut hingeschaut werden, wie es richtig weitergeht.

12	67	43	23	56	52	54	46	45	57	92	82	88	77	66	60	33	34	51	50	47	48	50	52	49	55	60
34	13	20	20	45	67	67	20	20	46	56	63	67	70	87	82	81	35	47	48	46	49	56	57	70	54	47
43	20	56	34	20	54	20	46	76	20	97	87	48	47	45	56	45	36	47	46	45	50	50	45	65	53	62
64	45	34	56	20	76	20	66	45	20	46	75	85	47	45	73	54	37	48	43	44	51	52	54	60	59	64
13	45	56	20	54	76	20	23	38	20	87	56	24	49	52	55	50	38	39	47	43	54	53	54	58	58	62
25	67	20	82	72	73	20	82	43	20	63	78	45	58	54	57	54	56	40	41	42	47	57	55	56	57	60
67	20	20	20	20	56	23	20	20	57	53	23	57	45	67	50	49	48	43	42	41	49	60	58	56	58	59
35	87	45	32	24	45	34	46	65	34	54	57	58	53	36	55	46	41	40	37	40	42	44	63	66	64	60
22	67	55	66	57	23	67	23	55	45	52	51	33	74	35	34	47	45	43	38	39	40	65	64	63	62	61
24	22	25	23	45	56	44	54	66	23	45	46	32	31	56	33	37	35	36	37	39	63	66	72	70	74	68
58	34	35	37	26	34	38	31	37	30	37	31	27	30	22	32	33	34	36	39	40	68	67	68	69	66	62
12	23	47	39	37	38	33	31	29	30	34	36	31	29	30	31	33	35	32	62	67	69	70	77	80	69	65
23	44	25	27	35	39	40	34	32	31	30	29	27	28	30	25	27	34	31	65	69	70	75	73	79	68	67
34	54	54	35	33	36	26	29	34	29	28	25	26	31	30	34	26	29	35	73	69	71	74	76	78	90	68
54	21	22	36	31	38	36	30	24	27	24	24	27	30	29	33	31	29	27	74	76	72	73	78	67	78	69
12	32	24	26	33	34	43	31	26	29	22	23	24	25	25	21	30	33	72	78	76	75	74	73	72	71	70
34	67	34	45	65	64	62	21	30	28	21	25	26	27	29	23	31	35	38	72	77	83	75	76	77	73	78
45	23	54	33	31	42	30	25	26	19	20	21	22	30	82	81	80	79	80	81	78	79	80	82	78	89	85
24	17	22	27	26	24	23	25	11	18	23	24	23	24	83	24	14	23	76	80	79	72	74	79	76	71	82
17	19	22	26	24	28	23	16	22	17	18	19	32	21	84	85	85	80	82	81	84	80	82	83	81	90	84
16	18	13	19	23	25	27	24	17	16	21	18	25	27	73	86	82	84	83	85	87	89	83	85	89	82	81
19	17	14	15	25	15	19	18	14	15	16	17	15	81	83	87	86	85	87	80	90	92	83	84	91	81	80
15	18	27	12	11	10	18	10	13	16	18	25	89	83	85	88	80	86	87	88	89	93	99	96	87	80	83
5	8	9	1	3	9	17	11	12	14	90	84	83	80	85	89	90	93	96	95	90	94	97	96	95	97	98
3	3	10	6	13	8	9	10	15	18	11	83	84	86	83	88	91	92	93	94	95	96	98	95	99	93	97
2	6	7	5	6	7	9	11	12	16	17	12	18	81	90	84	89	92	94	95	84	97	98	90	92	95	94
1	2	3	4	7	9	12	4	12	24	16	18	33	23	15	17	90	77	94	95	55	99	99	100	87	90	99

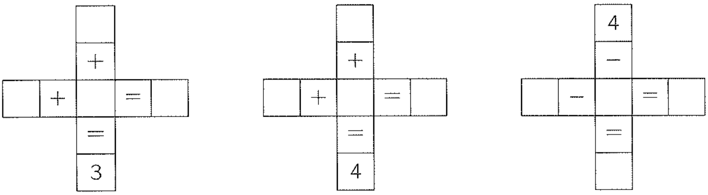


Wer findet die 20?
Wer jeden Kreis ausmalt, in dem eine 20 steht, kann eine weitere Entdeckung machen.

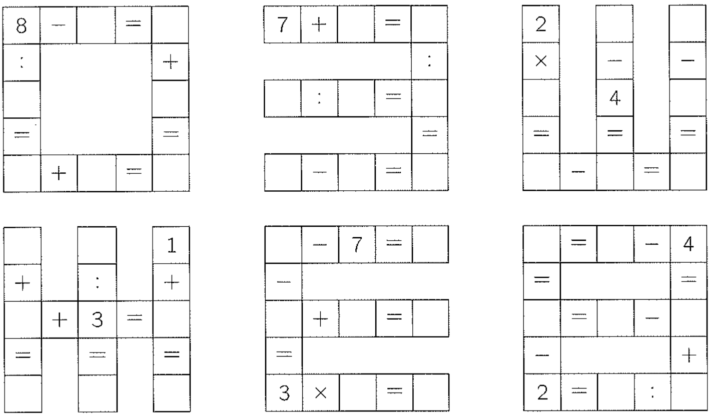
Kopfnüsse I: Zahlengitter

In jedes leere Kästchen ist eine einstellige Zahl so einzutragen, dass lauter richtige Rechenaufgaben entstehen. Dabei darf bei jeder Aufgabe keine Zahl mehr als einmal vorkommen.

Bei den ersten 3 Aufgaben dürfen nur die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 vorkommen:



Bei den folgenden 6 Aufgaben können alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen:



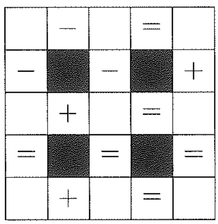
In die leeren Kästchen sind natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich lauter richtige Rechenaufgaben ergeben. Zur Eintragung dürfen aber nur

a) die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5

b) die Zahlen 1, 2, 3 und 4

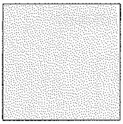
c) die Zahlen 1, 2 und 3

verwendet werden. Dabei soll jede dieser fünf, vier bzw. drei Zahlen auch mindestens einmal auftreten.



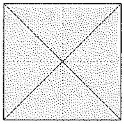
Ein Kranich zum Aufpusten

Zum Basteln des Kranichs wird ein quadratisches Stück Papier benötigt. So etwas lässt sich schnell aus einem A4-Blatt herstellen.

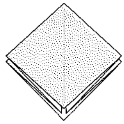


Nehmen wir also ein quadratisches Blatt Papier zur Hand.

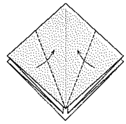
Tipp für die Verwendung von zweifarbigem Papier: Die oben liegende Seite ist am Ende außen zu sehen!



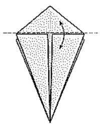
An den gestrichelten Linien nach vorne, an den gepunkteten nach hinten falten und wieder auseinanderklappen.



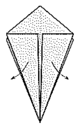
Die linke untere und die rechte obere Ecke lassen sich nun leicht zwischen die beiden Quadrate drücken.



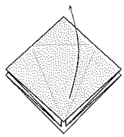
Die beiden Ecken nach oben an die senkrechte Linie falten. Auf der Rückseite wiederholen.



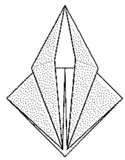
Die Spitze an der gestrichelten Linie nach unten und gleich wieder nach oben falten. Auf der Rückseite wiederholen.



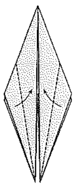
Die beiden Flügel zurück nach unten klappen. Auf der Rückseite wiederholen.



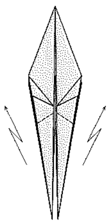
Die untere Spitze an der Hilfsfalte vorsichtig nach oben klappen und die beiden Seiten auf die Mitte falten.



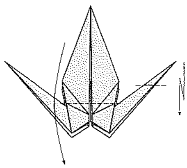
Auf der Rückseite wiederholen.



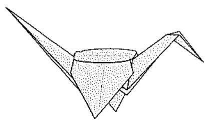
Die beiden Ecken nach oben an die senkrechte Linie falten.
Auf der Rückseite wiederholen.



An der gestrichelten Linie die unteren Spitzen nach oben falten und wieder zurückklappen. Dann die Spitzen nach oben zwischen die Flügel klappen.



An der gestrichelten Linie den Schnabel nach unten zwischen den Hals klappen. Anschließend die Flügel nach unten falten.



Nun sind nur noch die Flügel vorsichtig auseinanderzuziehen und von unten durch das Loch der Kranich aufzublasen.

Den Geschwindigkeits-Rekord für 100 Origami Kraniche hält Yoneyama Yuichi aus Japan, der am 30. November 2010 nur 40 Minuten und 35 Sekunden dafür benötigte.

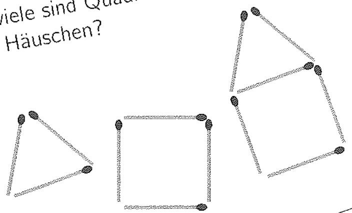
Wie lange hat er durchschnittlich für einen dieser Kraniche benötigt?

Streichholz-Rechnereien

(A)

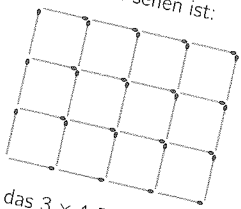
Caroline kippt eine Schachtel Streichhölzer aus. Sie zählt 36 Stück. Daraus legt sie 10 Figuren – Dreiecke, Quadrate und Häuschen, wie in der Zeichnung zu sehen.

Wie viele der Figuren sind Dreiecke, wie viele sind Quadrate und wie viele sind Häuschen?



(B)

Aus Streichhölzern lässt sich ein „ausgelegtes" Rechteck legen, wie es in der Zeichnung zu sehen ist:



Für das 3×4-Rechteck braucht man zum Beispiel 31 Streichhölzer.

Welche Rechtecke dieser Art können aus 199 Streichhölzern gelegt werden?

Kryptogramme

In den folgenden Aufgaben ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, sodass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Dabei muss jede Zahl mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.

$$\begin{array}{r}
\ast\ast 7 \cdot 5\ast\ast \\ \hline
7\ast\ast \\
\ast\ast 2 \\
\ast 7 \ast \\ \hline
\ast\ast\ast\ast 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\ast\ast 75 \cdot 5\ast\ast\ast \\ \hline
38\ast\ast\ast \\
38\ast\ast\ast \\
38\ast\ast\ast \\
54\ast\ast\ast \\ \hline
\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast
\end{array}$$

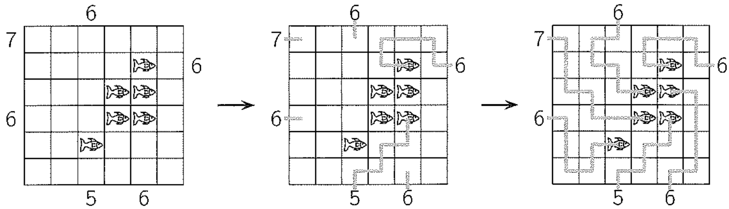
$$\begin{array}{r}
\ast\ast \cdot \ast 8 \\ \hline
\ast\ast\ast \\
\ast\ast \\ \hline
\ast\ast\ast\ast
\end{array}$$

Christian hat mit Streichhölzern den Rand eines Quadrats gelegt. Das Quadrat hat er dann mit Streichhölzern in 25 kleinere Quadrate zerteilt. Von diesen 25 Quadraten haben 24 die Seitenlänge von einem Streichholz. Das 25. Quadrat ist größer.

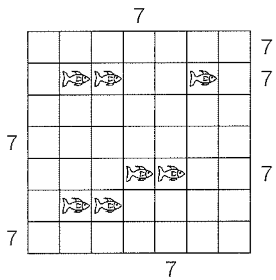
Wie viele Streichhölzer lang ist die Seitenlänge des 25. Quadrats?

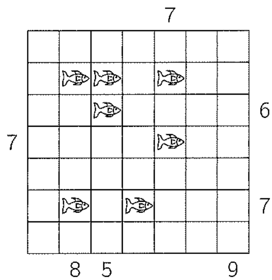
Kopfnüsse II: Frische Fische

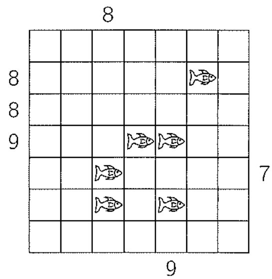
Am Rand der Übungsteiche des Angelvereins „Gerade Schnur“ sitzen Angler an den mit Zahlen beschrifteten Positionen. Jeder von ihnen hat einen Fisch am Haken. Ihre Angelschnüre verlaufen senkrecht oder waagerecht von Feld zu Feld, wobei durch jedes Feld genau eine Angelschnur verläuft. Die Zahlen geben die Anzahl der Felder an, über die die Schnur vom Angler bis zum Fisch verläuft. Hier ist ein Beispiel:

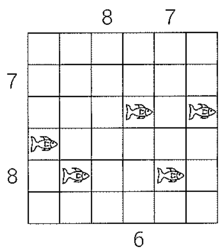


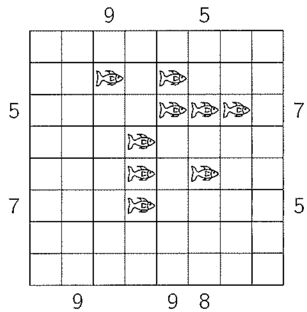
Wer findet die richtigen Angelschnüre?

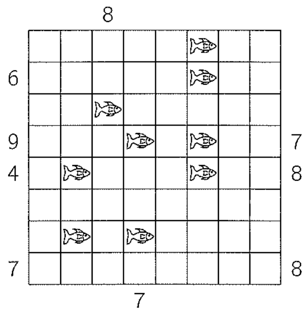










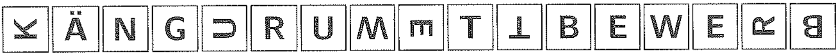


Zwei Mütter und zwei Töchter waren gemeinsam angeln. Zusammen haben sie 9 Fische geangelt, jede von ihnen die gleiche Anzahl.

Wie kann das sein? Wie viele Fische hat jede der Anglerinnen geangelt?

Klassenstufen 5 und 6

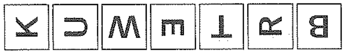
1. Maren bereitet eine Wandzeitung vor. Sie hat dafür große Buchstabenkarten, die sie anpinnt. Sie hat sich bei einigen Buchstaben beim Anpinnen vertan, sodass nun dasteht:



Wie viele Buchstabenkarten muss Maren drehen, damit KÄNGURUWETTBEWERB dasteht?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

Lösung: Maren muss die folgenden Buchstaben drehen:



Das sind insgesamt 7 Buchstabenkarten.

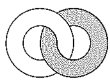
2. In der Additionsaufgabe stehen die drei Sterne für dieselbe Ziffer. Für welche?

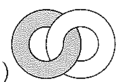
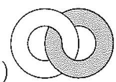
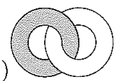
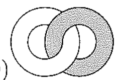
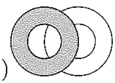
$$\begin{array}{r} 1\bigstar 2 \\ +\,1\bigstar 3 \\ +\,1\bigstar 4 \\ \hline 309 \end{array}$$

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 9

Lösung: Da die Summe der Einer in der Additionsaufgabe gerade 9 und die Summe der Hunderter gerade 3 ist, müssen die drei Sterne drei Nullen sein.

3. Ein grauer und ein weißer Ring sind ineinander verschlungen. Hakim hält sie hoch. Else steht vor ihm und sieht die Ringe wie im Bild rechts. Dann geht sie um Hakim herum und guckt von hinten auf die Ringe. Was sieht Else jetzt?



(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Wenn Else um Hakim herumgegangen ist, sieht sie den dunklen Ring links, und der weiße ist im unteren Teil vor dem dunklen, im oberen Teil hinter dem dunklen Ring. Also ist **(C)** richtig.

4. Was ist die Differenz zwischen der kleinsten 4-stelligen und der größten 3-stelligen Zahl?

(A) 1 **(B)** 9 **(C)** 111 **(D)** 909 **(E)** 9889

Lösung: Die kleinste 4-stellige Zahl ist die 1000, die größte 3-stellige die 999. Die gesuchte Differenz ist $1000 - 999 = 1$.

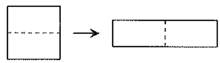
5. Lilly möchte die Ziffer 3 zur 2014 hinzufügen, sodass eine 5-stellige Zahl entsteht. Wohin muss sie die 3 schreiben, damit diese 5-stellige Zahl so klein wie möglich ist?

(**A**) vor die 2 (**B**) zwischen die 2 und die 0 (**C**) zwischen die 0 und die 1
(**D**) zwischen die 1 und die 4 (**E**) hinter die 4

Lösung: Um eine möglichst kleine 5-stellige Zahl zu erhalten, muss Lilly die 3 hinter die ersten 3 kleineren Ziffern, aber vor die größere Ziffer schreiben, also zwischen die 1 und die 4. Sie erhält 20134.

Natürlich lässt sich diese Aufgabe auch lösen, indem die 5 möglichen Zahlen hingeschrieben und verglichen werden.

6. Ein Quadrat mit dem Umfang 40 cm ist in der Mitte zerschnitten worden. Die beiden Hälften sind zu einem Rechteck zusammengelegt worden (siehe Bild). Welchen Umfang hat dieses Rechteck?



(**A**) 32 cm (**B**) 40 cm (**C**) 44 cm (**D**) 48 cm (**E**) 50 cm

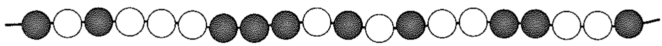
Lösung: Die Seitenlänge des Quadrats beträgt $40\,\text{cm} : 4 = 10\,\text{cm}$. Der Umfang des Rechtecks besteht aus 4 ganzen und 2 halben Quadratseiten, ist also $4 \cdot 10\,\text{cm} + 2 \cdot 5\,\text{cm} = 50\,\text{cm}$ lang.

7. Kilian hat eine Melone eingekauft. Sie wiegt 900 g. Seine Mutter teilt die Melone in 4 Teile, 3 davon sind zusammen ebenso schwer wie das vierte Teil. Wie viel wiegt das schwerste Teil?

(**A**) 250 g (**B**) 300 g (**C**) 400 g (**D**) 450 g (**E**) 600 g

Lösung: Wenn von 4 Teilen 3 so schwer sind wie das vierte Teil, so ist dieses vierte Teil am schwersten und wiegt die Hälfte des Ganzen, also im Fall der Melone 450 g.

8. In Siris Halsband sind glänzende schwarze und schimmernde weiße Perlen:



Siri möchte 5 schwarze Perlen davon für ein Armband nehmen. Sie nimmt nacheinander Perlen von ihrem Halsband, jede einzelne entweder vom linken oder vom rechten Ende. Dabei will sie möglichst wenige weiße Perlen aus der Kette nehmen. Wie viele weiße Perlen muss sie mindestens aus der Kette nehmen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

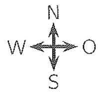
Lösung: Sicher nimmt Siri zu Beginn von jeder der beiden Seiten je eine schwarze Perle. Würde sie die 3 restlichen schwarzen Perlen alle von links oder alle von rechts nehmen, müsste sie in beiden Fällen insgesamt 4 weiße Perlen nehmen. Nimmt sie die 3 restlichen schwarzen Perlen *nicht* alle von einer Seite, dann schafft sie es mit 3 weißen Perlen. Das ist die gesuchte Mindestanzahl.

9. Aus 38 Streichhölzern lege ich ein Dreieck und ein Quadrat. Jede Dreiecksseite ist 6 Hölzer lang. Wie viele Hölzer lang ist eine Quadratseite?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Für das Dreieck werden $3 \cdot 6 = 18$ der 38 Streichhölzer gebraucht. Es bleiben 20 Streichhölzer übrig. Daraus folgt, dass jede Quadratseite $20 : 4 = 5$ Hölzer lang ist.

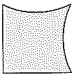
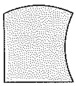
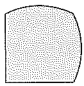
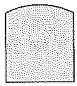
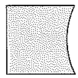
10. Die Wanderwürmer Walli und Willi sind mehrere Meter gemeinsam gewandert. Jetzt trennen sie sich. Walli kriecht 2 m nach Westen, dann 2 m nach Süden, dann noch einmal 2 m nach Westen. Willi kriecht zuerst 3 m nach Süden, dann 4 m nach Westen. Wie muss Willi jetzt kriechen, um wieder bei Walli anzukommen?



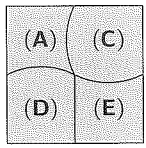
(A) Er ist schon dort. **(B)** 1 m nach Norden **(C)** 1 m nach Osten
(D) 1 m nach Süden **(E)** 1 m nach Westen

Lösung: Walli wandert insgesamt 4 m nach Westen und 2 m nach Süden. Willi wandert ebenfalls 4 m nach Westen, nach Süden jedoch 3 m, also einen Meter weiter. Dann muss er 1 m nach Norden wandern, um bei seiner Walli zu landen.

11. Aus 4 der abgebildeten Teile legen wir ein Quadrat – ohne Lücken und ohne Überlappungen. Welches Teil bleibt übrig?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Für das Quadrat muss die Gesamtzahl der Wölbungen nach außen gleich der nach innen sein. Das lässt sich nur mit Hilfe der Teile **(A)**, **(C)**, **(D)** und **(E)** erreichen, **(B)** bleibt übrig.
Das zusammengesetzte Quadrat ist rechts abgebildet.

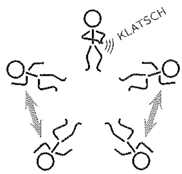


12. Im Sportcamp nehmen 7 Teilnehmer jeden Tag an einem Krafttraining teil. Die restlichen 9 Teilnehmer absolvieren dieses Training jeden zweiten Tag. Gestern fand das Krafttraining für 13 Teilnehmer statt. Wie viele Teilnehmer sind heute beim Krafttraining dabei?

(A) 3 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 13

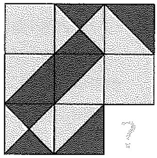
Lösung: Unter den 13 Teilnehmern, die gestern am Krafttraining teilnahmen, waren die 7 Teilnehmer des Camps, die das Training täglich absolvieren, während $13 - 7 = 6$ Teilnehmer zur Gruppe der 9 Teilnehmer gehören, die jeden zweiten Tag am Krafttraining teilnehmen. Dann sind also heute 3 Teilnehmer aus dieser Gruppe mit dem Krafttraining dran. Zusammen mit den 7, die täglich dran sind, sind es heute $3 + 7 = 10$ Teilnehmer.

13. Juri, Ken, Lars, Minh und Neo stehen in dieser Reihenfolge im Kreis und üben einen Tanz ein. Nacheinander klatscht immer einer in die Hände und die anderen tauschen wie im Bild die Plätze. Nach dem ersten Klatschen ist die neue Reihenfolge, wieder mit Juri beginnend: Juri, Neo, Ken, Minh, Lars. Wer hat geklatscht?

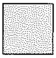
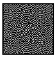


(A) Juri **(B)** Ken **(C)** Lars **(D)** Minh **(E)** Neo

Lösung: Am besten ist es, sich zum Lösen der Aufgabe die Anordnung der 5 Kinder vor und nach der Tanzfigur im Kreis aufzumalen. Dann erkennen wir: Wäre Juri der Klatschende, so müssten nach dem Tausch Lars und Minh seine Nachbarn sein. Da dies nicht der Fall ist, hat er nicht geklatscht. Hätte Juri mit Ken getauscht, müsste er nach dem Tausch neben Ken stehen. Da dies nicht der Fall ist, hat Juri mit Neo getauscht. Und da Ken nach diesem Tausch neben Neo steht, muss Ken stehengeblieben sein. Er ist derjenige, der geklatscht hat.



14. Welches Teil kann angelegt werden, damit im vollständigen 3×3-Feld die hellgraue Fläche ebenso groß ist wie die dunkelgraue?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) Es gibt kein solches Teil.

Lösung: Da bei den 6 zweifarbigen Quadraten die beiden Farben je genau zur Hälfte vorkommen und wir durch das Hinzufügen des 9. Quadrats eine mit beiden Farben genau zur Hälfte gefärbte Gesamtfläche haben wollen, brauchen wir die 6 zweifarbigen Teile nicht zu berücksichtigen. Die beiden anderen Teile sind beide hellgrau. Also kann es kein Teil geben, sodass die gesamte Fläche nach Hinzufügen dieses Teils mit den beiden Farben je genau zur Hälfte gefärbt ist.

Eine ähnliche, etwas leichtere Aufgabe ist Aufgabe 13 in Klassenstufe 3/4.

