Mathe mit dem Känguru 2013

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2013!

Dieses Jahr hat der Känguru-Mathematikwettbewerb an über 250 Schulen in der Schweiz stattgefunden und es haben über 20'000 Schülerinnen und Schüler daran teilgenommen! Allein die Tatsache, dass es jedes Jahr mehr werden, bestärkt uns, voll dran zu bleiben und auch in den nächsten Jahren dafür zu sorgen, dass sich alle Deutschschweizer Schulen mit wenig Aufwand bei uns anmelden können und das Material für den Wettbewerb Mitte März pünktlich mit der Post erhalten.

Ob es um das Salz in der Nordsee ging, ums Büchsenwerfen, die Möglichkeiten aus dem Kreisverkehr herauszufahren oder den Preis von Mini-Puddings, ob der Zieleinlauf beim Wettschwimmen oder Marathon gefragt waren oder die Anzahl der vom Vater vertilgten Klösse, es waren dieses Jahr wieder Fragen, denen wir überall begegnen können und denen sich durch logisches Denken, Kombinieren, Strukturieren, gutes geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen – lauter Dinge, die besonders im Mathematikunterricht gelernt werden – erfolgreich beikommen lässt.

Das Interessante, Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von denen anderer Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den etwa 50 Teilnehmerländern des Wettbewerbs einfliessen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall in Deutschland und in der Schweiz an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre enthält die Aufgaben der Klassenstufen 3 bis 8 sowie die zugehörigen Lösungshinweise. In den Klassenstufen 3/4 und 5/6 sind 24 Aufgaben zu lösen, ab Klassenstufe 7/8 sind es 30. Für das erste Drittel der 24 bzw. 30 Aufgaben sind jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte zu erreichen. Bei einer falschen Antwort gibt es Punktabzug, und zwar werden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe 1 Punkt und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe 1.25 Punkte abgezogen. Wenn bei einer Aufgabe keine Antwort oder mehrere Antworten angekreuzt sind, gibt es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekommt 24 bzw. 30 Punkte als Startpunktzahl, wodurch eine negative Gesamtpunktzahl ausgeschlossen ist. Die Höchstpunktzahl beträgt 120 bzw. 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

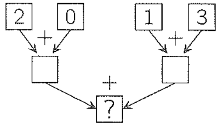
Meike Akveld
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise haben M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von K. Battaglia, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, Dr. A. Noack, R. Schelldorfer, Hj. Stocker und Dr. D. Vigerske mitgewirkt. An den zusätzlichen Knobeleien hat Dr. R. Mildner mitgewirkt.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

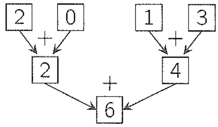
Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 3 und 4

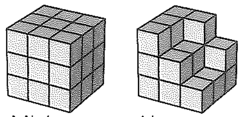


1. Im Bild rechts zeigen die Pfeile, wie addiert werden soll. Welche Zahl gehört an die Stelle des Fragezeichens?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6



Lösung: Wir addieren und tragen die Summen ein. An die Stelle des Fragezeichens gehört die 6.



Micha Hagen

2. Hagen will den gleichen Würfel wie Micha bauen, aber ihm fehlen dazu einige kleine Würfel. Wie viele?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Es fehlt in der hinteren Würfelreihe ein Würfel, und in den beiden anderen Würfelreihen fehlen jeweils 3 Würfel. Insgesamt fehlen Hagen also $1 + 2 \cdot 3 = 7$ Würfel.

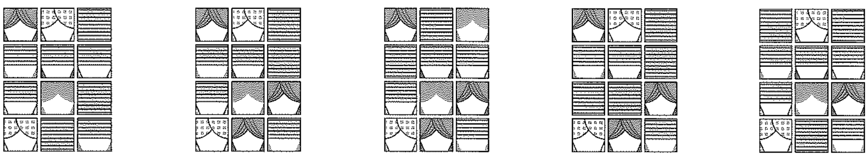
3. Beim Stadtsportfest gewann unsere Schule 7-mal Gold, 9-mal Silber und 5-mal Bronze. Die Siegerschule brachte es sogar auf 8-mal Gold, 14-mal Silber und 4-mal Bronze. Wie viele Medaillen gewann die Siegerschule insgesamt mehr als unsere Schule?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Schauen wir uns die Anzahl der Medaillen aufmerksam an, so entdecken wir, dass die Siegerschule zwar eine Goldmedaille mehr als unsere Schule errungen hat, aber unsere Schule hat dafür eine Bronzemedaille mehr als die Siegerschule – das gleicht sich bei der Gesamtzahl der Medaillen aus. Die Differenz bei den Silbermedaillen beträgt $14 - 9 = 5$. Die Siegerschule hat insgesamt 5 Medaillen mehr errungen als unsere Schule.

Dasselbe Ergebnis erhält, wer die Differenz zwischen den Gesamtmedaillenzahlen der Siegerschule und unserer Schule bildet: $(8 + 14 + 4) - (7 + 9 + 5) = 26 - 21 = 5$.

4. Die Fenster im Haus gegenüber haben an den vergangenen 5 Tagen unterschiedlich ausgesehen. An welchem Tag waren die meisten Jalousien vollständig heruntergelassen?



(**A**) Montag (**B**) Dienstag (**C**) Mittwoch (**D**) Donnerstag (**E**) Freitag

Lösung: Am Montag waren 3 Jalousien vollständig heruntergelassen, am Dienstag 2, am Mittwoch auch 2, am Donnerstag 4 und am Freitag 3. Am Donnerstag waren es am meisten.

5. Anastasia, die Perlenkünstlerin, ist dabei, 20 Perlen mit glitzernden Farben zu bemalen. Die Hälfte der Perlen hat sie schon glitzergrün bemalt. Die 3 größten Perlen hat sie ganz golden bemalt. Die übrigen Perlen werden feuerrot. Wie viele sind das?

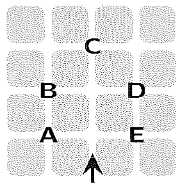
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Die Hälfte der Perlen ist glitzergrün. Das sind $20 : 2 = 10$ Perlen. 3 weitere sind golden bemalt. Es bleiben $20 - 10 - 3 = 7$, die Anastasia feuerrot bemalen will.

6. Jedes Mal, wenn Pinocchio schwindelt, wächst seine Nase um 6 cm. Jedes Mal, wenn er die Wahrheit spricht, wird sie 2 cm kürzer. Gestern früh war seine Nase 9 cm lang. Danach hat er bis zum Mittag 3-mal geschwindelt und 2-mal die Wahrheit gesagt. Wie lang war seine Nase beim Mittagessen?

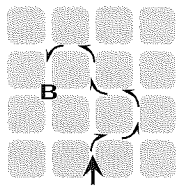
(**A**) 10 cm (**B**) 14 cm (**C**) 19 cm (**D**) 23 cm (**E**) 25 cm

Lösung: Die 9 cm lange Nase verlängert sich durch 3-maliges Schwindeln um $3 \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$. Und die Nase verkürzt sich durch 2-maliges Wahrheitsagen um $2 \cdot 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$. Insgesamt ergibt das $9\,\text{cm} + 18\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 23\,\text{cm}$ für die Länge der Nase beim Mittagessen.



7. Wenn Paco im Park seinen Hund ausführt, ändert er an jeder Kreuzung die Richtung, damit es interessanter ist. Heute ist er in Pfeilrichtung losgegangen und dann nach rechts, nach links, nach links, nach rechts, nach links, nach links. Wo ist er dann?

(**A**) bei A (**B**) bei B (**C**) bei C (**D**) bei D (**E**) bei E



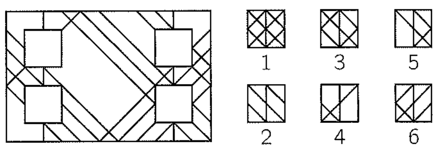
Lösung: Wir haben den Weg, den Paco mit seinem Hund geht, aufgezeichnet. Nach der letzten Linkskurve ist Paco bei **B**.

8. Für die Torte zu Aschenbrödels Hochzeit geht der Koch auf den Markt, um 30 frische Eier zu kaufen. Da steht die Eier-Marie und bietet Eier in Körbchen zu 6 oder 8 oder 9 Stück an. Wie viele Körbchen muss der Koch mindestens kaufen?

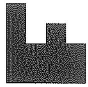
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 7

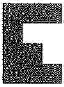
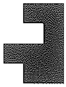
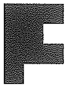
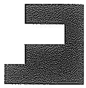
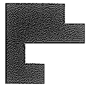
Lösung: Um 30 Eier zu haben, könnte der Koch beispielsweise 5 Körbchen mit je 6 Eiern kaufen. Gefragt ist jedoch, wie viele Körbchen er *mindestens* kaufen muss. Da 3 der Körbchen mit den meisten Eiern zu wenig sind, denn $3 \cdot 9 = 27 < 30$, muss er mindestens 4 Körbchen kaufen. Und mit 4 Körbchen kann er auch tatsächlich 30 Eier zusammenbekommen. Er könnte 2 Körbchen mit je 6 Eiern und 2 Körbchen mit je 9 Eiern kaufen. Dann hätte er exakt 30 Eier. Das klappt auch, wenn er 3 Körbchen mit je 8 Eiern und eines mit 6 Eiern kauft.

Welche der rechts abgebildeten Quadrate passen in die 4 Löcher?

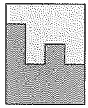


9. Von den unten abgebildeten Teilen gibt es genau eines, das mit dem rechts abgebildeten Teil zusammen ein Rechteck ergibt. Welches ist das?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wenn wir Teil (**C**) nach rechts drehen, ergänzt es das gegebene Teil zu einem Rechteck, wie die Zeichnung zeigt.



10. Unsere Mathematiklehrerin hat die Zahl 325 an die Tafel geschrieben. Wir wollen Eigenschaften dieser Zahl finden. Emma sagt: „Alle Ziffern sind verschieden." Antoni sagt: „Die Zahl ist 3-stellig." Fanny sagt: „Die Summe der 3 Ziffern ist 10." Linda sagt: „Die Einerziffer ist 5." Wer hat sich geirrt?

(**A**) Emma (**B**) Antoni (**C**) Fanny (**D**) Linda (**E**) niemand

Lösung: Alle Kinder haben Eigenschaften genannt, die 325 wirklich hat: Die Ziffern 3, 2 und 5 sind verschieden; es sind 3 Ziffern; die Summe der 3 Ziffern ist $3+2+5=10$; die Einerziffer von 325 ist 5. Niemand hat sich geirrt.

11. Bei unserer ersten Klassenfahrt waren wir 24 Kinder. Am 2. Tag gab es ein Schachturnier mit 12 Teilnehmern und ein Tischtennisturnier mit 16 Teilnehmern. Alle haben mitgemacht, einige sogar bei beiden Turnieren. Wie viele waren bei beiden dabei?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Da 16 Kinder beim Tischtennis dabei waren, haben $24-16=8$ Kinder nicht am Tischtennisturnier teilgenommen. Da jedes Kind bei mindestens einem Turnier mitgemacht hat, waren diese 8 Kinder ganz sicher beim Schachturnier dabei. Die übrigen $12-8=4$ Schachspieler haben auch beim Tischtennis mitgemacht, also waren 4 Kinder bei beiden Turnieren dabei.

12. Jonas war heute schon 25 Minuten vor Beginn der Judo-AG in der Turnhalle. Leo kam ganz pünktlich um 15:45. Er wurde dort von Tobias erwartet, der eine Viertelstunde nach Jonas eingetroffen war. Wann kam Tobias?

(**A**) um 15:05 (**B**) um 15:20 (**C**) um 15:30 (**D**) um 15:35 (**E**) um 15:55

Lösung: Jonas kam 25 Minuten vor dem pünktlich um 15:45 Uhr eintreffenden Leo, also um 15:20 Uhr. Tobias kam eine Viertelstunde, d. h. 15 Minuten, später als Jonas, also um 15:35 Uhr.

13. Caroline hat ein neues Kartenspiel. Sie mischt und verteilt alle 36 Karten. Jeder Mitspieler bekommt dieselbe Anzahl. Wie viele Mitspieler sind es gewiss nicht?

(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

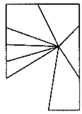
Lösung: Wenn jeder Mitspieler dieselbe Anzahl Karten bekommt und Caroline alle Karten verteilt, dann muss die Anzahl der Spieler, multipliziert mit der Anzahl der Karten, die jeder Spieler hat, 36 ergeben. Mit anderen Worten, die Anzahl der Spieler muss ein Teiler der Zahl 36 sein. Von den vorgeschlagenen Zahlen ist nur 8 kein Teiler von 36.

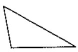
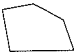
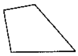
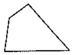
14. Nach dem Mathetest sprechen Yuri und Birte über die 5 Aufgaben. „Die 1. Aufgabe war leichter als die 3., aber schwerer als die 2.“, meint Yuri. „Stimmt“, sagt Birte, „und die 5. Aufgabe fand ich schwerer als die 3., aber leichter als die 4.“ Yuri ist derselben Meinung. Welche Aufgabe war für Yuri und Birte die schwierigste?

(A) die 1. **(B)** die 2. **(C)** die 3. **(D)** die 4. **(E)** die 5.

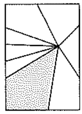
Lösung: Wir schreiben die Aufgaben (A1 bis A5) in der Folge von leicht nach schwer auf. Nach Yuris Meinung ist A2 leichter als A1, und A1 leichter als A3 (A2 < A1 < A3). Nach Birtes Meinung ist A3 leichter als A5, und A5 leichter als A4 (A3 < A5 < A4). Fügen wir beide Aussagen zusammen, so erhalten wir: A2 < A1 < A3 < A5 < A4. Also war die 4. Aufgabe nach Meinung von Yuri und Birte die schwierigste Aufgabe.

15. Ich bin versehentlich mit dem Besen gegen den rechteckigen Spiegel im Bad gestoßen, und er ist kaputt gegangen. Ein großes Stück ist dabei hinter den Schrank gerutscht. Wie sieht dieses Stück aus?



(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Das fehlende Stück ist viereckig und hat einen rechten Winkel. Das ist Teil **(C)**.

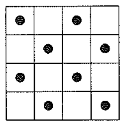


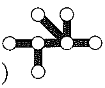
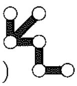
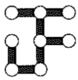
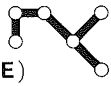
16. Die Zahl 35 kann ohne Rest durch ihren Einer 5 geteilt werden, denn 35 : 5 = 7. Das ist eine besondere Eigenschaft, 38 ist beispielsweise nicht durch ihren Einer 8 teilbar. Wie viele der Zahlen 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 und 29 sind durch ihren Einer teilbar?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

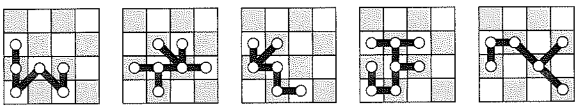
Lösung: Wir versuchen, jede der Zahlen von 22 bis 29 durch ihren Einer zu teilen. Wir stellen fest, dass 22 durch 2, 24 durch 4 und 25 durch 5 teilbar ist. Das sind 3 der Zahlen. Die anderen Zahlen sind sämtlich nicht durch ihren Einer teilbar.

17. Mit welchem der unten abgebildeten Teile lässt sich die größte Zahl von Punkten auf dem rechts abgebildeten Spielbrett überdecken?



(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Um zu erkennen, wie die Punkte von den einzelnen Teilen bedeckt werden können, färben wir die Felder mit den Punkten grau. Wir legen die einzelnen Teile auf das Feld und zählen aus, wie viele weiße und wie viele graue Felder bedeckt werden. Wird ein Teil um ein Feld waagerecht oder senkrecht verschoben, so vertauschen sich diese beiden Zahlen. Die größere der beiden gibt die größtmögliche Anzahl an Punkten an, die bedeckt werden können.



Bei Teil **(E)** wird mit 5 Feldern die größte Zahl erreicht.

Ein ähnliches Problem wurde in Aufgabe 13 in Klassenstufe 5/6 gestellt.

18. Artur, Egon, Ivo und Ole sind im selben Jahr geboren, einer am 19. April, einer am 12. Mai, einer am 12. Juni und einer am 25. Juni. Artur und Egon sind im selben Monat geboren, Artur und Ivo in verschiedenen Monaten, aber mit demselben Tagesdatum. Welcher der 4 Jungen ist am ältesten?

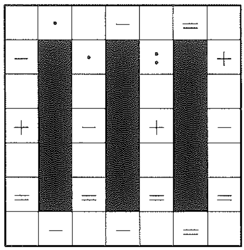
(**A**) Artur (**B**) Egon (**C**) Ivo (**D**) Ole (**E**) Das kann nicht ermittelt werden.

Lösung: Der älteste der vier Jungen wurde am 19. April geboren. Da Egon und Artur im selben Monat geboren wurden, sind ihre Geburtsdaten der 12. Juni und der 25. Juni. Keiner der beiden ist der älteste. Artur hat außerdem dasselbe Tagesdatum wie Ivo, also ist er am 12. Juni und Ivo am 12. Mai geboren. Ivo ist also auch nicht der älteste. Folglich ist Ole am ältesten.

Eine ähnliche Aufgabe, allerdings etwas schwieriger, ist Aufgabe 22 in Klassenstufe 7/8.

In die leeren Felder sind die Zahlen von 1 bis 16 so einzutragen, dass alle Rechenaufgaben richtig sind.

Wer findet mehr als eine Lösung?

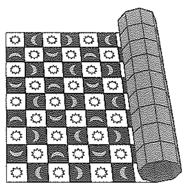


19. Nadja mag ihren Kater Pepe sehr und beobachtet ihn genau. Pepe hat im Dezember genau 3 Wochen geschlafen. Wie viele Stunden war Pepe im Dezember wach?

(**A**) $(31 - 7) \cdot 3 \cdot 24$ (**B**) $(31 - 7) \cdot 24$ (**C**) $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24 \cdot 60$
(**D**) $(30 - 7 \cdot 3) \cdot 24$ (**E**) $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24$

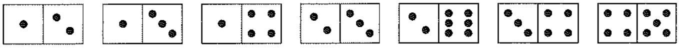
Lösung: Der Dezember hat 31 Tage. Davon hat Pepe 3 Wochen, also $7 \cdot 3$ Tage geschlafen. Er war demnach an $31 - 7 \cdot 3$ Tagen wach. Und da jeder Tag 24 Stunden hat, war Pepe insgesamt $(31 - 7 \cdot 3) \cdot 24$ Stunden wach.

20. Meine Großeltern haben sich einen Teppich gekauft, der 90 cm breit und 1,50 m lang ist. Wie im Bild zu sehen, wechseln sich Quadrate mit Sonne und Mond im Muster ab. Wie viele Monde sind auf dem ausgebreiteten Teppich insgesamt zu sehen?

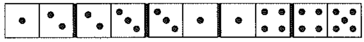


(**A**) 60 (**B**) 63 (**C**) 65 (**D**) 67 (**E**) 68

Lösung: Von den Quadraten mit Sonne und Mond gibt es in der Breite 9 Stück, die sich auf 90 cm verteilen. Daher wissen wir, dass jedes Quadrat eine Seitenlänge von 10 cm hat. Daraus folgt, dass es in der Länge 15 Quadrate sind. Es wechseln sich Reihen mit 4 und mit 5 Monden ab. Da es in der ersten Reihe 4 Monde gibt, sind es auch in der letzten Reihe 4 Monde. Es gibt also von den 15 Reihen 8 Reihen mit 4 und 7 Reihen mit 5 Monden. Insgesamt sind es dann $8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 67$ Monde.

21. Dora hat 7 Dominosteine: 
Sie will möglichst viele so in eine Reihe legen, dass sich benachbarte Steine mit derselben Punktzahl berühren. Wie viele der 7 Steine kann Dora dafür höchstens verwenden?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

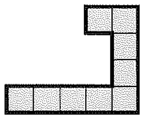
Lösung: Da – von der Anfangs- und der Endhälfte abgesehen – die Punkte im Inneren der fertigen Reihe stets paarweise auftreten, muss die Anzahl der zugehörigen Halbsteine in der Dominoreihe gerade sein. Wir stellen jedoch fest, dass alle 6 verschiedenen Halbsteine in ungerader Anzahl vorhanden sind, nämlich je 3 Einpunkt-, Zweipunkt-, Dreipunkt- und Vierpunkthälften und je eine Fünf- und Sechspunkthälfte. Folglich gibt es mit Sicherheit 4 Hälften, die nicht in der Reihe auftauchen können. Also ist die Reihe maximal 5 Steine lang. Dass es wirklich 5 unter den 7 Steinen gibt, die sich zu einer Dominoreihe legen lassen, zeigt ein Beispiel: 

22. In mein Matheheft habe ich eine Additionsaufgabe geschrieben. Die Summe ist 2013. Welche Zahlen ich addiert habe, weiß ich nicht mehr. Aber ich erinnere mich, dass sie nur aus den Ziffern 0 und 1 bestanden. Wie viele Zahlen habe ich mindestens addiert?

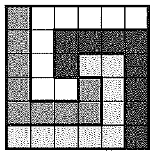
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 10 (**E**) 13

Lösung: Wir versuchen, 2013 als Summe von Zahlen zu schreiben, deren sämtliche Ziffern 0 oder 1 sind. Für die 3 an der Einerstelle brauchen wir ganz sicher mindestens 3 Summanden. Und tatsächlich reichen 3 Summanden aus, denn $1011 + 1001 + 1 = 2013$.

23. Udo möchte aus Teilen wie dem abgebildeten ein vollständiges Quadrat legen. Wie viele solche Teile braucht er mindestens?



(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 16



Lösung: Wir legen die Teile im Schneckenmuster, dann bekommen wir mit dem 4. Teil das Quadrat komplett. Mit weniger Teilen lässt sich kein Quadrat legen, da im fertigen Gebilde die Anzahl der kleinen Quadrate eine Quadratzahl sein muss. Diese muss durch 9 teilbar sein, da jedes Teil aus 9 kleinen Quadraten besteht. Die kleinste Quadratzahl unter den Vielfachen von 9, nämlich 9 selbst, scheidet aus. Für die nächstgrößere $4 \cdot 9 = 36 = 6 \cdot 6$ haben wir eine Lösung angegeben.

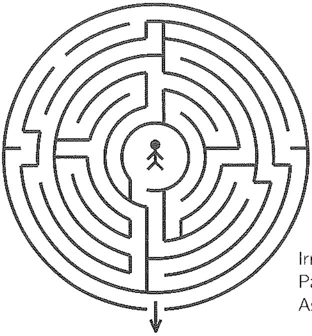
24. „Na, wie war's?", ruft meine Mutter aus dem Garten, als ich vom Pilzesammeln komme. Ich breite die Pilze auf dem Tisch aus und rufe zurück: „Mehr als die Hälfte sind Maronen. Drei davon sind leider madig, und diese drei sind mehr als ein Viertel der Maronen." „Dann weiß ich, wie viele Pilze du höchstens gesammelt hast", ruft meine Mutter. Es sind

(**A**) 21 (**B**) 14 (**C**) 19 (**D**) 24 (**E**) 16

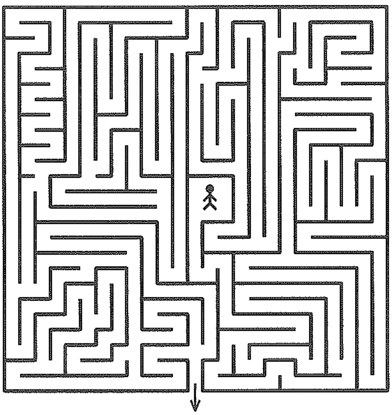
Lösung: Wir versuchen, den Gedankengang der Mutter nachzuvollziehen: Wären die 3 madigen Maronen genau ein Viertel der Maronen, dann wären es insgesamt 12 Maronen. Wenn 3 Maronen jedoch *mehr* als ein Viertel sind, dann können es höchstens 11 Maronen gewesen sein. Da die Maronen mehr als die Hälfte der gesammelten Pilze sind, gibt es von den anderen Pilzen weniger als von den Maronen. Falls es 11 Maronen waren, können es von den anderen Pilzen höchstens 10 gewesen sein, insgesamt also höchstens $11 + 10 = 21$ Pilze.

Wege aus dem Labyrinth

Nun sei gewandt
mit dem Verstand
und lauf geschwind
durch's Labyrinth!



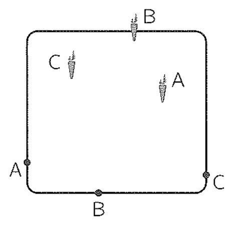
Irrgarten im
Park Schönbusch,
Aschaffenburg



Irrgarten von Kleinwelka
in der Nähe von Bautzen

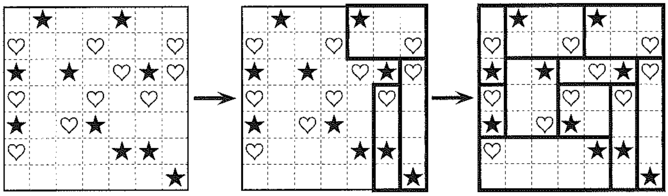
Am Rand von Marions Garten haben 3 Wühlmäuse ihr neues Zuhause bezogen. Gerade wollten sie alle drei anfangen, einen Gang zu ihrer jeweiligen Lieblingswurzel zu graben, als sie aufeinander aufmerksam wurden. Um sich nicht gegenseitig zu stören, sollen sich die Gänge zu den Lieblingswurzeln, die alle in derselben Tiefe knapp unter der Erde verlaufen, keinesfalls kreuzen.

Ob ihnen das wohl gelingt?