15. Ich habe einen Würfel aus Pappe gefaltet. Auf die Seitenflächen habe ich A, B, C, D, E und F geschrieben. Folgende Seiten haben eine gemeinsame Kante: A und D, A und E, A und B, D und E, D und F, D und B. Welche Würfelseite liegt gegenüber von Seite F?

(**A**) Seite A (**B**) Seite B (**C**) Seite C (**D**) Seite D (**E**) Seite E

Lösung: Schauen wir uns die Angaben etwas genauer an, so stellen wir fest, dass wir von Seite D schnell wissen können, wie sie zu allen Seiten liegt, denn sie ist mit den Seiten A, B, E und F benachbart, liegt also Seite C gegenüber. Stellen wir uns den Würfel auf der Seite D stehend vor, dann bilden die Seiten A, B, E und F die Seitenflächen, Seite C die Deckfläche. Da Seite A mit den beiden Seitenflächen B und E benachbart ist, muss sie der Seite F gegenüberliegen.

16. Von der Klassenfahrt zur Nordsee hat Lennart viele Muscheln mitgebracht. Um sie zu zählen, teilt er sie in Häufchen zu 3 Muscheln auf – dabei bleiben 2 Muscheln übrig. Auch bei der Aufteilung in Häufchen zu 5 Muscheln bleiben 2 übrig. Wie viele Muscheln müsste Lennart mindestens dazulegen, damit weder bei der Aufteilung in Dreierhäufchen noch bei der in Fünferhäufchen Muscheln übrig bleiben?

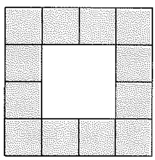
(**A**) 4 (**B**) 1 (**C**) 13 (**D**) 3 (**E**) 7

Lösung: Damit sich aus Lennarts Muscheln sowohl Dreier- als auch Fünferhäufchen bilden lassen, ohne dass es einen Rest gibt, muss die Zahl der Muscheln durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar sein. Wenn Lennart von seinen mitgebrachten Muscheln 2 beiseite legt, dann ist die Anzahl der restlichen Muscheln sowohl durch 3 als auch durch 5, also durch 15 teilbar. Also lässt die Anzahl von Lennarts Muscheln beim Teilen durch 15 den Rest 2. Er muss mindestens $15 - 2 = 13$ Muscheln dazunehmen, damit die Zahl durch 15 teilbar ist.

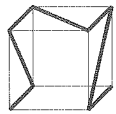
Wie kann der abgebildete Quadratring

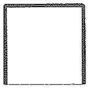
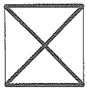
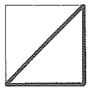
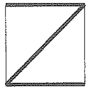
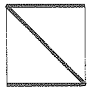
a) durch 2 Geraden in 4 gleiche Teilstücke,
b) durch 3 Geraden in 6 gleiche Teilstücke,
c) durch 4 Geraden in 8 gleiche Teilstücke sowie
d) durch 6 Geraden in 12 gleiche Teilstücke

zerlegt werden?



17. Auf einen durchsichtigen Würfel wurde eine Zickzack-Linie durch alle 8 Ecken gemalt (siehe Bild). Wir betrachten den Würfel von vorn, hinten, rechts, links, oben und unten. Was können wir *ganz sicher nicht* sehen?

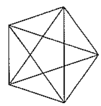


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir sehen (**A**), wenn wir von vorn oder hinten auf den Würfel schauen. Wir sehen (**B**), wenn wir von rechts oder links schauen. Wir sehen (**D**), wenn wir zur rechten Seite gehen und dann von oben schauen. Wir sehen (**E**), wenn wir in derselben Position von unten schauen. (**C**) ist keine Ansicht dieses Würfels.

Wie viele Dreiecke sind in der abgebildeten Figur enthalten?

Wie viele Vierecke können gezählt werden?



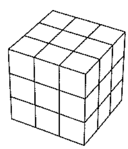
18. „Im letzten Urlaub hatten wir ganz merkwürdiges Wetter", erzählt meine Tante, „vor jedem Regentag gab es 2 Sonnentage. Und nach jedem Sonnentag war 5 Tage später wieder ein Sonnentag." „Wenn das dort immer so ist, kann man es ja für Wettervorhersagen nutzen", freut sich mein Vater. Im Internet findet er heraus, dass dort heute ein Regentag ist. Wie viele der kommenden 3 Tage sind demnach Regentage?

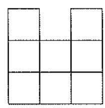
(**A**) keiner (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) Das ist ungewiss.

Lösung: Da es heute regnet, hat an den beiden Tagen davor, also gestern und vorgestern, die Sonne geschienen. Morgen und auch übermorgen regnet es sicher nicht, denn andernfalls wäre heute ein Sonnentag. Außerdem ist der 5. Tag von vorgestern an gerechnet ein Sonnentag – und dieser ist der 3. Tag von heute an gerechnet. Also ist keiner der kommenden 3 Tage ein Regentag.

Übrigens sind nicht nur die kommenden 3 Tage, sondern sogar die kommenden 4 Tage regenfrei.

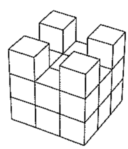
19. Ein $3 \times 3 \times 3$-Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln (siehe Bild). Wie viele davon müssen weggenommen werden, damit der übrigbleibende Körper von vorn, von rechts und von oben aussieht, wie die neben dem Würfel abgebildete Ansicht zeigt?

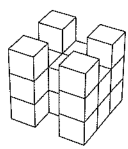




(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Damit die Ansicht von vorn und von der rechten Seite entstehen kann, dürfen in der obersten Schicht gewiss nicht mehr als die 4 Eckwürfel vorhanden sein (siehe linkes Bild). Damit die Ansicht von oben dieselbe wie von vorn und rechts ist, sind auf jeden Fall von einer mittleren senkrechten Reihe die beiden noch vorhandenen Würfel zu entfernen (siehe rechtes Bild). Insgesamt fehlen dann 7 Würfel.





20. Kalles Kaninchen bekommen im Sommer, wenn ihr Käfig auf der Wiese steht, pro Tag entweder 9 Möhrchen <u>oder</u> 2 Salatherzen <u>oder</u> ein Salatherz und 4 Möhrchen. Manchmal bekommen sie weder Möhrchen noch Salatherzen und fressen dann nur Gras. In den vergangenen 10 Tagen haben die Kaninchen insgesamt 30 Möhrchen und 9 Salatherzen bekommen. An wie vielen Tagen haben Kalles Kaninchen nur Gras gefressen?

(**A**) an einem Tag (**B**) an 2 Tagen (**C**) an 3 Tagen
(**D**) an 4 Tagen (**E**) an 5 Tagen

Lösung: Kalles Kaninchen können in den 10 Tagen nicht ausschließlich Portionen mit einem Salatherz und 4 Möhrchen bekommen haben, denn 30, die Gesamtzahl der Möhrchen in den 10 Tagen, ist nicht durch 4 teilbar. Folglich haben die Kaninchen – damit es eine gerade Zahl ist – zweimal 9 Möhrchen und wegen $(30 - 18) : 4 = 3$ noch 3-mal 4 Möhrchen und 1 Salatherz bekommen. Damit sind bisher 3 Salatherzen verbraucht. Die restlichen 6 Salatherzen verteilen sich wegen $6 : 2 = 3$ über 3 Tage. Folglich haben die Kaninchen an $10 - 2 - 3 - 3 = 2$ Tagen nur Gras gefressen.

Eine ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 21 in Klassenstufe 3/4.

In die beiden Figuren sind sechs Begriffe sowohl waagerecht als auch senkrecht so einzutragen, dass zwei „magische Wortquadrate" entstehen! Diese Begriffe haben unabhängig von ihrer Reihenfolge die nachstehende Bedeutung:

1. *natürliche Zahl*
2. *radioaktives Element*
3. *Brutstätte*
4. *Genesungsmaßnahme*
5. *Gewässerrand*
6. *Opernlied*

K	A	E	N
A			
E			
N			

G	U	R	U
U			
R			
U			

21. An der Tafel stehen 3 einstellige Zahlen, deren Summe 15 ist. Bodo wischt eine der Zahlen ab und schreibt an deren Stelle eine 3. Dann multipliziert er die jetzt an der Tafel stehenden Zahlen und erhält 36. Welche Zahl könnte er durch die 3 ersetzt haben?

(**A**) nur 6 (**B**) nur 7 (**C**) nur 8
(**D**) entweder 6 oder 7 (**E**) entweder 7 oder 8

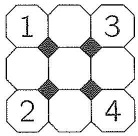
Lösung: Da die 3, die Bodo an die Tafel geschrieben hat, ein Faktor von 36 ist, ist das Produkt der anderen beiden Zahlen $36 : 3 = 12$. Damit kann es sich bei den beiden einstelligen Zahlen, die das Produkt 12 bilden, entweder um 2 und 6 oder um 3 und 4 handeln. Im ersten Fall wäre die weggewischte Zahl $15 - 2 - 6 = 7$, und im zweiten Fall wäre es $15 - 3 - 4 = 8$. Er könnte also entweder eine 7 oder eine 8 durch die 3 ersetzt haben.

22. Der wanderlustige König Alfredo ist unterwegs zu seiner Sommerresidenz, natürlich zu Fuß. In jeder Stunde legt er 5 km zurück. Leider muss die Königin krank zu Hause bleiben. Damit sie gut informiert ist, schickt Alfredo nach jeder vollen Stunde einen Fahrradboten zu ihr. Dieser fährt 10 km in einer Stunde. In welchem zeitlichen Abstand kommen die Boten bei der kranken Königin an?

(A) 30 min **(B)** 60 min **(C)** 75 min **(D)** 90 min **(E)** 120 min

Lösung: Nachdem König Alfredo sich eine Stunde lang wandernd vom Schloss entfernt hat, startet sein erster Fahrradbote. Da er doppelt so schnell wie der König ist, langt er bereits nach einer halben Stunde bei der kranken Königin an. Eine weitere halbe Stunde später startet – in einer Entfernung von nunmehr 10 km – der zweite Fahrradbote. Für die 10 km braucht er eine Stunde, erreicht also 90 min nach dem ersten Boten das Schloss. Für diesen wie für jeden folgenden Fahrradboten fällt vom Start des vorhergehenden Boten bis zu seinem Start die Stunde, in der er 5 km gemeinsam mit dem König wandert sowie die Bewältigung dieser 5 km in umgekehrter Richtung mit dem Fahrrad an, bevor er den Startpunkt des vorhergehenden Boten erreicht. Und das nimmt exakt 90 min in Anspruch.

23. Marianne trägt in die fünf leeren Felder der Figur die fünf Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 ein. Als Marianne fertig ist, bemerkt sie, dass die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 5 gleich 9 ist. Wie groß ist die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 6? (*Nachbarfelder* sind alle waagerecht oder senkrecht angrenzenden Felder.)



(A) 29 **(B)** 26 **(C)** 22 **(D)** 20 **(E)** 16

Lösung: Da die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 5 nur 9, also relativ klein ist, kann die 5 nicht in der Mitte, sondern muss am Rand stehen. Die kleinste Zahl, die nun in der Mitte stehen kann, ist die 6, und damit die Summe in den Nachbarfeldern der 5 den Wert 9 hat, muss die 5 zwischen den kleinsten dort stehenden Zahlen, 1 und der 2, stehen. Dann hat die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 6 den Wert $5 + 7 + 8 + 9 = 29$.

Ähnlich zu diesem Problem sind die Aufgaben 24 in Klassenstufe 3/4 und 21 in Klassenstufe 7/8.

24. Frau Zügler züchtet Pudel. In den letzten 10 Jahren wurden insgesamt 180 Welpen geboren, in jedem Jahr eine andere Anzahl. Im Jahr 2010 waren es am meisten. Wie viele Welpen waren es 2010 *mindestens*?

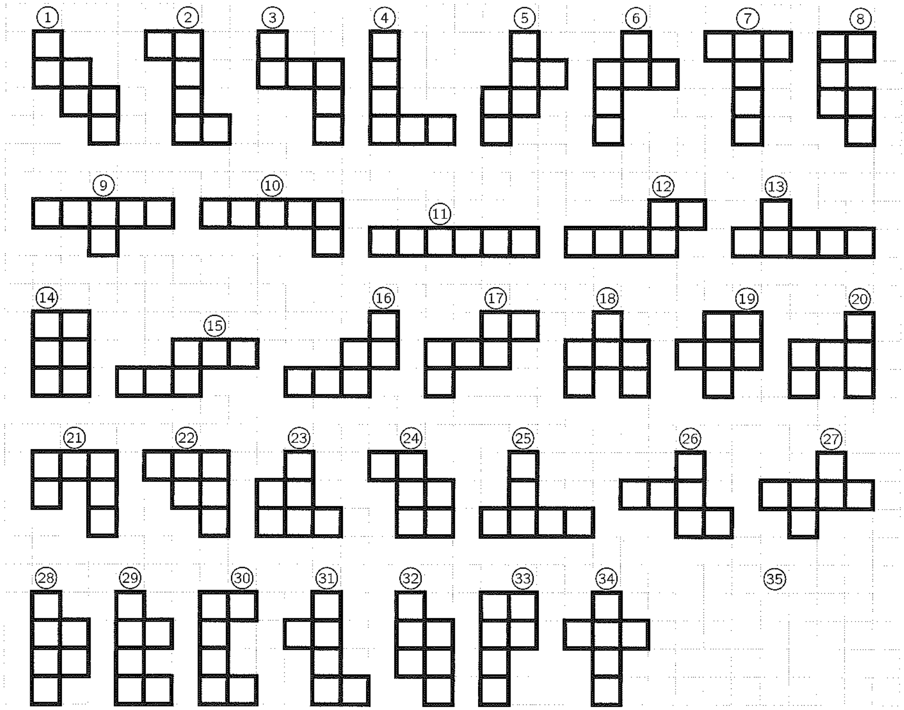
(A) 20 **(B)** 21 **(C)** 22 **(D)** 23 **(E)** 24

Lösung: Wenn in 10 Jahren 180 Welpen zur Welt kamen, dann waren es durchschnittlich pro Jahr $180 : 10 = 18$. Da nun in jedem Jahr eine andere Anzahl geboren wurde, kann es höchstens ein Jahr mit 18 Welpen geben. Um die kleinstmögliche Anzahl im Jahr 2010, dem Jahr mit den meisten Welpen, zu finden, nehmen wir an, dass die Anzahl der Welpen, die in den einzelnen Jahren geboren wurden, möglichst dicht an der durchschnittlichen Zahl 18 liegt. Wenn in einem Jahr 19 geboren wurden, dann können unter Beibehaltung des Durchschnittswertes in einem anderen 17 geboren worden sein, und da alle Zahlen verschieden sein müssen, fügen wir im Wechsel größere und kleinere hinzu. Schließlich stellen wir fest, dass 22 noch nicht die größte Anzahl in einem Jahr sein kann, denn $22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 = 175 < 180$. Also wurden im Jahr 2010 mindestens 23 Welpen geboren. Und das ist möglich, denn zum Beispiel $23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 15 + 14 + 11 = 180$.

Die Lösung lässt sich unter Einbeziehung der Lösungsvorschläge auch durch Probieren finden.

Hex, Hex, Hexomino

Hexominos sind Figuren, die entstehen, wenn 6 Quadrate Seite an Seite aneinandergeklebt werden. Hexominos können beliebig gedreht oder gewendet und zu größeren Figuren zusammengelegt werden. Insgesamt gibt es genau 35 verschiedene Hexominos.



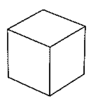
(A) Das Bild zeigt nur 34 Hexominos. Welches fehlt?

(B) Alle Hexominos haben denselben Flächeninhalt von 6 Kästchen. Ihr Umfang jedoch ist recht verschieden. Welche Hexominos haben den längsten Umfang, welche den kürzesten?

(C) Wer findet alle spiegelsymmetrischen Hexominos? Welche Hexominos sind drehsymmetrisch?

(D) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 2 Hexominos ein Rechteck ohne Lücken und Überlappungen zu legen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 3 Hexominos ein Rechteck zu legen?

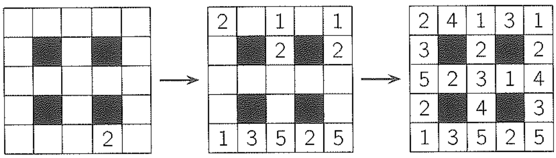
Einige der Hexominos sind Würfelnetze, andere nicht. Aus welchen Hexominos lässt sich ein Würfel falten?



Kopfnüsse III: Zahlenkreuze

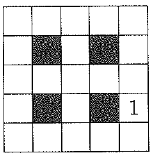
In jedes leere Kästchen ist eine Ziffer so einzutragen, dass im vollständig gefüllten Gitter alle danebenstehenden Zahlen entweder von oben nach unten oder von links nach rechts gelesen werden können. Hier ist ein Beispiel:

12345
12435
13525
23521
24131
52314

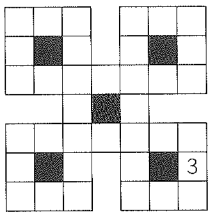


Wer füllt die Zahlenkreuze richtig aus?

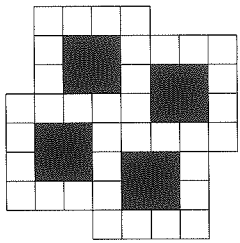
32451
35124
41523
42315
51432
53214



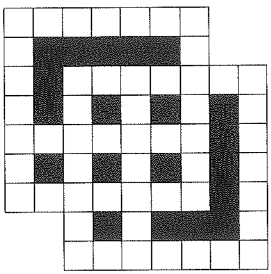
121
123
132
213
221
232
321
322
2123131
2312321
3132123
3213213



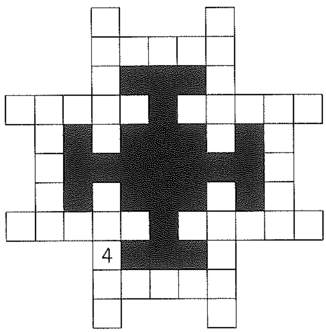
1324
1432
2143
2341
3412
4123
4231
4312
25431
32451
41325
51234



1212321
1313231
1321213
1321232
2312123
2313231
3123121
3132131
3212321
3231213



11111
12345
21334
26262
32646
36663
46434
53461
54351
61354
62154
65463



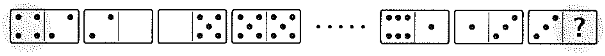
Zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 sollen Pluszeichen so gesetzt werden, dass sich als Summe 99 ergibt. Das klappt auf zwei verschiedene Weisen.

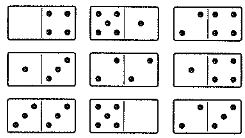
Wer findet die beiden Möglichkeiten? Lässt sich auch die Summe 100 erreichen?

Domino

Ein Dominospiel besteht aus rechteckigen Spielsteinen, deren Hälften jeweils 6, 5, 4, 3, 2, 1 bzw. keine Augen tragen. Es gibt 28 Spielsteine mit allen möglichen Kombinationen der Augenzahlen. Mit den kleinen gepunkteten Steinen gibt es mannigfaltige Knobeleien. Einige Kostproben folgen.

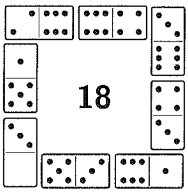
Wir legen die 28 Dominosteine zu einer langen Kette, sodass immer gleiche Augen aneinanderstoßen. An einem Ende der Kette befinden sich 4 Augen. Lässt sich sagen, welche Augenzahl am anderen Ende der Kette liegt?

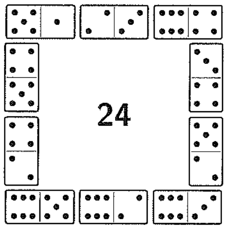


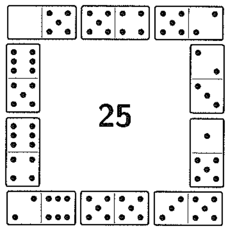


Wie können die rechts abgebildeten Dominos so umgeordnet werden, dass die Summe der Augen in jeder der drei waagerechten und drei senkrechten Reihen 15 ist?

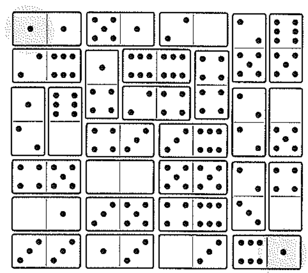
Die Dominosteine im Quadrat sind so umzuordnen, dass die Summe der Augen auf allen 4 Quadratseiten der in der Mitte angegebenen Zahl entspricht.







Wie gelangt man im rechts abgebildeten Dominolabyrinth von der linken oberen zur rechten unteren Ecke?



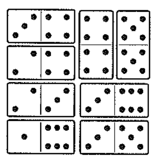
Es darf waagerecht und senkrecht zwischen den Feldern gelaufen werden. Dabei gibt die Augenzahl des Feldes, auf dem man sich gerade befindet, die Anzahl der Schritte an, die man gehen darf. Es gibt kurze und lange Wege.

Wer findet verschiedene Möglichkeiten?

Gibt es auch einen Weg von rechts unten nach links oben?

Aus den abgebildeten Dominosteinen lässt sich ein magisches Quadrat legen. Wenn die Steine richtig liegen, ist die Summe der Augen in jeder waagerechten und senkrechten Reihe jeweils 15.

Wer findet das magische Dominoquadrat?



Verwegen gewogen

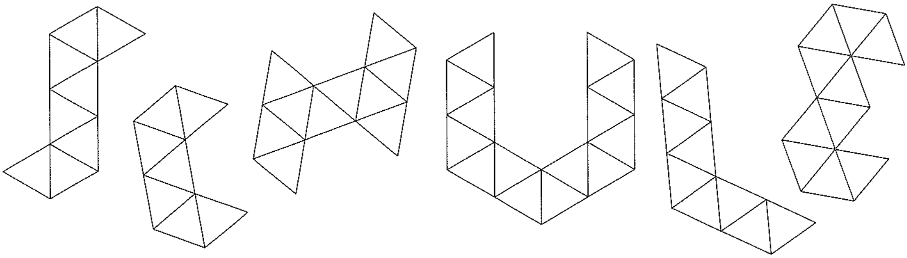
Von drei kleinen Meerschweinchen sind zwei gleich schwer, das dritte ist ein bisschen leichter als die beiden anderen. Wie lässt sich mit einer einzigen Wägung auf einer Balkenwaage ohne Gewichte herausfinden, welches Meerschweinchen das leichtere ist?

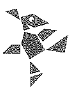
In eine Schachtel mit 74 völlig gleichen güldenen Ringen ist als 75. ein äußerlich nicht als falsch erkennbarer Ring geschmuggelt worden. Zweimal darf ich wiegen, um herauszufinden, ob der falsche Ring leichter oder schwerer als die güldenen Ringe ist. Wie ist das zu bewerkstelligen?

Um sicher zu sein, dass der Zauberlehrling das Große Zaubersprüchebuch nur dann aufschlagen kann, wenn er schon über gutes logisches Denkvermögen verfügt, gibt es für das Buch ein Kistchen, in dem sich 9 äußerlich völlig identische Schlüssel befinden. Mit höchstens zwei Wägungen auf einer Balkenwaage ohne Gewichte muss der richtige Schlüssel, der etwas schwerer als die anderen 8 ist, gefunden werden. Benutzt der Zauberlehrling einen falschen Schlüssel, so ist ihm das Buch auf ein ganzes Jahr verschlossen. Wie findet er den richtigen Schlüssel?

Gut vernetzt

Aus welchen der folgenden Körpernetze lässt sich ein geschlossener Körper bauen?

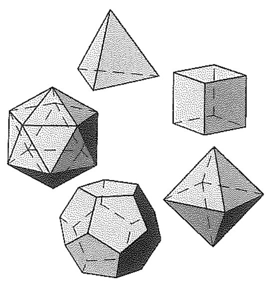




Die platonischen Körper sind regelmäßige Körper, bei denen alle Ecken nach außen zeigen und deren Seitenflächen identische regelmäßige Vielecke sind, sodass an jeder Ecke gleich viele Seitenflächen zusammenstoßen. Es gibt genau die fünf rechts abgebildeten. Ihre Namen sind, im Uhrzeigersinn beginnend oben in der Mitte: Tetraeder, Würfel (oder Hexaeder), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

Wie viele Seitenflächen hat jeder dieser Körper?
Wie viele Kanten und wie viele Ecken haben sie jeweils?
Woher kommen die Namen der fünf Körper?

Die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen ist für jeden dieser Körper dieselbe Zahl. Welche?



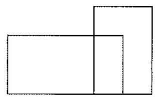
Klassenstufen 7 und 8

1. $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014 =$

(**A**) 2 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 4 (**E**) 2014

Lösung: Es ist $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014 = 0$.

2. Wie viele Vierecke können in der rechts abgebildeten Figur gezählt werden?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: In der Figur können 4 Vierecke gezählt werden.