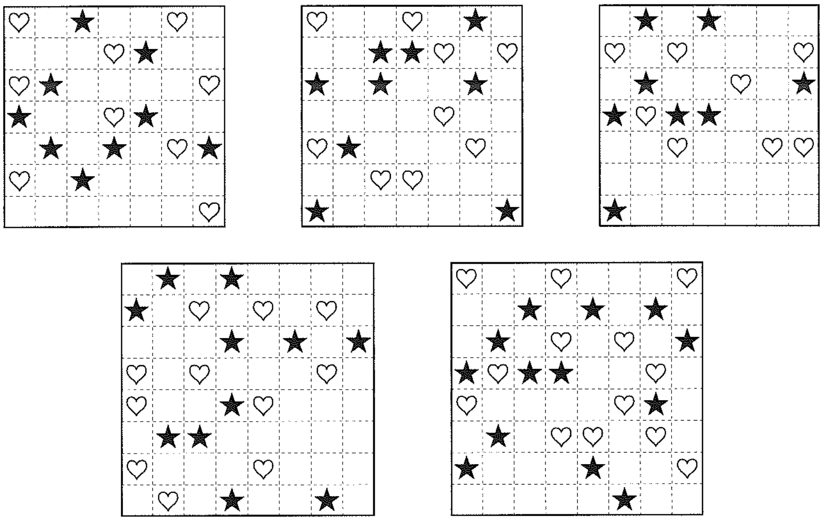


Kopfnüsse I: Sterne und Herzen

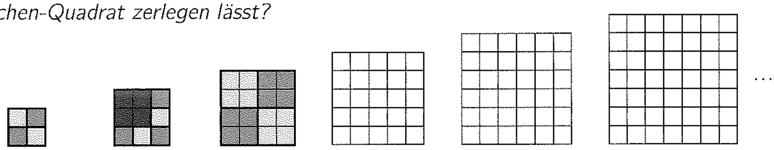
Das quadratische Feld ist so in Rechtecke zu unterteilen, dass sich in jedem Rechteck genau ein Stern und ein Herz befinden. Hier ist ein Beispiel:



Wer findet die richtigen Zerlegungen?



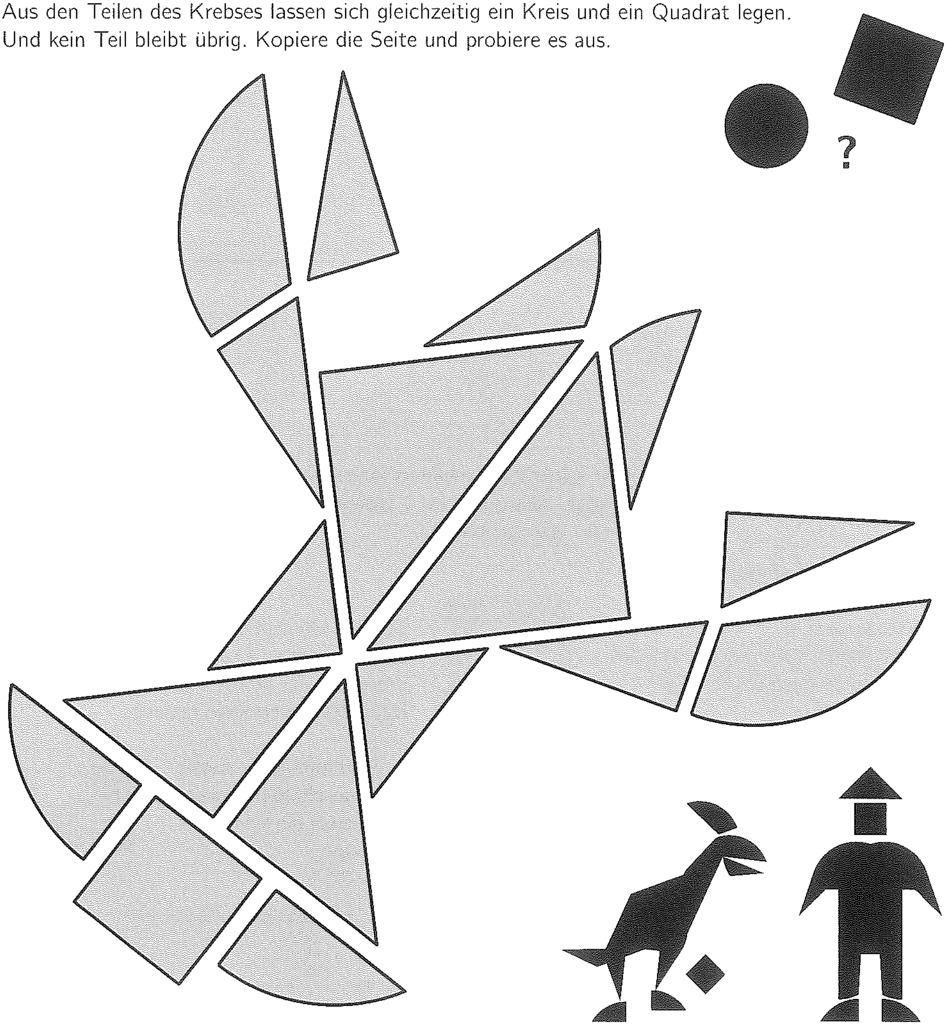
Die Zerlegung von Figuren hat schon viele Tüftler und Denker beschäftigt. Eine Frage, der man auf Kästchenpapier nachgehen kann, ist zum Beispiel: Welches ist die kleinste Anzahl an Kästchen-Quadraten, in die sich ein gegebenes Kästchen-Quadrat zerlegen lässt?



4 Quadrate *6 Quadrate* *4 Quadrate* *__ Quadrate* *__ Quadrate* *__ Quadrate*

Legespiel mit Pfiff

Aus den Teilen des Krebses lassen sich gleichzeitig ein Kreis und ein Quadrat legen. Und kein Teil bleibt übrig. Kopiere die Seite und probiere es aus.

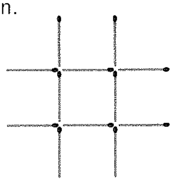


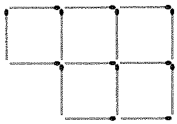
Sei kreativ und finde eigene Figuren, die sich mit diesen Teilen legen lassen!

Streichholzrätsel

Es sind 3 Streichhölzchen so umzulegen, ...

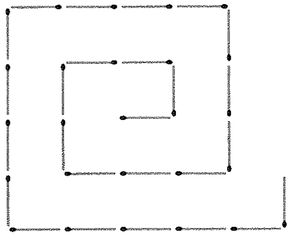
... dass 3 gleich große Quadrate entstehen.



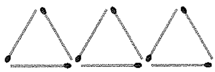


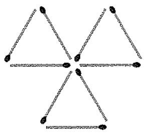
... dass 3 gleich große Rechtecke entstehen.

... dass 3 Quadrate entstehen.



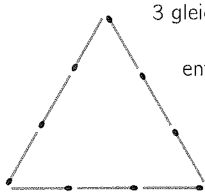
Wer 3 Streichhölzchen richtig umlegt, erhält eine Figur mit 5 gleichseitigen Dreiecken.





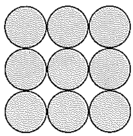
Hier sollen 2 Hölzchen so umgelegt werden, dass nur noch 2 gleichseitige Dreiecke zu sehen sind.

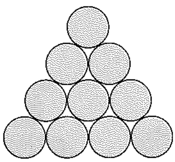
Wer schafft es, 3 Streichhölzchen so dazuzulegen, dass 3 gleich große Trapeze entstehen?



Münzspielereien

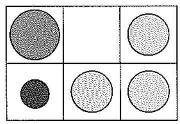
Wer schafft es, 3 Münzen so umzulegen, dass das Dreieck mit der Spitze nach unten zeigt?





Diese 9 Münzen bilden 8 Dreierreihen, 3 waagerechte, 3 senkrechte und 2 diagonale. Wer kann die Münzen so umordnen, dass sie sogar 10 Dreierreihen bilden?

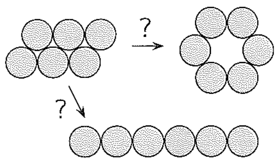
In einem Zug darf auf das freie Feld eine waagerecht oder senkrecht benachbarte Münze geschoben werden. Ziel ist es, dass durch geschicktes Ziehen die kleine und die große Münze die Plätze tauschen.



Durch Verschieben der 6 Münzen soll ein Kreis gebildet werden. In jedem Zug darf eine Münze verschoben werden, ohne dass die anderen dabei aus Versehen bewegt werden. Nach jedem Zug muss die verschobene Münze <u>mindestens 2 andere Münzen</u> berühren.

Wem gelingt das mit möglichst wenigen Zügen?

Und wer schafft es, nach dieser Regel eine Reihe zu bilden?



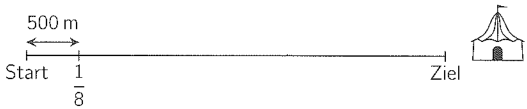
Klassenstufen 5 und 6

1. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

(**A**) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$ (**B**) $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$ (**C**) $1 \cdot 2 \cdot 3$ (**D**) $2 \cdot 2 \cdot 2$ (**E**) $3 \cdot 3$

Lösung: Es ist schnell gerechnet: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$; $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$; $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ und $3 \cdot 3 = 9$. Das größte Produkt ist 9.

2. Beim Wettrennen des kleinen Muck gegen Hasan, den Oberleibläufer des Sultans, gewann der kleine Muck auf seinen Zauberpantoffeln mit riesigem Vorsprung. Als Muck das Ziel erreichte, war Hasan erst 500 m, ein Achtel der Strecke, gelaufen.



Welche Strecke hat der kleine Muck vom Start bis zum Ziel zurückgelegt?

(**A**) 1 km (**B**) 2 km (**C**) 4 km (**D**) 5 km (**E**) 8 km

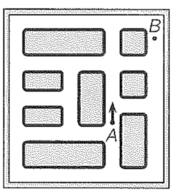
Lösung: Wenn ein Achtel der Länge 500 m sind, so ist $8 \cdot 500\,\text{m} = 4000\,\text{m} = 4\,\text{km}$ die Länge der gesamten Strecke, die der kleine Muck gelaufen ist.

3. Roger schreibt an die Tafel: $1 + 3 + 6 \cdot 2 = 22$. „Das stimmt doch gar nicht!“, ruft Barbara. Roger vergrößert geschwind eine der Zahlen um 1. Jetzt ist Barbara zufrieden, die Rechnung stimmt. Welche der ursprünglichen Zahlen hat Roger um 1 vergrößert?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 2 (**E**) 22

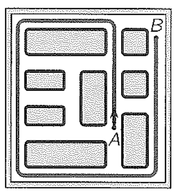
Lösung: Wir rechnen zuerst die Summe auf der linken Seite der Gleichung aus: $1+3+6 \cdot 2 = 16$. Das ist um 6 kleiner als die 22, die auf der rechten Seite der Gleichung steht. Also muss die 6 statt mit 2 mit 3 multipliziert werden. Die 2 muss um 1 erhöht werden.

4. Mein großer Bruder Nick hat mit der Fahrschule begonnen. Rechtsherum fährt er schon ganz gut, aber Linkskurven muss er noch üben. Also will er auf dem Übungsplatz ohne Rechtskurven vom Punkt A zum Punkt B fahren. Wie viele Linkskurven muss er mindestens fahren?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 10

Lösung: Nick muss mindestens 4 Linkskurven fahren. Ein möglicher Weg ist rechts abgebildet.



5. Durch welche Ziffer muss ich ★ ersetzen, damit ★★ · ★ = 176 ist?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

Lösung: Da 176 auf 6 endet, kommen nur 4 oder 6 als Ziffern in Frage, denn mit 3 bzw. 7 wäre das Ergebnis eine ungerade Zahl und $8 \cdot 8$ endet auf 4. Nun können wir schätzen, dass $66 \cdot 6$ deutlich größer als 176 ist. Folglich muss 4 die Lösung sein, $44 \cdot 4 = 176$.

6. „Gestern beim Geburtstag meiner Zwillinge haben wir ausgerechnet, dass die beiden zusammen mit ihrem Bruder 33 Jahre alt sind", erzählte unsere Nachbarin meinem Vater. „Na, so was", antwortete mein Vater, „dann sind Ihre 3 Kinder ja in 3 Jahren zusammen genauso alt wie ich." Wie alt sind die 3 Kinder in 3 Jahren zusammen?

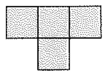
(**A**) 39 Jahre (**B**) 40 Jahre (**C**) 42 Jahre (**D**) 44 Jahre (**E**) 47 Jahre

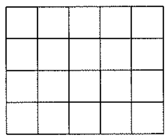
Lösung: Jedes der drei Kinder ist in drei Jahren um 3 Jahre älter, alle drei Kinder zusammen also um 9 Jahre. Damit sind sie in 3 Jahren zusammen $33 + 9 = 42$ Jahre alt.

7. Am Wochenende war ich im Spaßbad zuerst an der großen Rutsche und nachher am künstlichen Wasserfall. Um 15:05 Uhr ging der Wasserfall das erste Mal los, und dann immer im Abstand von einer Viertelstunde. Als der Wasserfall gerade das 5. Mal losging, rief mich meine Mutter zum Nachhausegehen. Wie spät war es da?

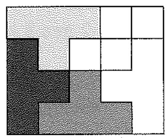
(**A**) 15:20 Uhr (**B**) 15:25 Uhr (**C**) 15:50 Uhr (**D**) 16:05 Uhr (**E**) 16:20 Uhr

Lösung: Der große Wasserfall wird um 15:05 Uhr zum ersten Mal angestellt, und da er bis zum Verlassen insgesamt 5-mal angestellt wurde, folgt also im Abstand von je 15 Minuten noch 4-mal das Anstellen. Da $4 \cdot 15 = 60$ ist, bleibt also eine Stunde bis zum Verlassen des Schwimmbads. Es war 16:05 Uhr, als ich das Schwimmbad verließ.

8. Jegor hat sich aus Karopapier Teilchen ausgeschnitten:  Er versucht, so viele wie möglich in dem 4×5-Rechteck unterzubringen. Die Teilchen dürfen sich nicht überlappen und nicht aus dem Rechteck herausragen. Wie viele Teilchen passen höchstens in das Rechteck?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6



Lösung: Da jedes Teilchen aus 4 kleinen Quadraten und das Karopapierstück aus $4 \cdot 5 = 20$ kleinen Quadraten besteht, können gewiss nicht mehr als 5 Teilchen eingepasst werden. Ließen sich 5 Teilchen unterbringen, so wäre jedes der 20 kleinen Quadrate belegt. Es gibt für die Platzierung eines Teilchens in einer Ecke nur zwei Möglichkeiten: Es kann an der langen Seite des Rechtecks liegen wie das hellgraue oder an der kurzen wie das schwarze. In beiden Fällen ist das Anlegen weiterer drei der Teilchen vorbestimmt (siehe Bild). Mehr als 4 Teilchen passen nicht.

9. Bevor wir zur Wanderung aufbrechen, bereiten Jens und Frederik die Sandwiches für alle. Aus je 2 Scheiben Brot entsteht ein Sandwich. Sie verbrauchen 2 ganze und eine halbe Packung Brot. Jede ganze Packung enthält 12 Scheiben Brot. Wie viele Sandwiches können wir mitnehmen?

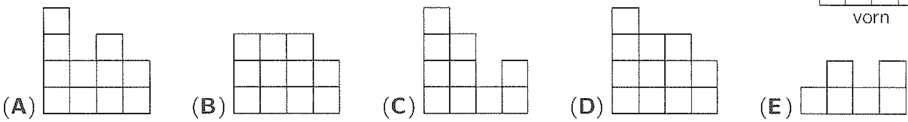
(**A**) 15 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

Lösung: Die beiden kompletten Brotpackungen enthalten insgesamt $2 \cdot 12 = 24$ Scheiben Brot, die halbe Packung 6, was zusammen $24 + 6 = 30$ Scheiben Brot ergibt. Da für jedes Sandwich 2 Scheiben vonnöten sind, können wir $30 : 2 = 15$ Sandwiches mit auf die Wanderung nehmen.

10. „Stellt euch vor, dass ich in einem 4×4-Feld gleich große Würfel aufgeschichtet habe. Die Zahlen im Bauplan rechts geben die Anzahl der übereinanderstehenden Würfel an", beginnt unsere Mathelehrerin den Geometrieunterricht. „Wie würde dieses Würfelbauwerk von vorn aussehen?"

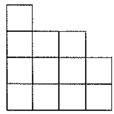
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

vorn



Lösung: Es ist in jeder Spalte der höchste Würfelturm zu sehen. Und damit liegt das Bild fest, das das Gesamtbauwerk von vorn bietet. Ein ähnliches Problem findet sich in Aufgabe 9 in Klassenstufe 7/8.

4	2	3	2
3	**3**	1	2
2	1	**3**	1
1	2	1	**2**

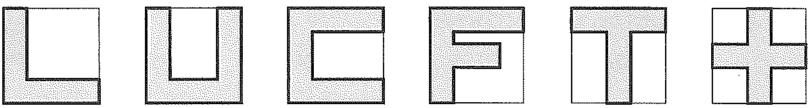


11. Heute angelt Helga lauter kleine Fische. „Die sind aber winzig!", denkt sie. „Da sind ja drei zusammen kaum so groß wie die Fische, die ich sonst fange. Ach, hätte ich doch dreimal so viele gefangen, wie ich gefangen habe! Dann hätte ich 12 mehr, als ich jetzt habe." Wie viele Fische hat Helga heute geangelt?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

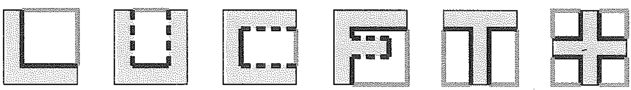
Lösung: Die Anzahl Fische, die Helga gefangen hat, vermehrt um 12, sind das Dreifache dieser Anzahl. Also sind 12 Fische das Zweifache der Anzahl. Folglich ist die gesuchte Anzahl 6.

12. Maximilian bereitet für einen Aushang in der Schule große Buchstaben und Zeichen vor.



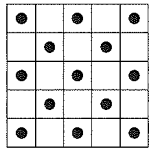
Nach dem Ausmalen zieht er bei allen den Rand dick nach und fragt sich, bei wie vielen der Buchstaben oder Zeichen dieser Rand länger ist als der Umfang des Quadrats, in das er sie gemalt hat. Wie viele sind das?

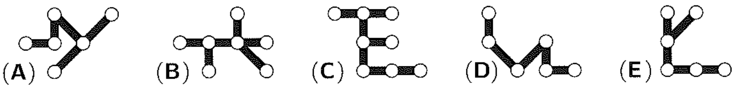
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5



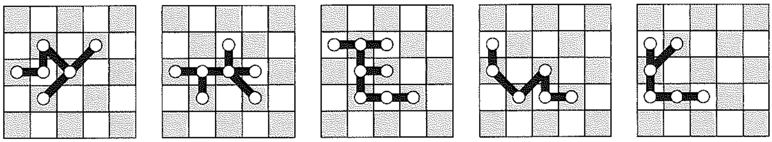
Lösung: Wir markieren dick grau den Teil des Quadratrandes, der nicht von vornherein mit einem Teil des Buchstabenrandes zusammenfällt, dick schwarz den Teil des Buchstabenrandes, der genauso lang ist wie der grau markierte Teil des Quadratrandes und gestrichelt den Teil des Buchstabenrandes, der keine Entsprechung im Quadratrand findet. Gestrichelte Teile finden wir nur beim U, beim C und beim F. Der Rand dieser 3 Buchstaben ist länger als der Rand des Quadrats.

13. Mit welchem der unten abgebildeten Teile lässt sich die größte Zahl von Punkten auf dem rechts abgebildeten Spielbrett überdecken?





Lösung: Die Aufgabe lässt sich analog lösen wie Aufgabe 17 in Klassenstufe 3/4.



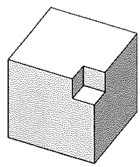
Bei Teil (**A**) wird mit 5 bedeckten Punkten die größte Zahl erreicht.

14. Beim Pokalfinale im Hockey fiel Tor auf Tor. Allein in der 1. Halbzeit gab es 6 Tore, und die Gäste lagen in Führung. Doch nach der Pause gelang es dem Heimteam, 3 Tore zu schießen, und das war der Sieg. Wie viele Tore hat das Heimteam in diesem Spiel insgesamt geschossen?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Wenn die Gäste nach der 1. Halbzeit in Führung lagen, so ist dies bei 6 Toren mit 3 verschiedenen Torverhältnissen möglich, nämlich 0:6, 1:5 oder 2:4 für die Gästemannschaft. Nach den 3 Toren des Heimteams würde es nun 3:6, 4:5 oder 5:4 stehen, und nur das letztgenannte Ergebnis steht für den Sieg des Heimteams. Folglich hat das Heimteam insgesamt 5 Tore geschossen.

15. Von einem Holzwürfel, dessen Seiten 4 cm lang sind, wird an einer Ecke ein kleiner Würfel mit der Seitenlänge 1 cm säuberlich herausgesägt (siehe Bild). Wie viele Flächen hat der Körper, der übrig bleibt, wenn an *jeder* Ecke des großen Würfels solch ein kleiner Würfel herausgesägt worden ist?



(**A**) 16 (**B**) 20 (**C**) 22 (**D**) 24 (**E**) 30

Lösung: An jeder der 8 Ecken des Holzwürfels kommen durch das Heraussägen der kleinen Würfel 3 Flächen zu den 6 Flächen, die der große Würfel hat, hinzu. Es sind dann folglich insgesamt $6 + 8 \cdot 3 = 30$ Flächen, die der neu entstandene Körper hat.

16. In jedes Kästchen des abgebildeten 4×4-Quadrats ist eine Zahl einzutragen. Eine 3 steht schon da, und wir wissen, dass zu den Zahlen auch eine 9 gehört. Waagerecht oder senkrecht benachbarte Zahlen unterscheiden sich um 1. Wie viele verschiedene Zahlen kommen im ausgefüllten Quadrat vor?

3			

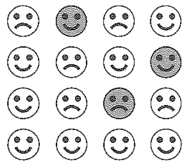
(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Unter den Bedingungen der Aufgabe gibt es nur eine Möglichkeit, das Quadrat so auszufüllen, dass außer der 3 auch eine 9 vorkommt. Diese Möglichkeit ist rechts zu sehen, es sind 7 verschiedene Zahlen eingetragen.

3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	9

17. Leonie hat ein Spiel mit 4 Knöpfen zum Drücken bekommen. Die Knöpfe zeigen entweder ein lachendes oder ein trauriges Gesicht. Drückt sie auf ein lachendes Gesicht, so wird es traurig, und drückt sie auf ein trauriges Gesicht, so wird daraus ein lachendes. Und das trifft ebenso für jedes Gesicht zu, das sich direkt neben dem befindet, das gedrückt wird. Leonie möchte, dass aus dem augenblicklichen Zustand  so schnell wie möglich lauter lachende Gesichter werden. Wie oft muss sie mindestens drücken, damit alle 4 Gesichter lachen?

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal



Lösung: Es lässt sich schnell probieren, dass zweimaliges Drücken nicht ausreicht. Mit dreimaligem Drücken auf die geeigneten Knöpfe lassen sich lauter lachende Gesichter erreichen. Die Abbildung zeigt, wie es gehen kann. Aber auch jede andere Reihenfolge, diese Knöpfe zu drücken, ist möglich.

18. Wie viele 2-stellige Zahlen gibt es, die um 50 größer sind als eine andere 2-stellige Zahl?

(**A**) 10 (**B**) 20 (**C**) 30 (**D**) 40 (**E**) 50

Lösung: Die kleinste 2-stellige Zahl ist 10, und die Zahl, die um 50 größer ist als 10, ist 60. Die größte 2-stellige Zahl ist 99, und die Zahl, die um 50 kleiner ist als 99, ist 49. Folglich haben alle Zahlen, die größer oder gleich 60 und kleiner oder gleich 99 sind, die Eigenschaft, dass sie um 50 verringert 2-stellig sind. Und das sind 40 Zahlen.

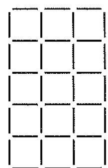
19. Als Cora, Fred und Alma aus dem Kino kommen, stecken sie jeder noch einen Flyer ein, entweder vom neuen Trickfilm oder vom neuen Abenteuerfilm. „Ich glaub, ich hab denselben Flyer wie Fred eingesteckt", sagt Cora. „Und ich glaube, ich hab denselben wie Alma", sagt Fred. Alma glaubt: „Genau zwei von uns haben den Trickfilmflyer." Als sie später in ihren Taschen nachgucken, stellen sie fest, dass alle drei sich falsch erinnert haben. Was trifft folglich zu?

(**A**) Cora hat den Flyer vom Abenteuerfilm.
(**B**) Cora hat einen anderen Flyer als Alma.
(**C**) Fred hat den Flyer vom Abenteuerfilm.
(**D**) Alma hat den Trickfilmflyer.
(**E**) Keine der Feststellungen (**A**) bis (**D**) trifft zu.

Lösung: Da sich sowohl Cora als auch Fred mit ihren Aussagen geirrt haben, haben sowohl Cora und Fred als auch Alma und Fred verschiedene Flyer. Da es nur 2 Sorten Flyer gibt, haben folglich Cora und Alma dieselbe Sorte, und Fred hat die andere Sorte. Da auch Alma sich irrt, haben die beiden Mädchen den Flyer vom Abenteuerfilm, womit die Antwort (**A**) richtig ist.

Wie viele Quadrate lassen sich insgesamt in der rechts abgebildeten Streichholzfigur finden?

Wem gelingt es, 9 Hölzchen so zu entfernen, dass die Figur aus den restlichen Hölzchen kein einziges Quadrat enthält?



20. Es gibt 2-stellige Zahlen mit folgender Eigenschaft: Subtrahieren wir 27 von einer solchen Zahl, so erhalten wir wieder eine 2-stellige Zahl. Diese besteht aus denselben Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, allerdings stehen sie in umgekehrter Reihenfolge. Wie viele solche Zahlen gibt es?

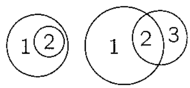
(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 13

$$\begin{array}{rcc} & \bigstar & \blacksquare \\ + & 2 & 7 \\ \hline & \blacksquare & \bigstar \end{array}$$

Lösung: Was in der Aufgabe für das Subtrahieren der Zahlen steht, gilt ebenso für das besser zu überschauende Addieren: Wir suchen eine 2-stellige Zahl, zu der wir 27 addieren, so dass die Summe die Ausgangszahl mit vertauschten Ziffern ist. Wir sehen schnell, dass wir keine Lösung erhalten, wenn wir für $\blacksquare$ eine der Zahlen 0, 1, 2 oder 3 setzen. Für jede der Zahlen 4, 5, 6, 7, 8 und 9 erhalten wir genau eine Lösung, wie die folgenden Rechnungen zeigen. Es gibt insgesamt also 6 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

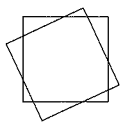
$$\begin{array}{rcc} & 1 & 4 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcc} & 2 & 5 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 5 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcc} & 3 & 6 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 6 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{rcc} & 4 & 7 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 7 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{rcc} & 5 & 8 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 8 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcc} & 6 & 9 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 9 & 6 \end{array}$$

21. Zeichne ich 2 Kreise, so entsteht eine Figur, die aus 2 oder aus 3 Teilen besteht. Wenn ich statt der 2 Kreise 2 Quadrate zeichne, gibt es ebenfalls verschiedene Möglichkeiten. Aus wie vielen Teilen besteht die entstehende Figur *höchstens*?



(**A**) aus 3 Teilen (**B**) aus 5 Teilen (**C**) aus 6 Teilen (**D**) aus 8 Teilen (**E**) aus 9 Teilen

Lösung: Bei 2 Quadraten kann die entstehende Figur aus höchstens 9 Teilen bestehen, eine Möglichkeit dafür ist rechts zu sehen. Dass sich nicht mehr als 9 Teile erreichen lassen, sehen wir wie folgt: Liegen die Quadrate nebeneinander, so gibt es nur 2 Teile. Ist ein Quadrat über das andere geschoben, so bildet der Bereich, der zu beiden Quadraten gehört, einen zusammenhängenden Teil. Alle anderen Teile müssen außerhalb dieses Bereichs liegen und auf ihrem Rand mindestens eine Quadratecke haben. Da es 8 Ecken gibt, können also höchstens 8 weitere Teile dazukommen.

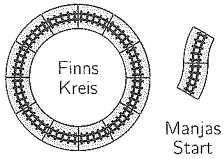


22. Bei der Wahl in Helgas Angelverein hatten sich 5 ältere Herren um den Vorsitz beworben. Es wurden insgesamt 36 Stimmen abgegeben. Der Sieger erhielt davon 12 Stimmen. Keiner der Kandidaten hat dieselbe Stimmenzahl wie ein anderer bekommen. Derjenige mit der geringsten Stimmenzahl bekam immerhin noch 4 Stimmen. Wie viele Stimmen erhielt der Zweitplatzierte?

(**A**) 8 (**B**) 8 oder 9 (**C**) 9 (**D**) 9 oder 10 (**E**) 10

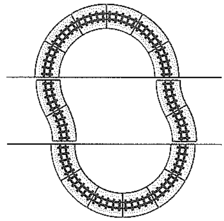
Lösung: Von den 36 abgegebenen Stimmen entfielen 12 auf den Sieger und 4 auf den Letztplatzierten. Für die drei anderen Kandidaten verblieben also $36 - 12 - 4 = 20$ Stimmen. Da keine zwei Kandidaten auf dieselbe Stimmenzahl kamen, erhielt der Kandidat mit der vierthöchsten Stimmenzahl mindestens 5 Stimmen, der mit der dritthöchsten mindestens 6 und der mit der zweithöchsten mindestens 7 Stimmen. Das sind insgesamt 18. Da die Summe 20 sein muss, muss mindestens einer der Kandidaten mehr Stimmen bekommen haben. Das kann nicht der mit der vierthöchsten Stimmenzahl sein, denn wenn er statt 5 Stimmen 6 bekommen hätte, müssten die anderen entsprechend mindestens 7 und 8 Stimmen bekommen haben und es wären zusammen mindestens $6 + 7 + 8 = 21$. Also ist die vierthöchste Stimmenzahl 5. Die beiden anderen können 6 und 9 *oder* 7 und 8 sein, der Zweitplatzierte hat also 8 *oder* 9 Stimmen bekommen.

23. Manja und Finn haben die alte Eisenbahn ihres großen Bruders entdeckt.



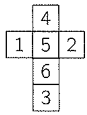
Für die Gleise liegen lauter gleiche Teile  bereit. Schnell steckt Finn einen Kreis zusammen. Manja will es anders versuchen und beginnt mit zwei Teilen wie im Bild zu sehen. Wie viele Teile insgesamt braucht sie mindestens für eine geschlossene Fahrstrecke?

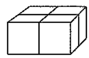
(**A**) 14 (**B**) 16 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 24



Lösung: Die kleinste Anzahl von Gleisteilen, die für eine geschlossene Fahrstrecke benötigt wird, ist 12. Mit 12 Teilen erhält man gerade Finns Kreis. Jede andere *geschlossene* Fahrstrecke aus solchen Teilen muss 12 Teile enthalten, die für sich genommen einen Kreis bilden. Von den restlichen muss die Hälfte in Fahrtrichtung nach links, die andere Hälfte nach rechts zeigen, damit sich die Kurven insgesamt ausgleichen. Da Manjas Startteile in verschiedene Richtungen zeigen, muss ihre geschlossene Fahrstrecke noch mindestens die 12 weiteren Teile enthalten, die für sich genommen einen Kreis bilden. Gäbe es jedoch nur diese 12 als zusätzliche Teile, würden sich diese zu einem Kreis schließen, ohne dass Manjas Startteile darin Platz finden würden. Also muss Manjas Fahrstrecke aus mindestens 16 Teilen bestehen. Das ist möglich, wie im Bild zu sehen ist.

24. Vier identische Würfel, deren Netz rechts gezeichnet ist, sollen so zu einem $2 \times 2 \times 1$-Quader zusammengeklebt werden, dass Seiten, die miteinander verklebt sind, mit derselben Zahl beschriftet sind. Wir bilden die Summe aller Zahlen, die auf der Oberfläche des Quaders stehen. Welches ist die größte Summe, die sich so erzielen lässt ?



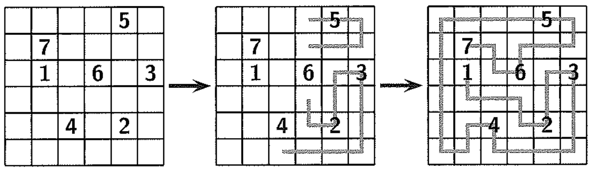


(**A**) 64 (**B**) 66 (**C**) 68 (**D**) 70 (**E**) 72

Lösung: Von jedem der 4 Würfel sind 2 Seiten nicht zu sehen. Damit die Summe der Zahlen auf der Oberfläche möglichst groß wird, müssen die Zahlen auf den miteinander verklebten Seiten möglichst klein sein. Da sich bei den 4 Würfeln die Seiten mit der 1 und der 2 gegenüberliegen, kann man die Würfel *nicht* so verkleben, dass all diese 8 Seiten verklebt werden. Wir können jedoch die 4 Seiten mit der 1 und die 4 Seiten mit der 3 miteinander verkleben. Sichtbar sind dann von jedem Würfel die 2, die 4, die 5 und die 6. Die größte Summe ist also $4 \cdot (2 + 4 + 5 + 6) = 4 \cdot 17 = 68$.

Kopfnüsse II: Zahlenwege

Die Zahlen in den Feldern sind von 1 bis zur größten Zahl 7 bzw. 8 in aufsteigender Reihenfolge durch einen zusammenhängenden Weg miteinander zu verbinden. Dabei darf der Weg nur waagerecht oder senkrecht zwischen den Kästchen-Mittelpunkten verlaufen. Jedes Kästchen muss genau einmal passiert werden, und der Weg darf sich nirgendwo schneiden. Hier ist ein Beispiel:



Wer findet die richtigen Wege?

2					6	
	4			1		
			7			3
				5		

						5
					3	
		1				
			7	2		
	6					
4						

		7				
					4	
		5				
				2		
	1					
6						3

	4					7	
							2
				1	8		
5			3		6		

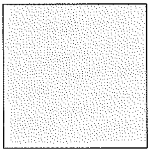
				6			
					3		
		8					
				1			4
			2		7		
	5						

Die Zahlen von 1 bis 9 werden in eine Reihe geschrieben. Alle Zahlen von der 4 bis zur 5 haben die Summe 45. Alle Zahlen von der 3 bis zur 4 haben die Summe 34. Alle Zahlen von der 2 bis zur 3 haben die Summe 23. Und alle Zahlen von der 1 bis zur 2 haben die Summe 12.

Wer findet heraus, in welcher Reihenfolge die Zahlen aufgeschrieben sind?

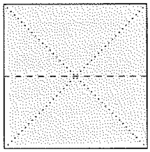
Ein Würfel zum Aufpusten

Zum Basteln des Würfels wird ein quadratisches Stück Papier benötigt. So etwas lässt sich schnell aus einem A4-Blatt herstellen.

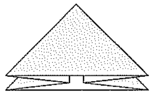


Nehmen wir also ein quadratisches Blatt Papier zu Hand.

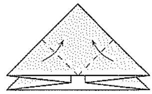
Tipp für die Verwendung von zweifarbigem Papier: Die oben liegende Seite ist am Ende außen zu sehen!



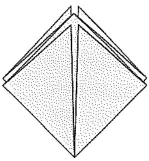
An den gestrichelten Linien nach vorne und an den gepunkteten Linien nach hinten falten und wieder auseinanderklappen.

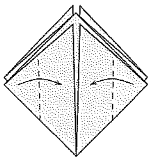


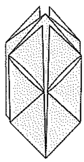
Die rechte und die linke Kante lassen sich nun leicht zwischen die beiden Dreiecke drücken.



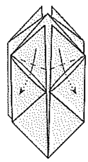
Die beiden Ecken nach oben auf die Spitze falten. Das gleiche auf der Rückseite wiederholen.



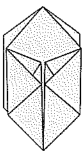


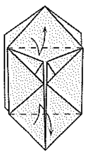


Die beiden Ecken auf die Mitte falten. Das gleiche auf der Rückseite wiederholen.



Die beiden kleinen Ecken in die entstandenen Laschen falten. Das gleiche auf der Rückseite wiederholen.

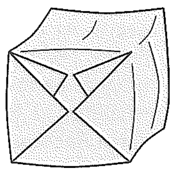




An den gestrichelten Linien die obere und die untere Spitze in die Mitte falten und wieder auseinanderklappen.

Unten befindet sich ein kleines Loch. Jetzt heißt es vorsichtig hineinpusten, bis ein Würfel entsteht.

Voila!



(A) Welche Kantenlänge hat ein Würfel, der aus einem Papierquadrat mit der Seitenlänge 20 cm gefaltet wird?

(B) Wenn ich einen Würfel mit der Kantenlänge 4 cm falten möchte, welche Maße muss dann das Ausgangsquadrat haben?

(C) Wie viele gleich große kleine Würfel würden in einen großen Würfel passen, dessen Kanten genauso lang sind wie die Seiten der Quadrate, aus denen die kleinen Würfel gefaltet wurden?

Ordnung muss sein

(A)

Der Aufzug zum Aussichtsturm fasst höchstens 30 Personen. Davor warten ungeduldig 6 Reisegruppen zu 12, 13, 15, 16, nochmal 16 und 17 Personen. Als sich herausstellt, dass jede der angemeldeten 6 Gruppen auch im Fahrstuhl unbedingt zusammenbleiben will, sagt der Fahrstuhlführer: „Na gut, aber 6-mal fahr ich nicht. Bitte finden Sie sich so zusammen, dass so wenig wie möglich Fahrten nötig sind."

Wie viele Fahrten sind das?

(C)

Anna, Elli und Ulla treffen sich, um für die Schuldekoration der Froschkönig-Grundschule lauter Frösche zu falten. Nachdem sie eine Weile geübt haben, geht es los. Ulla, die Älteste, zählt, was jeder schafft und will nachher wissen, wer am schnellsten und wer am langsamsten war. Nach einer Stunde stellt sie fest, dass Anna und Elli zusammen dreimal so viel geschafft haben wie sie selbst. Und Ulla schafft auch in zwei Stunden nie mehr als Elli in einer Stunde.

Lässt sich jetzt sagen, wer am schnellsten und wer am langsamsten ist?

(B)

Aaron, Galja, Isabelle und Johann waren in den Ferien gemeinsam an der Nordsee. Fast jeden Tag haben sie Muscheln gesammelt. Als sie zum Schluss die Muscheln zählen, hat Isabell am meisten. Und Galja stellt befriedigt fest, dass sie nicht am wenigsten hat. Haben die beiden Mädchen zusammen mehr oder weniger Muscheln gesammelt als die Jungen?

Zahlenspaß

Bei den folgenden Aufgaben sind Darstellungen gegebener Zahlen mit Hilfe einstelliger Zahlen zu finden. Die Zahlen können entweder aneinandergehängt werden, so dass mehrstellige Zahlen entstehen (z. B. aus 2 und 3 und 4 wird 234), oder durch Rechenzeichen verknüpft werden. Dabei ist stets die natürliche Reihenfolge der Zahlen beizubehalten.

Beispiel: Die Zahl 16 ist mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu schreiben. Dafür gibt es nicht nur eine Möglichkeit, denn es ist z. B. $16 = 12 + 34 - 5 \cdot 6$, aber auch $16 = 1 + 2 + 3 \cdot 4 - 5 + 6$.

Und es geht sogar mit weniger Zahlen, denn es ist auch $16 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 + 5$.

Wichtig ist, dass die Zahlen immer in der natürlichen Reihenfolge auftreten und dass keine Klammern gesetzt werden.

(D) Schreibe die Zahl 11 mithilfe der Zahlen 1, 2, 3 und 4.

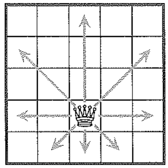
(E) Schreibe die Zahl 14 mithilfe der Zahlen von 1 bis 6.

(F) Schreibe die Zahl 3 mithilfe der Zahlen von 1 bis 8.

(G) Schreibe die Zahl 2 mithilfe der Zahlen von 1 bis 9.

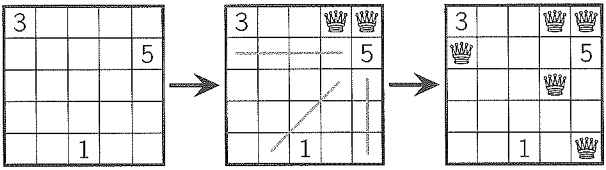
Welches ist die größte Zahl, die sich mit den Ziffern von 1 bis 9 schreiben lässt? Wer findet auch die zweitgrößte?

Kopfnüsse III: Fünf Damen



In den folgenden Knobeleien sollen 5 Spielsteine nach einer bestimmten Regel auf ein 5 × 5-Quadrat platziert werden. Es sollen Damen aus dem Schachspiel sein, die auf dem Brett in jede Richtung beliebig weit ziehen und schlagen dürfen (siehe Bild). Eine Dame bedroht also alle Felder, die sie senkrecht, waagerecht und diagonal erreichen kann. Steht jedoch eine andere Figur, in den Aufgaben also eine andere Dame, in einer Schlag-Richtung, so sind die in dieser Schlag-Richtung dahinter liegenden Felder nicht zu erreichen.

Nun kommen wir zur Aufgabe. Auf den Feldern des kleinen 5 × 5-Schachbretts sind fünf Damen unterzubringen. Die Zahlen in einigen Feldern geben die Anzahl der Damen an, die dieses Feld bedrohen. Auf den Feldern mit den Zahlen selbst dürfen keine Damen stehen.
Hier ist ein Beispiel, bei dem eines der Felder von genau 3 Damen, eines von genau 5 Damen und eines von genau einer Dame bedroht ist:



Wer kann die folgenden Aufgaben lösen?

		4		
				0
1				

			3	
5				
	4			

		1		
		2		
		4		
			2	

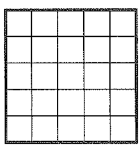
1	1			
		0		

			5	
	4			

	2			
				2
		2		
2				
		1		

Die Kopfnüsse sind dem Buch „Das große Buch der Kopfnüsse" von W. A. Portugalow entnommen, das 2007 für die Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus erschien.

Wer diese Aufgaben gelöst hat, hat vielleicht bemerkt, dass sich stets einige der Damen gegenseitig bedrohen. Das zu vermeiden, ist gar nicht leicht.
Wer schafft es, auf dem leeren 5 × 5-Feld 5 Damen so zu platzieren, dass sich die Damen nicht gegenseitig bedrohen?



Klassenstufen 7 und 8

1. Samstags fährt ab 6 Uhr morgens stündlich ein ICE von Hamburg nach München. Die Fahrt dauert etwa 6 Stunden. Wie viele ICEs sind um 12:30 Uhr von Hamburg nach München unterwegs?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

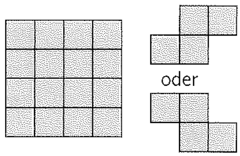
Lösung: Um 12:30 Uhr sind *die* Züge auf der Strecke, die um 7, um 8, um 9, um 10, um 11 und um 12 Uhr in Hamburg losgefahren sind, insgesamt also 6 Züge.

2. Die Summe zweier Zahlen ist 104. Die beiden Zahlen unterscheiden sich um 10, enden also auf dieselbe Ziffer. Welche Ziffer ist das?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

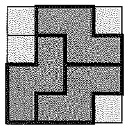
Lösung: Die beiden Zahlen sind 47 und 57, die gesuchte Ziffer ist 7.

3. Aus dem abgebildeten quadratischen Stück Papier schneidet Simon Teile in der daneben abgebildeten Form aus. Wie viele kleine Quadrate bleiben übrig, wenn Simon so viele dieser Teile wie möglich ausschneidet?



(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Simon kann nicht 4 Teile ausschneiden, da nicht jedes Eckquadrat zu einem Teil gehören kann, wie man sich leicht überlegt. Simon kann höchstens 3 solche Teile ausschneiden, eine Möglichkeit ist rechts abgebildet. Von den 16 kleinen Quadraten bleiben 4 Quadrate übrig.



4. Da ich weiß, dass $\frac{1111}{101} = 11$ ist, kann ich leicht ausrechnen: $\frac{3333}{101} - \frac{6666}{303} =$

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 11 (**E**) 33

Lösung: Wir rechnen: $\frac{3333}{101} - \frac{6666}{303} = \frac{3 \cdot 1111}{101} - \frac{6 \cdot 1111}{3 \cdot 101} = 3 \cdot \frac{1111}{101} - 2 \cdot \frac{1111}{101} = 1 \cdot \frac{1111}{101} = 11.$

In den vier Kryptogrammen sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass richtig ausgeführte Additionen entstehen. In jedem der Kryptogramme stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern. Wer findet für die Aufgaben mehr als nur eine Lösung?

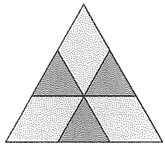
K A E N	K A E N	K A E N	K A E N
+ G U R U	+ G U R U	+ G U R U	+ G U R U
Z W E I	N U L L	E I N S	D R E I

5. Mareike hat im Herbst vor dem Haus Tulpenzwiebeln gesteckt: 6 rote, 3 violette, 10 weiße und 3 gelbe. Gerade haben sie zu blühen begonnen. Wie viele Tulpen müssen mindestens aufgeblüht sein, damit *ganz bestimmt* zwei Blüten in derselben Farbe zu sehen sind?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 10 (**E**) 11

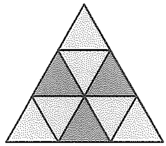
Lösung: Denkbar ist, dass zunächst von jeder der 4 Sorten *eine* Tulpe aufblüht. Erst wenn die 5. Tulpe aufblüht, ist *ganz bestimmt* eine Farbe doppelt zu sehen. Also ist (**B**) die Lösung.

6. Luis legt drei identische gleichseitige Dreiecke und drei identische Rauten zu einem großen gleichseitigen Dreieck zusammen. Welchen Anteil an der Fläche des großen Dreiecks haben die drei kleinen Dreiecke zusammen?



(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{1}{5}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

Lösung: Durch drei zusätzliche Strecken können wir das Dreieck in 9 identische gleichseitige Dreiecke zerlegen (s. Bild). Jede der Rauten in Luis' Dreieck ist also doppelt so groß wie jedes der kleinen Dreiecke. Die drei kleinen Dreiecke haben zusammen an der Fläche des großen Dreiecks einen Anteil von $\frac{1}{3}$.



7. Beim Nordsee-Wasser kann das Verhältnis der Masse von Salz zur Masse von Wasser mit 7 : 193 angegeben werden. Wie viel Salz ist in 1000 kg Nordsee-Wasser enthalten?

(**A**) etwa 35 kg (**B**) etwa 186 kg (**C**) etwa 193 kg (**D**) etwa 200 kg (**E**) etwa 350 kg

Lösung: Da sich die Masse von Salz zu der von Wasser wie 7 : 193 verhält, erhalte ich „Nordsee-Wasser", wenn ich 7 kg Salz in 193 kg Wasser auflöse, und zwar insgesamt 200 kg. Diese 200 kg sind ein Fünftel von 1000 kg, also sind in 1000 kg Nordsee-Wasser $5 \cdot 7\,\text{kg} = 35\,\text{kg}$ Salz enthalten.

8. Die durchschnittliche Anzahl von Kindern in 5 Familien ist ganz sicher nicht

(**A**) 1,2 (**B**) 1,6 (**C**) 2,2 (**D**) 2,4 (**E**) 2,5

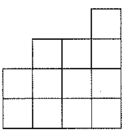
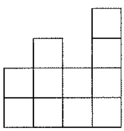
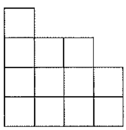
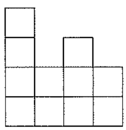
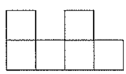
Lösung: Die durchschnittliche Anzahl von Kindern in den Familien ist gleich der Gesamtzahl der Kinder dividiert durch die Anzahl der Familien, d. h. durch 5. Die Gesamtzahl der Kinder ist also 5-mal so groß wie die durchschnittliche Anzahl. Damit ist (**E**) die Lösung, denn $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$. Das kann natürlich nicht die Gesamtzahl der Kinder sein.

9. In jedem Kästchen eines 4×4-Feldes sind einer oder mehrere Würfel übereinander gelegt – wie viele das jeweils sind, ist rechts im Bauplan zu sehen. Was sieht man, wenn man von hinten auf das Würfel-Bauwerk schaut?

hinten

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

vorn

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: In jeder Spalte sind so viele Würfel zu sehen, wie die größte Zahl in der Spalte angibt, also von links nach rechts 4, 3, 3, 2. Von hinten ist die Reihenfolge umgekehrt, das zeigt Bild (**A**).

10. Zum Geburtstag unserer Bürgermeisterin ist in der Zeitung ein Geburtstagsrätsel abgedruckt: „Die Zahl, die das Alter der Bürgermeisterin angibt, ist die kleinste, deren Ziffern das Produkt 24 ergeben. Und die Summe der Ziffern dieser Zahl verrät das Alter ihrer Tochter.“ Wie alt ist die Tochter der Bürgermeisterin?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

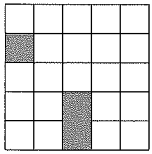
Lösung: Die einzigen Möglichkeiten, 24 als Produkt von zwei einstelligen natürlichen Zahlen zu schreiben, sind $3 \cdot 8$ und $4 \cdot 6$. Die zweistelligen Zahlen mit Ziffernprodukt 24 sind also 38, 46, 64 und 83. Die kleinste, 38, hat die Ziffernsumme 11 – das ist das gesuchte Alter der Tochter.

11. Wie viele Pluszeichen müssen in der Gleichung $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 27$ durch Malzeichen ersetzt werden, damit die Rechnung stimmt?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) Das ist unmöglich.

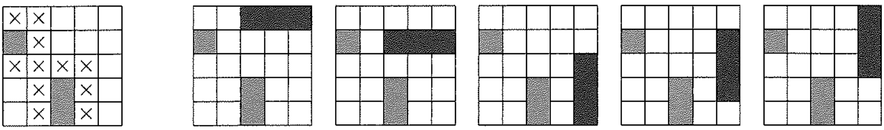
Lösung: Wegen $1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $1+2\cdot3+4+5 = 16$, $1+2+3\cdot4+5 = 20$, $1+2+3+4\cdot5 = 26$ reicht *ein* Malzeichen nicht aus. Zwei Malzeichen genügen, denn es gilt $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 27$.

12. In der Pause spielen Thao und Irene „Schiffe versenken“ auf einem 5×5-Quadrat. Bevor es losgeht, sind die drei „Schiffe“ zu platzieren, und zwar so, dass sie sich nirgends berühren, auch nicht nur an einer Ecke. Das 1×1-Schiff  und das 2×1-Schiff  hat Thao schon platziert (siehe Bild). Wie viele Möglichkeiten gibt es für das 3×1-Schiff  ?



(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Die links markierten Felder dürfen nicht zum 3×1-Schiff gehören. Folglich gibt es genau 5 mögliche Positionen für das 3×1-Schiff.



13. Am großen kreisrunden Brunnen treten Hanni und Paul mit ihren ferngesteuerten Autos gegeneinander an. Die Autos starten an gegenüberliegenden Punkten des Brunnens und fahren so schnell es geht um den Brunnen herum. Nachdem Hannis Auto genau 4 Runden absolviert hat, wird es von Pauls Auto eingeholt. Wievielmal schneller ist Pauls Auto als das von Hanni?