3. Um ein Armband aus Perlen zu fädeln, will Nina 5 schwarze Perlen von einer alten Perlenkette nehmen.

Sie nimmt nacheinander Perlen von der Kette, jede einzelne entweder vom linken oder rechten Ende, bis sie 5 schwarze Perlen hat. Nina versucht, dabei möglichst wenige weiße Perlen zu nehmen. Wie viele weiße Perlen muss sie mindestens von der Kette nehmen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

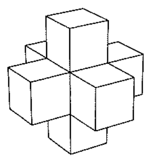
Lösung: Sicher nimmt Nina die äußeren 3 schwarzen Perlen, also eine von links und zwei von rechts. Würde sie 2 weitere schwarze Perlen von links nehmen, hätte sie 4 weiße Perlen. Würde sie beide von rechts nehmen, hätte sie ebenso 4 weiße Perlen. Nimmt sie hingegen eine weitere schwarze Perle von links und eine von rechts, dann hat sie nur 3 weiße Perlen. Das ist die gesuchte Mindestanzahl.

4. Auf welche Ziffer endet das Ergebnis der Rechnung $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Die Summe lässt sich berechnen und die Endziffer ablesen. Es geht auch ohne viel zu rechnen, und zwar so: Der erste Summand endet auf 1, der zweite Summand endet auf 3. Da die anderen drei Summanden ungerade Vielfache von 5 sind, enden sie alle auf 5. Folglich ist die gesuchte Endziffer die Endziffer von $1 + 3 + 5 + 5 + 5 = 19$, also 9.

5. Der abgebildete Körper besteht aus 7 gleich großen Würfeln. Wie viele solche Würfel müssen ergänzt werden, damit ein Würfel mit der dreifachen Kantenlänge der kleinen Würfel entsteht?



(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 16 (**D**) 14 (**E**) 12

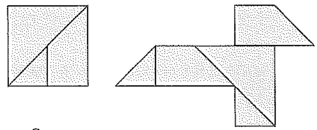
Lösung: Ein Würfel mit der dreifachen Kantenlänge der kleinen Würfel besteht aus insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln. Also müssen noch $27 - 7 = 20$ kleine Würfel ergänzt werden.

6. Johann hat sein neues Aquarium schon mit Steinen ausgelegt. Er füllt Wasser ein, bis das Aquarium zur Hälfte gefüllt ist. Dann gießt er weitere 8 Liter Wasser hinein. Jetzt ist es zu drei Vierteln gefüllt. Welches Volumen hat das Aquarium insgesamt?

(**A**) 20 Liter (**B**) 24 Liter (**C**) 30 Liter (**D**) 32 Liter (**E**) 40 Liter

Lösung: Die hinzugefügten 8 Liter Wasser sind die Differenz aus drei Vierteln und der Hälfte, machen also ein Viertel der Füllmenge des Aquariums aus. Folglich fasst das Aquarium $4 \cdot 8 = 32$ Liter.

7. Wanda zerschneidet mehrere gleich große Quadrate so in 3 Teile, wie es im Bild zu sehen ist. Aus einigen dieser Teile legt sie dann den daneben abgebildeten Vogel. Wie groß ist die Fläche des Vogels im Vergleich zur Fläche eines Quadrats?



(**A**) halb so groß (**B**) genauso groß (**C**) eineinhalbmal so groß
(**D**) doppelt so groß (**E**) zweieinhalbmal so groß

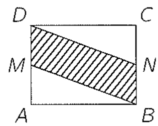
Lösung: Der Vogel besteht aus einem großen Dreieck, zwei kleinen Dreiecken und zwei Trapezen. Also entspricht seine Fläche der von einem Quadrat (ein großes Dreieck, ein kleines Dreieck und ein Trapez), einem kleinen Dreieck und einem Trapez. Da ein kleines Dreieck und ein Trapez gerade ein halbes Quadrat ergeben, ist die Fläche des Vogels eineinhalbmal so groß wie die Fläche eines Quadrats.

8. Es gilt $\dfrac{\bigstar + 3}{12} = \dfrac{9 + \bigstar}{20}$. Für welche Zahl steht der Stern?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 12

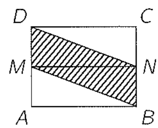
Lösung: Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner 60 der beiden Brüche und erhalten $\dfrac{60 \cdot (\bigstar + 3)}{12} = \dfrac{60 \cdot (9 + \bigstar)}{20}$, d. h., $5 \cdot \bigstar + 15 = 27 + 3 \cdot \bigstar$ bzw. $2 \cdot \bigstar = 12$, also $\bigstar = 6$.

9. Im Rechteck $ABCD$ sind M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt $15\,\text{cm}^2$. Wie groß ist der Flächeninhalt des schraffierten Vierecks $MBND$?



(**A**) $5\,\text{cm}^2$ (**B**) $6\,\text{cm}^2$ (**C**) $7{,}5\,\text{cm}^2$ (**D**) $9\,\text{cm}^2$ (**E**) $10\,\text{cm}^2$

Lösung: Die Strecke $\overline{MN}$ zerlegt das Rechteck in zwei deckungsgleiche Rechtecke (s. Bild). In jedem dieser beiden Rechtecke macht die schraffierte Teilfläche genau die Hälfte aus. Somit ist die gesamte schraffierte Fläche halb so groß wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$, also $7{,}5\,\text{cm}^2$.

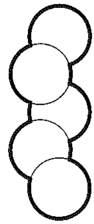


10. Melissa möchte neue Knieschützer kaufen. Die kosten eigentlich 10 €, doch gerade gibt es 20 % Rabatt. Dank einer Sonderaktion erhält sie an der Kasse noch einmal 10 % Rabatt auf den bereits reduzierten Preis. Wie viel muss Melissa für die Knieschützer zahlen?

(**A**) 7,20 € (**B**) 7,40 € (**C**) 7,60 € (**D**) 7,80 € (**E**) 8 €

Lösung: 20 % Rabatt auf 10 € sind 2 €. Folglich kosten die preisgesenkten Knieschützer 8 €. Der Sonderrabatt an der Kasse von 10 % auf diese 8 € sind 0,80 €. Melissa muss 7,20 € zahlen.

11. Fünf Kreise überlappen sich, wie im Bild zu sehen. Jeder der Kreise hat einen Flächeninhalt von $5\,\text{cm}^2$. Die gemeinsame Fläche zweier sich überlappender Kreise ist $1\,\text{cm}^2$ groß. Welchen Flächeninhalt hat die dick umrandete Fläche?



(**A**) $16\,\text{cm}^2$ (**B**) $17\,\text{cm}^2$ (**C**) $19\,\text{cm}^2$ (**D**) $21\,\text{cm}^2$ (**E**) $23\,\text{cm}^2$

Lösung: Der gesuchte Flächeninhalt unterscheidet sich von der Summe der Flächeninhalte der fünf Kreise ($5 \cdot 5\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$) um die Summe der Flächeninhalte der vier Überlappungsbereiche ($4 \cdot 1\,\text{cm}^2 = 4\,\text{cm}^2$). Die dick umrandete Fläche ist $25\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 21\,\text{cm}^2$ groß.

12. Farids Eltern haben sich zu den „Schnupperwochen" in der Volkshochschule angemeldet. Einige Kurse gibt es zum halben Preis. Farids Vater lernt nun 2-mal pro Woche Polnisch, Farids Mutter geht jeden 2. Dienstag zum Fotokurs. Insgesamt besucht Farids Vater während der „Schnupperwochen" 6 Veranstaltungen mehr als Farids Mutter. Wie lange dauern die „Schnupperwochen"?

(**A**) 12 Wochen (**B**) 10 Wochen (**C**) 8 Wochen (**D**) 6 Wochen (**E**) 4 Wochen

Lösung: Im Zeitraum von 2 Wochen besucht Farids Mutter nur eine Veranstaltung, Farids Vater jedoch 4, also 3 mehr als Farids Mutter. Wenn Farids Vater insgesamt 6 Veranstaltungen mehr als Farids Mutter besucht, dauern die „Schnupperwochen" zweimal 2 Wochen, also 4 Wochen.

13. Wilma will wissen, zwischen welchen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen das Ergebnis der Rechnung $2+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{3}+4+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{5}+6+\frac{1}{6}$ liegt. Es liegt zwischen

(**A**) 20 und 21 (**B**) 21 und 22 (**C**) 22 und 23 (**D**) 23 und 24 (**E**) 24 und 25

Lösung: Die Summe der natürlichen Zahlen in dieser Rechnung ist $2+3+4+5+6=20$. Die Summe der Brüche brauchen wir nicht zu berechnen, eine Schätzung geht schneller. Die Summe ist größer als 1, denn das gilt bereits für die Summe der ersten 3 Brüche: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$. Sie ist aber auch ganz sicher kleiner als 2, denn $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{3}{4} < 2$. Also liegt das Ergebnis der Rechnung zwischen 21 und 22.

Wer geschickt zusammenfasst, weil er erkennt, dass $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ gilt, braucht nur noch $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ abzuschätzen, was ja offensichtlich zwischen 0 und 1 liegt.

In den Kryptogrammen sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass richtige Additionen entstehen. Gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern. Gibt es mehr als eine Lösung?

$$\begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{F U E N F} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{S E C H S} \end{array}$$

14. Mona und Lisa tauschen Adressen, weil sie sich aus dem Urlaub schreiben wollen. „Meine Postleitzahl ist 74336", sagt Mona. „Die ist ja fast wie meine, es sind nur zwei Ziffern vertauscht", stellt Lisa fest. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Lisas Postleitzahl?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei Ziffern in Monas Postleitzahl zu vertauschen, sodass eine andere 5-stellige Zahl entsteht. Die 7 kann mit jeder der 4 anderen Ziffern getauscht werden (4 Möglichkeiten). Die 4 kann (außer mit 7) noch mit 3 anderen Ziffern getauscht werden (3 Möglichkeiten). Jede der beiden Dreien kann (außer mit 7 und 4) noch mit 6 getauscht werden (2 Möglichkeiten). Die Tauschmöglichkeiten der 6 sind bereits alle gezählt. Insgesamt gibt es also $4 + 3 + 2 = 9$ Möglichkeiten für Lisas Postleitzahl.

15. Welche der folgenden Rechnungen liefert das größte Ergebnis?

(**A**) $33 \cdot 777$ (**B**) $55 \cdot 666$ (**C**) $66 \cdot 444$ (**D**) $77 \cdot 333$ (**E**) $99 \cdot 222$

Lösung: Jede der Rechnungen hat die Form $\overline{AA} \cdot \overline{BBB} = (A \cdot 11) \cdot (B \cdot 111) = (A \cdot B) \cdot (11 \cdot 111)$. Die Größe der Ergebnisse hängt also nur von der Größe des entsprechenden Produktes $A \cdot B$ ab: (**A**) $3 \cdot 7 = 21$, (**B**) $5 \cdot 6 = 30$, (**C**) $6 \cdot 4 = 24$, (**D**) $7 \cdot 3 = 21$, (**E**) $9 \cdot 2 = 18$. Das größte Ergebnis liefert Rechnung (**B**).

Die Jahreszahl 2014 soll als Summe von 4 natürlichen Zahlen geschrieben werden. Dabei soll der 2. Summand das Dreifache, der 3. Summand das Sechsfache und der 4. Summand das Neunfache des 1. Summanden sein. Wer findet die Summanden?

$\square + \square + \square + \square = 2014$

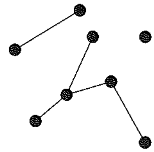
16. Julius sitzt gebannt vor dem neuen Aquarium seines Bruders Johann. Er zählt die Fische. „Ich glaube, es sind doppelt so viele Guppys wie Platys", meint Julius. „Da hast du wohl einen Guppy für einen Platy gehalten", erwidert Johann. „In Wirklichkeit sind es dreimal so viele Guppys wie Platys." Wie viele Guppys hat Johann?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Die Anzahl der Guppys lässt sich durch Aufstellen und Lösen von Gleichungen ermitteln. Wir geben einen Vorschlag für eine Lösung ohne Gleichungen:

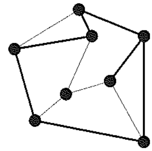
Johann hat 3-mal so viele Guppys wie Platys. Also lassen sich die Fische in 4 gleich große Gruppen einteilen: 1 Platy-Gruppe und 3 Guppy-Gruppen. Julius zählt hingegen doppelt so viele Guppys wie Platys. Für ihn zerfällt die Menge der Fische in 3 gleich große Gruppen: 1 Platy-Gruppe und 2 Guppy-Gruppen. Weil Julius einen Guppy für einen Platy hält, ist „seine" Platy-Gruppe, und damit auch jede „seiner" Guppy-Gruppen um 1 Fisch größer als die realen Gruppen. Die insgesamt 3 Fische mehr in Julius' Gruppen sind also genauso viele, wie in jeder einzelnen von Johanns Gruppen sind. Folglich gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Guppys in Johanns Aquarium.

17. Rechts sind 8 Punkte und 5 Verbindungsstrecken zu sehen. Wie viele Verbindungsstrecken müssen mindestens ergänzt werden, damit von jedem der 8 Punkte dieselbe Anzahl von Verbindungsstrecken ausgeht?



(**A**) 10 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

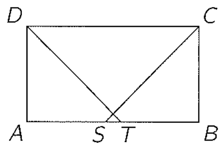
Lösung: Die größte Zahl von Verbindungsstrecken, die von einem Punkt ausgehen, ist 3. Also müssen von jedem Punkt *mindestens* 3 Verbindungsstrecken ausgehen. Das wären dann insgesamt $8 \cdot 3 : 2 = 12$ Verbindungsstrecken. Rechts ist ein Beispiel dafür zu sehen, dass genau 3 Verbindungsstrecken je Punkt möglich sind. Es mussten $12 - 5 = 7$ Verbindungsstrecken ergänzt werden.



18. In ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm und 11 cm sind zwei Winkelhalbierende eingezeichnet, die eine der 11 cm langen Seiten in drei Teile teilen. Wie lang sind diese Teile?

(**A**) 1 cm, 9 cm, 1 cm (**B**) 2 cm, 7 cm, 2 cm (**C**) 3 cm, 5 cm, 3 cm
(**D**) 4 cm, 3 cm, 4 cm (**E**) 5 cm, 1 cm, 5 cm

Lösung: Wir bezeichnen die Ecken des Rechtecks mit A, B, C, D und die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel bei C und D mit der 11 cm langen Seite $\overline{AB}$ mit S und T (s. Bild). Die Dreiecke ATD und BCS haben jeweils einen 90°- und zwei 45°-Winkel, sind also gleichschenklig. Somit gilt $|\overline{AT}| = |\overline{AD}| = |\overline{SB}| = |\overline{CB}| = 6\,\text{cm}$ und es folgt daraus $|\overline{AS}| = |\overline{AB}| - |\overline{SB}| = 5\,\text{cm}$. Die drei Teile $\overline{AS}$, $\overline{ST}$ und $\overline{TB}$ sind also 5 cm, 1 cm und 5 cm lang.



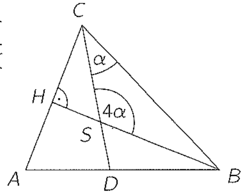
19. Sechs Studenten wohnen zusammen in einer großen Altbauwohnung. Morgens nutzen sie ab 7:00 Uhr vor dem gemeinsamen Frühstück die beiden Badezimmer, jeweils einzeln und unterschiedlich lange: 5, 7, 9, 14, 18 und 19 Minuten haben sie gestoppt. Wann können die sechs Studenten – bei geschickter Aufteilung auf die beiden Badezimmer – frühestens gemeinsam am Frühstückstisch sitzen?

(**A**) um 7:36 Uhr (**B**) um 7:37 Uhr (**C**) um 7:38 Uhr (**D**) um 7:39 Uhr (**E**) um 7:40 Uhr

Lösung: Hätten die sechs Studenten nur ein Badezimmer zur Verfügung, so würden sie insgesamt $5 + 7 + 9 + 14 + 18 + 19 = 72$ Minuten brauchen. Auf 2 Badezimmer verteilt ginge es am schnellsten, wenn beide Badezimmer genau $72 : 2 = 36$ Minuten lang besetzt wären. In einem der Badezimmer wäre dann der Student, der 19 Minuten braucht. Die restlichen 17 Minuten kommen jedoch nicht unter den gestoppten Zeiten vor und lassen sich auch nicht aus diesen kombinieren. Also brauchen die sechs ganz sicher länger als 36 Minuten. Dass es mit 37 Minuten klappt, zeigt die Rechnung $18 + 19 = 37$. Das andere Badezimmer ist dann nur $5 + 7 + 9 + 14 = 35$ Minuten lang besetzt. Um 7:37 Uhr können die Studenten frühestens gemeinsam am Frühstückstisch sitzen.

Wie kann die Zahl 28 als Summe mit 5 Zweien geschrieben werden?
Wie kann die Zahl 1000 als Summe mit 8 Achten geschrieben werden?

20. Im Dreieck ABC ist $\overline{BH}$ die Höhe auf die Seite $\overline{AC}$ und $\overline{CD}$ die Winkelhalbierende des Winkels bei C. Mit α ist der Winkel DCB bezeichnet, S ist der Schnittpunkt von $\overline{BH}$ und $\overline{CD}$. Wie groß ist α, wenn der Winkel BSC 4-mal so groß ist wie α? (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*)

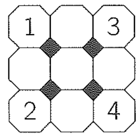


(**A**) 30° (**B**) 32,5° (**C**) 35° (**D**) 37,5° (**E**) 40°

Lösung: Da $\overline{CD}$ Winkelhalbierende ist, gilt $\measuredangle HCS = \alpha$. Nach dem Außenwinkelsatz, angewendet auf das Dreieck HSC, ist $4\alpha = 90° + \alpha$, also $\alpha = 30°$.

Eine andere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, ist die folgende: Im Dreieck HSC beträgt die Innenwinkelsumme $180° = \alpha + 90° + (180° - 4\alpha)$, woraus $\alpha = 30°$ folgt.

21. In die fünf leeren Felder der Figur will Sebastian die fünf Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 so eintragen, dass die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 9 gleich 15 ist. Wie groß ist dann die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 8? (*Nachbarfelder* sind alle waagerecht oder senkrecht angrenzenden Felder.)



(**A**) 12 (**B**) 18 (**C**) 19 (**D**) 26 (**E**) 27

Lösung: Die 9 steht ganz sicher nicht in der Mitte, sonst wäre die Summe ihrer Nachbarn $5 + 6 + 7 + 8 = 26$. Also steht die 9 zwischen zwei Eckfeldern. Enthalten diese die Zahlen a und b, dann steht im mittleren Feld die Zahl $15 - (a + b)$. Da die Zahl im mittleren Feld *höchstens* 8 sein kann, muss die Summe $a + b$ *mindestens* 7 sein. Die 9 kann also nur zwischen 3 und 4 stehen, alle anderen „Ecksummen" sind zu klein. Damit steht die 8 in der Mitte und die Summe ihrer Nachbarn ist $5 + 6 + 7 + 9 = 27$.

Ähnlich zu diesem Problem sind die Aufgaben 24 in Klassenstufe 3/4 und 23 in Klassenstufe 5/6.

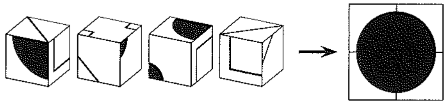
In einem quadratischen Raum stehen 10 alte Sessel so an den Wänden, dass an jeder Wand dieselbe Anzahl an Sesseln steht. Wie kann das sein?

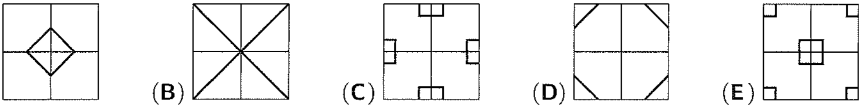
22. Heute ist großes Pflaumenknödelessen bei Oma Hilde, alle Enkel sind da. Jeder der hungrigen Enkel bekommt gleich viele der kleinen köstlichen Knödel. Wenn 2 Enkel nicht gekommen wären, dann würden die anderen Enkel jeder 3 Knödel mehr bekommen. Und wenn es 20 Knödel weniger wären, dann würde jeder 2 Knödel weniger bekommen. Wie viele Pflaumenknödel hat Oma Hilde gemacht?

(**A**) 80 (**B**) 90 (**C**) 100 (**D**) 120 (**E**) 150

Lösung: Aus der zweiten Aussage „wenn es 20 Knödel weniger wären, dann würde jeder 2 Knödel weniger bekommen" folgt sofort, dass Oma Hilde $20 : 2 = 10$ Enkel hat, die alle da sind. Aus der ersten Aussage folgt nun, dass 2 Enkel insgesamt $(10-2)\cdot 3 = 24$ Knödel essen. Also verspeist jedes Enkelkind $24 : 2 = 12$ Knödel. Für ihre 10 Enkel hat Oma Hilde demzufolge insgesamt $10 \cdot 12 = 120$ der kleinen köstlichen Pflaumenknödel gemacht.

23. Vier identisch bemalte Würfel werden so zu einem Quader zusammengestellt, dass auf der Oberseite ein großer schwarzer Kreis entsteht (s. Bild). Was ist auf der Unterseite zu sehen?

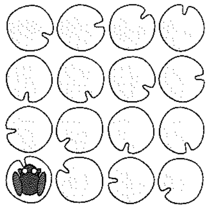




(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

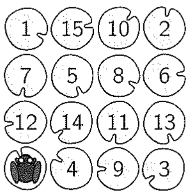
Lösung: In der Abbildung stimmen beim ersten und vierten Würfel die Deckfläche und eine der Seitenflächen überein. Die beiden anderen Seitenflächen liegen folglich einander gegenüber. Die Unterseite des Quaders ist in Bild (**A**) zu sehen.

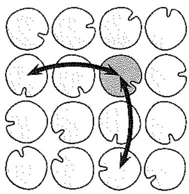
24. Ein mathematisch interessierter Frosch ordnet sich in seinem Tümpel 16 Seerosenblätter regelmäßig an (s. Bild). Beginnend unten links springt er waagerecht oder senkrecht von Blatt zu Blatt, jedoch stets so, dass mindestens ein Blatt übersprungen wird. Er möchte so viele Sprünge wie möglich machen, ohne dass er auf einem Blatt (sein Startblatt eingeschlossen) mehr als einmal zu sitzen kommt. Wie viele Sprünge sind das höchstens?



(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 13 (**D**) 12 (**E**) 11

Lösung: Ein Weg, der unter den gestellten Bedingungen tatsächlich über alle 16 Seerosenblätter führt, lässt sich mit sinnvollem Probieren finden. Ein Beispiel ist rechts zu sehen, die Blätter sind in der Reihenfolge der Sprünge nummeriert. Dabei wurde beachtet, dass die mittleren 4 Blätter, wie daneben veranschaulicht, nur von jeweils 2 anderen Blättern erreichbar sind. Der Frosch macht in diesem Beispiel 15 Sprünge, was sicher die größte mögliche Anzahl an Sprüngen ist.





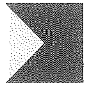
25. Der Durchschnitt zweier positiver Zahlen ist um 30 % kleiner als die größere der beiden Zahlen. Um wie viel Prozent ist der Durchschnitt dann größer als die kleinere der beiden Zahlen?

(**A**) um 75 % (**B**) um 70 % (**C**) um 50 % (**D**) um 30 % (**E**) um 25 %

Lösung: Da es bei dieser Aufgabe nur um Verhältnisse von Zahlen geht, ist es eine gute Strategie, ein geeignetes Zahlenbeispiel zu wählen, mit dem sich leicht rechnen lässt. Wir wählen 100 als die größere der beiden Zahlen. Dann ist der Durchschnitt der beiden Zahlen, der um 30 % kleiner als 100 ist, gleich 70. Die kleinere der beiden Zahlen ist in diesem Fall 40. Der Durchschnitt 70 der beiden Zahlen ist demzufolge um 30 größer als 40, also um $30 : 40 \cdot 100\,\% = 75\,\%$.

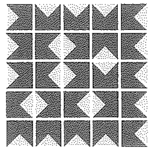
Wie groß ist der kleinere der beiden Winkel, den der Stundenzeiger und der Minutenzeiger einer Uhr um 16:40 Uhr miteinander bilden?

26. Ich lege 25 quadratische Teile wie das rechts abgebildete so zu einem 5×5-Quadrat, dass sich benachbarte Quadrate stets mit Seiten gleicher Farbe berühren. Der Rand des fertigen 5×5-Quadrats wird von grauen und schwarzen Quadratseiten gebildet. Welches ist die kleinste Anzahl an schwarzen Quadratseiten im Rand des 5×5-Quadrats?