(**A**) $\frac{4}{3}$-mal (**B**) $\frac{8}{7}$-mal (**C**) $\frac{8}{5}$-mal (**D**) $\frac{9}{8}$-mal (**E**) $\frac{10}{9}$-mal

Lösung: Wenn Pauls Auto Hannis Auto einholt, ist Hannis Auto 4 Runden bzw. 8 halbe Runden gefahren und Pauls Auto in derselben Zeit eine halbe Runde mehr, also 9 halbe Runden. Damit ist Pauls Auto $\frac{9}{8}$-mal so schnell wie Hannis Auto.

14. Für die natürlichen Zahlen x, y und z gilt: $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$, $z \cdot x = 35$. Wie groß ist $x + y + z$?

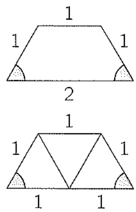
(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Da $14 = 2 \cdot 7$, $10 = 2 \cdot 5$ und $35 = 5 \cdot 7$ ist, finden wir schnell: $x = 7$, $y = 2$ und $z = 5$. Also ist $x + y + z = 14$.

15. Ein Trapez mit ganzzahligen Seitenlängen hat den Umfang 5. Wie groß sind die beiden kleinsten Innenwinkel des Trapezes?

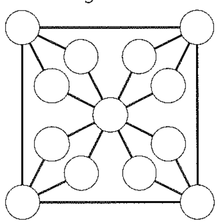
(**A**) 60° und 60° (**B**) 30° und 30° (**C**) 45° und 45° (**D**) 30° und 60° (**E**) 45° und 90°

Lösung: Die Seitenlängen des Trapezes müssen $1, 1, 1, 2$ sein, die Länge 2 hat eine der beiden zueinander parallelen Seiten. Durch zwei Strecken vom Mittelpunkt der längsten Seite zu den anderen beiden Eckpunkten kann das Trapez in drei gleichseitige Dreiecke zerlegt werden, denn die eingezeichneten Strecken sind offensichtlich parallel zu den Seiten des Trapezes und haben damit die Länge 1. Die beiden kleinsten Innenwinkel des Trapezes (im Bild grau markiert) sind als Winkel im gleichseitigen Dreieck beide 60° groß.

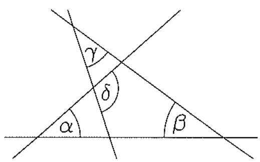


In die leeren Felder sind die Zahlen von 1 bis 13 so einzutragen, dass die Summe der Zahlen in den Eckpunkten der vier Rauten und in den Eckpunkten des großen Quadrats jeweils gleich ist, und zwar ...

... gleich 25 *... gleich 28* *... gleich 31*

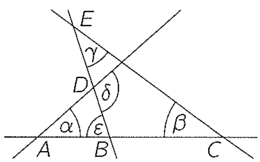


16. Die im Bild markierten Winkel betragen: $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ und $\gamma = 35°$. Wie groß ist δ? (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*)



(**A**) 100° (**B**) 105° (**C**) 120° (**D**) 125° (**E**) 130°

Lösung: Für den Außenwinkel ε des Dreiecks BCE gilt $\varepsilon = \beta + \gamma$. Der gesuchte Winkel δ ist Außenwinkel des Dreiecks ABD, also gilt $\delta = \alpha + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma = 55° + 40° + 35° = 130°$.



17. An der Tafel stehen der Größe nach geordnet alle 4-stelligen Zahlen, die eine 2, eine 0, eine 1 und eine 3 als Ziffer enthalten. Welches ist die größte Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen?

(**A**) 702 (**B**) 703 (**C**) 693 (**D**) 793 (**E**) 198

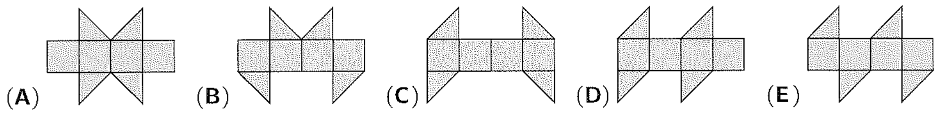
Lösung: Die beiden Zahlen, zwischen denen die größte Differenz auftritt, haben sicher verschiedene Tausender, also 1 und 2 oder 2 und 3. Die größte Zahl an der Tafel mit Tausender 1 ist 1320 und die kleinste mit Tausender 2 ist 2013. Ihre Differenz ist 693. Im zweiten Fall sind die beiden Zahlen 2310 und 3012 mit der Differenz 702, was größer als 693 ist. Also ist (**A**) richtig.

18. Beim Dosenwerfen auf dem Jahrmarkt wirft Lenja immer abwechselnd daneben oder landet einen Treffer, egal wie sehr sie sich anstrengt. Ihre Trefferquote hängt davon ab, wie viele Bälle sie wirft und ob sie mit einem Treffer beginnt oder mit einem Fehlwurf. Wie groß ist ihre Trefferquote sicher nicht?

(**A**) 40 % (**B**) 45 % (**C**) 48 % (**D**) 50 % (**E**) 60 %

Lösung: Da sich Treffer und Fehlwürfe abwechseln, ist die Differenz zwischen der Zahl der Treffer und der Zahl der Fehlwürfe entweder 0 oder 1. Wir wandeln die vorgeschlagenen Prozentzahlen in Brüche um und kürzen so weit wie möglich: (**A**) $40\,\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, (**B**) $45\,\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, (**C**) $48\,\% = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$, (**D**) $50\,\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, (**E**) $60\,\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$. Trefferquote (**A**) ist möglich (2 Treffer, 3 Fehlwürfe), ebenso (**C**) (12 Treffer, 13 Fehlwürfe), (**D**) (1 Treffer, 1 Fehlwurf) und (**E**) (3 Treffer, 2 Fehlwürfe). In (**B**) würden sich die Anzahl der Treffer, 9, und die Anzahl der Fehlwürfe, 11, um 2 unterscheiden. Da die Differenz 1 sein muss, ist das nicht möglich.

19. Genau eines der folgenden Netze kann *nicht* zu einem Würfel gefaltet werden. Welches?



Lösung: Bei vier Netzen ergeben die jeweils vier Dreiecke zusammen zwei vollständige Würfelflächen. Bei Netz (**C**) fügen sich zwar die oberen Dreiecke zu einer Würfelfläche zusammen, die unteren überlappen sich jedoch. Am besten sieht man das, wenn man die Netze ausschneidet und die Würfel zu falten versucht.

20. Bei meinem Onkel habe ich einen Puzzle-Würfel gefunden. Dieser ist aus lauter gleichen kleineren Würfeln zusammengesetzt. Die kleinen Würfel sind mit einem Gummifaden untereinander verbunden und können durch Biegen und Drehen in eine lange Reihe gebracht werden. Diese Würfelreihe ist 40 cm lang. Welche der folgenden Längenangaben könnte die Kantenlänge eines kleinen Würfels sein?

(**A**) 1 cm (**B**) 2 cm (**C**) 5 cm (**D**) 8 cm (**E**) 10 cm

Lösung: Wäre die Kantenlänge eines kleinen Würfels wie in (**A**) 1 cm, so gäbe es 40 kleine Würfel, in (**B**) 20, in (**C**) 8, in (**D**) 5 und in (**E**) 4. Damit aus den kleinen Würfeln ein großer Würfel gebaut werden kann, muss die Anzahl dieser kleinen Würfel eine Kubikzahl sein. Das trifft bei unserer Aufgabe nur für $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ zu. Die kleinen Würfel haben dann die Kantenlänge 5 cm.

21. Meine Schwester hat jeden Tag von Montag bis Freitag Unterricht. Seitdem sie in die 6. Klasse geht, hat sie insgesamt 31 Stunden pro Woche, jede 45 min lang. Zwischen je zwei Stunden an einem Tag ist immer eine Pause. Wie viele Pausen hat meine Schwester dann pro Woche?

(**A**) 23 (**B**) 25 (**C**) 26
(**D**) 30 (**E**) Das hängt von der Verteilung der Stunden ab.

Lösung: Zwei in der Woche aufeinanderfolgende Stunden werden entweder durch eine „Pause" unterbrochen (wenn die Stunden am selben Tag sind) oder durch eine „Nacht" (wenn die Stunden an aufeinanderfolgenden Tagen sind). Insgesamt gibt es bei 31 Stunden 30 Unterbrechungen, davon 4 Nächte, also $30 - 4 = 26$ Pausen. Insbesondere ist die Anzahl der Pausen unabhängig von der genauen Stundenverteilung, vorausgesetzt an jedem der 5 Tage gibt es mindestens eine Stunde.

Wie lauten die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in den folgenden Multiplikationsaufgaben?

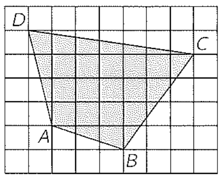
$\star 8 \cdot \star = 8\star\star$ $\qquad$ $1\star \cdot \star\star 1 = 1\star\star 1$

22. Im Zuchtkalender sind die Geburtstage der 5 Zwergpudel Ary, Babu, Cory, Dax und Elco eingetragen: 20.2.2005, 12.3.2004, 20.3.2005, 12.4.2004, 23.4.2005. Ary und Elco sind im selben Monat geboren, ebenso wie Babu und Cory. Ary und Cory wurden zwar in verschiedenen Monaten, jedoch am selben Tag geboren. Dasselbe trifft auch für Dax und Elco zu. Welcher der 5 Zwergpudel ist am jüngsten?

(**A**) Ary (**B**) Babu (**C**) Cory (**D**) Dax (**E**) Elco

Lösung: Wir müssen *den* Pudel finden, der am 23.4.2005 geboren wurde. Ary und Cory wurden am selben Tag geboren, also am 12.3. und 12.4 oder am 20.2. und 20.3. Dasselbe trifft auf Dax und Elco zu. Damit muss Babu am 23.4. geboren sein, er ist der Jüngste.

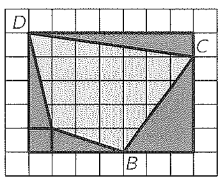
Ein ähnliches, etwas leichteres Problem wurde in Aufgabe 18 in Klassenstufe 3/4 gestellt.



23. Die Quadrate im rechts abgebildeten Gitter haben eine Seitenlänge von 1 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$?

(**A**) $21\,\text{cm}^2$ (**B**) $22\,\text{cm}^2$ (**C**) $24\,\text{cm}^2$ (**D**) $25\,\text{cm}^2$ (**E**) $26\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir ergänzen $ABCD$ durch vier rechtwinklige Dreiecke und ein kleines Quadrat zu einem großen Rechteck (s. Bild), das einen Flächeninhalt von $7\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 35\,\text{cm}^2$ hat. Das Quadrat ist $1\,\text{cm}^2$ groß und die Dreiecke im Uhrzeigersinn, beginnend mit dem größten $\frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$, $\frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 1{,}5\,\text{cm}^2$, $\frac{1}{2} \cdot 1\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$ und $\frac{1}{2} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 3{,}5\,\text{cm}^2$. Der Flächeninhalt von $ABCD$ ist also $35\,\text{cm}^2 - 1\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 1{,}5\,\text{cm}^2 - 2\,\text{cm}^2 - 3{,}5\,\text{cm}^2 = 21\,\text{cm}^2$.



24. Ich denke mir eine 4-stellige Zahl, streiche in Gedanken eine Ziffer und erhalte so eine 3-stellige Zahl. Die Summe aus dieser 3-stelligen Zahl und der gedachten 4-stelligen Zahl ist 5271. Damit lässt sich herausfinden, welche Ziffer ich in Gedanken gestrichen habe. Es war eine

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 8 (**E**) 9

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & A & B & C \\ \hline 5 & 2 & 7 & 1 \end{array}$$

Lösung: Die gestrichene Ziffer muss die letzte gewesen sein, denn sonst würde die Summe 5271 wie das Doppelte der Endziffer der ursprünglichen Zahl enden, also auf eine gerade Ziffer, d. h. ganz gewiss nicht auf 1. Die zu lösende Rechnung ist rechts zu sehen. Bei A beginnend können schrittweise die Ziffern gefunden werden.

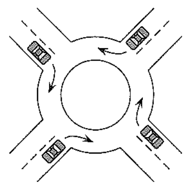
Wer erkennt, dass $5271 = ABCD + ABC = (10 \cdot ABC + D) + ABC = 11 \cdot ABC + D$ gilt, findet D, ohne die anderen Ziffern kennen zu müssen, als Rest der Division von 5271 durch 11. Wegen $5271 = 11 \cdot 479 + 2$, ist $D = 2$ die gesuchte Ziffer.

25. Im letzten Jahr hatten Karl und Konrad noch gemeinsam am Seifenkistenrennen teilgenommen. In diesem Jahr versuchten sie getrennt ihr Glück. Am Ende kamen vor Karl doppelt so viele Teilnehmer ins Ziel wie hinter Konrad. Und vor Konrad lagen dreimal so viele Teilnehmer wie hinter Karl. Karl belegte Platz 21. Welchen Platz belegte Konrad?

(**A**) den 11. (**B**) den 16. (**C**) den 24. (**D**) den 28. (**E**) den 31.

Lösung: Da Karl 21. wurde, sind vor ihm 20 Teilnehmer ins Ziel gekommen – doppelt so viele wie hinter Konrad lagen, was dann also 10 waren. Die Zahl der Teilnehmer hinter Karl bezeichnen wir mit x. Vor Konrad lagen damit $3x$ Teilnehmer. Da Karl genauso viele Gegner hatte wie Konrad, gilt $x + 20 = 10 + 3x$, woraus $x = 5$ folgt. Vor Konrad kamen folglich $3x = 15$ Teilnehmer ins Ziel, er belegte also Platz 16.

26. Vier Autos fahren gleichzeitig in einen Kreisverkehr, jedes aus einer anderen Richtung (siehe Bild). Jedes der Autos fährt weniger als eine ganze Runde und alle Autos verlassen den Kreisverkehr in unterschiedliche Richtungen. Wie viele mögliche Kombinationen gibt es für die Autos, den Kreisverkehr zu verlassen?



(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 24 (**E**) 81

Lösung: Wir nummerieren die Ein- bzw. Ausfahrten mit 1, 2, 3, 4, und ordnen den einfahrenden Autos 1, 2, 3, 4 mögliche Ausfahrkombinationen zu. Auto 1 kann nicht in Richtung 1 ausfahren. Angenommen, Auto 1 fährt bei 2 aus. Dann gibt es nach den Bedingungen der Aufgabe folgende Möglichkeiten für die anderen Autos: $2 \to 1$, $3 \to 4$, $4 \to 3$ oder $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$ oder $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$.

In den anderen beiden Fällen, wenn Auto 1 in Richtung 3 bzw. 4 ausfährt, ergeben sich in analoger Weise je drei weitere Fälle. Insgesamt gibt es 9 mögliche Kombinationen. In der Tabelle rechts sind alle Fälle systematisch aufgelistet.

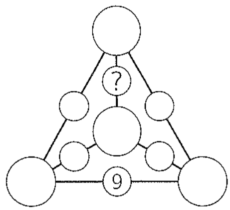
rein	1	2	3	4
raus	2	1	4	3
raus	2	3	4	1
raus	2	4	1	3
raus	3	1	4	2
raus	3	4	1	2
raus	3	4	2	1
raus	4	1	2	3
raus	4	3	1	2
raus	4	3	2	1

27. Die Mutter bäckt sechs Eierpfannkuchen. Den ersten (1) füllt sie mit Aprikosen, den zweiten (2) mit Erdbeeren, den dritten (3) mit Kirschen, den vierten (4) mit Pflaumen, den fünften (5) mit Himbeeren und den sechsten (6) mit Blaubeeren. Während sie bäckt, kommt ab und zu eines der Kinder in die Küche gelaufen und nimmt sich den heißesten Pfannkuchen. In welcher Reihenfolge sind die Pfannkuchen ganz bestimmt nicht gegessen worden?

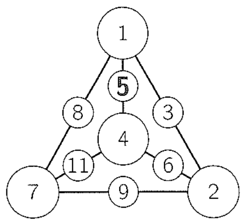
(**A**) 123456 (**B**) 125436 (**C**) 325461 (**D**) 254316 (**E**) 456231

Lösung: In einer möglichen Reihenfolge kann auf jede Pfannkuchennummer eine beliebige größere folgen. Wenn jedoch eine kleinere Nummer folgt, dann muss diese von den Nummern der bereits gebackenen, aber noch nicht weggenommenen Pfannkuchen die größte sein. Das ist bei den Antwortmöglichkeiten (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) erfüllt. Die Reihenfolge (**E**) hingegen ist nicht möglich. Auf die 6 müsste 321 folgen und nicht 231 wie angegeben.

28. In jeden der Kreise in der abgebildeten Figur soll eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 11 eingetragen werden, so dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt. Dabei soll in jedem kleinen Kreis die Summe der Zahlen aus den beiden benachbarten großen Kreisen stehen. Die 9 ist schon eingetragen. Für welche Zahl steht das Fragezeichen?

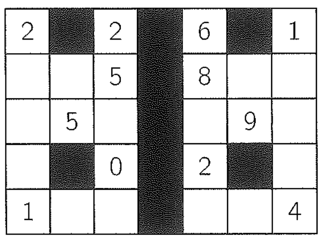


(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 11



Lösung: Die 1 und die 2 stehen ganz sicher in einem der großen Kreise, die 3 gehört als Summe der beiden in den kleinen Kreis dazwischen. Die 4 steht in einem großen Kreis, denn sonst wäre in einem benachbarten großen Kreis eine Zahl größer als 4, da 1, 2 und 3 nicht mehr dafür in Frage kommen. Im kleinen Kreis zwischen 1 und 4 steht die 5, zwischen 2 und 4 die 6. Nun muss auch die 7 in einem großen Kreis stehen. Damit stehen die Zahlen in den großen Kreisen fest: 1, 2, 4 und 7. Die einzige Möglichkeit, 9 zu kombinieren, ist $9 = 2 + 7$, also sind 2 und 7 zur 9 benachbart. In den beiden anderen großen Kreisen stehen 1 und 4, ihre Summe ist die gesuchte Zahl, also 5. Für die fertige Figur gibt es 4 Möglichkeiten. Eine ist abgebildet, die anderen erhält man durch Vertauschen von 2 und 7 bzw. 1 und 4 und anschließendes Auffüllen.

Eine Quadratzahl ist eine Zahl, die Produkt einer natürlichen Zahl mit sich selbst ist, z. B. $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$ *oder* $441 = 21 \cdot 21 = 21^2$.
In das Kreuzzahlenrätsel sind waagerecht und senkrecht lauter Quadratzahlen einzutragen, wobei einige ihrer Ziffern bereits vorgegeben sind.



29. Wir werfen einen Spielwürfel und notieren die Summe aller sichtbaren Augen. Kommt der Würfel beispielsweise auf der 3 zu liegen, so notieren wir $1+2+4+5+6$, also 18. Bei jedem weiteren Wurf addieren wir die Summe aller sichtbaren Augen zur letzten notierten Zahl. So entsteht eine Liste von Zahlen. Je nachdem, wie die Abfolge der gewürfelten Zahlen ist, entstehen unterschiedliche Listen. Welches ist die größte Zahl, die *ganz sicher nicht* in einer solchen Liste vorkommen kann?

(**A**) 29 (**B**) 35 (**C**) 41 (**D**) 44 (**E**) 51

Lösung: Die Augensummen, die je Wurf gewürfelt werden können, sind 15, 16, 17, 18, 19 und 20. Nach *dem ersten* Wurf ist die kleinste mögliche Zahl in der Liste 15, die größte 20. Die Zahlen von 1 bis 14 sind nicht möglich. Nach *zwei* Würfen ist die kleinste mögliche Zahl $2 \cdot 15 = 30$, die größte $2 \cdot 20 = 40$. Die Zahlen von 21 bis 29 sind nicht möglich. Alle Zahlen zwischen 30 und 40 sind möglich, wie sich schnell überprüfen lässt. Nach *drei* Würfen ist die kleinste mögliche Zahl $3 \cdot 15 = 45$, die größte $3 \cdot 20 = 60$. Die Zahlen von 41 bis 44 sind nicht möglich. Alle Zahlen von 45 bis 60 können vorkommen. Wir sehen: Nur die Zahlen 29, 41 und 44 aus den Antwortmöglichkeiten können *ganz sicher nicht* in einer solchen Liste stehen. Die größte davon, 44, ist die gesuchte Zahl.

Wir zeigen nun noch, dass wirklich jede natürliche Zahl $m \geq 45$ in einer solchen Liste vorkommen kann. Wir wollen m als Summe der Zahlen von 15 bis 20 schreiben. Versuchen wir zuerst, so oft wie möglich den Summanden 15 zu verwenden, sagen wir k-mal, dann gilt $m = k \cdot 15 + r$, wobei r ein Rest zwischen 0 und 14 ist und $k \geq 3$, da $m \geq 45$ ist. Ist $r = 0$, sind wir schon fertig. Ist $1 \leq r \leq 5$, ersetzen wir eine 15 durch $15 + r$ und erhalten eine Lösung. Ist $6 \leq r \leq 10$, ersetzen wir zweimal eine 15 durch zwei Zahlen zwischen 16 und 20, und ist $11 \leq r \leq 14$ ersetzen wir dreimal eine 15. Wir finden also stets eine Möglichkeit.

30. Eine natürliche Zahl N ist kleiner als die Summe ihrer drei größten Teiler, wobei N selbst nicht als Teiler mitgezählt wird. Was ist dann ganz sicher richtig?

(**A**) N ist durch 4 teilbar. (**B**) N ist durch 5 teilbar. (**C**) N ist durch 6 teilbar.
(**D**) N ist durch 7 teilbar. (**E**) Ein solches N existiert nicht.

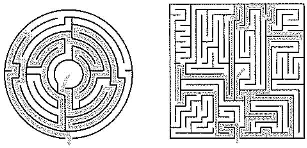
Lösung: Die drei größten Teiler von N sind höchstens $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{3}$ und $\frac{N}{4}$, nämlich wenn N durch 2, 3 und 4 teilbar ist. Die Summe der drei größten Teiler von N ist somit höchstens $\frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{4} = \frac{13}{12}N > N$. Jede durch 12 teilbare Zahl erfüllt also die Bedingung. Antwort (**E**) entfällt. Ein Beispiel ist 12, die Summe der drei größten Teiler ist $6+4+3 = 13 > 12$. Damit entfallen auch die Antwortmöglichkeiten (**B**) und (**D**).

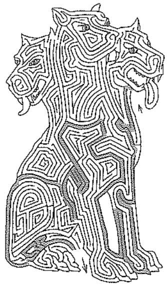
Wenn N nicht durch 2 teilbar wäre, dann wäre die Summe der drei größten Teiler von N höchstens $\frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} = \frac{71}{105}N$, was jedoch kleiner als N ist. Wäre N nicht durch 3 teilbar, wäre die Summe der drei größten Teiler von N höchstens $\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{5} = \frac{19}{20}N$, was ebenfalls kleiner als N ist. Folglich muss N durch 2 und durch 3, also durch 6 teilbar sein. Die richtige Antwort ist (**C**).

Dass die Bedingung aus (**A**) zwar gelten kann, aber nicht gelten muss, sieht man daran, dass auch für die nicht durch 4 teilbare Zahl 30 gilt, dass die Summe ihrer drei größten Teiler größer als sie selbst ist.

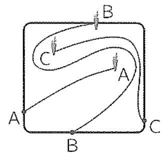
Lösungen der Känguru-Knobeleien

Seite 9:

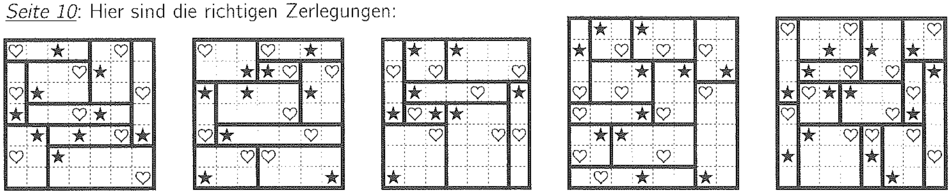




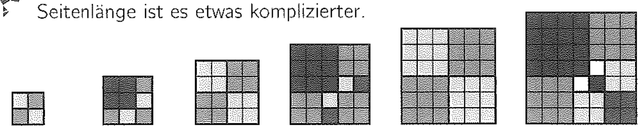
Seite 9: Es kann den Wühlmäusen gelingen. Rechts ist eine Möglichkeit für die zu grabenden Gänge abgebildet.



Seite 10: Hier sind die richtigen Zerlegungen:



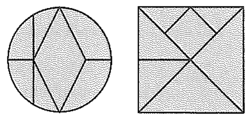
Seite 10: Die kleinste Anzahl an Quadraten ist bei geradzahliger Seitenlänge stets 4. Bei ungeradzahliger Seitenlänge ist es etwas komplizierter.



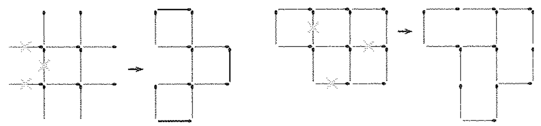
4 Quadrate 6 Quadrate 4 Quadrate 8 Quadrate 4 Quadrate 9 Quadrate

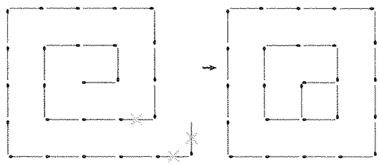
Die weiteren Anzahlen sind: 4, 6, 4, 11, 4, 12,...

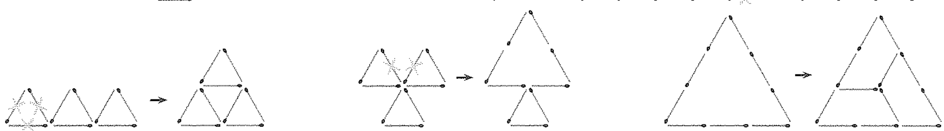
Seite 11: Wie aus den Teilen ein Kreis und gleichzeitig ein Quadrat gelegt werden kann, zeigt das Bild rechts.



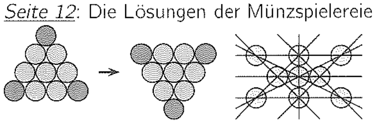
Seite 12: Die Lösungen der Streichholzrätsel sind:







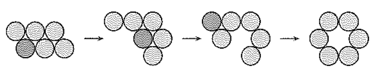
Seite 12: Die Lösungen der Münzspielereien sind:

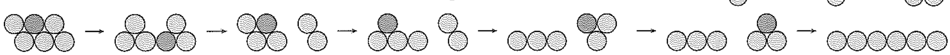


1	2	3
4	5	6

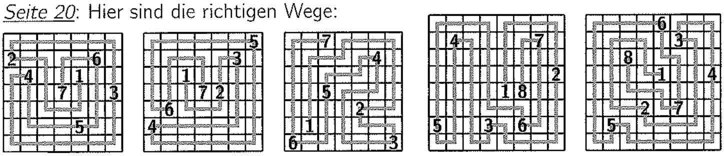
Für das Tauschen der Münzen nummerieren wir die Felder und notieren die Reihenfolge, in der die Münzen vom Feld mit der genannten Nummer in das benachbarte leere Feld zu schieben sind: 14563254123652145

Seite 12: In nur 3 Zügen lässt sich der Kreis bilden, wie rechts zu sehen ist. Für die Reihe braucht man 6 Züge.





Seite 20: Hier sind die richtigen Wege:



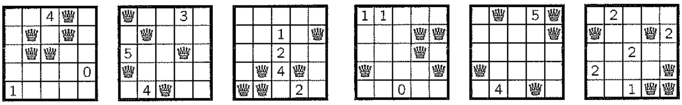
Seite 20: Für die richtige Reihenfolge gibt es 2 Möglichkeiten: 472918365 oder umgekehrt 563819274.

Seite 21: An der Faltung erkennt man: Die Kantenlänge des Würfels ist genau ein Viertel der Seitenlänge des Papier-Quadrats. Die Antworten sind also: (A) 5 cm; (B) 16 cm; (C) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

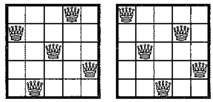
Seite 22: **(A)** Es sind mindestens 4 Fahrten, z. B. mit $12 + 17 = 29$, $13 + 16 = 29$, 15 und 16 Personen.
(B) Einer der Jungen hat die wenigsten Muscheln, Galja hat mehr als dieser. Und Isabelle hat ganz sicher mehr als der andere Junge. Also haben die Mädchen zusammen mehr Muscheln als die Jungen.
(C) Elli schafft pro Stunde mehr als doppelt so viel wie Ulla. Anna und Elli sind zusammen dreimal so schnell wie Ulla, also ist Anna langsamer als Ulla. Anna ist am langsamsten, Elli am schnellsten.
(D) z. B. $11 = 12 + 3 - 4$ oder $11 = 1 + 2 \cdot 3 + 4$.
(E) z. B. $14 = 1 + 2 - 3 + 4 \cdot 5 - 6$ oder $14 = 12 - 3 + 4 - 5 + 6$.
(F) z. B. $3 = 12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 - 8$ oder $3 = 123 - 45 - 67 - 8$.
(G) z. B. $2 = 12 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 - 8 - 9$ oder $2 = 12 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 - 8$

Seite 22: Tatsächlich ist kein einziges Produkt größer als 123456789, das ist die größte gesuchte Zahl. Am zweitgrößten ist $12345678 \cdot 9 = 111111102$.

Seite 23: Die Bilder zeigen, wie die Damen zu platzieren sind:



Seite 23: Es gibt nur zwei verschiedene Lösungen, alle anderen sind zu einer dieser gedreht oder gespiegelt:



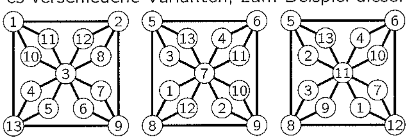
Seite 4: Die Quadrate, die in die Lücken gehören, sind (im Uhrzeigersinn beginnend links oben) die Quadrate 4, 5, 1, 2

Seite 7: Hier sind 2 mögliche Lösungen:

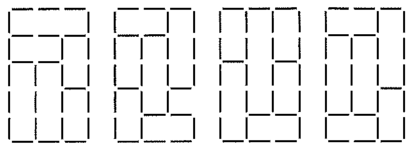
13	·	2	−	16	=	10
−		·		:		+
12		6		4		8
+		−		+		−
14		9		1		11
=		=		=		=
15	−	3	−	5	=	7

16	·	1	−	6	=	10
−		·		:		+
15		11		3		8
+		−		+		−
12		9		5		14
=		=		=		=
13	−	2	−	7	=	4

Seite 27: In der ersten Figur steht im Mittelkreis die 3, in der zweiten die 7 und in der dritten die 11. Für die anderen Kreise gibt es verschiedene Varianten, zum Beispiel diese:



Seite 17: Es sind 15 kleine, 8 mittlere und 3 große, insgesamt also 26 Quadrate. Hier sind vier von vielen möglichen Lösungen für den zweiten Teil der Aufgabe:



Seite 24: Hier sind 2 Möglichkeiten je Kryptogramm:

$$\begin{array}{r} 1352 \\ +\,8404 \\ \hline 9756 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1043 \\ +\,2656 \\ \hline 3699 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1092 \\ +\,8434 \\ \hline 9526 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2491 \\ +\,5606 \\ \hline 8097 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2147 \\ +\,3898 \\ \hline 6045 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2987 \\ +\,4313 \\ \hline 7300 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2095 \\ +\,7363 \\ \hline 9458 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2587 \\ +\,4393 \\ \hline 6980 \end{array}$$

Seite 29: Die erste Gleichung lautet $98 \cdot 9 = 882$. Für die zweite gibt es neun Möglichkeiten: $11 \cdot 101 = 1111$, $11 \cdot 111 = 1221$, $11 \cdot 121 = 1331$, …, $11 \cdot 181 = 1991$.

Seite 31: Waagerecht sind einzutragen: 225 ($= 15^2$), 841 ($= 29^2$), 256 ($= 16^2$), 196 ($= 14^2$), 100 ($= 10^2$) und 144 ($= 12^2$).
Senkrecht stehen die folgenden Quadratzahlen: 22201 ($= 149^2$), 25600 ($= 160^2$), 68121 ($= 261^2$), 11664 ($= 108^2$), 25 ($= 5^2$) und 49 ($= 7^2$).

2		2		6		1
2	2	5		8	4	1
2	5	6		1	9	6
0		0		2		6
1	0	0		1	4	4

Diese Lösungsbuchstaben gelten für die Wettbewerbsaufgaben vom 21. März 2013 für die Schweiz.
Die Aufgaben in dieser Broschüre (und somit die Lösungsbuchstaben) sind leicht verändert!

Lösungsbuchstaben für die Schweizer Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	B	C	E	B	B	C	D
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	A	E	A	D	D	C	D	D
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	C	E	D	A	C	B	A	E

Lösungsbuchstaben für die Schweizer Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	C	D	B	D	B	C	C
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	A	C	A	E	B	C	E	A
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	B	D	E	E	A	B	B	C

Lösungsbuchstaben für die Schweizer Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	C	D	B	D	B	A	A	E	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	B	C	E	D	E	C	C	B	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	B	E	E	A	B	D	D	B	C

Waagerecht

1 2 , 17, 41 sind es, aber auch 257

2 für Sand oder Primzahlen

3 steht zwischen Epsilon und Eta

4 eine Eigenschaft von Zahlen, zum Beispiel von π

6 Spielwürfel haben davon 21

9 bleibt bisweilen übrig beim Teilen

10 Würfel haben 8 davon

13 passt vor Watt, aber auch hinter O

Senkrecht

2 so heißt ein Winkel, der kleiner als 90 Grad ist

4 Adam ... aus Annaberg-Buchholz

5 steht meist vor www

7 die Kugel ist es nicht

8 1 ... = 28,349523125 Gramm

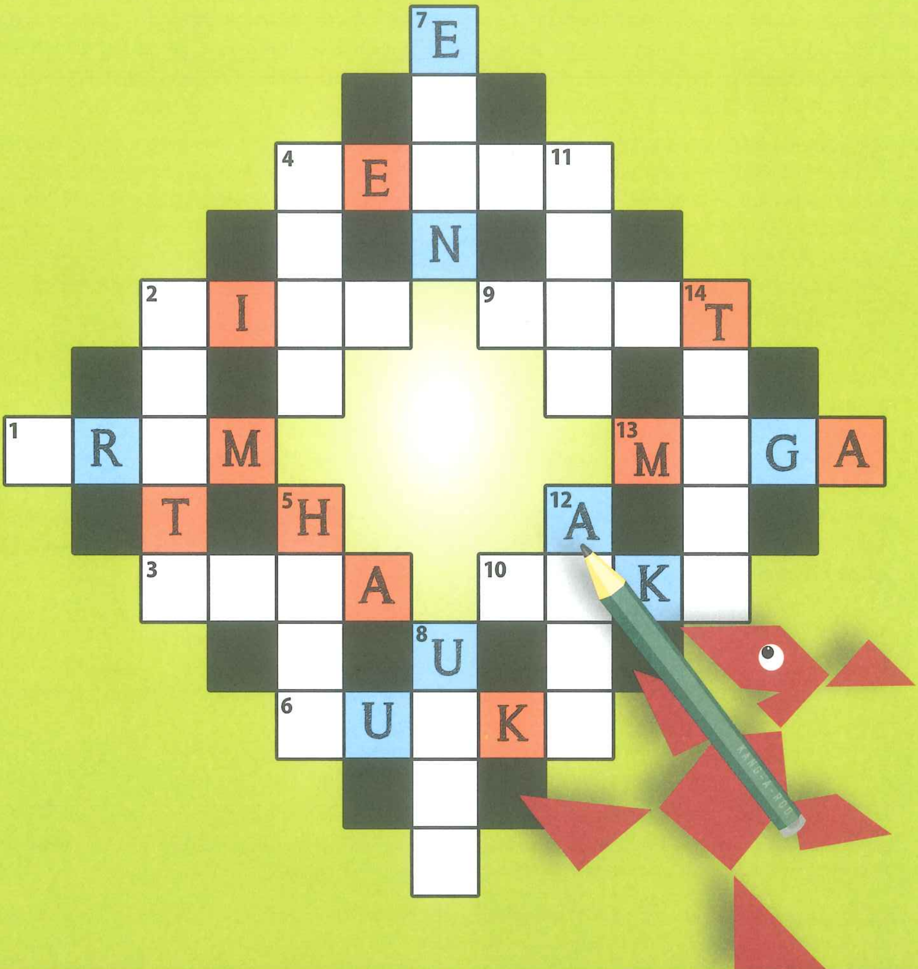
11 Klassenzimmer während der Ferien

12 Ziffer

14 vornehme Behauptung

2013

Mathe mit dem Känguru



Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2013!

Dieses Jahr hat der Känguru-Mathematikwettbewerb an über 250 Schulen in der Schweiz stattgefunden und es haben über 20'000 Schülerinnen und Schüler daran teilgenommen! Allein die Tatsache, dass es jedes Jahr mehr werden, bestärkt uns, voll dran zu bleiben und auch in den nächsten Jahren dafür zu sorgen, dass sich alle Deutschschweizer Schulen mit wenig Aufwand bei uns anmelden können und das Material für den Wettbewerb Mitte März pünktlich mit der Post erhalten.

Ob es um das Salz in der Nordsee ging, ums Büchsenwerfen, die Möglichkeiten aus dem Kreisverkehr herauszufahren oder den Preis von Mini-Puddings, ob der Zieleinlauf beim Wettschwimmen oder Marathon gefragt waren oder die Anzahl der vom Vater vertilgten Klösse, es waren dieses Jahr wieder Fragen, denen wir überall begegnen können und denen sich durch logisches Denken, Kombinieren, Strukturieren, gutes geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen – lauter Dinge, die besonders im Mathematikunterricht gelernt werden – erfolgreich beikommen lässt.

Das Interessante, Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von denen anderer Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den etwa 50 Teilnehmerländern des Wettbewerbs einfliessen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall in Deutschland und in der Schweiz an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre enthält die Aufgaben der Klassenstufen 7 bis 13 sowie die zugehörigen Lösungshinweise. In jeder Klassenstufe sind 30 Aufgaben zu lösen. Für das erste Drittel der 30 Aufgaben sind jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte zu erreichen. Bei einer falschen Antwort gibt es Punktabzug, und zwar werden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe 1 Punkt und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe 1.25 Punkte abgezogen. Wenn bei einer Aufgabe keine Antwort oder mehrere Antworten angekreuzt sind, gibt es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekommt 30 Punkte als Startpunktzahl, wodurch eine negative Gesamtpunktzahl ausgeschlossen ist. Die Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise haben M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, M. Manni, F. Meier, Dr. A. Noack, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger mitgewirkt. Ein Teil der Knobeleien stammt aus der Feder von Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 7 und 8

1. Samstags fährt ab 6 Uhr morgens stündlich ein ICE von Hamburg nach München. Die Fahrt dauert etwa 6 Stunden. Wie viele ICEs sind um 12:30 Uhr von Hamburg nach München unterwegs?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

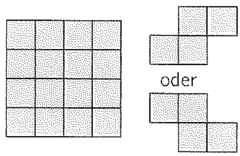
Lösung: Um 12:30 Uhr sind *die* Züge auf der Strecke, die um 7, um 8, um 9, um 10, um 11 und um 12 Uhr in Hamburg losgefahren sind, insgesamt also 6 Züge.

2. Die Summe zweier Zahlen ist 104. Die beiden Zahlen unterscheiden sich um 10, enden also auf dieselbe Ziffer. Welche Ziffer ist das?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

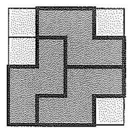
Lösung: Die beiden Zahlen sind 47 und 57, die gesuchte Ziffer ist 7.

3. Aus dem abgebildeten quadratischen Stück Papier schneidet Simon Teile in der daneben abgebildeten Form aus. Wie viele kleine Quadrate bleiben übrig, wenn Simon so viele dieser Teile wie möglich ausschneidet?



(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

Lösung: Simon kann nicht 4 Teile ausschneiden, da nicht jedes Eckquadrat zu einem Teil gehören kann, wie man sich leicht überlegt. Simon kann höchstens 3 solche Teile ausschneiden, eine Möglichkeit ist rechts abgebildet. Von den 16 kleinen Quadraten bleiben 4 Quadrate übrig.



4. Da ich weiß, dass $\frac{1111}{101} = 11$ ist, kann ich leicht ausrechnen: $\frac{3333}{101} - \frac{6666}{303} =$

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 11 **(E)** 33

Lösung: Wir rechnen: $\frac{3333}{101} - \frac{6666}{303} = \frac{3 \cdot 1111}{101} - \frac{6 \cdot 1111}{3 \cdot 101} = 3 \cdot \frac{1111}{101} - 2 \cdot \frac{1111}{101} = 1 \cdot \frac{1111}{101} = 11.$

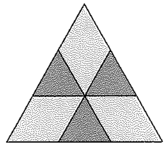
In den beiden Kryptogrammen sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass richtig ausgeführte Additionen entstehen. In jedem der Kryptogramme stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern. Wer findet für die Aufgaben mehr als nur eine Lösung?

$$\begin{array}{r} \text{K A E N} \\ + \text{ G U R U} \\ \hline \text{D A T E I} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K A E N} \\ + \text{ G U R U} \\ \hline \text{L O G I K} \end{array}$$

5. Mareike hat im Herbst vor dem Haus Tulpenzwiebeln gesteckt: 6 rote, 3 violette, 10 weiße und 3 gelbe. Gerade haben sie zu blühen begonnen. Wie viele Tulpen müssen mindestens aufgeblüht sein, damit *ganz bestimmt* zwei Blüten in derselben Farbe zu sehen sind?

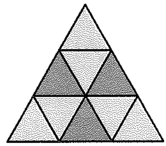
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 11

Lösung: Denkbar ist, dass zunächst von jeder der 4 Sorten *eine* Tulpe aufblüht. Erst wenn die 5. Tulpe aufblüht, ist *ganz bestimmt* eine Farbe doppelt zu sehen. Also ist **(B)** die Lösung.



6. Luis legt drei identische gleichseitige Dreiecke und drei identische Rauten zu einem großen gleichseitigen Dreieck zusammen. Welchen Anteil an der Fläche des großen Dreiecks haben die drei kleinen Dreiecke zusammen?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$



Lösung: Durch drei zusätzliche Strecken können wir das Dreieck in 9 identische gleichseitige Dreiecke zerlegen (s. Bild). Jede der Rauten in Luis' Dreieck ist also doppelt so groß wie jedes der kleinen Dreiecke. Die drei kleinen Dreiecke haben zusammen an der Fläche des großen Dreiecks einen Anteil von $\frac{1}{3}$.

7. Beim Nordsee-Wasser kann das Verhältnis der Masse von Salz zur Masse von Wasser mit 7 : 193 angegeben werden. Wie viel Salz ist in 1000 kg Nordsee-Wasser enthalten?

(A) etwa 35 kg **(B)** etwa 186 kg **(C)** etwa 193 kg **(D)** etwa 200 kg **(E)** etwa 350 kg

Lösung: Da sich die Masse von Salz zu der von Wasser wie 7 : 193 verhält, erhalte ich „Nordsee-Wasser", wenn ich 7 kg Salz in 193 kg Wasser auflöse, und zwar insgesamt 200 kg. Diese 200 kg sind ein Fünftel von 1000 kg, also sind in 1000 kg Nordsee-Wasser $5 \cdot 7\,\text{kg} = 35\,\text{kg}$ Salz enthalten.

8. Die durchschnittliche Anzahl von Kindern in 5 Familien ist ganz sicher nicht

(A) 1,2 **(B)** 1,6 **(C)** 2,2 **(D)** 2,4 **(E)** 2,5

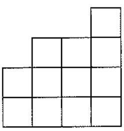
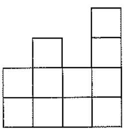
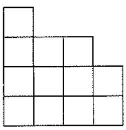
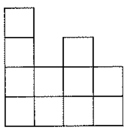
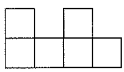
Lösung: Die durchschnittliche Anzahl von Kindern in den Familien ist gleich der Gesamtzahl der Kinder dividiert durch die Anzahl der Familien, d. h. durch 5. Die Gesamtzahl der Kinder ist also 5-mal so groß wie die durchschnittliche Anzahl. Damit ist **(E)** die Lösung, denn $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$. Das kann natürlich nicht die Gesamtzahl der Kinder sein.

9. In jedem Kästchen eines 4×4-Feldes sind einer oder mehrere Würfel übereinander gelegt – wie viele das jeweils sind, ist rechts im Bauplan zu sehen. Was sieht man, wenn man von hinten auf das Würfel-Bauwerk schaut?

hinten

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

vorn

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: In jeder Spalte sind so viele Würfel zu sehen, wie die größte Zahl in der Spalte angibt, also von links nach rechts 4, 3, 3, 2. Von hinten ist die Reihenfolge umgekehrt, das zeigt Bild **(A)**.

10. Zum Geburtstag unserer Bürgermeisterin ist in der Zeitung ein Geburtstagsrätsel abgedruckt: „Die Zahl, die das Alter der Bürgermeisterin angibt, ist die kleinste, deren Ziffern das Produkt 24 ergeben. Und die Summe der Ziffern dieser Zahl verrät das Alter ihrer Tochter." Wie alt ist die Tochter der Bürgermeisterin?

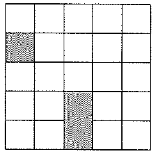
(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

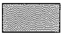
Lösung: Die einzigen Möglichkeiten, 24 als Produkt von zwei einstelligen natürlichen Zahlen zu schreiben, sind $3 \cdot 8$ und $4 \cdot 6$. Die zweistelligen Zahlen mit Ziffernprodukt 24 sind also 38, 46, 64 und 83. Die kleinste, 38, hat die Ziffernsumme 11 – das ist das gesuchte Alter der Tochter.

11. Wie viele Pluszeichen müssen in der Gleichung $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 27$ durch Malzeichen ersetzt werden, damit die Rechnung stimmt?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) Das ist unmöglich.

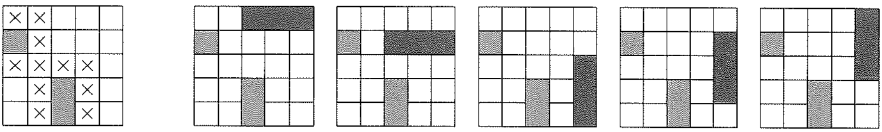
Lösung: Wegen $1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $1+2\cdot3+4+5 = 16$, $1+2+3\cdot4+5 = 20$, $1+2+3+4\cdot5 = 26$ reicht *ein* Malzeichen nicht aus. Zwei Malzeichen genügen, denn es gilt $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 27$.



12. In der Pause spielen Thao und Irene „Schiffe versenken" auf einem 5×5-Quadrat. Bevor es losgeht, sind die drei „Schiffe" zu platzieren, und zwar so, dass sie sich nirgends berühren, auch nicht nur an einer Ecke. Das 1×1-Schiff  und das 2×1-Schiff  hat Thao schon platziert (siehe Bild). Wie viele Möglichkeiten gibt es für das 3×1-Schiff  ?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Die links markierten Felder dürfen nicht zum 3×1-Schiff gehören. Folglich gibt es genau 5 mögliche Positionen für das 3×1-Schiff.



13. Am großen kreisrunden Brunnen treten Hanni und Paul mit ihren ferngesteuerten Autos gegeneinander an. Die Autos starten an gegenüberliegenden Punkten des Brunnens und fahren so schnell es geht um den Brunnen herum. Nachdem Hannis Auto genau 4 Runden absolviert hat, wird es von Pauls Auto eingeholt. Wievielmal schneller ist Pauls Auto als das von Hanni?

(**A**) $\frac{4}{3}$-mal (**B**) $\frac{8}{7}$-mal (**C**) $\frac{8}{5}$-mal (**D**) $\frac{9}{8}$-mal (**E**) $\frac{10}{9}$-mal

Lösung: Wenn Pauls Auto Hannis Auto einholt, ist Hannis Auto 4 Runden bzw. 8 halbe Runden gefahren und Pauls Auto in derselben Zeit eine halbe Runde mehr, also 9 halbe Runden. Damit ist Pauls Auto $\frac{9}{8}$-mal so schnell wie Hannis Auto.

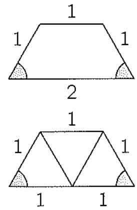
14. Für die natürlichen Zahlen x, y und z gilt: $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$, $z \cdot x = 35$. Wie groß ist $x + y + z$?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Da $14 = 2 \cdot 7$, $10 = 2 \cdot 5$ und $35 = 5 \cdot 7$ ist, finden wir schnell: $x = 7$, $y = 2$ und $z = 5$. Also ist $x + y + z = 14$.

15. Ein Trapez mit ganzzahligen Seitenlängen hat den Umfang 5. Wie groß sind die beiden kleinsten Innenwinkel des Trapezes?

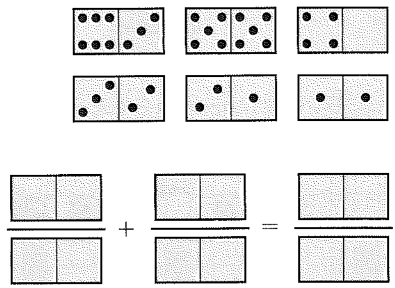
(**A**) 60° und 60° (**B**) 30° und 30° (**C**) 45° und 45° (**D**) 30° und 60° (**E**) 45° und 90°



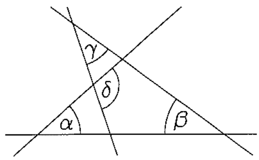
Lösung: Die Seitenlängen des Trapezes müssen $1, 1, 1, 2$ sein, die Länge 2 hat eine der beiden zueinander parallelen Seiten. Durch zwei Strecken vom Mittelpunkt der längsten Seite zu den anderen beiden Eckpunkten kann das Trapez in drei gleichseitige Dreiecke zerlegt werden, denn die eingezeichneten Strecken sind offensichtlich parallel zu den Seiten des Trapezes und haben damit die Länge 1. Die beiden kleinsten Innenwinkel des Trapezes (im Bild grau markiert) sind als Winkel im gleichseitigen Dreieck beide 60° groß.

Die 6 Dominosteine deuten wir als Zahlen, z. B. den ersten Stein als 63 oder 36 (wenn er gedreht wird) oder den dritten Stein als 40 oder 4.

Wie müssen die 6 Steine in die Bruchgleichung gelegt werden, damit eine richtig ausgeführte Addition entsteht?

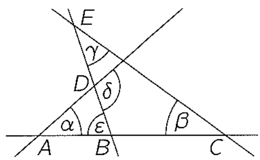


16. Die im Bild markierten Winkel betragen: $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ und $\gamma = 35°$. Wie groß ist δ? (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*)



(**A**) 100° (**B**) 105° (**C**) 120° (**D**) 125° (**E**) 130°

Lösung: Für den Außenwinkel ε des Dreiecks BCE gilt $\varepsilon = \beta + \gamma$. Der gesuchte Winkel δ ist Außenwinkel des Dreiecks ABD, also gilt $\delta = \alpha + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma = 55° + 40° + 35° = 130°$.



17. An der Tafel stehen der Größe nach geordnet alle 4-stelligen Zahlen, die eine 2, eine 0, eine 1 und eine 3 als Ziffer enthalten. Welches ist die größte Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen?