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: An jeder der Ecken zeigt mindestens eine schwarze Quadratseite nach außen, also ist die Anzahl der schwarzen Quadratseiten im Rand mindestens 4. Im Inneren des 5×5-Feldes treten die grauen Quadratseiten stets paarweise, also in gerader Anzahl auf. Da es insgesamt 25 grauen Quadratseiten gibt, muss sich im Rand eine ungerade Anzahl befinden. Da der Rand aus 20 Quadratseiten besteht, muss auch die Anzahl der schwarzen Quadratseiten im Rand ungerade und somit nicht nur mindestens 4, sondern mindestens 5 sein. Das Bild zeigt ein Beispiel mit 5 schwarzen Quadratseiten im Rand. Also ist (**B**) die Lösung.

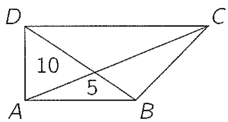


27. An der Tafel stehen einige positive ganze Zahlen, alle voneinander verschieden. Genau 2 davon sind durch 2 teilbar und genau 7 sind durch 7 teilbar. Wie groß ist die größte dieser Zahlen *mindestens*?

(**A**) 49 (**B**) 56 (**C**) 63 (**D**) 70 (**E**) 77

Lösung: Die gesuchte größte Zahl ist ganz sicher durch 2, durch 7 oder durch 2 und durch 7 teilbar. Hätte sie keine dieser Eigenschaften, könnten wir sie streichen und hätten immer noch genau 2 durch 2 teilbare und genau 7 durch 7 teilbare Zahlen an der Tafel, aber eine *kleinere* größte Zahl. Außerdem können wir annehmen, dass auch jede andere Zahl an der Tafel durch 2, durch 7 oder durch 2 und durch 7 teilbar ist. Sonst könnten wir sie streichen, ohne dass sich an den Bedingungen und der größten Zahl etwas ändert. Die durch 7 teilbaren Zahlen an der Tafel sind mindestens die Zahlen $1 \cdot 7, 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, 4 \cdot 7, 5 \cdot 7, 6 \cdot 7, 7 \cdot 7$. Da sich hierunter jedoch 3 durch 2 teilbare Zahlen befinden – also eine zu viel –, ist eine davon durch ein größeres Vielfaches von 7 zu ersetzen, das jedoch nicht durch 2 teilbar ist. Die kleinstmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist $9 \cdot 7 = 63$, das ist die gesuchte Zahl.

28. Das Viereck $ABCD$ hat bei A und bei D jeweils einen rechten Winkel. Es wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt, zwei ihrer Flächeninhalte sind rechts angegeben. Welchen Flächeninhalt hat das Viereck $ABCD$?



(**A**) 60 (**B**) 55 (**C**) 50 (**D**) 45 (**E**) 40

Lösung: Wir bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Diagonalen mit S. Da die Winkel bei A und D rechte Winkel sind, sind AB und CD zueinander parallel. $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ haben denselben Flächeninhalt, da sie die gemeinsame Seite $\overline{AB}$ haben und in der Länge der Höhe auf $\overline{AB}$ übereinstimmen. Folglich ist der Flächeninhalt von $\triangle BCS$ gleich 10.

Das Lot von A auf BD ist Höhe sowohl in $\triangle ASD$ als auch in $\triangle ABS$. Folglich ist $|\overline{SD}| = 2|\overline{BS}|$. Ebenso ist das Lot von C auf BD Höhe sowohl in $\triangle DSC$ als auch in $\triangle SBC$. Folglich ist der Flächeninhalt von $\triangle DSC$ doppelt so groß wie der von $\triangle SBC$, also 20.

Der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ beträgt $10 + 5 + 10 + 20 = 45$.

29. Eine alte Waage ist defekt. Für alles, was höchstens 1000 g wiegt, zeigt sie das exakte Gewicht an. Für alles, was schwerer als 1000 g ist, zeigt sie jedoch irgendein beliebiges Gewicht an, allerdings stets über 1000 g. Fünf Gegenstände vom Gewicht A, B, C, D und E werden paarweise gewogen. Die Waage zeigt: $B+D=1200\,\text{g}$, $C+E=2100\,\text{g}$, $B+E=800\,\text{g}$, $B+C=900\,\text{g}$, $A+E=700\,\text{g}$. Welches Gewicht ist am größten?

(**A**) Gewicht A (**B**) Gewicht B (**C**) Gewicht C (**D**) Gewicht D (**E**) Gewicht E

Lösung: Um leichter argumentieren zu können, nummerieren wir die einzelnen Wägungen durch: (1) $B+D=1200\,\text{g}$, (2) $C+E=2100\,\text{g}$, (3) $B+E=800\,\text{g}$, (4) $B+C=900\,\text{g}$, (5) $A+E=700\,\text{g}$. In Wägung (1) und (4) wird beide Male B gewogen. Da das Gesamtgewicht in (1) ganz sicher größer als 1000 g, das in (4) aber exakt, also ganz sicher kleiner als 1000 g ist, folgt $D>C$. Aus (3) und (4) folgt analog $C>E$, aus (2) und (4) folgt $E>B$, und aus (3) und (5), dass $B>A$ gilt. Zusammen ergibt das $D>C>E>B>A$. Das Gewicht D ist das gesuchte größte Gewicht.

Ein Beispiel für die 5 Gewichte ist: $A=100\,\text{g}$, $B=200\,\text{g}$, $C=700\,\text{g}$, $D=2014\,\text{g}$, $E=600\,\text{g}$.

30. Jana schreibt Geschichten. In ihrer neuesten Erzählung erkundet Professor Teo Rettich die merkwürdige Kommunikation auf der winzigen Insel Malsomalso. Dort gibt es A-Leute, B-Leute und die Malsomalsos. A-Leute sagen immer die Wahrheit. B-Leute lügen stets. Jeder Malsomalso antwortet auf nacheinander gestellte Fragen stets abwechselnd mit der Wahrheit oder einer Lüge. Teo Rettich hat jedem der 20 Inselbewohner nacheinander dieselben 3 Fragen gestellt:

1. Bist du ein A-Leut? 2. Bist du ein Malsomalso? 3. Bist du ein B-Leut?

Auf die 1. Frage antworteten 17 Bewohner mit „Ja", auf die 2. Frage 12 und auf die 3. Frage 8. Die anderen antworteten jeweils mit „Nein". Wie viele A-Leute wohnen auf der Insel Malsomalso?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 13 (**E**) 17

Lösung: In eine Tabelle tragen wir für jede Frage zu jeder Bewohnergruppe ein, ob sie mit der Wahrheit oder einer Lüge bzw. mit „Ja" oder „Nein" geantwortet haben. Dabei beachten wir, dass die Gruppe der Malsomalsos in zwei Gruppen zerfällt: die Gruppe M_1 derer, die mit einer wahren Aussage beginnen, und die Gruppe M_2 derer, die mit einer Lüge beginnen.

Gruppe:	A-Leute		B-Leute		M_1		M_2		
Frage:	Antwort		Antwort		Antwort		Antwort		Anzahl JA
1. Bist du ein A-Leut?	wahr	**JA**	falsch	**JA**	wahr	nein	falsch	**JA**	17
2. Bist du ein Malsomalso?	wahr	nein	falsch	**JA**	falsch	nein	wahr	**JA**	12
3. Bist du ein B-Leut?	wahr	nein	falsch	nein	wahr	nein	falsch	**JA**	8

Anhand der Tabelle sehen wir, dass die Anzahl der A-Leute gerade die Differenz aus der Anzahl derjenigen, die auf die 1. Frage mit „Ja" geantwortet haben, und derjenigen, die auf die 2. Frage mit „Ja" antworteten, ist. Es gibt folglich $17-12=5$ A-Leute auf der Insel Malsomalso. Die anderen sind 4 B-Leute und $20-5-4=11$ Malsomalsos.

Die Lösungen der Extra-Knobeleien sind im Internet auf der Webseite des Känguru-Wettbewerbs unter www.mathe-kaenguru.de/chronik/broschueren zu finden.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

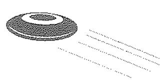
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	D	D	C	B	A	A	E
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	E	B	C	E	B	A	D	C
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	B	C	C	D	B	D	A	D

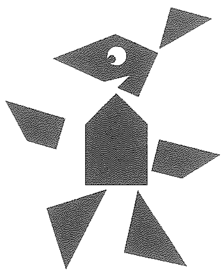
Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	A	C	A	D	E	D	B
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	A	B	B	D	B	E	A	C
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	C	A	D	B	E	D	A	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	C	B	E	A	D	C	C	C	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	E	B	C	B	C	D	E	B	A
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	D	A	A	A	B	C	D	D	B





www.mathe-kaenguru.ch

Vorderseite und Rückseite unterscheiden sich in 20 Kleinigkeiten.

Wer entdeckt die Unterschiede?

www.mathe-kaenguru.de

www.mathe-kaenguru.ch

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru-Wettbewerb 2014!

In diesem Jahr wurde der Känguru-Wettbewerb an fast 290 Schulen in der Schweiz durchgeführt und es nahmen rund 25'000 Schülerinnen und Schüler daran teil. Die nochmals gewachsene Zahl an Teilnehmenden ermuntert uns, auch im kommenden Jahr dafür zu sorgen, dass sich alle daran interessierten Schulen aus der Deutschschweiz mit wenig Aufwand und online anmelden können. Und ebenso werden wir uns bemühen, dass das gesamte Aufgabenmaterial wieder rechtzeitig, also noch vor Mitte März 2015 mit der Post bei den Schulen eintrifft.

Auch dieses Jahr musste gerechnet oder geschätzt werden, mal kam es auf ein gutes Vorstellungsvermögen an oder dann war die richtige Strategie gefragt. Die Fragestellungen sind meist spannend und oft herausfordernd, vor allem auch wegen der doch knappen Zeit, die zur Verfügung steht. Das Interessante und Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben rührt vor allem auch daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus über 50 Teilnehmerländern in den Wettbewerb einfliessen.

Die Mitglieder des deutschschweizerischen Känguru-Komitees hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall an ihren Schulen organisiert haben, dass sich die Teilnehmenden mit Freude den mathematischen Aufgaben zugewandt hatten und Lust auf weitere bekommen haben. Dazu finden sich in der Broschüre neben den Aufgaben der Klassenstufen 7/8, 9/10 und 11–13 samt Lösungshinweisen viele zusätzliche Knobeleien.

Und auch das Umschlagbild der Broschüre hat es in sich: Vorderseite und Rückseite unterscheiden sich in 20 Kleinigkeiten, die es zu entdecken gilt. Der Grund dafür ist, dass der Wettbewerb in Deutschland bereits zum 20. Mal durchgeführt worden ist in diesem März.

Beim Känguru-Wettbewerb sind in den Klassenstufen 7 bis 13 jeweils 30 Aufgaben zu lösen. Für die Aufgaben 1 bis 10 können jeweils 3, für die Aufgaben 11 bis 20 jeweils 4 und für die Aufgaben 21 bis 30 jeweils 5 Punkte erreicht werden. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen. Wird eine Aufgabe nicht bearbeitet, gibt es für die entsprechende Aufgabe 0 Punkte. Jeder Teilnehmer erhält 30 Punkte als Startpunktzahl. So ist 0 die niedrigste mögliche Gesamtpunktzahl, die erreichbare Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, M. Manni, F. Meier, Dr. A. Noack, R. Schelldorfer, Hj. Stocker und Dr. D. Vigerske erarbeitet. Ein Teil der Knobeleien stammt aus der Feder von Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

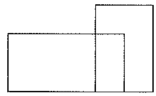
Klassenstufen 7 und 8

1. $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014 =$

(**A**) 2 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 4 (**E**) 2014

Lösung: Es ist $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014 = 0$.

2. Wie viele Vierecke können in der rechts abgebildeten Figur gezählt werden?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: In der Figur können 4 Vierecke gezählt werden.

3. Um ein Armband aus Perlen zu fädeln, will Nina 5 schwarze Perlen von einer alten Perlenkette nehmen.

Sie nimmt nacheinander Perlen von der Kette, jede einzelne entweder vom linken oder rechten Ende, bis sie 5 schwarze Perlen hat. Nina versucht, dabei möglichst wenige weiße Perlen zu nehmen. Wie viele weiße Perlen muss sie mindestens von der Kette nehmen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

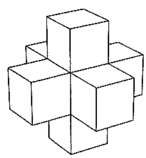
Lösung: Sicher nimmt Nina die äußeren 3 schwarzen Perlen, also eine von links und zwei von rechts. Würde sie 2 weitere schwarze Perlen von links nehmen, hätte sie 4 weiße Perlen. Würde sie beide von rechts nehmen, hätte sie ebenso 4 weiße Perlen. Nimmt sie hingegen eine weitere schwarze Perle von links und eine von rechts, dann hat sie nur 3 weiße Perlen. Das ist die gesuchte Mindestanzahl.

4. Auf welche Ziffer endet das Ergebnis der Rechnung $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Die Summe lässt sich berechnen und die Endziffer ablesen. Es geht auch ohne viel zu rechnen, und zwar so: Der erste Summand endet auf 1, der zweite Summand endet auf 3. Da die anderen drei Summanden ungerade Vielfache von 5 sind, enden sie alle auf 5. Folglich ist die gesuchte Endziffer die Endziffer von $1 + 3 + 5 + 5 + 5 = 19$, also 9.

5. Der abgebildete Körper besteht aus 7 gleich großen Würfeln. Wie viele solche Würfel müssen ergänzt werden, damit ein Würfel mit der dreifachen Kantenlänge der kleinen Würfel entsteht?



(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 16 (**D**) 14 (**E**) 12

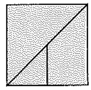
Lösung: Ein Würfel mit der dreifachen Kantenlänge der kleinen Würfel besteht aus insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln. Also müssen noch $27 - 7 = 20$ kleine Würfel ergänzt werden.

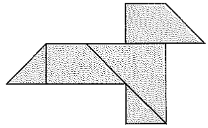
6. Johann hat sein neues Aquarium schon mit Steinen ausgelegt. Er füllt Wasser ein, bis das Aquarium zur Hälfte gefüllt ist. Dann gießt er weitere 8 Liter Wasser hinein. Jetzt ist es zu drei Vierteln gefüllt. Welches Volumen hat das Aquarium insgesamt?

(**A**) 20 Liter (**B**) 24 Liter (**C**) 30 Liter (**D**) 32 Liter (**E**) 40 Liter

Lösung: Die hinzugefügten 8 Liter Wasser sind die Differenz aus drei Vierteln und der Hälfte, machen also ein Viertel der Füllmenge des Aquariums aus. Folglich fasst das Aquarium $4 \cdot 8 = 32$ Liter.

7. Wanda zerschneidet mehrere gleich große Quadrate so in 3 Teile, wie es im Bild zu sehen ist. Aus einigen dieser Teile legt sie dann den daneben abgebildeten Vogel. Wie groß ist die Fläche des Vogels im Vergleich zur Fläche eines Quadrats?





(**A**) halb so groß (**B**) genauso groß (**C**) eineinhalbmal so groß
(**D**) doppelt so groß (**E**) zweieinhalbmal so groß

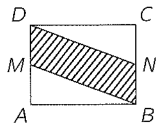
Lösung: Der Vogel besteht aus einem großen Dreieck, zwei kleinen Dreiecken und zwei Trapezen. Also entspricht seine Fläche der von einem Quadrat (ein großes Dreieck, ein kleines Dreieck und ein Trapez), einem kleinen Dreieck und einem Trapez. Da ein kleines Dreieck und ein Trapez gerade ein halbes Quadrat ergeben, ist die Fläche des Vogels eineinhalbmal so groß wie die Fläche eines Quadrats.

8. Es gilt $\frac{\bigstar + 3}{12} = \frac{9 + \bigstar}{20}$. Für welche Zahl steht der Stern?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 12

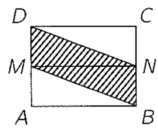
Lösung: Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner 60 der beiden Brüche und erhalten $\frac{60 \cdot (\bigstar + 3)}{12} = \frac{60 \cdot (9 + \bigstar)}{20}$, d. h., $5 \cdot \bigstar + 15 = 27 + 3 \cdot \bigstar$ bzw. $2 \cdot \bigstar = 12$, also $\bigstar = 6$.

9. Im Rechteck $ABCD$ sind M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt $15\,\text{cm}^2$. Wie groß ist der Flächeninhalt des schraffierten Vierecks $MBND$?



(**A**) $5\,\text{cm}^2$ (**B**) $6\,\text{cm}^2$ (**C**) $7{,}5\,\text{cm}^2$ (**D**) $9\,\text{cm}^2$ (**E**) $10\,\text{cm}^2$

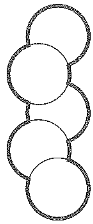
Lösung: Die Strecke $\overline{MN}$ zerlegt das Rechteck in zwei deckungsgleiche Rechtecke (s. Bild). In jedem dieser beiden Rechtecke macht die schraffierte Teilfläche genau die Hälfte aus. Somit ist die gesamte schraffierte Fläche halb so groß wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$, also $7{,}5\,\text{cm}^2$.



10. Melissa möchte neue Knieschützer kaufen. Die kosten eigentlich 10 €, doch gerade gibt es 20 % Rabatt. Dank einer Sonderaktion erhält sie an der Kasse noch einmal 10 % Rabatt auf den bereits reduzierten Preis. Wie viel muss Melissa für die Knieschützer zahlen?

(**A**) 7,20 € (**B**) 7,40 € (**C**) 7,60 € (**D**) 7,80 € (**E**) 8 €

Lösung: 20 % Rabatt auf 10 € sind 2 €. Folglich kosten die preisgesenkten Knieschützer 8 €. Der Sonderrabatt an der Kasse von 10 % auf diese 8 € sind 0,80 €. Melissa muss 7,20 € zahlen.



11. Fünf Kreise überlappen sich, wie im Bild zu sehen. Jeder der Kreise hat einen Flächeninhalt von $5\,\text{cm}^2$. Die gemeinsame Fläche zweier sich überlappender Kreise ist $1\,\text{cm}^2$ groß. Welchen Flächeninhalt hat die dick umrandete Fläche?

(**A**) $16\,\text{cm}^2$ (**B**) $17\,\text{cm}^2$ (**C**) $19\,\text{cm}^2$ (**D**) $21\,\text{cm}^2$ (**E**) $23\,\text{cm}^2$

Lösung: Der gesuchte Flächeninhalt unterscheidet sich von der Summe der Flächeninhalte der fünf Kreise ($5 \cdot 5\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$) um die Summe der Flächeninhalte der vier Überlappungsbereiche ($4 \cdot 1\,\text{cm}^2 = 4\,\text{cm}^2$). Die dick umrandete Fläche ist $25\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 21\,\text{cm}^2$ groß.

12. Farids Eltern haben sich zu den „Schnupperwochen" in der Volkshochschule angemeldet. Einige Kurse gibt es zum halben Preis. Farids Vater lernt nun 2-mal pro Woche Polnisch, Farids Mutter geht jeden 2. Dienstag zum Fotokurs. Insgesamt besucht Farids Vater während der „Schnupperwochen" 6 Veranstaltungen mehr als Farids Mutter. Wie lange dauern die „Schnupperwochen"?

(**A**) 12 Wochen (**B**) 10 Wochen (**C**) 8 Wochen (**D**) 6 Wochen (**E**) 4 Wochen

Lösung: Im Zeitraum von 2 Wochen besucht Farids Mutter nur eine Veranstaltung, Farids Vater jedoch 4, also 3 mehr als Farids Mutter. Wenn Farids Vater insgesamt 6 Veranstaltungen mehr als Farids Mutter besucht, dauern die „Schnupperwochen" zweimal 2 Wochen, also 4 Wochen.

13. Wilma will wissen, zwischen welchen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen das Ergebnis der Rechnung $2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{5} + 6 + \frac{1}{6}$ liegt. Es liegt zwischen

(**A**) 20 und 21 (**B**) 21 und 22 (**C**) 22 und 23 (**D**) 23 und 24 (**E**) 24 und 25

Lösung: Die Summe der natürlichen Zahlen in dieser Rechnung ist $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$. Die Summe der Brüche brauchen wir nicht zu berechnen, eine Schätzung geht schneller. Die Summe ist größer als 1, denn das gilt bereits für die Summe der ersten 3 Brüche: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.
Sie ist aber auch ganz sicher kleiner als 2, denn $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4} < 2$.
Also liegt das Ergebnis der Rechnung zwischen 21 und 22.

Wer geschickt zusammenfasst, weil er erkennt, dass $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ gilt, braucht nur noch $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ abzuschätzen, was ja offensichtlich zwischen 0 und 1 liegt.

In den Kryptogrammen sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass richtige Additionen entstehen. Gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern. Gibt es mehr als eine Lösung?

$$\begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{A C H T} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{N E U N} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{Z E H N} \end{array}$$

14. Mona und Lisa tauschen Adressen, weil sie sich aus dem Urlaub schreiben wollen. „Meine Postleitzahl ist 74336“, sagt Mona. „Die ist ja fast wie meine, es sind nur zwei Ziffern vertauscht“, stellt Lisa fest. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Lisas Postleitzahl?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei Ziffern in Monas Postleitzahl zu vertauschen, sodass eine andere 5-stellige Zahl entsteht. Die 7 kann mit jeder der 4 anderen Ziffern getauscht werden (4 Möglichkeiten). Die 4 kann (außer mit 7) noch mit 3 anderen Ziffern getauscht werden (3 Möglichkeiten). Jede der beiden Dreien kann (außer mit 7 und 4) noch mit 6 getauscht werden (2 Möglichkeiten). Die Tauschmöglichkeiten der 6 sind bereits alle gezählt. Insgesamt gibt es also $4 + 3 + 2 = 9$ Möglichkeiten für Lisas Postleitzahl.

15. Welche der folgenden Rechnungen liefert das größte Ergebnis?

(**A**) $33 \cdot 777$ (**B**) $55 \cdot 666$ (**C**) $66 \cdot 444$ (**D**) $77 \cdot 333$ (**E**) $99 \cdot 222$

Lösung: Jede der Rechnungen hat die Form $\overline{AA} \cdot \overline{BBB} = (A \cdot 11) \cdot (B \cdot 111) = (A \cdot B) \cdot (11 \cdot 111)$. Die Größe der Ergebnisse hängt also nur von der Größe des entsprechenden Produktes $A \cdot B$ ab: (**A**) $3 \cdot 7 = 21$, (**B**) $5 \cdot 6 = 30$, (**C**) $6 \cdot 4 = 24$, (**D**) $7 \cdot 3 = 21$, (**E**) $9 \cdot 2 = 18$. Das größte Ergebnis liefert Rechnung (**B**).

Die Jahreszahl 2014 soll als Summe von 4 natürlichen Zahlen geschrieben werden. Dabei soll der 2. Summand das Siebenfache, der 3. Summand das Dreizehnfache und der 4. Summand das Siebzehnfache des 1. Summanden sein.

Wer findet die Summanden?

$$\square + \square + \square + \square = 2014$$

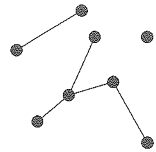
16. Julius sitzt gebannt vor dem neuen Aquarium seines Bruders Johann. Er zählt die Fische. „Ich glaube, es sind doppelt so viele Guppys wie Platys“, meint Julius. „Da hast du wohl einen Guppy für einen Platy gehalten“, erwidert Johann. „In Wirklichkeit sind es dreimal so viele Guppys wie Platys.“ Wie viele Guppys hat Johann?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Die Anzahl der Guppys lässt sich durch Aufstellen und Lösen von Gleichungen ermitteln. Wir geben einen Vorschlag für eine Lösung ohne Gleichungen:

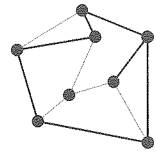
Johann hat 3-mal so viele Guppys wie Platys. Also lassen sich die Fische in 4 gleich große Gruppen einteilen: 1 Platy-Gruppe und 3 Guppy-Gruppen. Julius zählt hingegen doppelt so viele Guppys wie Platys. Für ihn zerfällt die Menge der Fische in 3 gleich große Gruppen: 1 Platy-Gruppe und 2 Guppy-Gruppen. Weil Julius einen Guppy für einen Platy hält, ist „seine“ Platy-Gruppe, und damit auch jede „seiner“ Guppy-Gruppen um 1 Fisch größer als die realen Gruppen. Die insgesamt 3 Fische mehr in Julius' Gruppen sind also genauso viele, wie in jeder einzelnen von Johanns Gruppen sind. Folglich gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Guppys in Johanns Aquarium.

17. Rechts sind 8 Punkte und 5 Verbindungsstrecken zu sehen. Wie viele Verbindungsstrecken müssen mindestens ergänzt werden, damit von jedem der 8 Punkte dieselbe Anzahl von Verbindungsstrecken ausgeht?