(**A**) 702 (**B**) 703 (**C**) 693 (**D**) 793 (**E**) 198

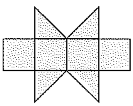
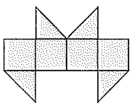
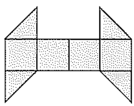
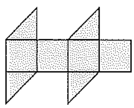
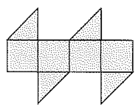
Lösung: Die beiden Zahlen, zwischen denen die größte Differenz auftritt, haben sicher verschiedene Tausender, also 1 und 2 oder 2 und 3. Die größte Zahl an der Tafel mit Tausender 1 ist 1320 und die kleinste mit Tausender 2 ist 2013. Ihre Differenz ist 693. Im zweiten Fall sind die beiden Zahlen 2310 und 3012 mit der Differenz 702, was größer als 693 ist. Also ist (**A**) richtig.

18. Beim Dosenwerfen auf dem Jahrmarkt wirft Lenja immer abwechselnd daneben oder landet einen Treffer, egal wie sehr sie sich anstrengt. Ihre Trefferquote hängt davon ab, wie viele Bälle sie wirft und ob sie mit einem Treffer beginnt oder mit einem Fehlwurf. Wie groß ist ihre Trefferquote sicher nicht?

(**A**) 40 % (**B**) 45 % (**C**) 48 % (**D**) 50 % (**E**) 60 %

Lösung: Da sich Treffer und Fehlwürfe abwechseln, ist die Differenz zwischen der Zahl der Treffer und der Zahl der Fehlwürfe entweder 0 oder 1. Wir wandeln die vorgeschlagenen Prozentzahlen in Brüche um und kürzen so weit wie möglich: (**A**) $40\,\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, (**B**) $45\,\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, (**C**) $48\,\% = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$, (**D**) $50\,\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, (**E**) $60\,\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$. Trefferquote (**A**) ist möglich (2 Treffer, 3 Fehlwürfe), ebenso (**C**) (12 Treffer, 13 Fehlwürfe), (**D**) (1 Treffer, 1 Fehlwurf) und (**E**) (3 Treffer, 2 Fehlwürfe). In (**B**) würden sich die Anzahl der Treffer, 9, und die Anzahl der Fehlwürfe, 11, um 2 unterscheiden. Da die Differenz 1 sein muss, ist das nicht möglich.

19. Genau eines der folgenden Netze kann *nicht* zu einem Würfel gefaltet werden. Welches?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Bei vier Netzen ergeben die jeweils vier Dreiecke zusammen zwei vollständige Würfelflächen. Bei Netz (**C**) fügen sich zwar die oberen Dreiecke zu einer Würfelfläche zusammen, die unteren überlappen sich jedoch. Am besten sieht man das, wenn man die Netze ausschneidet und die Würfel zu falten versucht.

20. Bei meinem Onkel habe ich einen Puzzle-Würfel gefunden. Dieser ist aus lauter gleichen kleineren Würfeln zusammengesetzt. Die kleinen Würfel sind mit einem Gummifaden untereinander verbunden und können durch Biegen und Drehen in eine lange Reihe gebracht werden. Diese Würfelreihe ist 40 cm lang. Welche der folgenden Längenangaben könnte die Kantenlänge eines kleinen Würfels sein?

(**A**) 1 cm (**B**) 2 cm (**C**) 5 cm (**D**) 8 cm (**E**) 10 cm

Lösung: Wäre die Kantenlänge eines kleinen Würfels wie in (**A**) 1 cm, so gäbe es 40 kleine Würfel, in (**B**) 20, in (**C**) 8, in (**D**) 5 und in (**E**) 4. Damit aus den kleinen Würfeln ein großer Würfel gebaut werden kann, muss die Anzahl dieser kleinen Würfel eine Kubikzahl sein. Das trifft bei unserer Aufgabe nur für $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ zu. Die kleinen Würfel haben dann die Kantenlänge 5 cm.

21. Meine Schwester hat jeden Tag von Montag bis Freitag Unterricht. Seitdem sie in die 6. Klasse geht, hat sie insgesamt 31 Stunden pro Woche, jede 45 min lang. Zwischen je zwei Stunden an einem Tag ist immer eine Pause. Wie viele Pausen hat meine Schwester dann pro Woche?

(**A**) 23 (**B**) 25 (**C**) 26
(**D**) 30 (**E**) Das hängt von der Verteilung der Stunden ab.

Lösung: Zwei in der Woche aufeinanderfolgende Stunden werden entweder durch eine „Pause" unterbrochen (wenn die Stunden am selben Tag sind) oder durch eine „Nacht" (wenn die Stunden an aufeinanderfolgenden Tagen sind). Insgesamt gibt es bei 31 Stunden 30 Unterbrechungen, davon 4 Nächte, also $30 - 4 = 26$ Pausen. Insbesondere ist die Anzahl der Pausen unabhängig von der genauen Stundenverteilung, vorausgesetzt an jedem der 5 Tage gibt es mindestens eine Stunde.

Zwischen die Ziffern ist jeweils eines der Zeichen +, −, · oder : zu setzen:

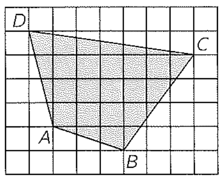
$$2\,\square\,0\,\square\,1\,\square\,3 = N$$

Welche der ganzen Zahlen von 0 bis 9 kann das Ergebnis N dieser Rechnung sein?
Welche Ergebnisse sind möglich, wenn zusätzlich Klammern gesetzt werden dürfen?

22. Im Zuchtkalender sind die Geburtstage der 5 Zwergpudel Ary, Babu, Cory, Dax und Elco eingetragen: 20.2.2005, 12.3.2004, 20.3.2005, 12.4.2004, 23.4.2005. Ary und Elco sind im selben Monat geboren, ebenso wie Babu und Cory. Ary und Cory wurden zwar in verschiedenen Monaten, jedoch am selben Tag geboren. Dasselbe trifft auch für Dax und Elco zu. Welcher der 5 Zwergpudel ist am jüngsten?

(**A**) Ary (**B**) Babu (**C**) Cory (**D**) Dax (**E**) Elco

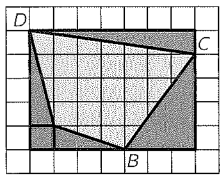
Lösung: Wir müssen *den* Pudel finden, der am 23.4.2005 geboren wurde. Ary und Cory wurden am selben Tag geboren, also am 12.3. und 12.4 oder am 20.2. und 20.3. Dasselbe trifft auf Dax und Elco zu. Damit muss Babu am 23.4. geboren sein, er ist der Jüngste.



23. Die Quadrate im rechts abgebildeten Gitter haben eine Seitenlänge von 1 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$?

(**A**) $21\,\text{cm}^2$ (**B**) $22\,\text{cm}^2$ (**C**) $24\,\text{cm}^2$ (**D**) $25\,\text{cm}^2$ (**E**) $26\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir ergänzen $ABCD$ durch vier rechtwinklige Dreiecke und ein kleines Quadrat zu einem großen Rechteck (s. Bild), das einen Flächeninhalt von $7\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 35\,\text{cm}^2$ hat. Das Quadrat ist $1\,\text{cm}^2$ groß und die Dreiecke im Uhrzeigersinn, beginnend mit dem größten $\frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$, $\frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 1{,}5\,\text{cm}^2$, $\frac{1}{2} \cdot 1\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$ und $\frac{1}{2} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 3{,}5\,\text{cm}^2$. Der Flächeninhalt von $ABCD$ ist also $35\,\text{cm}^2 - 1\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 1{,}5\,\text{cm}^2 - 2\,\text{cm}^2 - 3{,}5\,\text{cm}^2 = 21\,\text{cm}^2$.



24. Ich denke mir eine 4-stellige Zahl, streiche in Gedanken eine Ziffer und erhalte so eine 3-stellige Zahl. Die Summe aus dieser 3-stelligen Zahl und der gedachten 4-stelligen Zahl ist 5271. Damit lässt sich herausfinden, welche Ziffer ich in Gedanken gestrichen habe. Es war eine

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Die gestrichene Ziffer muss die letzte gewesen sein, denn sonst würde die Summe 5271 wie das Doppelte der Endziffer der ursprünglichen Zahl enden, also auf eine gerade Ziffer, d. h. ganz gewiss nicht auf 1. Die zu lösende Rechnung ist rechts zu sehen. Bei A beginnend können schrittweise die Ziffern gefunden werden.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & A & B & C \\ \hline 5 & 2 & 7 & 1 \end{array}$$

Wer erkennt, dass $5271 = ABCD + ABC = (10 \cdot ABC + D) + ABC = 11 \cdot ABC + D$ gilt, findet D, ohne die anderen Ziffern kennen zu müssen, als Rest der Division von 5271 durch 11. Wegen $5271 = 11 \cdot 479 + 2$, ist $D = 2$ die gesuchte Ziffer.

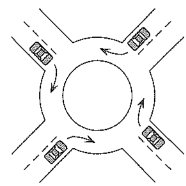
25. Im letzten Jahr hatten Karl und Konrad noch gemeinsam am Seifenkistenrennen teilgenommen. In diesem Jahr versuchten sie getrennt ihr Glück. Am Ende kamen vor Karl doppelt so viele Teilnehmer ins Ziel wie hinter Konrad. Und vor Konrad lagen dreimal so viele Teilnehmer wie hinter Karl. Karl belegte Platz 21. Welchen Platz belegte Konrad?

(**A**) den 11. (**B**) den 16. (**C**) den 24. (**D**) den 28. (**E**) den 31.

Lösung: Da Karl 21. wurde, sind vor ihm 20 Teilnehmer ins Ziel gekommen – doppelt so viele wie hinter Konrad lagen, was dann also 10 waren. Die Zahl der Teilnehmer hinter Karl bezeichnen wir mit x. Vor Konrad lagen damit $3x$ Teilnehmer. Da Karl genauso viele Gegner hatte wie Konrad, gilt $x + 20 = 10 + 3x$, woraus $x = 5$ folgt. Vor Konrad kamen folglich $3x = 15$ Teilnehmer ins Ziel, er belegte also Platz 16.

Dieses Problem wurde ähnlich in Aufgabe 22 in Klassenstufe 9/10 gestellt und mit einer etwas anderen Fragestellung in Aufgabe 21 in Klassenstufe 11–13.

26. Vier Autos fahren gleichzeitig in einen Kreisverkehr, jedes aus einer anderen Richtung (siehe Bild). Jedes der Autos fährt weniger als eine ganze Runde und alle Autos verlassen den Kreisverkehr in unterschiedliche Richtungen. Wie viele mögliche Kombinationen gibt es für die Autos, den Kreisverkehr zu verlassen?



(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 24 (**E**) 81

Lösung: Wir nummerieren die Ein- bzw. Ausfahrten mit 1, 2, 3, 4 und ordnen den einfahrenden Autos 1, 2, 3, 4 mögliche Ausfahrkombinationen zu. Auto 1 kann nicht in Richtung 1 ausfahren. Angenommen, Auto 1 fährt bei 2 aus. Dann gibt es nach den Bedingungen der Aufgabe folgende Möglichkeiten für die anderen Autos: $2 \to 1$, $3 \to 4$, $4 \to 3$ oder $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$ oder $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$.

In den anderen beiden Fällen, wenn Auto 1 in Richtung 3 bzw. 4 ausfährt, ergeben sich in analoger Weise je drei weitere Fälle. Insgesamt gibt es 9 mögliche Kombinationen. In der Tabelle rechts sind alle Fälle systematisch aufgelistet.

Deulich schwieriger ist das analoge Problem in Aufgabe 30 in Klassenstufe 11–13, in der ein Kreisverkehr mit 5 Einfahrten betrachtet wird.

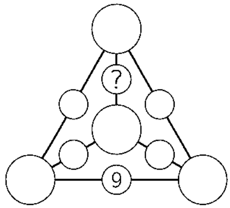
rein	1	2	3	4
raus	2	1	4	3
raus	2	3	4	1
raus	2	4	1	3
raus	3	1	4	2
raus	3	4	1	2
raus	3	4	2	1
raus	4	1	2	3
raus	4	3	1	2
raus	4	3	2	1

27. Die Mutter bäckt sechs Eierpfannkuchen. Den ersten (1) füllt sie mit Aprikosen, den zweiten (2) mit Erdbeeren, den dritten (3) mit Kirschen, den vierten (4) mit Pflaumen, den fünften (5) mit Himbeeren und den sechsten (6) mit Blaubeeren. Während sie bäckt, kommt ab und zu eines der Kinder in die Küche gelaufen und nimmt sich den heißesten Pfannkuchen. In welcher Reihenfolge sind die Pfannkuchen ganz bestimmt nicht gegessen worden?

(**A**) 123456 (**B**) 125436 (**C**) 325461 (**D**) 254316 (**E**) 456231

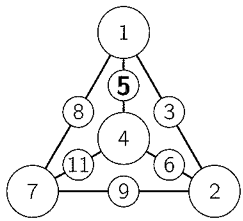
Lösung: In einer möglichen Reihenfolge kann auf jede Pfannkuchennummer eine beliebige größere folgen. Wenn jedoch eine kleinere Nummer folgt, dann muss diese von den Nummern der bereits gebackenen, aber noch nicht weggenommenen Pfannkuchen die größte sein. Das ist bei den Antwortmöglichkeiten (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) erfüllt. Die Reihenfolge (**E**) hingegen ist nicht möglich. Auf die 6 müsste 321 folgen und nicht 231 wie angegeben.

28. In jeden der Kreise in der abgebildeten Figur soll eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 11 eingetragen werden, so dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt. Dabei soll in jedem kleinen Kreis die Summe der Zahlen aus den beiden benachbarten großen Kreisen stehen. Die 9 ist schon eingetragen. Für welche Zahl steht das Fragezeichen?



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 11

Lösung: Die 1 und die 2 stehen ganz sicher in einem der großen Kreise, die 3 gehört als Summe der beiden in den kleinen Kreis dazwischen. Die 4 steht in einem großen Kreis, denn sonst wäre in einem benachbarten großen Kreis eine Zahl größer als 4, da 1, 2 und 3 nicht mehr dafür in Frage kommen. Im kleinen Kreis zwischen 1 und 4 steht die 5, zwischen 2 und 4 die 6. Nun muss auch die 7 in einem großen Kreis stehen. Damit stehen die Zahlen in den großen Kreisen fest: 1, 2, 4 und 7. Die einzige Möglichkeit, 9 zu kombinieren, ist $9 = 2 + 7$, also sind 2 und 7 zur 9 benachbart. In den beiden anderen großen Kreisen stehen 1 und 4, ihre Summe ist die gesuchte Zahl, also 5. Für die fertige Figur gibt es 4 Möglichkeiten. Eine ist abgebildet, die anderen erhält man durch Vertauschen von 2 und 7 bzw. 1 und 4 und anschließendes Auffüllen.



Eine Quadratzahl ist eine Zahl, die Produkt einer natürlichen Zahl mit sich selbst ist, z. B. $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$ *oder* $441 = 21 \cdot 21 = 21^2$.
In das Kreuzzahlenrätsel sind waagerecht und senkrecht lauter Quadratzahlen einzutragen, wobei einige ihrer Ziffern bereits vorgegeben sind.

2	■	2	■	6	■	1
		5	■	8		
	5		■		9	
	■	0	■	2	■	
1			■			4

29. Wir werfen einen Spielwürfel und notieren die Summe aller sichtbaren Augen. Kommt der Würfel beispielsweise auf der 3 zu liegen, so notieren wir $1+2+4+5+6$, also 18. Bei jedem weiteren Wurf addieren wir die Summe aller sichtbaren Augen zur letzten notierten Zahl. So entsteht eine Liste von Zahlen. Je nachdem, wie die Abfolge der gewürfelten Zahlen ist, entstehen unterschiedliche Listen. Welches ist die größte Zahl, die *ganz sicher nicht* in einer solchen Liste vorkommen kann?

(**A**) 29 (**B**) 35 (**C**) 41 (**D**) 44 (**E**) 51

Lösung: Die Augensummen, die je Wurf gewürfelt werden können, sind 15, 16, 17, 18, 19 und 20. Nach *dem ersten* Wurf ist die kleinste mögliche Zahl in der Liste 15, die größte 20. Die Zahlen von 1 bis 14 sind nicht möglich. Nach *zwei* Würfen ist die kleinste mögliche Zahl $2 \cdot 15 = 30$, die größte $2 \cdot 20 = 40$. Die Zahlen von 21 bis 29 sind nicht möglich. Alle Zahlen zwischen 30 und 40 sind möglich, wie sich schnell überprüfen lässt. Nach *drei* Würfen ist die kleinste mögliche Zahl $3 \cdot 15 = 45$, die größte $3 \cdot 20 = 60$. Die Zahlen von 41 bis 44 sind nicht möglich. Alle Zahlen von 45 bis 60 können vorkommen. Wir sehen: Nur die Zahlen 29, 41 und 44 aus den Antwortmöglichkeiten können *ganz sicher nicht* in einer solchen Liste stehen. Die größte davon, 44, ist die gesuchte Zahl.

Wir zeigen nun noch, dass wirklich jede natürliche Zahl $m \geq 45$ in einer solchen Liste vorkommen kann. Wir wollen m als Summe der Zahlen von 15 bis 20 schreiben. Versuchen wir zuerst, so oft wie möglich den Summanden 15 zu verwenden, sagen wir k-mal, dann gilt $m = k \cdot 15 + r$, wobei r ein Rest zwischen 0 und 14 ist und $k \geq 3$, da $m \geq 45$ ist. Ist $r = 0$, sind wir schon fertig. Ist $1 \leq r \leq 5$, ersetzen wir eine 15 durch $15 + r$ und erhalten eine Lösung. Ist $6 \leq r \leq 10$, ersetzen wir zweimal eine 15 durch zwei Zahlen zwischen 16 und 20, und ist $11 \leq r \leq 14$ ersetzen wir dreimal eine 15. Wir finden also stets eine Möglichkeit.

30. Eine natürliche Zahl N ist kleiner als die Summe ihrer drei größten Teiler, wobei N selbst nicht als Teiler mitgezählt wird. Was ist dann ganz sicher richtig?

(**A**) N ist durch 4 teilbar. (**B**) N ist durch 5 teilbar. (**C**) N ist durch 6 teilbar.
(**D**) N ist durch 7 teilbar. (**E**) Ein solches N existiert nicht.

Lösung: Die drei größten Teiler von N sind höchstens $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{3}$ und $\frac{N}{4}$, nämlich wenn N durch 2, 3 und 4 teilbar ist. Die Summe der drei größten Teiler von N ist somit höchstens $\frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{4} = \frac{13}{12}N > N$. Jede durch 12 teilbare Zahl erfüllt also die Bedingung. Antwort (**E**) entfällt. Ein Beispiel ist 12, die Summe der drei größten Teiler ist $6 + 4 + 3 = 13 > 12$. Damit entfallen auch die Antwortmöglichkeiten (**B**) und (**D**).

Wenn N nicht durch 2 teilbar wäre, dann wäre die Summe der drei größten Teiler von N höchstens $\frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} = \frac{71}{105}N$, was jedoch kleiner als N ist. Wäre N nicht durch 3 teilbar, wäre die Summe der drei größten Teiler von N höchstens $\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{5} = \frac{19}{20}N$, was ebenfalls kleiner als N ist. Folglich muss N durch 2 und durch 3, also durch 6 teilbar sein. Die richtige Antwort ist (**C**).

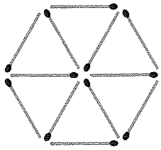
Dass die Bedingung aus (**A**) zwar gelten kann, aber nicht gelten muss, sieht man daran, dass auch für die nicht durch 4 teilbare Zahl 30 gilt, dass die Summe ihrer drei größten Teiler größer als sie selbst ist.

Streichholzrätsel

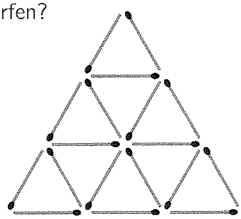
(A) In der Sechsecksfigur sind 4 Streichhölzchen so umzulegen, dass 4 gleich große Rauten entstehen.

(B) Wie können 4 Rauten entstehen, wenn nur 3 Streichhölzchen umgelegt werden dürfen?

(C) Wie lassen sich 4 Hölzchen so umlegen, dass genau 4 Dreiecke entstehen?

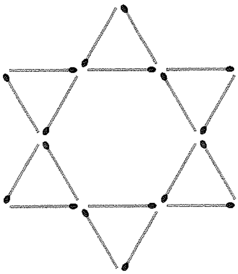


(F) Wie kann aus der Dreiecksfigur eine Figur mit nur 5 gleich großen Dreiecken entstehen, wenn genau 5 der Hölzchen entfernt werden sollen?
Wie kann das gehen, wenn nur 4 Hölzchen entfernt werden dürfen?



Welche 3 Hölzchen müssen entfernt werden, damit eine Figur mit 6 gleich großen Dreiecken entsteht?

Welche 6 Hölzchen sind zu entfernen, um eine Figur mit 3 Dreiecken zu erhalten?

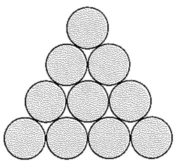


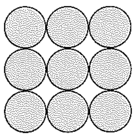
(D) Im Streichholzstern sind 6 kleine Dreiecke und 2 große, sich überlappende Dreiecke zu sehen. Es sind 2 Streichhölzchen so umzulegen, dass der gleiche Stern aus nur 6 gleichseitigen Dreiecken besteht.

(E) Wie müssen 4 Streichhölzer umgelegt werden, damit 10 Dreiecke zu sehen sind?

Münzspielereien

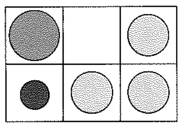
Wer schafft es, 3 Münzen so umzulegen, dass das Dreieck mit der Spitze nach unten zeigt?





Diese 9 Münzen bilden 8 Dreierreihen, 3 waagerechte, 3 senkrechte und 2 diagonale. Die Münzen sind so umzuordnen, dass sie sogar 10 Dreierreihen bilden.

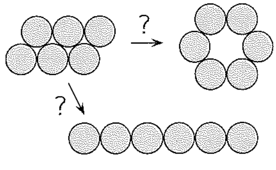
In einem Zug darf auf das freie Feld eine waagerecht oder senkrecht benachbarte Münze geschoben werden. Ziel ist es, dass durch geschicktes Ziehen die kleine und die große Münze die Plätze tauschen.



Durch Verschieben der 6 Münzen soll ein Kreis gebildet werden. In jedem Zug darf eine Münze verschoben werden, ohne dass die anderen dabei aus Versehen bewegt werden. Nach jedem Zug muss die verschobene Münze mindestens 2 andere Münzen berühren.

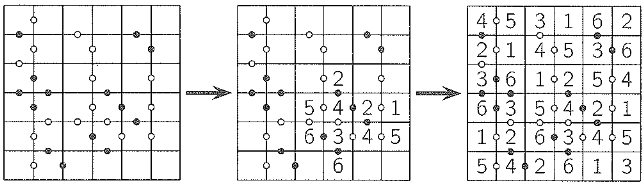
Wem gelingt das mit möglichst wenigen Zügen?

Und wer schafft es, nach dieser Regel eine Reihe zu bilden?

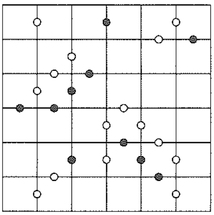


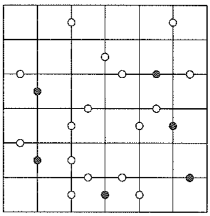
Kopfnüsse I: Kropki

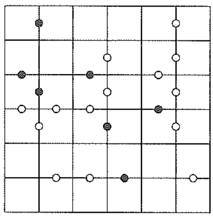
In die Kästchen sind die Zahlen von 1 bis 6 (bzw. 7) so einzutragen, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jede der Zahlen genau einmal vorkommt. Ein weißer Kreis zwischen zwei Feldern gibt an, dass sich die beiden Zahlen in diesen Feldern um 1 unterscheiden. Das sind entweder 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6 oder 6 und 7. Ein schwarzer Kreis zwischen zwei Feldern gibt an, dass eine der beiden Zahlen in diesen Feldern das Doppelte der anderen ist. Das sind entweder 1 und 2, 2 und 4 oder 3 und 6. Befindet sich kein Kreis zwischen zwei benachbarten Feldern, so steht dort *keines* der genannten Zahlenpaare.

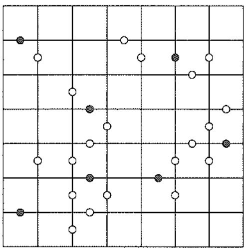


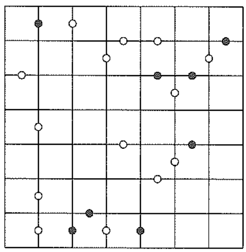
Gesucht sind die den Regeln entsprechenden Füllungen der folgenden Quadrate:











(A) Gibt es eine Belegung eines 6 × 6-Quadrats entsprechend der Kropki-Regeln, so dass an keiner Stelle Zahlen benachbart sind, die sich um 1 unterscheiden, oder von denen eine das Doppelte der anderen ist?

(B) Wer findet alle Möglichkeiten, die Zahlen von 1 bis 10 so in einer Reihe anzuordnen, dass für benachbarte Zahlen stets gilt, dass sie sich entweder um 1 unterscheiden oder eine Zahl das Doppelte ihres Nachbarn ist?

Ordnung muss sein

(A)

Der Organisator der Labortage in Mittendrin plant die Laborbelegung. Er hat die anwesenden Teilnehmer gezählt und grübelt nun. „Käme jetzt noch der Bus mit den 23 aus Weitweg, hätten wir mehr als 60, aber weniger als 80 Teilnehmer. Wären allerdings die 17, die sich für die Exkursion nach Nahebei angemeldet haben, nicht mehr da, dann wären mehr als 18, aber weniger als 36 hier." Da bemerkt er beglückt, dass er die Anwesenden ja in 9 gleich große Gruppen teilen kann – und das passt genau zur Zahl der Laborplätze. Wie viele Teilnehmer sind anwesend?