(**A**) 10 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

Lösung: Die größte Zahl von Verbindungsstrecken, die von einem Punkt ausgehen, ist 3. Also müssen von jedem Punkt *mindestens* 3 Verbindungsstrecken ausgehen. Das wären dann insgesamt $8 \cdot 3 : 2 = 12$ Verbindungsstrecken. Rechts ist ein Beispiel dafür zu sehen, dass genau 3 Verbindungsstrecken je Punkt möglich sind. Es mussten $12 - 5 = 7$ Verbindungsstrecken ergänzt werden.

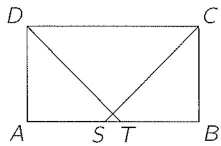


Eine ähnliche, etwas schwierigere Aufgabe ist Aufgabe 21 in Klassenstufe 9/10.

18. In ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm und 11 cm sind zwei Winkelhalbierende eingezeichnet, die eine der 11 cm langen Seiten in drei Teile teilen. Wie lang sind diese Teile?

(**A**) 1 cm, 9 cm, 1 cm (**B**) 2 cm, 7 cm, 2 cm (**C**) 3 cm, 5 cm, 3 cm
(**D**) 4 cm, 3 cm, 4 cm (**E**) 5 cm, 1 cm, 5 cm

Lösung: Wir bezeichen die Ecken des Rechtecks mit A, B, C, D und die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel bei C und D mit der 11 cm langen Seite $\overline{AB}$ mit S und T (s. Bild). Die Dreiecke ATD und BCS haben jeweils einen 90°- und zwei 45°-Winkel, sind also gleichschenklig. Somit gilt $|\overline{AT}| = |\overline{AD}| = |\overline{SB}| = |\overline{CB}| = 6\,\text{cm}$ und es folgt daraus $|\overline{AS}| = |\overline{AB}| - |\overline{SB}| = 5\,\text{cm}$. Die drei Teile $\overline{AS}$, $\overline{ST}$ und $\overline{TB}$ sind also 5 cm, 1 cm und 5 cm lang.



19. Sechs Studenten wohnen zusammen in einer großen Altbauwohnung. Morgens nutzen sie ab 7:00 Uhr vor dem gemeinsamen Frühstück die beiden Badezimmer, jeweils einzeln und unterschiedlich lange: 5, 7, 9, 14, 18 und 19 Minuten haben sie gestoppt. Wann können die sechs Studenten – bei geschickter Aufteilung auf die beiden Badezimmer – frühestens gemeinsam am Frühstückstisch sitzen?

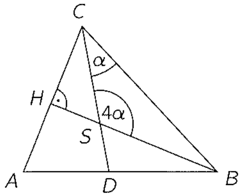
(**A**) um 7:36 Uhr (**B**) um 7:37 Uhr (**C**) um 7:38 Uhr (**D**) um 7:39 Uhr (**E**) um 7:40 Uhr

Lösung: Hätten die sechs Studenten nur ein Badezimmer zur Verfügung, so würden sie insgesamt $5 + 7 + 9 + 14 + 18 + 19 = 72$ Minuten brauchen. Auf 2 Badezimmer verteilt ginge es am schnellsten, wenn beide Badezimmer genau $72 : 2 = 36$ Minuten lang besetzt wären. In einem der Badezimmer wäre dann der Student, der 19 Minuten braucht. Die restlichen 17 Minuten kommen jedoch nicht unter den gestoppten Zeiten vor und lassen sich auch nicht aus diesen kombinieren. Also brauchen die sechs ganz sicher länger als 36 Minuten. Dass es mit 37 Minuten klappt, zeigt die Rechnung $18 + 19 = 37$. Das andere Badezimmer ist dann nur $5 + 7 + 9 + 14 = 35$ Minuten lang besetzt. Um 7:37 Uhr können die Studenten frühestens gemeinsam am Frühstückstisch sitzen.

Eine ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 17 in Klassenstufe 9/10.

Wie kann die Zahl 1000 als Summe mit 8 Achten geschrieben werden?

20. Im Dreieck ABC ist $\overline{BH}$ die Höhe auf die Seite $\overline{AC}$ und $\overline{CD}$ die Winkelhalbierende des Winkels bei C. Mit α ist der Winkel DCB bezeichnet, S ist der Schnittpunkt von $\overline{BH}$ und $\overline{CD}$. Wie groß ist α, wenn der Winkel BSC 4-mal so groß ist wie α? (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*)

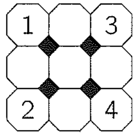


(**A**) 30° (**B**) 32,5° (**C**) 35° (**D**) 37,5° (**E**) 40°

Lösung: Da $\overline{CD}$ Winkelhalbierende ist, gilt $\measuredangle HCS = \alpha$. Nach dem Außenwinkelsatz, angewendet auf das Dreieck HSC, ist $4\alpha = 90° + \alpha$, also $\alpha = 30°$.

Eine andere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, ist die folgende: Im Dreieck HSC beträgt die Innenwinkelsumme $180° = \alpha + 90° + (180° - 4\alpha)$, woraus $\alpha = 30°$ folgt.

21. In die fünf leeren Felder der Figur will Sebastian die fünf Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 so eintragen, dass die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 9 gleich 15 ist. Wie groß ist dann die Summe der Zahlen in den Nachbarfeldern der 8? (*Nachbarfelder* sind alle waagerecht oder senkrecht angrenzenden Felder.)



(**A**) 12 (**B**) 18 (**C**) 19 (**D**) 26 (**E**) 27

Lösung: Die 9 steht ganz sicher nicht in der Mitte, sonst wäre die Summe ihrer Nachbarn $5+6+7+8=26$. Also steht die 9 zwischen zwei Eckfeldern. Enthalten diese die Zahlen a und b, dann steht im mittleren Feld die Zahl $15-(a+b)$. Da die Zahl im mittleren Feld *höchstens* 8 sein kann, muss die Summe $a+b$ *mindestens* 7 sein. Die 9 kann also nur zwischen 3 und 4 stehen, alle anderen „Ecksummen“ sind zu klein. Damit steht die 8 in der Mitte und die Summe ihrer Nachbarn ist $5+6+7+9=27$.

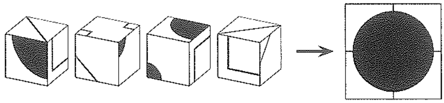
In einem quadratischen Raum stehen 17 alte Sessel so an den Wänden, dass an jeder Wand dieselbe Anzahl an Sesseln steht. Wie kann das sein?

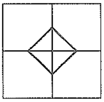
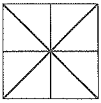
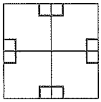
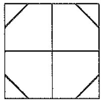
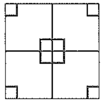
22. Heute ist großes Pflaumenknödelessen bei Oma Hilde, alle Enkel sind da. Jeder der hungrigen Enkel bekommt gleich viele der kleinen köstlichen Knödel. Wenn 2 Enkel nicht gekommen wären, dann würden die anderen Enkel jeder 3 Knödel mehr bekommen. Und wenn es 20 Knödel weniger wären, dann würde jeder 2 Knödel weniger bekommen. Wie viele Pflaumenknödel hat Oma Hilde gemacht?

(**A**) 80 (**B**) 90 (**C**) 100 (**D**) 120 (**E**) 150

Lösung: Aus der zweiten Aussage „wenn es 20 Knödel weniger wären, dann würde jeder 2 Knödel weniger bekommen“ folgt sofort, dass Oma Hilde $20:2=10$ Enkel hat, die alle da sind. Aus der ersten Aussage folgt nun, dass 2 Enkel insgesamt $(10-2)\cdot 3 = 24$ Knödel essen. Also verspeist jedes Enkelkind $24:2=12$ Knödel. Für ihre 10 Enkel hat Oma Hilde demzufolge insgesamt $10 \cdot 12 = 120$ der kleinen köstlichen Pflaumenknödel gemacht.

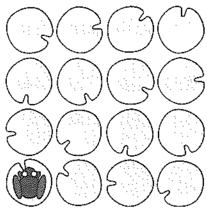
23. Vier identisch bemalte Würfel werden so zu einem Quader zusammengestellt, dass auf der Oberseite ein großer schwarzer Kreis entsteht (s. Bild). Was ist auf der Unterseite zu sehen?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

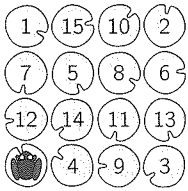
Lösung: In der Abbildung stimmen beim ersten und vierten Würfel die Deckfläche und eine der Seitenflächen überein. Die beiden anderen Seitenflächen liegen folglich einander gegenüber. Die Unterseite des Quaders ist in Bild (**A**) zu sehen.

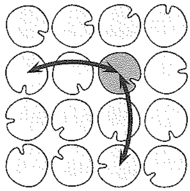
24. Ein mathematisch interessierter Frosch ordnet sich in seinem Tümpel 16 Seerosenblätter regelmäßig an (s. Bild). Beginnend unten links springt er waagerecht oder senkrecht von Blatt zu Blatt, jedoch stets so, dass mindestens ein Blatt übersprungen wird. Er möchte so viele Sprünge wie möglich machen, ohne dass er auf einem Blatt (sein Startblatt eingeschlossen) mehr als einmal zu sitzen kommt. Wie viele Sprünge sind das höchstens?



(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 13 (**D**) 12 (**E**) 11

Lösung: Ein Weg, der unter den gestellten Bedingungen tatsächlich über alle 16 Seerosenblätter führt, lässt sich mit sinnvollem Probieren finden. Ein Beispiel ist rechts zu sehen, die Blätter sind in der Reihenfolge der Sprünge nummeriert. Dabei wurde beachtet, dass die mittleren 4 Blätter, wie daneben veranschaulicht, nur von jeweils 2 anderen Blättern erreichbar sind. Der Frosch macht in diesem Beispiel 15 Sprünge, was sicher die größte mögliche Anzahl an Sprüngen ist.





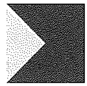
25. Der Durchschnitt zweier positiver Zahlen ist um 30 % kleiner als die größere der beiden Zahlen. Um wie viel Prozent ist der Durchschnitt dann größer als die kleinere der beiden Zahlen?

(**A**) um 75 % (**B**) um 70 % (**C**) um 50 % (**D**) um 30 % (**E**) um 25 %

Lösung: Da es bei dieser Aufgabe nur um Verhältnisse von Zahlen geht, ist es eine gute Strategie, ein geeignetes Zahlenbeispiel zu wählen, mit dem sich leicht rechnen lässt. Wir wählen 100 als die größere der beiden Zahlen. Dann ist der Durchschnitt der beiden Zahlen, der um 30 % kleiner als 100 ist, gleich 70. Die kleinere der beiden Zahlen ist in diesem Fall 40. Der Durchschnitt 70 der beiden Zahlen ist demzufolge um 30 größer als 40, also um $30 : 40 \cdot 100\,\% = 75\,\%$.

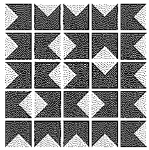
Wie groß ist der kleinere der beiden Winkel, den der Stundenzeiger und der Minutenzeiger einer Uhr um 20:14 Uhr miteinander bilden?

26. Ich lege 25 quadratische Teile wie das rechts abgebildete so zu einem 5×5-Quadrat, dass sich benachbarte Quadrate stets mit Seiten gleicher Farbe berühren. Der Rand des fertigen 5×5-Quadrats wird von grauen und schwarzen Quadratseiten gebildet. Welches ist die kleinste Anzahl an schwarzen Quadratseiten im Rand des 5×5-Quadrats?



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: An jeder der Ecken zeigt mindestens eine schwarze Quadratseite nach außen, also ist die Anzahl der schwarzen Quadratseiten im Rand mindestens 4. Im Inneren des 5×5-Feldes treten die grauen Quadratseiten stets paarweise, also in gerader Anzahl auf. Da es insgesamt 25 grauen Quadratseiten gibt, muss sich im Rand eine ungerade Anzahl befinden. Da der Rand aus 20 Quadratseiten besteht, muss auch die Anzahl der schwarzen Quadratseiten im Rand ungerade und somit nicht nur mindestens 4, sondern mindestens 5 sein. Das Bild zeigt ein Beispiel mit 5 schwarzen Quadratseiten im Rand. Also ist (**B**) die Lösung.



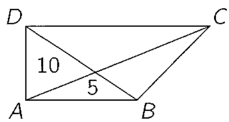
27. An der Tafel stehen einige positive ganze Zahlen, alle voneinander verschieden. Genau 2 davon sind durch 2 teilbar und genau 7 sind durch 7 teilbar. Wie groß ist die größte dieser Zahlen *mindestens*?

(**A**) 49 (**B**) 56 (**C**) 63 (**D**) 70 (**E**) 77

Lösung: Die gesuchte größte Zahl ist ganz sicher durch 2, durch 7 oder durch 2 und durch 7 teilbar. Hätte sie keine dieser Eigenschaften, könnten wir sie streichen und hätten immer noch genau 2 durch 2 teilbare und genau 7 durch 7 teilbare Zahlen an der Tafel, aber eine *kleinere* größte Zahl. Außerdem können wir annehmen, dass auch jede andere Zahl an der Tafel durch 2, durch 7 oder durch 2 und durch 7 teilbar ist. Sonst könnten wir sie streichen, ohne dass sich an den Bedingungen und der größten Zahl etwas ändert. Die durch 7 teilbaren Zahlen an der Tafel sind mindestens die Zahlen $1 \cdot 7, 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, 4 \cdot 7, 5 \cdot 7, 6 \cdot 7, 7 \cdot 7$. Da sich hierunter jedoch 3 durch 2 teilbare Zahlen befinden – also eine zu viel –, ist eine davon durch ein größeres Vielfaches von 7 zu ersetzen, das jedoch nicht durch 2 teilbar ist. Die kleinstmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist $9 \cdot 7 = 63$, das ist die gesuchte Zahl.

Ein ähnliches Problem ist in Aufgabe 23 in Klassenstufe 11–13 gestellt.

28. Das Viereck $ABCD$ hat bei A und bei D jeweils einen rechten Winkel. Es wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt, zwei ihrer Flächeninhalte sind rechts angegeben. Welchen Flächeninhalt hat das Viereck $ABCD$?



(**A**) 60 (**B**) 55 (**C**) 50 (**D**) 45 (**E**) 40

Lösung: Wir bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Diagonalen mit S. Da die Winkel bei A und D rechte Winkel sind, sind AB und CD zueinander parallel. $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ haben denselben Flächeninhalt, da sie die gemeinsame Seite $\overline{AB}$ haben und in der Länge der Höhe auf $\overline{AB}$ übereinstimmen. Folglich ist der Flächeninhalt von $\triangle BCS$ gleich 10.

Das Lot von A auf BD ist Höhe sowohl in $\triangle ASD$ als auch in $\triangle ABS$. Folglich ist $|\overline{SD}| = 2|\overline{BS}|$. Ebenso ist das Lot von C auf BD Höhe sowohl in $\triangle DSC$ als auch in $\triangle SBC$. Folglich ist der Flächeninhalt von $\triangle DSC$ doppelt so groß wie der von $\triangle SBC$, also 20.

Der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ beträgt $10 + 5 + 10 + 20 = 45$.

29. Eine alte Waage ist defekt. Für alles, was höchstens 1000 g wiegt, zeigt sie das exakte Gewicht an. Für alles, was schwerer als 1000 g ist, zeigt sie jedoch irgendein beliebiges Gewicht an, allerdings stets über 1000 g. Fünf Gegenstände vom Gewicht A, B, C, D und E werden paarweise gewogen. Die Waage zeigt: $B+D=1200\,\text{g}$, $C+E=2100\,\text{g}$, $B+E=800\,\text{g}$, $B+C=900\,\text{g}$, $A+E=700\,\text{g}$. Welches Gewicht ist am größten?

(**A**) Gewicht A (**B**) Gewicht B (**C**) Gewicht C (**D**) Gewicht D (**E**) Gewicht E

Lösung: Um leichter argumentieren zu können, nummerieren wir die einzelnen Wägungen durch: (1) $B+D=1200\,\text{g}$, (2) $C+E=2100\,\text{g}$, (3) $B+E=800\,\text{g}$, (4) $B+C=900\,\text{g}$, (5) $A+E=700\,\text{g}$. In Wägung (1) und (4) wird beide Male B gewogen. Da das Gesamtgewicht in (1) ganz sicher größer als 1000 g, das in (4) aber exakt, also ganz sicher kleiner als 1000 g ist, folgt $D>C$. Aus (3) und (4) folgt analog $C>E$, aus (2) und (4) folgt $E>B$, und aus (3) und (5), dass $B>A$ gilt. Zusammen ergibt das $D>C>E>B>A$. Das Gewicht D ist das gesuchte größte Gewicht.

Ein Beispiel für die 5 Gewichte ist: $A=100\,\text{g}$, $B=200\,\text{g}$, $C=700\,\text{g}$, $D=2014\,\text{g}$, $E=600\,\text{g}$.

30. Jana schreibt Geschichten. In ihrer neuesten Erzählung erkundet Professor Teo Rettich die merkwürdige Kommunikation auf der winzigen Insel Malsomalso. Dort gibt es A-Leute, B-Leute und die Malsomalsos. A-Leute sagen immer die Wahrheit. B-Leute lügen stets. Jeder Malsomalso antwortet auf nacheinander gestellte Fragen stets abwechselnd mit der Wahrheit oder einer Lüge. Teo Rettich hat jedem der 20 Inselbewohner nacheinander dieselben 3 Fragen gestellt:

1. Bist du ein A-Leut? 2. Bist du ein Malsomalso? 3. Bist du ein B-Leut?

Auf die 1. Frage antworteten 17 Bewohner mit „Ja“, auf die 2. Frage 12 und auf die 3. Frage 8. Die anderen antworteten jeweils mit „Nein“. Wie viele A-Leute wohnen auf der Insel Malsomalso?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 13 (**E**) 17

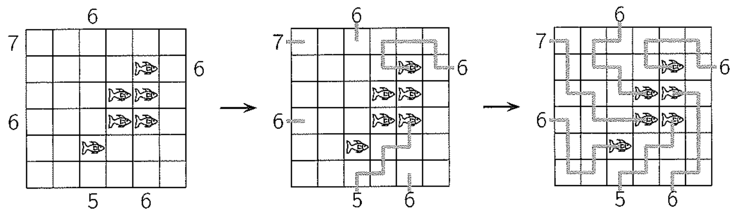
Lösung: In eine Tabelle tragen wir für jede Frage zu jeder Bewohnergruppe ein, ob sie mit der Wahrheit oder einer Lüge bzw. mit „Ja“ oder „Nein“ geantwortet haben. Dabei beachten wir, dass die Gruppe der Malsomalsos in zwei Gruppen zerfällt: die Gruppe M_1 derer, die mit einer wahren Aussage beginnen, und die Gruppe M_2 derer, die mit einer Lüge beginnen.

Gruppe:	A-Leute		B-Leute		M_1		M_2		
Frage:	Antwort		Antwort		Antwort		Antwort		Anzahl JA
1. Bist du ein A-Leut?	wahr	**JA**	falsch	**JA**	wahr	nein	falsch	**JA**	17
2. Bist du ein Malsomalso?	wahr	nein	falsch	**JA**	falsch	nein	wahr	**JA**	12
3. Bist du ein B-Leut?	wahr	nein	falsch	nein	wahr	nein	falsch	**JA**	8

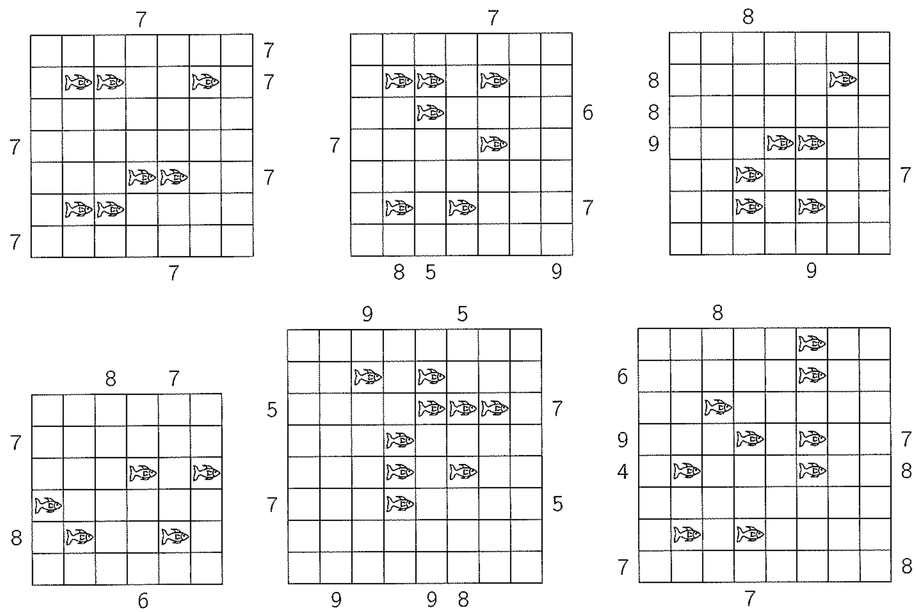
Anhand der Tabelle sehen wir, dass die Anzahl der A-Leute gerade die Differenz aus der Anzahl derjenigen, die auf die 1. Frage mit „Ja“ geantwortet haben, und derjenigen, die auf die 2. Frage mit „Ja“ antworteten, ist. Es gibt folglich $17-12=5$ A-Leute auf der Insel Malsomalso. Die anderen sind 4 B-Leute und $20-5-4=11$ Malsomalsos.

Kopfnüsse I: Frische Fische

Am Rand der Übungsteiche des Angelvereins „Gerade Schnur" sitzen Angler an den mit Zahlen beschrifteten Positionen. Jeder von ihnen hat einen Fisch am Haken. Ihre Angelschnüre verlaufen senkrecht oder waagerecht von Feld zu Feld, wobei durch jedes Feld genau eine Angelschnur verläuft. Die Zahlen geben die Anzahl der Felder an, über die die Schnur vom Angler bis zum Fisch verläuft. Hier ist ein Beispiel:



Wer findet die richtigen Angelschnüre?



Zwei Mütter und zwei Töchter waren gemeinsam angeln. Zusammen haben sie 9 Fische geangelt, jede von ihnen die gleiche Anzahl.

Wie kann das sein? Wie viele Fische hat jede der Anglerinnen geangelt?

Prima Prozente

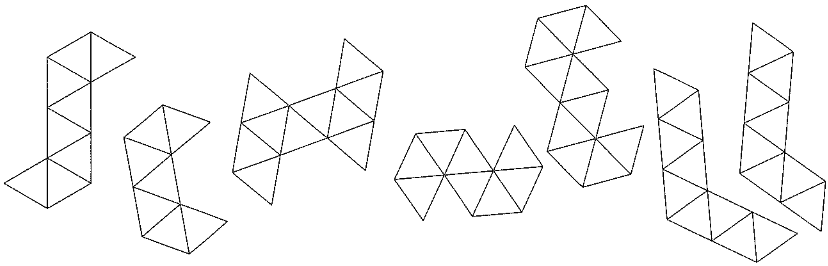
1/1 Zu seinen vielen weißen Zwergkaninchen bekommt der Großvater zwei schwarze Widder dazu. Seine Enkelin Constanze rechnet gleich auf ihrem neuen Handy aus, dass der Großvater auch mit den beiden schwarzen Widdern dazu immer noch mehr als 91 % weiße Kaninchen hat. Wie viele weiße Kaninchen hat der Großvater mindestens?

2/2 Von den 100 Teilnehmern an einem Sprachkurs erreichten 80 % beim ersten Test die Höchstpunktzahl. Beim zweiten Test erreichten noch 72 % der Teilnehmer die Höchstpunktzahl und beim dritten Test waren es 60 %. Wie viele Teilnehmer mindestens haben in allen 3 Tests die Höchstpunktzahl erreicht?

3/3 Von einer positiven Zahl x ist bekannt, dass sowohl 15 % dieser Zahl, also 15 % von x, als auch 33 % von x eine natürliche Zahl ist. Welches ist die kleinste (nicht notwendigerweise natürliche) Zahl x, für die das gilt?

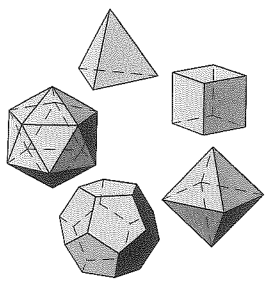
Gut vernetzt

Aus welchen der folgenden Körpernetze lässt sich ein geschlossener Körper bauen?



Die platonischen Körper sind regelmäßige Körper, bei denen alle Ecken nach außen zeigen und deren Seitenflächen identische regelmäßige Vielecke sind, sodass an jeder Ecke gleich viele Seitenflächen zusammenstoßen. Es gibt genau die fünf rechts abgebildeten. Ihre Namen sind, im Uhrzeigersinn beginnend oben in der Mitte: Tetraeder, Würfel (oder Hexaeder), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

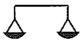
Wie viele Seitenflächen hat jeder dieser Körper?
Wie viele Kanten und wie viele Ecken haben sie jeweils?
Woher kommen die Namen der fünf Körper?



Die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen ist für jeden dieser Körper dieselbe Zahl. Welche?

Verwegen gewogen

Ein 10 g schweres Knetestück soll so in drei Teile zerteilt werden, dass sich mit Hilfe dieser Teile auf einer Balkenwaage jedes ganzzahlige Gewicht von 1 g bis 10 g auswiegen lässt. Wie soll das Knetestück geteilt werden?



Martin hat 13 kleine Pferde geschnitzt und sie in einer Reihe aufgestellt, das ganz links stehende wiegt nur 1 g, das daneben stehende 2 g und jedes weitere Pferd ist immer 1 g schwerer als sein linker Nachbar. Martin schenkt 6 von diesen Pferdchen seinem kleinen Bruder und wählt die Pferdchen so aus, dass 7 nebeneinanderstehende übrigbleiben. Wie lässt sich mit zwei Wägungen auf einer Balkenwaage feststellen, wie schwer diese restlichen 7 Pferdchen zusammen sind?

Fünf Mädchen bereiten sich in einem Trainingslager auf einen wichtigen Mannschaftswettbewerb im Judo vor, bei dem sie alle in derselben Gewichtsklasse starten sollen. Am Ende der Trainingswoche stellt der Trainer beim Wiegen fest, dass drei der Mädchen dasselbe Gewicht haben und die beiden anderen zwar ein anderes, aber auch untereinander dasselbe. Da der Trainer ihnen nicht gesagt hat, wer von ihnen zur Dreier- und wer zur Zweiergruppe gehört, beschließen die Mädchen, das an einer Wippe herauszubekommen. „Das lässt sich mit dreimal Wippen auf jeden Fall entscheiden", behauptet Chantal, das Matheass der Judogruppe. Stimmt das?

Kryptogramme

Jeder Buchstabe steht für eine Ziffer, gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern. Ist die Aufgabe richtig gelöst, so ergeben die Buchstaben, wenn sie in der Reihenfolge der Größe der Ziffern aufgeschrieben werden, den Namen eines berühmten Erfinders, eines berühmten Mathematikers und eines berühmten Philosophen.

$$\begin{array}{ccccc} DI & + & N & = & ID \\ - & & - & & - \\ S & + & O & = & EI \\ \hline EO & + & D & = & EN \end{array}$$

$$\begin{array}{r} HAE \cdot HTS \\ \hline HAE \\ HTTT \\ \hline HLETT \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} MOM & - & KM & = & EID \\ : & & + & & - \\ EE & \cdot & I & = & II \\ \hline MM & + & RD & = & TM \end{array}$$

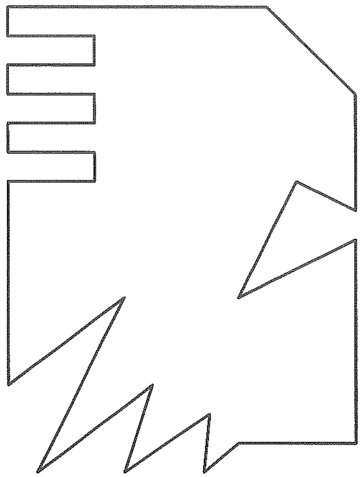
In den fünf rechts abgebildeten Zahlen sind

a) 9 Ziffern
b) 8 Ziffern
c) 7 Ziffern
d) 6 Ziffern
e) 5 Ziffern

so durch Nullen zu ersetzen, dass die Summe der entstehenden Zahlen 1111 ist.

111
333
555
777
999

Augen auf im Museum!

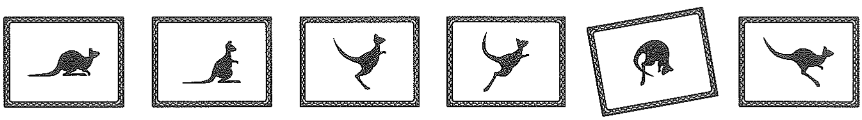


Die Wach- und Schließgesellschaft Sorgenlos wurde mit der Bewachung der Kunstwerke im neuen Museum für Zeitgenössische Kunst beauftragt.
In dem imposanten Gebäude mit dem rechts abgebildeten futuristischen Grundriss sollen Museumswächter eingesetzt werden, die nachts die Schätze des Museums bewachen. Da ständig jedes einzelne Ausstellungsstück im Blick der Wächter sein soll, entschließt sich die Firma, an einigen festen Punkten des Raums Wächter zu positionieren, die von diesen festgelegten Punkten aus einen 360°-Rundumblick haben.

Welches ist die kleinste Zahl an Wächtern, die benötigt wird, damit jeder Bereich des Raumes überwacht ist?

Im Museum für Moderne Kunst war Nachtwächter Armin Augenauf heute allein zur Beaufsichtigung der wertvollen Bilder. Der Raum hat nur gerade Wände, ist aber recht verwinkelt. Wie von seinem Chef angeordnet, sitzt Armin Augenauf jeden Abend auf seinem Drehstuhl an einem Punkt des Raumes und beobachtet von dort aus, was rundherum passiert.
Obwohl Armin Augenauf in dieser Nacht nicht eine Sekunde unaufmerksam war, fehlen am nächsten Morgen Bilder, und zwar von *jeder* Wand des Raumes eines.
Ihm wird vorgeworfen, dass er die Diebe gesehen und daher mit ihnen zusammengearbeitet haben muss. Aber Armin Augenauf betont, dass er von seinem Sitzplatz aus die nun fehlenden Bilder gar nicht sehen konnte. Die Untersuchungen der Polizei ergaben, dass Armin Augenaufs Aussage tatsächlich stimmt.

Wie könnte der Grundriss eines Raumes aussehen, bei dem dies möglich ist?



Von der Neuen Gemäldegalerie hat die Wach- und Schließgesellschaft Sorgenlos den Auftrag bekommen, die Bewachung der Gemälde zu organisieren. Leider hat dieses keinen Grundriss ihres ebenfalls architektonisch gewagten Gebäudes mitgeschickt, sondern nur mitgeteilt, dass es ein Raum mit geraden Wänden und 12 Ecken ist.
Wie viele Wächter sollte die Firma Sorgenlos schicken, damit der Raum garantiert wie gewünscht komplett überwacht werden kann?

Klassenstufen 9 und 10

1. $\frac{20}{100} + \frac{14}{1000} =$

(**A**) 0,2104 (**B**) 2,14 (**C**) 2,014 (**D**) 0,034 (**E**) 0,214

Lösung: Es ist $\frac{20}{100} + \frac{14}{1000} = 0{,}2 + 0{,}014 = 0{,}214$.

2. In der diesjährigen Jahreszahl 2014 ist die letzte Ziffer größer als die Summe der ersten 3 Ziffern. Vor wie vielen Jahren war das zum letzten Mal der Fall?

(**A**) vor einem Jahr (**B**) vor 3 Jahren (**C**) vor 5 Jahren (**D**) vor 7 Jahren (**E**) vor 12 Jahren

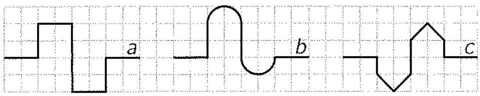
Lösung: Im augenblicklichen Jahrzehnt trifft die Bedingung auf keine Jahreszahl zu. Für die letzte im vergangenen Jahrzehnt, 2009, trifft die Bedingung zu: $2 + 0 + 0 < 9$. Das war vor 5 Jahren.

3. In Annikas Schule findet jedes Jahr stets am 4. Dienstag im Januar der „Tag der offenen Tür" statt. Welches ist das frühestmögliche Januar-Datum, an dem der „Tag der offenen Tür" stattfinden kann?

(**A**) 20. Januar (**B**) 21. Januar (**C**) 22. Januar (**D**) 23. Januar (**E**) 24. Januar

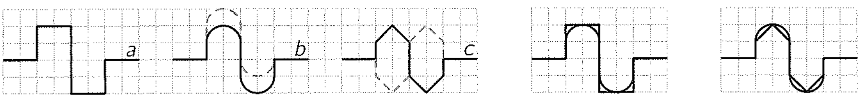
Lösung: Der 4. Dienstag im Januar fällt genau dann auf das frühestmögliche Januardatum, wenn der 1. Januar ein Dienstag ist. Dann ist der 4. Dienstag der 22. Januar.

4. Mit a, b und c seien die Längen der drei abgebildeten Linien bezeichnet. Welche der folgenden Ungleichungen ist richtig?



(**A**) $a < b < c$ (**B**) $a < c < b$ (**C**) $b < a < c$ (**D**) $b < c < a$ (**E**) $c < b < a$

Lösung: Wir ersetzen die zweite und die dritte Linie durch eine offenbar gleich lange, sodass sich die Längen der drei Linien gut vergleichen lassen:



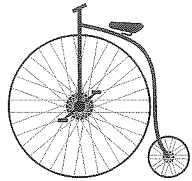
Wir sehen, dass $c < b < a$ gilt.

5. Auf der „MSC Fabiola", einem der längsten Containerschiffe der Welt, lassen sich bis zu 12500 Container unterbringen. Aneinandergereiht würden diese eine etwa 75 km lange Containerschlange bilden. Wie lang ist dann ein Container durchschnittlich?

(**A**) etwa 6 m (**B**) etwa 8 m (**C**) etwa 9 m (**D**) etwa 12 m (**E**) etwa 16 m

Lösung: Wenn 12500 Container aneinandergereiht etwa 75 km = 75000 m lang sind, so ist wegen $75000 : 12500 = 6$ ein Container durchschnittlich 6 m lang.

6. Corinna hat ein Hochrad geerbt. Sie stellt fest, dass der Umfang des großen Rades 4,5 m beträgt und der des kleinen 1 m. Sie markiert auf beiden Reifen den tiefsten Punkt. Dann schiebt sie das Rad so lange, bis beide Punkte wieder gleichzeitig den tiefsten Stand haben. Wie viele Meter muss sie dazu schieben?



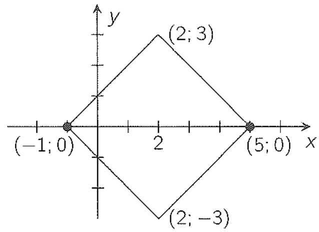
(A) 4,5 m **(B)** 5 m **(C)** 9 m **(D)** 12,5 m **(E)** 18 m

Lösung: Wenn der markierte Punkt auf dem großen Rad das erste Mal wieder den tiefsten Stand erreicht, also nach 4,5 m, ist der markierte Punkt auf dem kleinen Rad gerade auf seinem höchsten Stand. Wenn sich das Vorderrad ein weiteres Mal gedreht hat, sind beide Punkte wieder gleichzeitig auf dem tiefsten Stand. Corinna muss 9 m schieben.

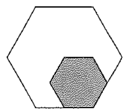
7. Laila hat ein Quadrat in ein Koordinatensystem so gezeichnet, dass eine der beiden Diagonalen auf der x-Achse liegt. Die Koordinaten der beiden Eckpunkte des Quadrats, die auf der x-Achse liegen, sind $(-1; 0)$ und $(5; 0)$. Welche Koordinaten hat einer der beiden anderen Eckpunkte?

(A) $(2; 0)$ **(B)** $(2; -6)$ **(C)** $(3; 5)$ **(D)** $(2; 3)$ **(E)** $(3; -1)$

Lösung: Wir benutzen, dass die Diagonalen im Quadrat gleich lang sind, einander halbieren und aufeinander senkrecht stehen. Daraus folgt sofort, dass die anderen beiden Eckpunkte dieselbe x-Koordinate haben. Diese liegt genau auf der Hälfte zwischen den x-Koordinaten der beiden gegebenen Eckpunkte, ist also gleich 2. Da die Länge der Diagonalen 6 ist, sind die y-Koordinaten der beiden nicht gegebenen Eckpunkte 3 und -3. Der gesuchte Eckpunkt ist $(2; 3)$.



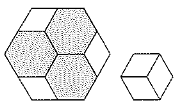
8. Eine Seite des großen regelmäßigen Sechsecks ist doppelt so lang wie eine Seite des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Der Flächeninhalt des kleinen Sechsecks beträgt 4 cm^2. Welchen Flächeninhalt hat das große Sechseck?



(A) 20 cm^2 **(B)** 18 cm^2 **(C)** 16 cm^2 **(D)** 14 cm^2 **(E)** 12 cm^2

Lösung: Die Seitenlänge des großen regelmäßigen Sechsecks entsteht durch Verdoppeln der Seitenlänge des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Dabei vervierfacht sich der Flächeninhalt auf 16 cm^2.

Ein anderer Zugang zur Lösung besteht darin, die Fläche des großen Sechsecks zu zerlegen, wie in der Abbildung zu erkennen:



9. Welche der folgenden Zahlen ist um ebensoviel kleiner als $\frac{4}{5}$ wie sie größer als $\frac{2}{3}$ ist?

(A) $\frac{11}{15}$ **(B)** $\frac{7}{8}$ **(C)** $\frac{7}{10}$ **(D)** $\frac{6}{15}$ **(E)** $\frac{5}{8}$

Lösung: Gesucht ist die Zahl, die um die halbe Differenz zwischen den beiden Zahlen größer ist als die kleinere, also $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12+10}{15} = \frac{11}{15}$. Die gesuchte Zahl ist das arithmetische Mittel der beiden gegebenen Zahlen.

10. Heinrich hat beim Schach in 40 Spielen insgesamt 25 Punkte erzielt. Für einen Sieg gab es 1 Punkt, für ein Unentschieden 1/2 Punkt und bei einem verlorenen Spiel 0 Punkte. Wie viele Spiele hat Heinrich mehr gewonnen als verloren?

(**A**) 7 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) Das ist nicht eindeutig bestimmt.

Lösung: Gesetzt den Fall, Heinrich hat seine 25 Punkte dadurch bekommen, dass er 25-mal gewonnen hat, dann hat er $40 - 25 = 15$ Spiele verloren, die Differenz ist 10. Hat er einen oder mehrere der 25 Punkte durch unentschieden ausgegangene Spiele bekommen, so müssen es wegen $1 = 1/2 + 1/2$ zwei Unentschieden für jeden dieser Punkte gewesen sein. Und er hat ein Spiel weniger gewonnen und ebenso ein Spiel weniger verloren. Die gesuchte Differenz aber bleibt gleich.

11. Ich habe heute, am 20.3.2014, das Alter meiner Großmutter, meiner Mutter und meiner Schwester addiert und als Summe 100 erhalten. Alle 3 haben ein Alter, das eine Potenz von 2 ist. Unter den folgenden Jahresangaben ist das Geburtsjahr meiner Schwester. Es ist

(**A**) 1998 (**B**) 2000 (**C**) 2006 (**D**) 2010 (**E**) 2012

Lösung: Das Alter der drei am 20.3.2014 kann nur die Werte 2, 4, 8, 16, 32 und 64 haben. Es ist sofort klar, dass die Summe 100 allein auf die folgende Weise entstehen kann: $64 + 32 + 4 = 100$. Für das Geburtsjahr meiner Schwester gibt es 2 Möglichkeiten. Wenn sie dieses Jahr bereits Geburtstag hatte, ist es $2014 - 4 = 2010$. Sollte sie nach dem 20.3.2014 Geburtstag haben, wäre ihr Geburtsjahr 2009. Nur 2010 ist unter den Lösungsvorschlägen.

12. Über ein Exemplar einer erst kürzlich entdeckten Krokodilart stand in der Zeitung: „Die Schwanzlänge beträgt ein Drittel der Gesamtlänge und der 90 cm lange Kopf ist ein Viertel so lang wie das Krokodil ohne Schwanz." Daraus können wir die Gesamtlänge des Krokodils berechnen. Sie beträgt

(**A**) 540 cm (**B**) 490 cm (**C**) 480 cm (**D**) 360 cm (**E**) 180 cm

Lösung: Wir bezeichnen die Gesamtlänge mit g, die Schwanzlänge mit s. Dann gilt $g = 3s$ und $g - s = 4 \cdot 90\,\text{cm}$, woraus wir $2s = 360\,\text{cm}$, also $s = 180\,\text{cm}$ und $g = 3 \cdot 180\,\text{cm} = 540\,\text{cm}$ erhalten.

13. Welche der folgenden Aussagen ist gleichbedeutend mit der Aussage: „Nicht jeder von uns hat mehr als 20 Aufgaben gelöst."?

(**A**) Keiner von uns hat mehr als 20 Aufgaben gelöst.
(**B**) Es gibt einen von uns, der weniger als 21 Aufgaben gelöst hat.
(**C**) Jeder von uns hat weniger als 21 Aufgaben gelöst.
(**D**) Es gibt einen von uns, der genau 20 Aufgaben gelöst hat.
(**E**) Es gibt einen von uns, der mehr als 20 Aufgaben gelöst hat.

Lösung: Dass „nicht jeder" etwas getan hat, ist gleichbedeutend damit, dass „es einen gibt", auf den das nicht zutrifft. Im konkreten Fall heißt das: „Es gibt einen, der nicht mehr als 20 Aufgaben gelöst hat." Wenn er aber nicht mehr als 20 Aufgaben gelöst hat, dann hat er weniger als 21 gelöst.

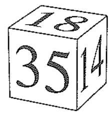
14. Die Drillinge Karl, Alina und Luis wollen sich identische T-Shirts ihrer Lieblingsband kaufen. Karl hat sofort ausgerechnet, dass ihm selbst ein Drittel, Alina ein Viertel und Luis ein Fünftel vom Preis für ein T-Shirt fehlen. Insgesamt fehlen den Drillingen 28,20 € für die 3 T-Shirts. Wie teuer ist ein T-Shirt?

(**A**) 20,60 € (**B**) 24 € (**C**) 28,40 € (**D**) 32,60 € (**E**) 36 €

Lösung: Es sei t der Preis eines T-Shirts. Laut Karls Rechnung gilt $\frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{5}t = 28{,}20\,€$ bzw. $\frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5}t = \frac{47}{60}t = 28{,}20\,€$, woraus $t = 36{,}00\,€$ folgt.

Auch durch Probieren lässt sich hier die Lösung finden. Die Feststellung, dass die Vorschläge (**A**), (**C**) und (**D**) Preise sind, die nicht durch 3 teilbar sind, lässt diese wegfallen. Für (**B**) stellen wir fest, dass ein Drittel, ein Viertel und ein Fünftel des Preises nur $8\,€ + 6\,€ + 4{,}80\,€ = 18{,}80\,€$ ist, bei (**E**) hingegen erhalten wir 28,20 €.

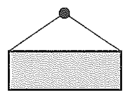
15. Der Würfel rechts ist etwas speziell. Die Summen einander gegenüberliegender Zahlen sind allesamt gleich. Außerdem sind die drei Zahlen, die der 14, 18 bzw. der 35 gegenüberliegen, Primzahlen. Welche Primzahl liegt der 14 gegenüber?



(**A**) 23 (**B**) 29 (**C**) 31 (**D**) 37 (**E**) 41

Lösung: Die Primzahlen auf den der 14 und der 18 gegenüberliegenden Seiten müssen beide ungerade sein. Ihre Summe mit der 14 bzw. 18 ist also jeweils eine ungerade Zahl. Damit die Summe von 35 und einer Primzahl eine ungerade Zahl ist, muss diese Primzahl die 2 sein – und die Summe ist dann 37. Daraus folgt, dass die der 14 gegenüberliegende Primzahl $37 - 14 = 23$ ist. Und der 18 liegt die $37 - 18 = 19$ gegenüber.

16. Mit Nagel und Faden hat Maksim 5 verschieden große rechteckige Bilder an die Wand gehängt. Die 5 Nägel hat er genau 2,50 m über dem Fußboden in die Wand geschlagen. Die 5 Fäden sind jeweils 2 m lang und enden an den beiden oberen Ecken (s. Abb.). Für welches Bild ist der Abstand der Unterkante des Bildes zum Fußboden am geringsten? (Angaben Breite × Höhe, jeweils in cm)



(**A**) 120×90 (**B**) 120×50 (**C**) 120×40 (**D**) 160×100 (**E**) 160×60

Lösung: Der Abstand vom Fußboden ist am geringsten, wenn der Abstand des Nagels von der Bildunterkante am größten ist. Dieser ergibt sich als Summe aus der Höhe des entsprechenden Bildes und der Höhe im gleichschenkligen Dreieck, dessen Grundlinie die Breite des entsprechenden Bildes ist, während die Schenkel die je 1 m langen Hälften des Fadens sind. Da die Bilder nur entweder 120 cm oder 160 cm breit sind, kommen als Lösung nur (**A**) und (**D**) in Frage.

Im ersten Fall ist die Höhe (in m) vom Nagel bis zur oberen Bildkante nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{1 - (0{,}6)^2} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, im zweiten Fall $\sqrt{1 - (0{,}8)^2} = 0{,}6$. Nach Addition der jeweiligen Höhe des Bildes erhalten wir für (**A**) $0{,}8 + 0{,}9 = 1{,}7$, und für (**D**) $0{,}6 + 1 = 1{,}6$, woraus folgt, dass (**A**) die Lösung ist.

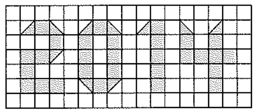
17. In einer WG leben 6 Mädchen. Die Wohnung hat 2 Bäder, die täglich vor dem Frühstück ab 7:00 Uhr von den Mädchen – stets einzeln – genutzt werden. Die Mädchen wollen an jedem Morgen gemeinsam frühstücken. Also haben sie gestoppt, wie lange jede von ihnen im Bad braucht, um durch eine geschickte Aufteilung auf die beiden Bäder möglichst frühzeitig beim Frühstück zu sitzen. Sie brauchen 7, 8, 13, 14, 15 bzw. 21 Minuten. Wann können sie sich frühestens alle am Frühstückstisch treffen?

(**A**) um 7:39 Uhr (**B**) um 7:40 Uhr (**C**) um 7:41 Uhr (**D**) um 7:42 Uhr (**E**) um 7:43 Uhr

Lösung: Die 6 Mädchen brauchen insgesamt $7 + 8 + 13 + 14 + 15 + 21 = 78$ Minuten im Bad. Ideal wäre es also, wenn sie die Einteilung so treffen könnten, dass sie $78 : 2 = 39$ Minuten im Bad brauchen. Da eines der Mädchen 21 Minuten braucht, suchen wir also eine Kombination der anderen Zeiten, die $39 - 21 = 18$ Minuten möglichst nahe kommen. Die Kombination, die 18 Minuten am nächsten kommt, ist $7 + 13 = 20$ Minuten. Das Frühstück kann wegen $21 + 7 + 13 = 41$ frühestens um 7:41 Uhr beginnen. Die Mädchen im anderen Bad brauchen nur $8 + 14 + 15 = 37$ Minuten.

Eine ähnliches Problem wurde in Aufgabe 19 in Klassenstufe 7/8 gestellt.

Wie viel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche macht die graue Fläche der Jahreszahl 2014 aus?

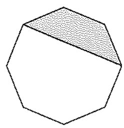


18. Für ein Projekt in Statistik haben wir in meinem Heimatdorf die erwachsenen Frauen, erwachsenen Männer und Kinder (0 bis 18 Jahre) gezählt. Das Verhältnis „Männerzahl zu Frauenzahl" beträgt 2 : 3, das Verhältnis „Frauenzahl zu Kinderzahl" beträgt 8 : 1. Was ist dann das Verhältnis „Erwachsenenzahl zu Kinderzahl"?

(**A**) 5 : 1 (**B**) 10 : 3 (**C**) 13 : 1 (**D**) 12 : 1 (**E**) 40 : 3

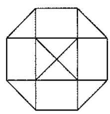
Lösung: Wir bezeichnen die Zahl der Männer mit m, die der Frauen mit f und die der Kinder mit k. Dann gilt $\frac{m}{f} = \frac{2}{3}$, also $m = \frac{2}{3}f$. Folglich ist die Gesamtzahl der Erwachsenen $m + f = \frac{5}{3}f$. Da das Verhältnis Frauen zu Kindern $\frac{f}{k} = \frac{8}{1}$ ist, ergibt sich $\frac{m+f}{k} = \frac{\frac{5}{3}f}{k} = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$.

19. Die Abbildung rechts zeigt ein regelmäßiges Achteck. Der graue Teil des Achtecks hat einen Flächeninhalt von $3\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt (in cm^2) hat das Achteck?



(**A**) $8 + 4\sqrt{2}$ (**B**) 9 (**C**) $8\sqrt{2}$ (**D**) 12 (**E**) 14

Lösung: Die Achteckfläche lässt sich gut in der abgebildeten Weise in 4 kongruente Rechtecke und 8 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Die graue Fläche besteht aus 2 solchen Dreiecken und einem solchen Rechteck. Die Fläche des Achtecks ist folglich 4-mal so groß wie die graue Fläche. Der Flächeninhalt des Achtecks beträgt $12\,\text{cm}^2$.