(C)

Der kleine Knut spielt gern mit den Knöpfen aus dem Knopfkorb seiner Großmutter. Heute hat er sich mehr als 29 Knöpfe ausgesucht und sie auf zwei Kästchen aufgeteilt. Nähme er aus dem ersten Kästchen zwei der Knöpfe heraus, so wären danach in diesem Kästchen immer noch mehr als dreimal so viele wie im zweiten Kästchen. Und außerdem übersteigt die dreifache Anzahl der Knöpfe im ersten Kästchen die doppelte im zweiten Kästchen, allerdings um weniger als 60 Knöpfe.

Wie viele Knöpfe sind in den beiden Kästchen?

(B)

Die neun Buchhalter eines Großbetriebs gehen Pilze sammeln. Natürlich führen sie Buch über das Ergebnis des Sammelns: Sie haben 220 Pilze gesammelt, jeder eine andere Anzahl. Als sie sich für die Rückfahrt auf die beiden Autos verteilen wollen, beschließen sie, dass 4 von ihnen, die zusammen mindestens die Hälfte der Pilze gesammelt haben, gemeinsam in dem 4-sitzigen Cabrio fahren dürfen.

Wird es den Pilzsammlern gelingen, eine solche Aufteilung zu finden?

Das richtige Maß

Notwendige Bedingung*, um die liebliche Prinzessin Pia zur Frau zu bekommen, ist es, folgende drei Aufgaben zu lösen. Ein Freier muss aus dem Brunnen der Schönheit 4 Liter des verzauberten Wassers bringen. Dafür bekommt er allerdings nur ein 3-Liter-Gefäß und ein 5-Liter-Gefäß mit auf den Weg. Aus dem Brunnen der Klugheit soll er ihr 6 Liter bringen, wofür er aber nur ein 5-Liter-Gefäß und ein 7-Liter-Gefäß bekommt. Aus dem Brunnen der Gesundheit schließlich muss er der Prinzessin 10 Liter bringen. Dafür stehen ihm ein 9-Liter-Gefäß und ein 11-Liter-Gefäß zur Verfügung.

Wie kann ein kluger Freier diese drei Aufgaben lösen?

* Hinreichend ist natürlich nur die Liebe.

In einem Benzinkanister befinden sich nicht weniger als 13 Liter Benzin – wie viel genau, ist jedoch unklar. Mit Hilfe eines 9-Liter-Gefäßes und eines 5-Liter-Gefäßes sollen exakt 8 Liter abgemessen werden. Ob das wohl funktionieren kann?

Klassenstufen 9 und 10

1. Das Motto unserer Projektwoche hat Burkhard in bunten Buchstaben an der Tür unseres Klassenzimmers angebracht. Er hat die Buchstaben in lauter gleich große Quadrate gezeichnet:

Beim Nachziehen der Buchstabenränder ist ihm aufgefallen, dass einige Ränder ziemlich lang sind. Die kürzesten Buchstabenränder sind gerade so lang wie der Rand des Quadrats, in dem die Buchstaben stehen. Welche Buchstaben haben den kürzesten Rand?

(**A**) L und T (**B**) S und U (**C**) F und E (**D**) H und U (**E**) M und A

Lösung: Die kürzesten Buchstabenränder haben L und T – sie sind genauso lang wie der Rand des Quadrats.

2. Unter den Zahlen 1, 4, 8, 10, 20, 25 und 50 gibt es drei, deren Produkt 100 ist. Wie groß ist die Summe dieser drei Zahlen?

(**A**) 37 (**B**) 31 (**C**) 34 (**D**) 22 (**E**) 30

Lösung: Die einzige Möglichkeit, 100 als Produkt von drei der vorgegebenen Zahlen zu schreiben, ist $1 \cdot 4 \cdot 25$. Die gesuchte Summe ist also $1 + 4 + 25 = 30$.

3. Wenn ich 16 Mini-Puddings zu einem Preis von je 20 Cent kaufen will und im Laden meiner Wahl jeder sechste Pudding kostenlos dazugegeben wird, wie viel habe ich für die 16 Mini-Puddings zu zahlen?

(**A**) 1,60 € (**B**) 2,00 € (**C**) 2,80 € (**D**) 3,20 € (**E**) 3,80 €

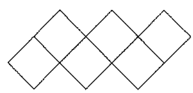
Lösung: Zu den 16 Mini-Puddings gehören zweimal 6, von denen wir je nur 5 zu bezahlen haben. Insgesamt bezahlen wir also statt 16 nur 14 Mini-Puddings, und die kosten 2,80 €.

4. Durch welche der folgenden Zahlen kann die Differenz $2013 - 1023$ *nicht* ohne Rest geteilt werden?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 11

Lösung: Es ist $2013 - 1023 = 990$. Und diese Zahl ist offenbar durch 2, durch 3, durch 5 und durch 11 teilbar, jedoch nicht durch 7.

5. Die Zickzack-Figur rechts besteht aus 6 Quadraten der Seitenlänge 1 cm. Welchen Umfang hat die Zickzack-Figur, die aus 20 solchen Quadraten besteht?



(**A**) 40 cm (**B**) 42 cm (**C**) 46 cm (**D**) 60 cm (**E**) 66 cm

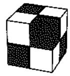
Lösung: Jedes hinzukommende Quadrat vergrößert den Umfang der Zickzackfigur um 2 cm. Die abgebildete Figur besteht aus 6 Quadraten und hat einen Umfang von 14 cm. Es müssen 14 Quadrate hinzugefügt werden, also wächst der Umfang auf 14 cm + 28 cm, also auf 42 cm.

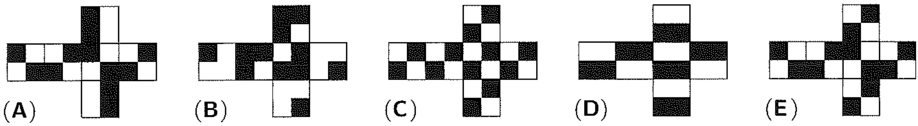
6. Die Summe $4^3 + 8^2$ lässt sich als Potenz mit der Basis 2 schreiben, und zwar als

(A) 2^5 **(B)** 2^6 **(C)** 2^7 **(D)** 2^8 **(E)** 2^9

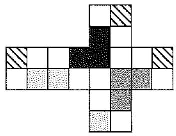
Lösung: Wir schreiben $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$ und $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$. Damit ist $4^3 + 8^2 = 2 \cdot 2^6 = 2^7$. Das lässt sich natürlich auch ohne die verkürzende Anwendung der Potenzgesetze so ausrechnen: $4^3 + 8^2 = 64 + 64 = 128 = 2^7$.

7. Der rechts abgebildete Würfel besteht aus 4 weißen und 4 schwarzen kleinen Würfeln. Mit welchem der Würfelnetze ließe sich ein Würfel bauen, der ebenso aussieht?





Lösung: Der fertige Würfel gehört zum Würfelnetz **(E)**. Das Entstehen der 4 schwarzen Ecken ist in der nebenstehenden Zeichnung zu erkennen.



8. Die Differenz aus der kleinsten durch 3 teilbaren 4-stelligen Zahl und der größten durch 4 teilbaren 3-stelligen Zahl ist gleich

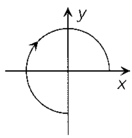
(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 3 **(E)** 2

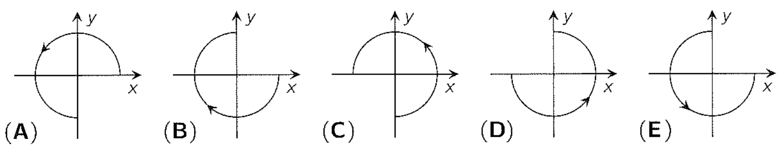
Lösung: Die kleinste durch 3 teilbare 4-stellige Zahl ist 1002, die größte durch 4 teilbare 3-stellige Zahl ist 996. Die gesuchte Differenz ist $1002 - 996 = 6$.

Wie lauten die mit Sternchen bezeichneten Ziffern in den folgenden Multiplikationsaufgaben?

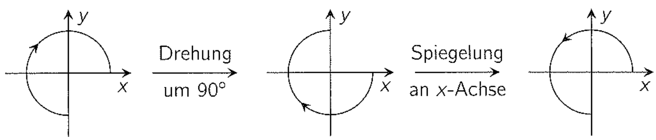
★8 · ★ = 8★★ 1★ · ★★1 = 1★★1

9. Welches Bild entsteht, wenn der rechts abgebildete Dreiviertelkreis samt Pfeil um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung gedreht und anschließend an der x-Achse gespiegelt wird?





Lösung: Es entsteht Bild **(A)**.



10. Welche der folgenden Zahlen ist die größte?

(**A**) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$ (**B**) $\sqrt{20} \cdot 13$ (**C**) $20 \cdot \sqrt{13}$ (**D**) $\sqrt{201} \cdot 3$ (**E**) $\sqrt{2013}$

Lösung: Wir quadrieren und vergleichen: (**A**) $20 \cdot 13$, (**B**) $20 \cdot 13^2$, (**C**) $20^2 \cdot 13$, (**D**) $201 \cdot 3^2$, (**E**) 2013. Offenbar ist $20^2 \cdot 13 > 20 \cdot 13^2 > 20 \cdot 13$. Außerdem ist $20^2 \cdot 13 = 400 \cdot 13 > 4000$, also $20^2 \cdot 13 > 201 \cdot 3^2$ und ebenso $20^2 \cdot 13 > 2013$. (**C**) ist die Lösung.

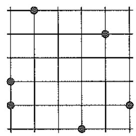
11. Mein kleiner Bruder Bert ist schrecklich neugierig. Als sich unsere Mutter mit zwei Freundinnen zum Kaffeetrinken in den Garten setzt und 4 Stück Zucker mitnimmt, will Bert unbedingt wissen, wer wie viele Stückchen nehmen wird. Aber unsere Mutter verrät es nicht. Bert erfährt nur, dass alle 4 Stückchen im Kaffee landen. So kann er einzig die Anzahl der Möglichkeiten herausfinden, die 4 Stückchen Zucker unter den 3 Frauen aufzuteilen. Wie viele Möglichkeiten sind das?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 15

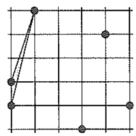
Lösung: Wir schreiben systematisch alle Möglichkeiten für die Verteilung der 4 Zuckerstückchen unter den 3 Kaffeetrinkerinnen auf, es sind 15:

Mutter	4	0	0	3	3	1	0	1	0	2	2	0	2	1	1
Freundin 1	0	4	0	1	0	3	3	0	1	2	0	2	1	2	1
Freundin 2	0	0	4	0	1	0	1	3	3	0	2	2	1	1	2

12. Die Zellen des abgebildeten Gitters sind Quadrate der Seitenlänge 1. Je drei der sechs markierten Punkte können zu einem Dreieck verbunden werden. Wir vergleichen die Flächeninhalte dieser Dreiecke. Wie groß ist der kleinste dieser Flächeninhalte?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{3}{4}$ (**C**) 1 (**D**) 2 (**E**) $\frac{5}{2}$



Lösung: Die drei Punkte ganz links bilden ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}$, das ist die kleinste vorgeschlagene Zahl und damit die Lösung.

Übrigens lässt sich zeigen, dass ein Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind, stets einen Flächeninhalt von mindestens $\frac{1}{2}$ hat.

13. Als der Film „Der Hobbit" bei uns anlief, gab es lange Schlangen an der Kinokasse. Weil nur drei Schalter geöffnet waren, dauerte es durchschnittlich 15 Minuten, bis man dran war. Als dann zwei zusätzliche Schalter öffneten, verkürzte sich die durchschnittliche Wartezeit natürlich. Um wie viele Minuten etwa?

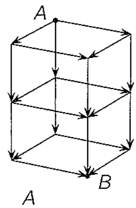
(**A**) um 2 min (**B**) um 2,5 min (**C**) um 3 min (**D**) um 4,5 min (**E**) um 6 min

Lösung: Die Wartezeit ist indirekt proportional zur Anzahl der geöffneten Schalter. Nachdem zwei weitere Schalter geöffnet wurden, waren es $\frac{5}{3}$-mal so viele wie zuvor. Damit verringerte sich die Wartezeit auf $\frac{3}{5} \cdot 15\,\text{min} = 9\,\text{min}$. Das sind 6 Minuten weniger.

14. Grit, Erol und Imke sind unterschiedlich groß. Erstens gilt: Entweder ist Grit oder Erol am größten. Und zweitens gilt: Entweder ist Imke am größten oder Grit am kleinsten. Was ist richtig?

(**A**) Imke ist am größten, Grit am kleinsten. (**B**) Erol ist am größten, Imke am kleinsten.
(**C**) Erol ist am größten, Grit am kleinsten. (**D**) Grit ist am größten, Erol am kleinsten.
(**E**) Imke ist am größten, Erol am kleinsten.

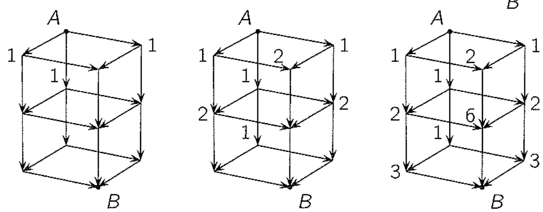
Lösung: Aus der ersten Aussage folgt, dass Imke ganz sicher nicht am größten ist. Dann folgt aus der zweiten Aussage, dass Grit am kleinsten sein muss. Also ist Erol am größten.



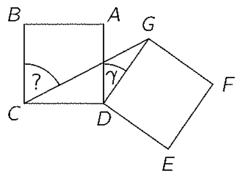
15. Wie viele verschiedene Wege führen unter Beachtung der Pfeilrichtung von A nach B?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Wir schreiben schrittweise an jeden Punkt die Anzahl der Wege, die von A aus dorthin führen. Diese Anzahl ist die Summe aller Zahlen an den vorhergehenden Knoten. Am Punkt B steht dann $3 + 6 + 3 = 12$.



16. Das Quadrat $DEFG$ ist durch Drehung des Quadrats $ABCD$ um den Punkt D entstanden, der eingezeichnete Winkel γ misst 20° (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der Winkel $\measuredangle GCB$?



(**A**) 45° (**B**) 47,5° (**C**) 50° (**D**) 55° (**E**) 57,5°

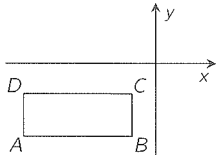
Lösung: Es gilt $\measuredangle GDC = 90° + \gamma = 110°$. Das Dreieck CDG ist gleichschenklig, denn $\overline{GD}$ geht durch Drehung aus $\overline{CD}$ hervor. Also ist der Basiswinkel $\measuredangle DCG = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$ und $\measuredangle GCB = 90° - 35° = 55°$.

17. Von einer 6-stelligen Zahl ist bekannt, dass die Summe ihrer Ziffern eine gerade Zahl und das Produkt ihrer Ziffern eine ungerade Zahl ist. Welche der folgenden Aussagen ist dann wahr?

(**A**) Es gibt keine solche Zahl. (**B**) Zwei oder vier der Ziffern sind gerade.
(**C**) Alle Ziffern sind verschieden. (**D**) Die Anzahl der ungeraden Ziffern ist ungerade.
(**E**) Keine der Aussagen (**A**) bis (**D**) ist wahr.

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe brauchte nur ein Beispiel gefunden zu werden, ein solches ist 113111. Anhand des Beispiels sehen wir, dass keine der Aussagen (**A**) bis (**D**) wahr ist, also ist (**E**) die Lösung.

18. Das Rechteck $ABCD$ liegt im 3. Quadranten des Koordinatensystems, seine Seiten sind parallel zu den Achsen. Wir bilden für jeden der 4 Eckpunkte den Quotienten aus der y-Koordinate und der x-Koordinate. Für welchen der 4 Eckpunkte erhalten wir den größten Quotienten $\frac{y}{x}$?

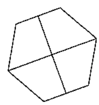


(**A**) für A (**B**) für B (**C**) für C
(**D**) für D (**E**) Das hängt von der Gestalt des Rechtecks ab.

Lösung: Für jeden der Punkte A, B, C, D sind die x- und die y-Koordinate negativ. Der Bruch $\frac{y}{x}$ wird also am größten, wenn y so klein und x so groß wie möglich ist. Der Punkt mit dem größten Quotienten ist also B. – Eine zweite Lösungsmöglichkeit ist folgende: $\frac{y}{x}$ ist der Anstieg der Geraden durch $(0,0)$ und (x,y). Von den Ursprungsgeraden, die durch einen der vier Punkte gehen, hat die durch B den größten Anstieg. – Ähnlich ist Aufgabe 18 in Klassenstufe 11–13.

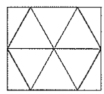
Ein stumpfwinkliges Dreieck soll in lauter spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden. Wer findet eine solche Zerlegung mit möglichst wenigen spitzwinkligen Dreiecken?

19. Ich möchte regelmäßige sechseckige Pappdeckel mit einem Flächeninhalt von $60\,\text{cm}^2$ in einer quaderförmigen Schachtel mit möglichst kleiner Grundfläche verpacken. Länge und Breite des rechteckigen Bodens ergeben sich aus den Längen der beiden eingezeichneten Strecken. Welchen Flächeninhalt hat der Boden der geplanten Schachtel?



(**A**) $68\,\text{cm}^2$ (**B**) $60 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (**C**) $75\,\text{cm}^2$ (**D**) $45 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (**E**) $80\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir zeichnen die Schachtel und zerlegen das Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke. Der Boden der Schachtel ist 4 halbe, also 2 ganze solche Dreiecke größer als das Sechseck, also $\frac{8}{6}$-mal so groß. Der Boden misst $80\,\text{cm}^2$.



20. Unser Nachbar und seine Tochter haben beide heute, am 11. April 2013, Geburtstag. Da habe ich mir gedacht: „Was kommt wohl dabei heraus, wenn ich das Alter des Nachbarn mit dem Alter seiner Tochter multipliziere?" Ich rechne und siehe da: das Produkt ist überraschenderweise gerade 2013! Als ich das aufgeregt meinem Freund erzähle, meint dieser: „Hey, da weiß ich ja jetzt, in welchem Jahr dein Nachbar geboren wurde!" Es war im Jahr

(**A**) 1948 (**B**) 1952 (**C**) 1953 (**D**) 1956 (**E**) 1963

Lösung: Wir berechnen für jede der Antwortmöglichkeiten, wie alt der Nachbar 2013 wäre: $2013 - 1948 = 65$, $2013 - 1952 = 61$, $2013 - 1953 = 60$, $2013 - 1956 = 57$, $2013 - 1963 = 50$. Von diesen Zahlen ist nur 61 ein Teiler von 2013, also ist der Nachbar 1952 geboren.

Der Freund allerdings – ohne Kenntnis der Antwortmöglichkeiten – musste 2013 in Primfaktoren zerlegen, $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, um zu sehen, dass der Nachbar nur 61 sein kann, da er einerseits älter als seine Tochter sein muss und anderseits mit mindestens $3 \cdot 61 = 183$ Jahren zu alt wäre.

21. Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 12$ bilden wir 6 Brüche, in denen jede der Zahlen genau einmal auftaucht, entweder im Zähler oder im Nenner. Wenn wir die Brüche geschickt bilden, lassen sich einige von ihnen zu ganzen Zahlen kürzen. Wie viele sind das höchstens?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Dass wir nicht 6 Brüche bilden können, die sich alle zu ganzen Zahlen kürzen lassen, liegt daran, dass zwei Zahlen, nämlich 7 und 11, jeweils nur mit der 1 im Nenner eine ganze Zahl bilden können. Also kann die Anzahl höchstens 5 sein. Im Beispiel lassen sich 5 Brüche kürzen, also ist 5 die Lösung: $\frac{12}{6} = 2$, $\frac{11}{1} = 11$, $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{9}{3} = 3$, $\frac{8}{4} = 2$ und $\frac{7}{2}$.

22. Auch im vorigen Jahr endete das Schulsportfest mit dem Wettschwimmen quer durch den Stadtsee. Am Ende schlugen am gegenüberliegenden Ufer doppelt so viele Teilnehmer vor Thaddäus an wie hinter Gary. Und vor Gary lagen anderthalbmal so viele Teilnehmer wie hinter Thaddäus. Thaddäus belegte Platz 21. Welchen Platz belegte Gary?

(**A**) den 11. (**B**) den 17. (**C**) den 24. (**D**) den 31. (**E**) den 43.

Lösung: Da Thaddäus als 21. ankommt, waren vor ihm 20 Teilnehmer. Hinter Gary waren also $\frac{20}{2} = 10$ Teilnehmer. Wir bezeichnen die Anzahl der Teilnehmer hinter Thaddäus mit n. Dann waren vor Gary $\frac{3}{2}n$ Teilnehmer. Gary hatte genauso viele Gegner wie Thaddäus, also muss $20 + n = \frac{3}{2}n + 10$ sein, woraus $n = 20$ folgt. Gary belegte folglich Platz $\frac{3}{2}n + 1 = 31$.

Ähnlich sind Aufgabe 25 in Klassenstufe 7/8 und Aufgabe 21 in Klassenstufe 11–13.

23. Nach einem recht harten Test in Geographie stellt eine der Schülerinnen fest: „Schade, hätte jede von den Mädchen aus unserer Klasse bei dem Test 3 Punkte mehr bekommen, dann wäre der Punktedurchschnitt unserer Klasse um 1,2 Punkte höher und wir wären besser als die Parallelklasse." Wie viel Prozent der Schüler in dieser Klasse sind Mädchen?

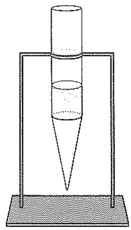
(**A**) 40 % (**B**) 50 % (**C**) 60 % (**D**) 70 % (**E**) 80 %

Lösung: In die Klasse gehen M Mädchen und J Jungen. Hätte jedes Mädchen 3 Punkte mehr bekommen, würde der Klassendurchschnitt um 1,2 Punkte steigen, d. h. $1{,}2 = \frac{3 \cdot M}{M + J}$. Der Anteil der Mädchen in der Klasse ist also $\frac{M}{M + J} = 1{,}2 : 3 = 0{,}4 = 40\,\%$. – Die Lösung kann auch durch Schätzen erhalten werden. Bewirken nämlich 3 Punkte mehr pro Mädchen nur ein Ansteigen der Durchschnittspunktzahl um 1,2 Punkte ($< 1{,}5$ Punkte), so müssen in der Klasse weniger als die Hälfte Mädchen sein. Also kann von den vorgeschlagenen Antworten nur 40 % die Lösung sein.

Die Jahreszahl 2013 soll als Summe von 4 natürlichen Zahlen geschrieben werden. Dabei soll der 2. Summand das Doppelte, der 3. Summand das Dreifache und der 4. Summand das Fünffache des 1. Summanden sein. Wer findet die Summanden?

$$\square + \square + \square + \square = 2013$$

24. Im Labor hängt in einer Kippvorrichtung ein 90 cm langes geschlossenes Gefäß, das aus einem Zylinder und einem Kegel besteht. Die im Gefäß befindliche Flüssigkeit nimmt ein Drittel des Gefäßvolumens ein. Hängt das Gefäß mit der Kegelspitze nach unten, so ist der Flüssigkeitsspiegel 50 cm über der Spitze, wobei der Kegel vollständig gefüllt ist (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie hoch ist der Flüssigkeitsspiegel über dem Boden, wenn die Spitze des Kegels nach oben zeigt?



(**A**) 15 cm (**B**) 20 cm (**C**) 25 cm
(**D**) 30 cm (**E**) Das hängt vom Radius des Zylinders ab.

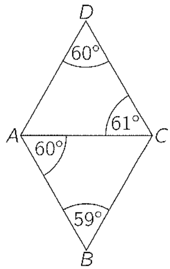
Lösung: Da der Kegel vollständig gefüllt ist, befinden sich die restlichen 2/3 des Volumens vollständig im Zylinder. Dieser Teil des Zylinders hat eine Höhe von 90 cm − 50 cm = 40 cm. Wird das Gefäß umgedreht, so nimmt die Flüssigkeit genau die Hälfte der zwei Drittel ein, die im Moment leer sind, hätte also eine Höhe von 40 cm/2 = 20 cm.

25. Setzen wir geeignet Klammern in den Term $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$, so können wir den Wert verändern. Welches ist der größtmögliche Wert, den wir dabei erhalten können?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 5 (**D**) 45 (**E**) 55

Lösung: Egal, wie wir Klammern setzen, immer geht die 2 negativ in die Rechnung ein. Lassen wir die 3 positiv in die Rechnung eingehen, so geht sicher die 4 negativ ein. Lassen wir die 3 dagegen negativ in die Rechnung eingehen, so können alle folgenden Summanden (4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10) positiv in die Rechnung eingehen, wie die folgende Rechnung zeigt: $1-(2+3-(4+5)-(6+7)-(8+9)-10) = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$. Das ist das größtmögliche Ergebnis.

26. Johannes hatte die Absicht, zwei gleichseitige Dreiecke zu zeichnen, die eine gemeinsame Seite haben (s. Abb.). Als er die Winkel in seiner Zeichnung nachmisst, stellt er fest, dass er ungenau gezeichnet hat. Nicht alle Winkel sind gleich 60°. Welche der fünf Strecken in Johannes' Zeichnung ist die längste?



(**A**) $\overline{AD}$ (**B**) $\overline{AC}$ (**C**) $\overline{AB}$ (**D**) $\overline{BC}$ (**E**) $\overline{CD}$

Lösung: Da die beiden Dreiecke in ihren Winkeln übereinstimmen, sind sie zueinander ähnlich. In jedem Dreieck liegt die längste Seite dem größten Winkel gegenüber und die kürzeste dem kleinsten. Die gemeinsame Seite $\overline{AC}$ ist also sowohl die kürzeste Seite des unteren Dreiecks als auch die mittlere Seite im oberen Dreieck. Also ist – wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke – die längste Seite im unteren Dreieck länger als die längste Seite im oberen Dreieck, und damit die längste der 5 Strecken überhaupt. Das ist $\overline{AB}$.