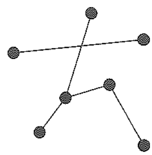
20. In $J \cdot O \cdot (D+E+L+N) = 33$ sind die 6 Buchstaben so durch 6 verschiedene ganze Zahlen von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Gleichung korrekt ist. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 30 (**D**) 48 (**E**) 60

Lösung: Da das Produkt 33 gleich $3 \cdot 11$ ist, 33 also nur die Teiler 1, 3, 11 und 33 hat, kommen für die Faktoren J, O und $(D+E+L+N)$ nur die Zahlen 1, 3, 11 und 33 in Frage. Wegen der Forderung, dass alle Zahlen verschieden sein müssen, gibt es dabei für die beiden einstelligen Zahlen J und O nur die Möglichkeiten $J = 1$ und $O = 3$ oder $J = 3$ und $O = 1$. Die Summe $D+E+L+N$ kann demzufolge nur gleich 11 sein.

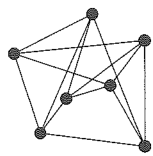
Da 1 und 3 nicht mehr zur Verfügung stehen, kommen für D, E, L, N nur $0, 2, 4, 5$ (in irgendeiner Reihenfolge) in Frage, denn $0 + 2 + 4 + 5 = 11$. Da jeder der Buchstaben jeden dieser Werte annehmen kann, gibt es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$ Möglichkeiten für die 11. Dies ist mit 2 zu multiplizieren, da ja J und O, wie bereits erwähnt, für 1 und 3 getauscht werden können. Insgesamt sind das 48 Möglichkeiten.

21. Kaan möchte zu den 5 abgebildeten Verbindungsstrecken so viele hinzufügen, dass dann von jedem der 7 Punkte dieselbe Zahl von Verbindungsstrecken ausgeht. Wie viele Strecken muss er dazu mindestens hinzufügen?



(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 16

Lösung: Wenn mit p die Anzahl der Punkte und mit s die Anzahl der Strecken, die von jedem Punkt ausgehen, bezeichnet ist, so gilt für die Gesamtzahl G der Strecken: $G = \frac{p \cdot s}{2}$. Da Kaan 7 Punkte hat, muss die Zahl der Strecken, die von jedem Punkt ausgehen, also eine gerade Zahl sein, d. h. in unserem Fall, dass sie mindestens 4 sein muss. Die Gesamtzahl der Strecken würde hier $G = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ betragen. Die nebenstehende Zeichnung zeigt, dass sich 14 Strecken in der gewünschten Weise finden lassen. Also müssen zu den 5 Verbindungsstrecken noch 9 hinzugefügt werden.



Eine ähnliche Aufgabe ist Aufgabe 17 in Klassenstufe 7/8.

22. Katharina probiert ihr neues Smartphone aus. Sie hat eben festgestellt, dass sie auf ihrem 4 km langen Spaziergang mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h gelaufen ist. Sie beschließt, ab jetzt ein Stück mit 8 km/h zu joggen und fragt sich, wie lange sie so joggen muss, damit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit insgesamt 5 km/h beträgt. Das sind

(**A**) 15 min (**B**) 20 min (**C**) 30 min (**D**) 35 min (**E**) 40 min

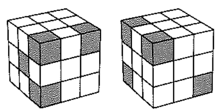
Lösung: Katharina war 1 h lang spazieren. Wir bezeichnen die Zeit, die Katharina joggen will, mit t h. Dann ist der Weg, den sie mit 8 km/h in einer Zeit von t h zurücklegt, gerade $8t$ km lang. Für die angestrebte Durchschnittsgeschwindigkeit von 5 km/h gilt dann die folgende Gleichung: $\frac{4\,\text{km} + 8t\,\text{km}}{1\,\text{h} + t\,\text{h}} = 5\,\text{km/h}$. Lösen wir nach t h auf, erhalten wir $t\,\text{h} = \frac{1}{3}\,\text{h}$. Also muss Katharina 20 Minuten joggen.

23. Für die positiven ganzen Zahlen p, q und r gilt $p + \dfrac{1}{q + \frac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$. Dann gilt $p \cdot q \cdot r =$

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 18 (**D**) 36 (**E**) 42

Lösung: Da q und r positive ganze Zahlen sind, ist $\dfrac{1}{q + \frac{1}{r}} < 1$. Daraus folgt wegen $\dfrac{25}{19} = 1 + \dfrac{6}{19}$, dass $p = 1$ und $\dfrac{1}{q + \frac{1}{r}} = \dfrac{6}{19}$ ist. Damit ist $q + \dfrac{1}{r} = \dfrac{19}{6} = 3 + \dfrac{1}{6}$. Wir finden also $q = 3$ und $r = 6$, womit $pqr = 18$ folgt.

24. Rechts ist zweimal derselbe Würfel abgebildet, jedoch aus unterschiedlichen Blickrichtungen. Er besteht aus 27 gleich großen Würfeln, von denen einige grau sind. Welche maximale Anzahl von Würfeln kann grau sein?



(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wie man sich überlegen kann, kann die Ansicht im rechten Bild nur entstehen, wenn der Würfel im linken Bild 90 Grad nach links gedreht wird. Wir zählen alle weißen Würfel, die wir sehen. Die Differenz zu $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ist die maximale Anzahl der grauen Würfel, denn alle, die wir nicht sehen können, könnten grau sein. Auf dem linken Bild sind 15 weiße Würfel zu sehen. Einige davon finden wir auch im rechten Bild wieder. Es kommen jedoch sicher noch 3 weiße Würfel dazu. Höchstens 9 graue Würfel können es sein.

Ähnlich zu dieser Aufgabe ist Aufgabe 15 in Klassenstufe 11–13.

Wie lauten die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in den folgenden Multiplikationsaufgaben? Es gibt mehrere Möglichkeiten, wer findet alle?

★5 · ★ = 3★5 ★2,2★ : ★,★★ = 11

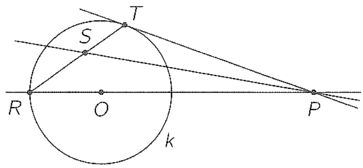
25. Lasse hat auf einen Zettel mehrere verschiedene natürliche Zahlen geschrieben. Keine dieser Zahlen ist größer als 100. Das Produkt der Zahlen auf Lasses Zettel ist nicht durch 18 teilbar. Wie viele Zahlen kann Lasse *höchstens* aufgeschrieben haben?

(**A**) 57 (**B**) 65 (**C**) 68 (**D**) 72 (**E**) 90

Lösung: Damit eine Zahl nicht durch 18 teilbar ist, darf sie nicht gleichzeitig durch 2 und zweimal durch 3, also durch 9 teilbar sein. Also dürfen im Produkt aller auszuwählenden Zahlen von den drei Faktoren 2, 3 und 3 höchstens 2 enthalten sein. Alle Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, sind mehr als alle ungeraden Zahlen, also wählen wir alle nicht durch 3 teilbaren Zahlen, die kleiner oder gleich 100 sind – das sind 67 – und fügen, da 2 als Faktor dann bereits vertreten ist, noch die Zahl 3 hinzu. Insgesamt sind es dann 68 Zahlen, deren Produkt nicht durch 18 teilbar ist.

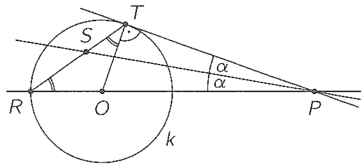
In Klasse 11–13 wurde ein ähnliches Problem in Aufgabe 26 gestellt.

26. Gegeben ist ein Kreis k und ein Punkt P außerhalb von k. T ist der Berührungspunkt der Tangente PT an den Kreis k. Die Gerade PR verläuft durch den Mittelpunkt O von k. Die Winkelhalbierende von $\measuredangle TPR$ schneidet RT in S. Wie groß ist $\measuredangle PST$?



(A) 37,5° **(B)** 45° **(C)** 54°
(D) 60° **(E)** Es hängt von der Lage von P ab.

Lösung: Wir bezeichnen $\measuredangle TPS = \measuredangle SPR = \alpha$. Wir zeichnen den Berührungsradius OT ein, der senkrecht auf der Tangente PT steht. Der Winkel $\measuredangle TOR$ ist als Außenwinkel des Dreiecks OPT gleich $90° + 2\alpha$. Das Dreieck ROT ist, da RO und OT Radien sind, gleichschenklig. Folglich ist $\measuredangle RTO = \frac{1}{2}(180° - (90° + 2\alpha)) = 45° - \alpha$.



Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, erhalten wir für den gesuchten Winkel $\measuredangle PST$ im Dreieck SPT, dass $\measuredangle PST = 180° - (90° + (45° - \alpha)) - \alpha = 45°$ gilt.

27. Je drei Eckpunkte eines Würfels bilden ein Dreieck. Wir zählen davon alle die Dreiecke, bei denen nicht alle drei Ecken auf derselben Würfelseite liegen. Wie viele Dreiecke sind das?

(A) 16 **(B)** 48 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 32

Lösung: Die 8 Eckpunkte des Würfels bilden $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ Dreiecke. Davon gehören zu jeder der 6 Würfelseiten 4 Dreiecke. Folglich gibt es $56 - 6 \cdot 4 = 32$ Dreiecke, die von Würfelecken gebildet werden, jedoch nicht auf derselben Würfelseite liegen.

28. Seit einiger Zeit beobachten Biologen zwei Arten einer nur auf einer Insel vorkommenden Froschgattung, eine blaue und eine grüne. Durch eine langanhaltende Dürre sank die Zahl der blauen Frösche um 60 %. Die Zahl der grünen stieg hingegen gleichzeitig um 60 %. Bemerkenswerterweise ist das Verhältnis der Anzahl der blauen Frösche zur Anzahl der grünen Frösche vor der Dürre gleich dem Verhältnis der Anzahl der grünen Frösche zur Anzahl der blauen Frösche danach. Um welchen Prozentsatz hat sich die Gesamtzahl der Frösche verändert?

(A) um 0 % **(B)** um 20 % **(C)** um 30 % **(D)** um 40 % **(E)** um 50 %

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der blauen Frösche vor der Dürre mit b_1, die Anzahl danach mit b_2, analog die Anzahl der grünen Frösche vor der Dürre mit g_1, danach mit g_2. Dann wissen wir, dass $b_2 = \frac{40}{100}b_1 = \frac{2}{5}b_1$ und $g_2 = \frac{160}{100}g_1 = \frac{8}{5}g_1$ ist. Außerdem ist $\frac{b_1}{g_1} = \frac{g_2}{b_2} = \frac{\frac{8}{5}g_1}{\frac{2}{5}b_1} = 4\frac{g_1}{b_1}$.

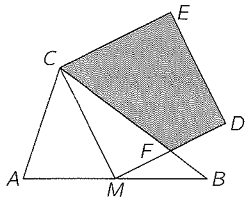
Daraus errechnen wir $b_1^2 = 4g_1^2$, woraus, da ja b_1 und g_1 positiv sind, $b_1 = 2g_1$ folgt. Damit gilt:
$\frac{b_2 + g_2}{b_1 + g_1} = \frac{\frac{2}{5}b_1 + \frac{8}{5}g_1}{b_1 + g_1} = \frac{\frac{4}{5}g_1 + \frac{8}{5}g_1}{2g_1 + g_1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{12g_1}{3g_1} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100}$. Die Gesamtzahl ist um 20 % gesunken.

29. Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 lassen sich insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ verschiedene 7-stellige Zahlen bilden, wenn dabei jede Ziffer stets genau einmal verwendet wird. Ich stelle mir diese Zahlen mit der kleinsten beginnend der Größe nach geordnet vor. Welche Zahl steht an der 2520. Stelle?

(**A**) 3765421 (**B**) 4123567 (**C**) 3217654 (**D**) 4321765 (**E**) 4376521

Lösung: In der Mitte der aufsteigenden Folge der 5040 Zahlen befinden sich, da 5040 eine gerade Zahl ist, zwei Zahlen. Gesucht ist die kleinere der beiden mittleren Zahlen in der Reihe. Von den Zahlen, die mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bzw. 7 beginnen, gibt es jeweils gleich viele, nämlich $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5040}{7}$. Da die Zahlen in aufsteigender Größe geordnet sind, beginnt die gesuchte Zahl mit 4. Von den Zahlen, die mit 41, 42, 43, 45, 46 bzw. 47 beginnen, gibt es ebenso jeweils gleich viele. Die gesuchte Zahl ist folglich die größte Zahl, die mit 43 beginnt. Das ist 4376521.

30. Das Dreieck ABC hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 8$ und $\overline{AC} = 6$. M ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Über $\overline{CM}$ errichten wir das Quadrat $CMDE$, sodass die Strecke $\overline{MD}$ die Seite $\overline{BC}$ schneidet. Der Schnittpunkt ist mit F bezeichnet. (*Abb. nicht maßstabsgerecht*) Welchen Flächeninhalt hat das Viereck $CFDE$?



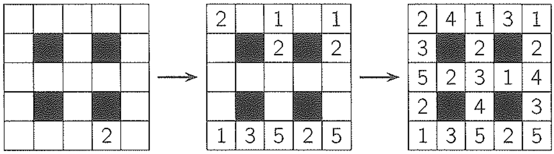
(**A**) $\frac{124}{8}$ (**B**) $\frac{125}{8}$ (**C**) $\frac{126}{8}$ (**D**) $\frac{127}{8}$ (**E**) $\frac{128}{8}$

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass $10^2 = 8^2 + 6^2$ ist, folglich ist das Dreieck ABC rechtwinklig (wer weiß, dass $(3, 4, 5)$ ein pythagoräisches Tripel ist und sieht, dass $10 = 2 \cdot 5$, $8 = 2 \cdot 4$ und $6 = 2 \cdot 3$ ist, brauchte nicht zu rechnen). Damit ist M Mittelpunkt des Thaleskreises von $\triangle ABC$ und folglich $|\overline{AM}| = |\overline{BM}| = |\overline{MC}| = 5$, woraus die Gleichschenkligkeit von $\triangle MBC$ folgt. Also ist $\measuredangle CBM = \measuredangle MCB$. Damit sind $\triangle ABC$ und $\triangle FCM$ einander ähnlich, womit wir die Länge von $\overline{MF}$ bestimmen können: $\frac{|\overline{MF}|}{6} = \frac{5}{8}$, also $|\overline{MF}| = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$. Folglich beträgt der Flächeninhalt der grauen Fläche $5^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}$.

Kopfnüsse II: Zahlenkreuze

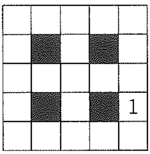
In jedes leere Kästchen ist eine Ziffer so einzutragen, dass im vollständig gefüllten Gitter alle danebenstehenden Zahlen entweder von oben nach unten oder von links nach rechts gelesen werden können. Hier ist ein Beispiel:

12345
12435
13525
23521
24131
52314

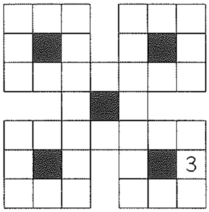


Wer füllt die Zahlenkreuze richtig aus?

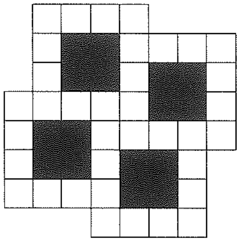
32451
35124
41523
42315
51432
53214



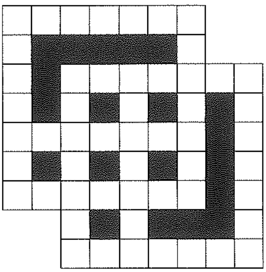
121
123
132
213
221
232
321
322
2123131
2312321
3132123
3213213



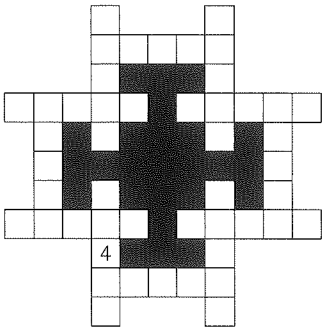
1324
1432
2143
2341
3412
4123
4231
4312
25431
32451
41325
51234



1212321
1313231
1321213
1321232
2312123
2313231
3123121
3132131
3212321
3231213



11111
12345
21334
26262
32646
36663
46434
53461
54351
61354
62154
65463



Zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 sollen Pluszeichen so gesetzt werden, dass sich als Summe 99 ergibt. Das klappt auf zwei verschiedene Weisen.

Wer findet die beiden Möglichkeiten? Lässt sich auch die Summe 100 erreichen?

Faszination Pi

Die Kreiszahl π ist eine der wichtigsten und interessantesten mathematischen Konstanten. Sie ist geometrisch als Verhältnis des Umfangs u eines Kreises zu seinem Durchmesser $d = 2r$ bestimmt ($\pi = u/d$), bzw. auch als Verhältnis des Flächeninhaltes A eines Kreises zum Quadrat über seinem Radius r ($\pi = A/r^2$). Im Laufe der Geschichte – beginnend bei den Kulturvölkern des Altertums – wurde der Zahlenwert von π immer genauer bestimmt. 1767 bewies Johann Heinrich Lambert (1728-1777), dass π eine irrationale Zahl ist, und 1882 bewies Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939), dessen Todestag sich am 6. März dieses Jahres zum 75. Mal jährte, dass π auch eine transzendente (nicht algebraische) Zahl ist. Infolge der Irrationalität kann man praktisch niemals mit dem exakten Wert von π rechnen, sondern immer nur mit einem rationalen Näherungswert, etwa $\pi \approx 3{,}14$. Inzwischen wurde π mittels Computern bis auf mehr als 10 Billionen Dezimalen genau berechnet.

Im folgenden Kreuzzahlrätsel ergeben sich bei richtiger Lösung in der schattierten Mittelzeile die ersten 10 Nachkommastellen π:

1	2	3	4	5		6	7	8	9	10
,					11					
		12					13			

Waagerecht:

1) Fünferpotenz mit der Quersumme 23, 6) Fermatsche Primzahl (eine Primzahl der Form $2^{2^n} - 1$), 12) kleinste zweistellige Primzahl, 13) ein Vielfaches von 19

Senkrecht:

1) Primzahl zwischen 700 und 750 mit der Quersumme 13, 2) Quadratzahl, 3) durch 3 und 47 teilbare natürliche Zahl, 4) Primzahl mit dem Querprodukt 2, 5) das Fünffache von 12 waagerecht, 6) eine um 2 verminderte Quadratzahl, 7) Primzahl zwischen 480 und 580 mit der Quersumme 20, 8) natürliche Zahl mit gleichen Ziffern, 9) durch 11 teilbare natürliche Zahl, 10) das 47-fache einer Zweierpotenz, 11) der Vorgänger von 100

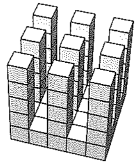
Kontrollmöglichkeiten:

Bei richtiger Auflösung des Rätsels ergeben die Ziffern in den Kästchen 2-3-4-2 eine vollkommene natürliche Zahl (d. h., sie ist gleich der Summe ihrer echten natürlichen Teiler einschließlich der 1), in den Kästchen 3-4-10 eine Mersennesche Primzahl (d. h. eine Primzahl der Form $2^p - 1$, wobei p eine Primzahl ist) und in den Kästchen 4-5-1 eine Fermatsche Primzahl (d. h. eine Primzahl der Form $2^{2^n} - 1$).

Welche der folgenden Zahlen ist die beste Approximation für π ?

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \qquad \frac{22}{7} \qquad \sqrt[3]{31} \qquad \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} \qquad \frac{355}{113} \qquad \sqrt{7+\sqrt{6+\sqrt{5}}}$$

Klassenstufen 11 bis 13



1. Aus einem $5 \times 5 \times 5$-Würfel wurden einige kleine Würfel entfernt. Übrig geblieben sind die unterste Würfelschicht und mehrere gleich hohe Säulen (s. Abb.). Wie viele kleine Würfel wurden entfernt?

(**A**) 60 (**B**) 64 (**C**) 68 (**D**) 72 (**E**) 80

Lösung: Es sind 9 von 25 Säulen stehengeblieben. Also wurden 16 Säulen zu je 4 Würfeln entfernt. Das sind insgesamt $16 \cdot 4 = 64$ Würfel.

2. $\dfrac{2^8 - 2^7}{2^6 - 2^5} =$

(**A**) 2^4 (**B**) 2^3 (**C**) 2^2 (**D**) 2^1 (**E**) 2^0

Lösung: Es ist $\dfrac{2^8 - 2^7}{2^6 - 2^5} = \dfrac{2 \cdot 2^7 - 2^7}{2 \cdot 2^5 - 2^5} = \dfrac{2^7}{2^5} = 2^{7-5} = 2^2$.

3. Carla, Emilie und Lilia haben alle drei heute Geburtstag. Albert addiert das Alter der drei und erhält 55. Er freut sich schon auf die Feier, wenn die Summe des Alters der drei das nächste Mal eine Zahl aus lauter gleichen Ziffern ist. Wie alt werden die drei dann zusammen sein?

(**A**) 66 (**B**) 77 (**C**) 88 (**D**) 99 (**E**) 111

Lösung: Jedes Jahr erhöht sich die Summe des Alters der drei um 3. Also ist die Differenz der Summe des Alters der drei zu 55 stets durch 3 teilbar. Von den angebotenen Zahlen trifft das nur auf 88 zu.

4. In die vier leeren Felder der Tabelle sollen die vier Zahlen 5, 6, 7 und 8 so eingetragen werden, dass die Summe in jeder der vier Spalten gerade ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

1	2	3	4

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 8 (**D**) 12 (**E**) 24

Lösung: Die 5 und die 7 müssen unter einer ungeraden und die 6 und die 8 müssen unter einer geraden Zahl stehen. Dafür gibt es 4 mögliche Kombinationen: 5678, 5876, 7658, 7856.

Unter 2014 natürlichen Zahlen lassen sich stets einige finden, deren Summe durch 2014 teilbar ist.

Ist das richtig?

5. Volker hat vier Freunde, die wie er Brieftauben besitzen. Sie schreiben sich häufig. Heute sind 8 Tauben von seinen Freunden in Volkers Taubenschlag angekommen. Nur eine der folgenden Aussagen ist *mit Sicherheit* richtig. Welche?

(**A**) Jeder der vier Freunde hat 2 Tauben geschickt.
(**B**) Jeder der vier Freunde hat mindestens eine Taube geschickt.
(**C**) Keiner der vier Freunde hat 8 Tauben geschickt.
(**D**) Einer der vier Freunde hat mindestens 2 Tauben geschickt.
(**E**) Zwei der Tauben wurden von verschiedenen Freunden geschickt.

Lösung: Die Aussagen (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) *können* zutreffen, sind jedoch nicht *mit Sicherheit* wahr. Es könnten ja alle 8 Tauben von *einem* Freund geschickt worden sein. Aussage (**D**) ist mit Sicherheit richtig, sonst wären bei Volker höchstens 4 Tauben angekommen.

6. In einem Koordinatensystem ist ein Quadrat gezeichnet, eine Diagonale liegt auf der y-Achse. Ein Eckpunkt hat die Koordinaten $(0; -5)$, ein anderer Eckpunkt hat die Koordinaten $(0; 1)$. Wie lauten die Koordinaten eines weiteren Eckpunkts des Quadrats?

(**A**) $(4; 0)$ (**B**) $(6; -2)$ (**C**) $(5; 3)$ (**D**) $(-1; -3)$ (**E**) $(-3; -2)$

Lösung: Die anderen beiden Eckpunkte des Quadrats haben die Koordinaten $(-3; -2)$ und $(3; -2)$, vergleiche Lösung zu Aufgabe 7 in Klassenstufe 9/10. Der gesuchte Punkt ist $(-3; -2)$.

7. Für reelle Zahlen a, b, c, für die $a = 18-b$ und $b = 10-c$ gilt, ist nur eine der folgenden Ungleichungen *mit Sicherheit* erfüllt. Welche?

(**A**) $a > c$ (**B**) $a > b$ (**C**) $b > c$ (**D**) $c > b$ (**E**) $c > a$

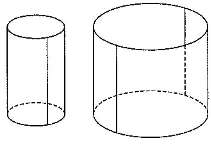
Lösung: Wir ersetzen b in der ersten Gleichung, $a = 18 - b = 18 - (10 - c) = 8 + c$, woraus sofort $a > c$ folgt. Dass die anderen Ungleichungen nicht gelten müssen, zeigen die Belegungen $a = 0, b = 18, c = -8$ bzw. $a = 18, b = 0, c = 10$.

8. Wie viele Stellen hat die Zahl $(2^3)^4 \cdot (5^4)^3$?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Es ist $(2^3)^4 \cdot (5^4)^3 = 2^{12} \cdot 5^{12} = 10^{12}$. Das ist eine Eins mit 12 Nullen, also eine 13-stellige Zahl.

9. Ich habe zwei Zylinder gleicher Höhe. Mit einem quadratischen Stück Papier kann ich den Mantel des kleinen Zylinders vollständig und ohne Überlappungen bekleben. Für den großen Zylinder brauche ich genau zwei solche quadratische Stücke Papier. In welchem Verhältnis steht das Volumen des großen Zylinders zum Volumen des kleinen Zylinders?



(**A**) $2 : 1$ (**B**) $3 : 1$ (**C**) $\pi : 1$ (**D**) $4 : 1$ (**E**) $2\pi : 1$

Lösung: Da der Umfang der Grundfläche des großen Zylinders doppelt so groß ist wie der des kleinen, ist auch der Radius doppelt so groß. Folglich ist der Flächeninhalt der Grundfläche des großen Zylinders 4-mal so groß wie der Flächeninhalt der Grundfläche des kleinen. Da beide Zylinder dieselbe Höhe haben, ist das Volumen des großen das Vierfache des kleinen.

10. In der aktuellen Jahreszahl 2014 ist die letzte Ziffer größer als die Summe der anderen drei Ziffern und alle Ziffern sind verschieden. Wann war dies das letzte Mal der Fall?

(**A**) vor 215 Jahren (**B**) vor 305 Jahren (**C**) vor 395 Jahren
(**D**) vor 405 Jahren (**E**) vor 485 Jahren

Lösung: Wie man sich leicht überlegen kann, ist 2014 in diesem Jahrhundert die erste Jahreszahl mit dieser Eigenschaft. Damit die letzte Ziffer größer als die Summe der anderen drei Ziffern ist, darf die Summe der ersten drei Ziffern höchstens 8 sein. Und diese Summe muss möglichst groß, also gleich 8 sein, da wir nach der Jahreszahl mit dieser Eigenschaft suchen, die der 2014 am nächsten ist. Die gesuchte Jahreszahl ist 1709, das war vor 305 Jahren.

11. Charles, Steven und Robert haben zusammen 48 DVDs zu Hause. Charles und Robert besitzen zusammen doppelt so viele DVDs wie Steven. Und Steven besitzt doppelt so viele wie Charles. Wie viele DVDs besitzt Robert?

(**A**) 16 (**B**) 20 (**C**) 24 (**D**) 30 (**E**) 32

Lösung: Da Charles und Robert doppelt so viele DVDs wie Steven besitzen, hat Steven ein Drittel der DVDs, also 16. Charles hat halb so viele DVDs wie Steven, also 8, womit sich $48 - 16 - 8 = 24$ DVDs für Robert ergeben.

12. Vier Mannschaften bestreiten ein Floorball-Turnier. Jede tritt gegen jede andere genau einmal an. Der Sieger eines Spiels erhält 3 Punkte, der Verlierer keinen und bei einem Unentschieden erhalten beide Mannschaften je 1 Punkt. Zum Turnierende hat eine Mannschaft 7 Punkte, und zwei Mannschaften haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat die vierte Mannschaft erreicht?

(**A**) 5 (**B**) 3 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

Lösung: Jede Mannschaft hat 3 Spiele bestritten. Um in 3 Spielen 7 Punkte zu erreichen, musste die Mannschaft, die 7 Punkten erreicht hat, 2-mal gewinnen und 1-mal unentschieden spielen. Analog mussten die beiden Mannschaften mit 4 Punkten je 1-mal gewinnen, 1-mal verlieren und 1-mal unentschieden spielen. Da es insgesamt genauso viele Siege wie Niederlagen gibt, hat die 4. Mannschaft 2-mal verloren und in ihrem dritten Spiel unentschieden gespielt – also im Turnier einen Punkt erspielt.

13. Ein Quader hat die Kantenlängen a, b und c, wobei $1 < a < b < c$ gilt. Ich stelle mir einen zweiten Quader vor, bei dem eine der drei Kantenlängen a, b oder c um 1 verkürzt ist. In welchem Fall ist das Volumen dieses Quaders am kleinsten?

(**A**) wenn a verkürzt ist (**B**) wenn b verkürzt ist
(**C**) wenn c verkürzt ist (**D**) Es hängt von den Maßen von a, b, c ab.
(**E**) Die Volumina bei (**A**), (**B**) und (**C**) sind alle gleich groß.

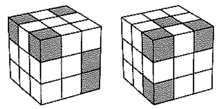
Lösung: Der zweite Quader ist um einen Quader kleiner als der erste Quader. Bei (**A**) hat dieser Quader die Größe $1 \times b \times c$, bei (**B**) $a \times 1 \times c$ und bei (**C**) $a \times b \times 1$. Die zugehörigen Volumina sind bc, ac und ab, von denen bc wegen $a < b < c$ am größten ist. Also ist das Volumen des zweiten Quaders im Fall (**A**) am kleinsten.

14. Sechs Wochen sind genau $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ Sekunden. Wie groß ist n?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Eine Woche besteht aus 7 Tagen, ein Tag aus 24 Stunden, eine Stunde aus 60 Minuten und eine Minute aus 60 Sekunden. Folglich sind 6 Wochen $= 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ Sekunden $= 6 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 8) \cdot (10 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3)$ Sekunden $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ Sekunden.

15. Rechts ist zweimal derselbe Würfel abgebildet, jedoch aus unterschiedlichen Blickrichtungen. Er besteht aus 27 gleich großen Würfeln, von denen einige grau sind. Welche maximale Anzahl von Würfeln kann grau sein?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wie man sich überlegen kann, kann die Ansicht im rechten Bild nur entstehen, wenn der Würfel im linken Bild einmal nach rechts vorne gerollt wird. Insgesamt sind 17 weiße Würfel zu sehen. Die maximale Anzahl an grauen Würfeln ist dann $27 - 17 = 10$.

Zu dieser Aufgabe ist Aufgabe 24 in Klassenstufe 9/10 ähnlich.

16. Um 15 Uhr ist Luise bei Sonja verabredet. Luise radelt zügig und schafft in 2/3 der geplanten Zeit bereits 3/4 der Strecke. Danach fährt sie gemütlicher weiter und kommt wie geplant um 15 Uhr bei Sonja an. In welchem Verhältnis steht Luises Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem ersten Teil der Strecke zu ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem zweiten Teil der Strecke?

(**A**) 5 : 4 (**B**) 4 : 3 (**C**) 3 : 2 (**D**) 2 : 1 (**E**) 3 : 1

Lösung: Im ersten Teil fährt Luise 3/4 der Strecke in 2/3 der geplanten Zeit. Im zweiten Teil fährt sie folglich 1/4 der Strecke in 1/3 der geplanten Zeit. Das gesuchte Verhältnis ist $\frac{3/4}{2/3} : \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{2} : 1 = 3 : 2$.

17. Von zwei Quadraten ist bekannt, dass sich ihre Flächeninhalte um $13\,\text{cm}^2$ unterscheiden. Um wie viel unterscheiden sich ihre Seitenlängen?

(**A**) um 3 cm (**B**) um $\frac{10}{3}$ cm (**C**) um $\sqrt{13}$ cm

(**D**) um 13 cm (**E**) Es gibt unendlich viele Möglichkeiten.

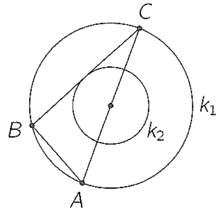
Lösung: Um die Lösung übersichtlich zu halten, verzichten wir beim Rechnen auf die Maßeinheiten. Zu jedem Quadrat mit Seitenlänge a können wir ein größeres Quadrat mit Seitenlänge b finden, dessen Flächeninhalt um 13 größer ist. Die Differenz $x = b - a$ nähert sich $\sqrt{13}$, je kleiner a wird. Je größer a wird, desto geringer wird x. Der Unterschied der Seitenlängen kann jeden Wert zwischen 0 und $\sqrt{13}$ annehmen, das sind unendlich viele Möglichkeiten.

Der Vollständigkeit halber berechnen wir zu gegebenem x, $0 < x < \sqrt{13}$, die zugehörigen Quadrate. Wir benutzen, dass $13 = b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) = (b + a)x$ gilt, und erhalten die Seitenlängen: $b = \frac{(b+a)+(b-a)}{2} = \frac{(13/x)+x}{2}$, $a = \frac{(b+a)-(b-a)}{2} = \frac{(13/x)-x}{2}$.

18. Ein Frischkäse hat laut Etikett einen Fettgehalt von 24 %, während der Fettgehalt in Trockenmasse 64 % beträgt. Wie viel Prozent Wasser sind in diesem Käse?

(**A**) 88 % (**B**) 62,5 % (**C**) 49 % (**D**) 42 % (**E**) 37,5 %

Lösung: Der Frischkäse besteht aus einem Trockenanteil und Wasser. Wir bezeichnen mit f die Fettmasse, mit w die Wassermasse und mit t die Trockenmasse. Dann wissen wir aus der Aufgabenstellung, dass $\frac{f}{w+t} = \frac{24}{100}$ und $\frac{f}{t} = \frac{64}{100}$. Daraus errechnet sich der Wasseranteil im Frischkäse:
$\frac{w}{w+t} = \frac{w+t-t}{w+t} = 1 - \frac{t}{w+t} = 1 - \frac{t}{f} \cdot \frac{f}{w+t} = 1 - \frac{24}{64} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$.



19. Die Kreise k_1 und k_2 haben denselben Mittelpunkt. Der Radius von k_1 ist dreimal so lang wie der Radius von k_2 (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). $\overline{AC}$ ist ein Durchmesser von k_1, die Sehne $\overline{BC}$ ist gleichzeitig Tangente an k_2. Es ist $|\overline{AB}| = 12$. Wie lang ist der Radius von k_1?

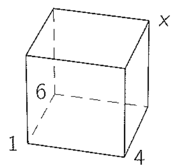
(**A**) 15 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 24 (**E**) 27

Lösung: Sei M der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise k_1 und k_2 und D der Berührungspunkt von BC an k_2. Dann ist nach dem Satz des Thales $\measuredangle ABC = 90°$ und, da BC eine Tangente ist, ist auch $\measuredangle MDC = 90°$. Also sind AB und MD zueinander parallel und nach dem Strahlensatz gilt folglich $\frac{|\overline{CM}|}{|\overline{MD}|} = \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{AB}|}$. Dabei ist $|\overline{CM}| = r_1$ (der Radius von k_1), $|\overline{CA}| = 2r_1$, $|\overline{MD}| = r_2 = \frac{r_1}{3}$ (der Radius von k_2) und $|\overline{AB}| = 12$. Durch Einsetzen ergibt sich $r_1 = 18$.

20. Was gilt *ganz sicher*, wenn für drei von 0 verschiedene reelle Zahlen a, b, c die beiden Zahlen $(-2)^3a^2b^{-1}c^2$ und $(-3)^2a^3b^5c^{-4}$ dasselbe Vorzeichen haben?

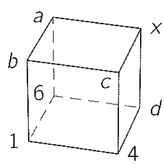
(**A**) $a > 0$ (**B**) $b > 0$ (**C**) $c > 0$ (**D**) $a < 0$ (**E**) $b < 0$

Lösung: Es ist $(-2)^3a^2b^{-1}c^2 = (2^3a^2b^{-2}c^2) \cdot (-b)$ und $(-3)^2a^3b^5c^{-4} = (3^2a^2b^4c^{-4}) \cdot (ab)$. Dabei sind sowohl $(2^3a^2b^{-2}c^2)$ als auch $(3^2a^2b^4c^{-4})$ unabhängig von der Wahl von a, b und c stets positiv. Also müssen $-b$ und ab dasselbe Vorzeichen haben und somit auch a und -1, d. h. $a < 0$.



21. Die 8 Ecken eines Würfels sollen so mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 markiert werden, dass die 6 Summen von den jeweils 4 zu einer Würfelseite gehörenden Zahlen gleich sind. Drei Ecken sind bereits markiert. Für welche Zahl steht x?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 8



Lösung: Da die Summe der Zahlen auf der Oberseite gleich der Summe der Zahlen auf der Vorderseite ist, folgt $a+x = 1+4 = 5$. Da die Summe der Zahlen auf der rechten Seite gleich der Summe der Zahlen auf der Unterseite ist, folgt $c+x = 1+6 = 7$. Da 1, 6 und 4 schon benutzt wurden, stehen an den Stellen a und x die Zahlen 2 und 3 <u>und</u> an den Stellen c und x die Zahlen 2 und 5. Folglich muss $x = 2$ sein.

22. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei natürliche Zahlen a, b, c anzugeben, für die $a > b > c > 1$ und $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ gilt?

(**A**) keine (**B**) genau eine (**C**) genau zwei (**D**) genau drei (**E**) unendlich viele

Lösung: Wenn $c \geq 3$ gilt, folgt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{c} \leq 1$. Also ist $c = 2$ und es muss $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$ gelten. Wenn $b \geq 4$ ist, gilt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{b} \leq \frac{1}{2}$. Also ist $b = 3$. Für sowohl $a = 4$ als auch $a = 5$ ist die geforderte Ungleichung erfüllt. Für alle $a \geq 6$ gilt dann $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$. Insgesamt gibt es also 2 Möglichkeiten.

23. Von 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen sind genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar. Wie groß ist die größte dieser Zahlen *mindestens*?

(**A**) 105 (**B**) 77 (**C**) 75 (**D**) 70 (**E**) 63

Lösung: Es sind mindestens $5 + 7 - 10 = 2$ der Zahlen durch 5 und durch 7, also durch 35 teilbar. Dann ist die größte der 10 Zahlen auf jeden Fall mindestens $2 \cdot 35 = 70$. Hier ist ein Beispiel mit 70 als größter Zahl: $5, 7, 10, 14, 15, 21, 28, 35, 42, 70$.

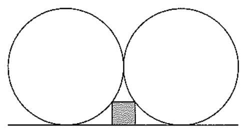
24. Prisca hat 22 Socken in ihrer Sockenschublade, nur blaue und weiße. Wenn sie 3 Socken zufällig herausnimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Socken weiß sind, gleich $\frac{1}{7}$. Wie viele weiße Socken sind in Priscas Sockenschublade?

(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 16 (**D**) 14 (**E**) 12

Lösung: Die Anzahl der weißen Socken bezeichnen wir mit w. Die Wahrscheinlichkeit, drei weiße Socken zu nehmen, ist $\frac{w}{22} \cdot \frac{w-1}{21} \cdot \frac{w-2}{20} = \frac{1}{7}$. Umgeformt ergibt sich $w(w-1)(w-2) = 22 \cdot 3 \cdot 20$. Mit scharfem Blick schreiben wir $22 \cdot 3 \cdot 20$ als Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen: $22 \cdot 3 \cdot 20 = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 = 12 \cdot 11 \cdot 10$. Prisca hat also 12 weiße Socken in ihrer Schublade.

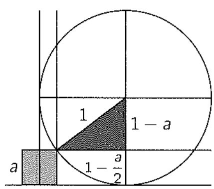
Die Lösung kann mit Hilfe der Lösungsvorschläge auch durch sinnvolles Probieren gefunden werden.

25. Die Abbildung zeigt zwei sich berührende Kreise mit Radius 1 und ein Quadrat, das die Kreise berührt. Eine Quadratseite liegt auf einer gemeinsamen Tangente der Kreise. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?



(**A**) $\frac{2}{5}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

Lösung: Wir bezeichnen die Seitenlänge des Quadrats mit a. Dann gilt in dem dunkelgrauen rechtwinkligen Dreieck nach dem Satz des Pythagoras $1^2 = (1-a)^2 + (1-a/2)^2$. Diese quadratische Gleichung hat die zwei Lösungen 2 und $\frac{2}{5}$. Da unser gesuchtes a zwischen 0 und 1 liegt, ist $\frac{2}{5}$ die Lösung.



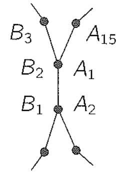
Die Lösung 2 gehört zu einem Quadrat, das ebenfalls auf einer gemeinsamen Tangente liegt, die beiden Kreise allerdings überlappt.

26. László möchte möglichst viele verschiedene natürliche Zahlen aufschreiben, die alle kleiner oder gleich 100 sind und deren Produkt *nicht* durch 54 teilbar ist. Wie viele Zahlen kann László höchstens aufschreiben?

(**A**) 54 (**B**) 62 (**C**) 67 (**D**) 69 (**E**) 81

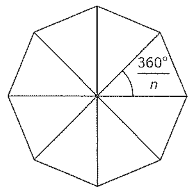
Lösung: Da $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ gilt, erreicht László die größte Anzahl, wenn er die 67 nicht durch 3 teilbaren Zahlen sowie zwei durch 3, aber nicht durch 9 teilbare Zahlen aufschreibt. Das sind insgesamt 69 Zahlen. Vergleiche Lösung zu Aufgabe 25 in Klassenstufe 9/10.

27. Ein regelmäßiges 15-Eck $A_1A_2\ldots A_{15}$ und ein regelmäßiges n-Eck $B_1B_2\ldots B_n$ haben beide die Seitenlänge 1 und die gemeinsame Seite $\overline{B_1B_2} = \overline{A_2A_1}$ (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Für welches n hat die Strecke $\overline{A_{15}B_3}$ die Länge 1?



(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Verbinden wir den Mittelpunkt eines regelmäßigen n-Ecks mit allen Eckpunkten, so entstehen n gleichschenklige Dreiecke. Der Winkel an der Spitze jedes solchen Dreiecks beträgt $\frac{360°}{n}$ und die Basiswinkel jeweils $90° - \frac{180°}{n}$. Jeder Innenwinkel des n-Ecks setzt sich aus zwei Basiswinkeln zusammen, ist also $180° - \frac{360°}{n}$ groß.



Wenn $\overline{A_{15}B_3}$ die Länge 1 hat, ist das Dreieck $A_{15}B_3A_1$ gleichseitig. Es gilt dann für den Vollwinkel bei A_1: $360° = \measuredangle B_3B_2B_1 + \measuredangle A_2A_1A_{15} + 60° = 180° - \frac{360°}{n} + 180° - \frac{360°}{15} + 60°$ und somit $n = 10$.

28. Wie viele Paare (m, n) positiver ganzer Zahlen gibt es, für die $\sqrt[n]{2014 + m}$ und $\sqrt[n]{1024} + 1$ dieselbe ganze Zahl ergeben?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Da $1024 = 2^{10}$ ist, muss, damit $\sqrt[n]{1024} = 2^{\frac{10}{n}}$ eine ganze Zahl wird, n ein Teiler von 10 sein – also 1, 2, 5 oder 10. Wir machen eine Fallunterscheidung:

$n = 1$: Aus $2014 + m = 1024 + 1$ folgt $m = -989$. Da m positiv sein soll, scheidet dieser Fall aus.

$n = 2$: Aus $\sqrt[2]{2014 + m} = \sqrt[2]{1024} + 1$ folgt $2014 + m = (32 + 1)^2 = 1089$ bzw. $m = -925$. Dieser Fall scheidet auch aus.

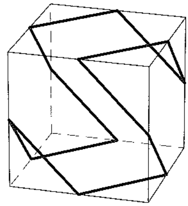
$n = 5$: Aus $\sqrt[5]{2014 + m} = \sqrt[5]{1024} + 1$ folgt $2014 + m = (4 + 1)^5 = 3125$ und somit $m = 1111$.

$n = 10$: Aus $\sqrt[10]{2014 + m} = \sqrt[10]{1024} + 1$ folgt $2014 + m = (2 + 1)^{10} = 59049$ und somit $m = 57035$.

Es gibt also die zwei Paare $(1111, 5)$ und $(57035, 10)$.

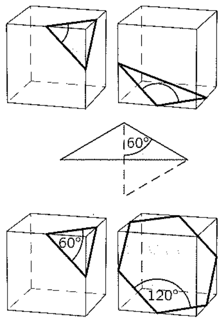
Übrigens braucht m in der Fallunterscheidung nicht exakt ausgerechnet zu werden. In den ersten beiden Fällen genügt es abzuschätzen, dass $m < 0$ ist, in den beiden anderen Fällen genügt es zu wissen, dass $m > 0$ ist.

29. Auf einem Würfel ist ein Streckenzug gezeichnet, der benachbarte Kantenmittelpunkte verbindet (s. Abb.). Wenn A ein Eckpunkt des Streckenzuges ist und X und Y dessen Nachbarn, so wird als *Winkel des Streckenzugs bei A* der Innenwinkel $\measuredangle XAY$ im Dreieck AXY bezeichnet. Wie groß ist die Summe aller 12 Winkel des Streckenzugs?



(A) 720° **(B)** 1080° **(C)** 1200° **(D)** 1440° **(E)** 1800°

Lösung: Wir bezeichnen die Seitenlänge des Würfels mit $2a$. Nach dem Satz des Pythagoras sind die Winkel des Streckenzugs abwechselnd Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks mit den Seitenlängen $\sqrt{2}a$ (vgl. Bild oben links) und Innenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit Seitenlängen $\sqrt{2}a$, $\sqrt{2}a$ und $\sqrt{6}a$ (vgl. Bild oben rechts). Der Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck beträgt 60°. In dem vorliegenden gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe bzgl. der Basis gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$, also halb so lang wie die Schenkel. Folglich ist ein halbes solches gleichschenkliges Dreieck ein halbes gleichseitiges Dreieck (vgl. Bild in der Mitte) und somit ist der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks gleich 120°. Die Winkelsumme ist gleich $6 \cdot 60° + 6 \cdot 120° = 360° + 720° = 1080°$.



Wer ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen hat, kann erkennen, dass die Winkel des Streckenzugs abwechselnd Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks und eines regelmäßigen ebenen Sechsecks sind (vgl. untere Bilder).

30. Im Wald des Wandels gibt es merkwürdige Wesen: 17 Bimsel, 55 Gnafze und 6 Ylpen. Treffen ein Bimsel und ein Gnafz aufeinander, verschmelzen sie zu einer Ylpe. Treffen ein Bimsel und eine Ylpe aufeinander, verschmelzen sie zu einem Gnafz. Treffen ein Gnafz und eine Ylpe aufeinander, verschmelzen sie zu einem Bimsel. Dies führt dazu, dass irgendwann nur noch eine der drei Arten übrig ist. Wie viele Wesen dieser Art sind dann höchstens übrig?

(A) 1 **(B)** 6 **(C)** 17 **(D)** 23 **(E)** 35

Lösung: Bei einer Verschmelzung verringert sich die Anzahl von zwei Arten jeweils um 1 und die Anzahl der dritten Art steigt um 1. Die Differenz der Anzahl zweier Arten ändert sich entweder um 2 oder ändert sich nicht. Da am Ende nur eine Art übrig bleibt, ist die Anzahl der anderen beiden Arten 0, also insbesondere ist deren Differenz gerade. Dann muss deren Differenz am Anfang auch gerade gewesen sein – das ist nur bei Bimseln und Gnafzen der Fall. Am Ende bleiben also Ylpen übrig. Da alle Gnafze verschwinden müssen, muss es also mindestens 55 Verschmelzungen geben. Also gibt es am Ende nicht mehr als $17 + 55 + 6 - 55 = 23$ Ylpen, da bei jeder Verschmelzung die Gesamtzahl der Wesen um 1 sinkt. Dass auch wirklich 23 Ylpen übrig bleiben können, zeigt das Beispiel:

Verschmelzung				
Anzahl	Art	Bimsel	Gnafze	Ylpen
17	Bimsel/Gnafz → Ylpe	0	38	23
19	Gnafz/Ylpe → Bimsel	19	19	4
19	Bimsel/Gnafz → Ylpe	0	0	23

Die Lösungen der Extra-Knobeleien sind im Internet auf der Webseite des Känguru-Wettbewerbs unter www.mathe-kaenguru.de/chronik/broschueren zu finden.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

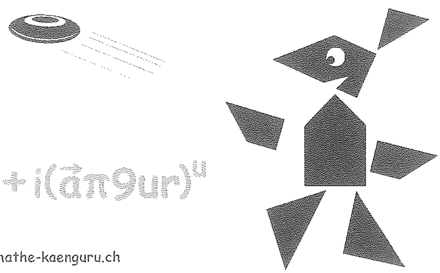
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	C	B	E	A	D	C	C	C	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	E	B	C	B	C	D	E	B	A
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	D	A	A	A	B	C	D	D	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	C	C	E	A	C	D	C	A	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	A	B	E	A	A	C	E	D	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	B	C	D	C	B	E	B	E	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	C	C	B	D	E	A	E	D	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	D	A	D	E	C	E	B	B	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	C	D	E	A	D	A	B	B	D



www.mathe-kaenguru.ch

Vorderseite und Rückseite unterscheiden sich in 20 Kleinigkeiten.
Wer entdeckt die Unterschiede?

www.mathe-kaenguru.de
www.mathe-kaenguru.ch