27. Es sei x eine reelle Zahl und $a = 2+x$, $b = 2-x$, $c = 2 \cdot x$. Welche der Zahlen a, b, c die größte oder die kleinste ist, hängt von x ab. Von den folgenden Ungleichungen allerdings gilt eine nie. Welche?

(**A**) $a < c < b$ (**B**) $b < a < c$ (**C**) $b < c < a$ (**D**) $c < a < b$ (**E**) $c < b < a$

Lösung: Wenn wir für x nacheinander 3, 1, −1 bzw. $\frac{1}{2}$ einsetzen, so sehen wir, dass (**B**), (**C**), (**D**) und (**E**) erfüllt sein können. Aus (**A**) würde $a < c$ und $c < b$ folgen. Umgeformt erhalten wir $a < c \iff 2 + x < 2x$, also $2 < x$, und $c < b \iff 2x < 2 - x$, also $x < \frac{2}{3}$. Diese beiden Anforderungen an x können jedoch nie gleichzeitig erfüllt werden.

28. Jessica will für ihren kleinen Bruder ein Computerspiel programmieren. In der jetzigen Version lässt sie 50 kleine Autos, die in langer Reihe nebeneinanderstehen, der Reihe nach im Sekundentakt losfahren. Das erste fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 mm/s und jedes Auto, das eine Sekunde später als sein Nachbar abfährt, fährt mit einer um 1 mm/s höheren Geschwindigkeit. Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Auto, das nach 100 s am weitesten gefahren ist?

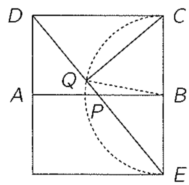
(**A**) 50 mm/s (**B**) 60 mm/s (**C**) 75 mm/s
(**D**) 99 mm/s (**E**) Alle Autos sind gleich weit gefahren.

Lösung: Die Länge des Weges, den das Auto Nummer n nach 100 s zurückgelegt hat, berechnet sich als $v_n \cdot t_n = (50+n)\,\frac{\text{mm}}{\text{s}} \cdot (100-n)\,\text{s} = (5000+50n-n^2)\,\text{mm}$. Schreiben wir diesen Term als $5000+25^2-(25-n)^2$, so sehen wir, dass n nur noch in dem quadratischen Term $(25-n)^2$ vorkommt, der offensichtlich für $n=25$ am kleinsten wird. Das ist das n, für das $v_n \cdot t_n$ am größten ist. Das Auto Nummer 25 ist also nach 100 s am weitesten gefahren, es fährt mit einer Geschwindigkeit von $75\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$.

29. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, P Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und Q der Fußpunkt des Lotes von C auf PD. Dann gilt sicher

(**A**) $\overline{CQ}=\overline{DQ}$ (**B**) $\overline{BC}=\overline{BQ}$ (**C**) $\overline{BC}=\overline{CQ}$ (**D**) $\overline{BQ}=\overline{DQ}$ (**E**) $\overline{BQ}=\overline{CQ}$

Lösung: Wir verdoppeln das Rechteck $ABCD$ nach unten. Da P Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, schneiden sich PD und BC im Eckpunkt E des unteren Rechtecks. Das Dreieck QEC ist nach Voraussetzung rechtwinklig, und B ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{EC}$. Dann gilt nach der Umkehrung des Satzes von Thales, dass Q auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{BC}$ liegt. Also ist $\overline{BC}=\overline{BQ}$.

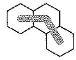


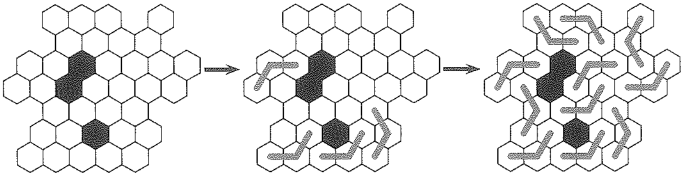
30. Wie viele natürliche Zahlen sind Vielfache von 2013 und haben genau 2013 Teiler, eingeschlossen 1 und die Zahl selbst?

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) unendlich viele

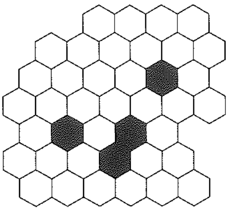
Lösung: Ist $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ die Primfaktorzerlegung von a (die p_i sind paarweise verschieden), so ist die Anzahl der Teiler von a gleich $(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_n+1)$.
Ein Vielfaches von 2013 hat mindestens die drei Primfaktoren 3, 11 und 61, denn $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$. Die Anzahl 2013 der Teiler müssen wir also als Produkt mit mindestens 3 Faktoren größer als 1 darstellen. Das geht nur auf eine Weise: $2013 = 3\cdot 11\cdot 61 = (2+1)(10+1)(60+1)$. Also hat ein Vielfaches von 2013 mit 2013 Teilern nur die Primfaktoren 3, 11 und 61, die auf jede mögliche Weise in den Potenzen 2, 10 und 60 vorkommen können. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten: $3^2\cdot 11^{10}\cdot 61^{60}$, $3^2\cdot 11^{60}\cdot 61^{10}$, $3^{10}\cdot 11^2\cdot 61^{60}$, $3^{10}\cdot 11^{60}\cdot 61^2$, $3^{60}\cdot 11^2\cdot 61^{10}$ und $3^{60}\cdot 11^{10}\cdot 61^2$.

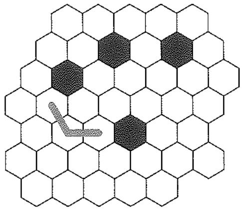
Kopfnüsse II: Wabenzerlegung

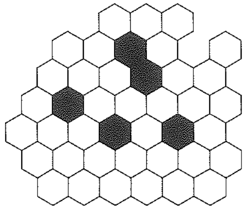
Das Netz aus Sechsecken soll vollständig in Dreiergruppen der folgenden Form zerlegt werden: 
Die schwarzen Sechsecke bleiben dabei unberührt. Hier ist ein Beispiel:

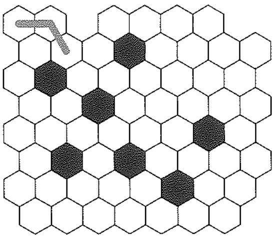


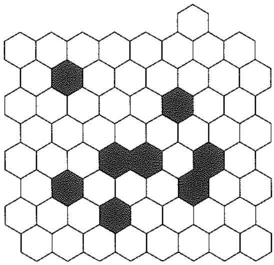
Wie sehen die Zerlegungen der folgenden Netze aus?





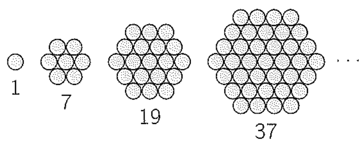






Die Kopfnüsse sind dem Buch „Das große Buch der Kopfnüsse" von W. A. Portugalow entnommen, das 2007 für die Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus erschienen ist.

Sechseckzahlen heißen diejenigen Zahlen, die die Anzahl von Kugeln angeben, die sich dicht gepackt zu einem regelmäßigen Sechseck anordnen lassen. Die Folge der Sechseckzahlen beginnt mit 1, 7, 19, 37 (s. Abb.).



Wer findet eine Formel zur Berechnung der Sechseckzahlen?

Verwegen gewogen

Aus einem Paket mit 1000 g Tee sollen 900 g entnommen werden. Zur Verfügung steht eine alte Balkenwaage, Wägestücke gibt es leider keine. Allerdings gibt es noch ein Päckchen dieses Tees mit 400 g. Wie kann man sich helfen?

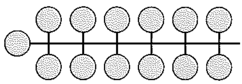
Unter 27 äußerlich ununterscheidbaren Kristallen befindet sich ein wertvoller Diamant. Dieser ist ein wenig schwerer als die restlichen, völlig gleich schweren Kristalle. Wie oft muss man mindestens mit einer Balkenwaage wiegen, um den Diamanten zu finden?

In einer Schraubenfabrik wurde einer oder mehreren der 5 Maschinen das falsche Material zugeführt. Statt der üblichen 10 g wiegen die aus dem falschen Material bestehenden Schrauben 11 g, doch äußerlich sind sie nicht zu unterscheiden. Welche Maschine(n) das betrifft, soll herausgefunden werden. Dies zu ermitteln, hat der Lehrmeister den Lehrlingen aufgetragen. Von jeder der Maschinen steht ein Eimer mit etwa 100 Schrauben bereit. Um die Pfiffigkeit der Lehrlinge zu testen, ist nur eine einzige Wägung mit der bereitstehenden Digitalwaage erlaubt. Wie kann diese Aufgabe gelöst werden?

Mathematische Spiele

... mit Muscheln: Nora und Lucy haben am Meer Muscheln gesammelt. Für ein Spiel haben sie 40 Muscheln auf einen Haufen gelegt. Abwechselnd nehmen sie Muscheln weg, jedesmal höchstens 10. Lucy beginnt. Es gewinnt diejenige, die als letzte Muscheln wegnimmt. Welches der beiden Mädchen kann den Sieg für sich erzwingen?

... mit Münzen: Susanna und Murad haben auf ein Blatt Papier 13 Münzen in der Form eines Robinienblattes gelegt. Sie haben eine Linie gezeichnet, an eines der Enden eine Münze gelegt und dann – am „Stiel“ entlang – immer 2 Münzen als Paar, durch einen kleinen Strich verbunden.



Sie spielen folgendes Spiel: Abwechselnd nehmen sie irgendeine einzelne Münze oder zwei Münzen, die ein Paar bilden. Wer als Letzter eine oder zwei Münzen nehmen kann, gewinnt. Susanna darf beginnen. Kann Susanna oder kann Murad durch geeignete Spielzüge den Sieg erzwingen?

In der zweiten Runde spielen sie mit 19 Münzen, die ebenso, aber zu einem etwas längeren Blatt angeordnet sind. Diesmal beginnt Murad. Wer kann in dieser Runde den Sieg erzwingen?

... mit Kieselsteinen: Gregor und Cornelius spielen folgendes Spiel: Es liegen 24 Kieselsteine auf einem Haufen. Abwechselnd dürfen 2 oder 4 oder 7 Kieselsteine vom Haufen entfernt werden. Es verliert derjenige, der nicht mehr in der Lage ist, 2 oder 4 oder 7 Kieselsteine zu entfernen. Wer kann den Sieg erzwingen?

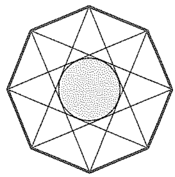
Aus den Ziffern von 1 bis 9 werden Zahlen gebildet, die anschließend addiert werden. Kann die Summe 99 sein? Kann die Summe 100 sein?

Klassenstufen 11 bis 13

1. Welche der folgenden Zahlen ist die größte?

(**A**) 2013 (**B**) $2^{(0+13)}$ (**C**) 20^{13} (**D**) 201^3 (**E**) $20 \cdot 13$

Lösung: 20^{13} ist die bei weitem größte der fünf Zahlen.



2. Das abgebildete regelmäßige Achteck hat eine Seitenlänge von 11 cm. Wie groß ist der Radius des grauen Kreises?

(**A**) 5 cm (**B**) 5,5 cm (**C**) 6 cm (**D**) 7 cm (**E**) 7,5 cm

Lösung: Der Durchmesser des Kreises ist genauso lang wie eine Seite des Achtecks. Also ist der Radius des Kreises halb so lang, nämlich gleich 5,5 cm.

3. Gegeben sind drei 2-stellige Zahlen AA, BB und CC, die aus je zwei gleichen Ziffern bestehen. Wenn $AA + BB + CC = 198$ gilt, wie groß ist dann $A + B + C$?

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 19

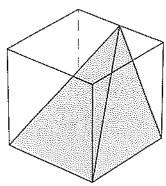
Lösung: Da $AA : 11 = A$, $BB : 11 = B$ und $CC : 11 = C$ ist, gilt:

$$A + B + C = (AA + BB + CC) : 11 = 198 : 11 = 18\,.$$

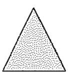
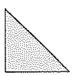
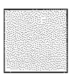
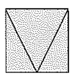
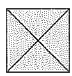
4. Für einen Deutschvortrag lesen Harry und Hermine Hermann Hesses „Steppenwolf". Hermine ist nach einer Stunde auf Seite 60 angekommen. Harry liest schon drei Stunden, er ist aber nur etwa halb so schnell wie Hermine. Wie viele Seiten hat Harry zu diesem Zeitpunkt ungefähr gelesen?

(**A**) 30 (**B**) 45 (**C**) 80 (**D**) 90 (**E**) 120

Lösung: Da Harry etwa halb so schnell liest wie Hermine, ist er nach einer Stunde etwa auf Seite 30 und nach drei Stunden etwa auf Seite 90.



5. Eine hölzerne Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist in einem durchsichtigen Würfel verpackt. Die Spitze der Pyramide liegt genau auf der Mitte einer Würfelkante (s. Abb). Wir betrachten die Pyramide durch die sechs Würfelseiten und zeichnen einige Ansichten. Welche der folgenden Abbildungen ist keine solche Ansicht der Pyramide?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

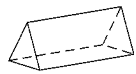
Lösung: (**A**) ist die Ansicht von vorn und hinten, (**B**) die von links, (**C**) die von unten und (**D**) die von oben. (**E**) zeigt keine Ansicht der Pyramide.

6. Als ich bemerke, dass $2^4 = 4^2$ ist, probiere ich, ob das für 2 und 8 auch gilt. Da klappt es aber nicht, denn 2^8 ist größer als 8^2, und zwar

(**A**) 2-mal so groß (**B**) 4-mal so groß (**C**) 8-mal so groß
(**D**) 16-mal so groß (**E**) 32-mal so groß

Lösung: Es ist $8^2 = (2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6$, und $2^8 = 2^{2+6} = 4 \cdot 2^6$ ist 4-mal so groß wie 8^2.

7. Das Prisma im Bild hat 5 Flächen und 9 Kanten. Wie viele Kanten hat ein Prisma, das 2013 Flächen besitzt?



(**A**) 2011 (**B**) 2013 (**C**) 4022 (**D**) 4024 (**E**) 6033

Lösung: Ein Prisma, dessen Grundfläche ein n-Eck ist, besitzt $(n+2)$ Flächen (n Mantelflächen, eine Deckfläche und eine Grundfläche) und $3n$ Kanten. Ein Prisma mit 2013 Flächen hat als Grundfläche ein 2011-Eck und besitzt folglich 6033 Kanten.

8. Als Präsident des Fördervereins „Kloster am Dom e. V." schreibt unser Mathematiklehrer regelmäßig die Klosterkolumne im Stadtboten. Dieses Jahr trug sie zum Jahresanfang den Titel „Klostermathematik". Darin stand: „2013 besteht aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern, aus 0, 1, 2 und 3. Und unser schönes Kloster wurde in dem Jahr gegründet, in dem das letzte Mal die Jahreszahl aus aufeinanderfolgenden Ziffern bestand." Wie alt ist das Kloster?

(**A**) 581 Jahre alt (**B**) 671 Jahre alt (**C**) 689 Jahre alt (**D**) 770 Jahre alt (**E**) 779 Jahre alt

Lösung: Die erste Ziffer der Jahreszahl muss eine 1 sein, da es zwischen 2000 und 2013 keine Zahl mit der geforderten Bedingung gibt. Die größte mit 1 beginnende vierstellige Zahl aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern ist 1432 – also ist 1432 das Gründungsjahr. Das war vor 581 Jahren.

9. Die dritte Wurzel aus $3^{(3^3)}$ ist gleich

(**A**) $3^{(3^2)}$ (**B**) 3^3 (**C**) $3^{(3^3-1)}$ (**D**) $3^{(2^3)}$ (**E**) 3

Lösung: Wir formen um: $3^{(3^3)} = 3^{3\cdot 3\cdot 3} = (3^{3\cdot 3})^3 = \left(3^{(3^2)}\right)^3$. Die dritte Wurzel aus $3^{(3^3)}$ ist also $3^{(3^2)}$.

10. Wenn ich mit meinen Eltern und meinen beiden Schwestern meine Großmutter in Thüringen besuche, freue ich mich jedes Mal auf die Klöße, die sie zum Mittag macht. Heute hatte sie für uns 6 Personen 20 Klöße gemacht, die wie immer aufgegessen wurden. Sie selbst hat nur einen Kloß gegessen, meine Mutter hat 2 und ich habe 3 Klöße gegessen. Mein Vater hat wie immer mehr als jeder andere gegessen. Wie viele Klöße hat mein Vater *mindestens* gegessen?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

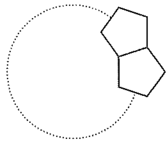
Lösung: Hätte mein Vater von den $20 - 1 - 2 - 3 = 14$ Klößen nur 4 oder 5 gegessen, dann wären noch 10 oder 9 Klöße für meine beiden Schwestern übrig. In beiden Fällen gäbe es aber eine, die mindestens 5 Klöße gegessen hätte – also *nicht weniger* als mein Vater. Mein Vater hat mindestens 6 Klöße gegessen, die 8 restlichen Klöße lassen sich so auf meine beiden Schwestern verteilen, dass jede weniger als 6 gegessen hat.

11. Wenn Wasser gefriert, vergrößert sich sein Volumen um $\frac{1}{11}$. Wenn Eis schmilzt, verringert sich dessen Volumen also um

(**A**) $\frac{1}{10}$ (**B**) $\frac{1}{11}$ (**C**) $\frac{1}{12}$ (**D**) $\frac{1}{13}$ (**E**) $\frac{1}{14}$

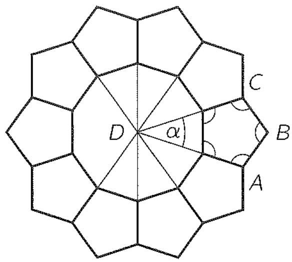
Lösung: Das Volumen des Eises ist $\frac{12}{11}$-mal so groß wie das Volumen des Wassers. Also beträgt das Volumen des Wassers $\frac{11}{12}$ des Volumens des Eises – das ist $\frac{1}{12}$ weniger.

12. Architekt Peter vom Stein plant die Fußboden-Gestaltung des neuen Konzertsaals. Der Flügel soll in einem Kreis stehen, dessen Rand aus identischen Marmorplatten gebildet wird, die regelmäßige Fünfecke sind (s. Abb.). Wie viele Marmor-Fünfecke müssen für den vollständigen Kreisrand eingeplant werden?



(**A**) 5 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Im regulären Fünfeck misst jeder Innenwinkel 108°. Die Innenwinkelsumme im Viereck $ABCD$, das in der Abbildung rechts markiert ist, beträgt 360°. Somit ist $\alpha = 360° - 3 \cdot 108° = 36°$. Der Rand der Fläche, auf der der Flügel stehen soll, besteht aus $\frac{360°}{36°} = 10$ Marmor-Fünfecken.



13. Wie viele der folgenden Ungleichungen gelten *für alle* reellen Zahlen x, die $2 < x < 3$ erfüllen?

$4 < 2x < 6$ $\quad 4 < 3x < 9 \quad 8 < 4x < 15 \quad 12 < 5x < 15$

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle vier

Lösung: Multiplizieren wir $2 < x < 3$ mit 2, so erhalten wir $4 < 2x < 6$. Die erste der vier Ungleichungen gilt also stets. Multiplizieren wir $2 < x < 3$ mit 3, so erhalten wir $6 < 3x < 9$. Wegen $4 < 6$ folgt $4 < 6 < 3x < 9$, womit auch die zweite Ungleichung stets gilt. Multiplizieren wir $2 < x < 3$ mit 4, so erhalten wir $8 < 4x < 12$. Wegen $12 < 15$ folgt $8 < 4x < 12 < 15$, womit auch die dritte Ungleichung stets gilt. Die vierte Ungleichung gilt nicht immer, sie ist z. B. für $x = 2{,}2$ nicht erfüllt, da $12 > 11 = 5 \cdot 2{,}2$.

Finde alle Lösungen (J, A, H, R) des folgenden Gleichungssystems:

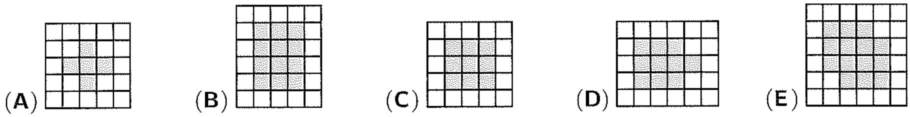
$$\begin{aligned} J + A + 6H - 2R &= 2 \\ J + 2A + H - R &= 0 \\ 2J - 3A + 3H - 2R &= 1 \\ 3J - 4A + 6H - 3R &= 3 \end{aligned}$$

14. Wie viele zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen sowohl ihre Hälfte als auch ihr Doppeltes wieder eine zweistellige natürliche Zahl ist?

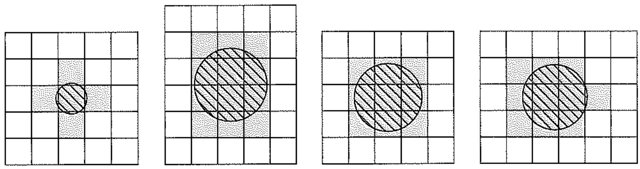
(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 50

Lösung: Gesucht sind alle *geraden* natürlichen Zahlen (da ja die Hälfte ganzzahlig sein soll), die mindestens $2 \cdot 10 = 20$ und höchstens $99/2 = 49{,}5$ sind. Das sind die 15 Zahlen $20, 22, 24, \ldots, 48$.

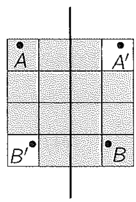
15. Ein kreisrunder Teppich liegt auf einem quadratisch gefliesten Boden. Alle Fliesen, auf denen ein Teil des Teppichs liegt, werden grau markiert. Welches der folgenden Muster kann dabei nicht entstehen?



Lösung: Die Abbildungen rechts zeigen, dass sich bei (**A**) bis (**D**) jeweils entsprechende Teppiche finden lassen.



Angenommen, Muster (**E**) ist möglich. Da alle Fliesen, auf denen ein Teil des Teppichs liegt, grau markiert sind, gibt es einen Punkt A im linken oberen grauen Quadrat und einen Punkt B im rechten unteren, die beide zum Teppich gehören. Die Spiegelpunkte an der eingezeichneten Geraden entlang der mittleren Fliesenfuge bezeichnen wir mit A' und B'. Da diese beiden Punkte zu einem weißen Quadrat gehören, gehören sie nicht zum Teppich.



Da A zum Teppich gehört und A' nicht, muss der Mittelpunkt des Teppichs links von der eingezeichneten Geraden liegen. Da B zum Teppich gehört und B' nicht, muss der Mittelpunkt des Teppichs jedoch rechts von der eingezeichneten Geraden liegen. Es kann also für (**E**) keinen solchen Teppich geben.

16. Für eine lineare Funktion f gilt $f(2013) - f(2003) = 100$. Wie groß ist dann $f(2031) - f(2013)$?

(**A**) 100 (**B**) 120 (**C**) 150 (**D**) 180 (**E**) 200

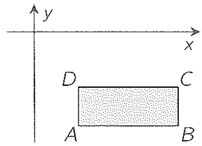
Lösung: Der Anstieg der linearen Funktion f ist gleich $\dfrac{f(2013) - f(2003)}{2013 - 2003} = \dfrac{100}{10} = 10$. Dann ist $f(2031) - f(2013) = 10 \cdot (2031 - 2013) = 10 \cdot 18 = 180$.

17. Wie viele Paare (x, y) natürlicher Zahlen gibt es, für die $x^2y^3 = 2^{33}$ gilt?

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 11 (**E**) 12

Lösung: Die beiden natürlichen Zahlen x und y müssen Potenzen von 2 sein. Für $x = 2^a$ und $y = 2^b$ ist $x^2y^3 = 2^{2a+3b} = 2^{33}$. Da $3b$ und 33 durch 3 teilbar sind, muss auch $2a$ durch 3 teilbar sein. Damit kann a nur $0, 3, 6, 9, \ldots$ sein, die größte mögliche Zahl für a ist 15. Die 6 Lösungen für (a, b) sind somit $(0, 11)$, $(3, 9)$, $(6, 7)$, $(9, 5)$, $(12, 3)$ und $(15, 1)$.

18. Das Rechteck $ABCD$ liegt im 4. Quadranten des Koordinatensystems, seine Seiten sind parallel zu den Achsen. Für welchen der 4 Eckpunkte ist der Quotient $\frac{y}{x}$ aus der y-Koordinate und der x-Koordinate am größten?



(**A**) für A (**B**) für B (**C**) für C
(**D**) für D (**E**) Das hängt von der Gestalt des Rechtecks ab.

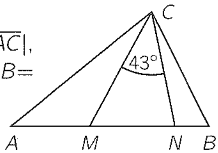
Lösung: Der gesuchte Punkt ist (**C**), siehe Lösungsidee zu Aufgabe 18 in Klassenstufe 9/10.

19. Die vier Familien in der Gartenstraße 42 bekommen gerade drei verschiedene Pakete geliefert, ein großes, ein mittleres und ein ganz kleines. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Familien mehr als eines der drei Pakete bekommt?
(*Die Wahrscheinlichkeit, ein Paket zu bekommen, ist für jede Familie die gleiche.*)

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{2}{7}$ (**C**) $\frac{3}{8}$ (**D**) $\frac{4}{9}$ (**E**) $\frac{5}{10}$

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendeine der 4 Familien das große Paket bekommt, ist natürlich 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendeine *andere* Familie das mittlere Paket bekommt, ist $\frac{3}{4}$. Und die Wahrscheinlichkeit, dass eine der jetzt noch paketfreien Familien das kleine Paket erhält, ist $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Da die Verteilung der Pakete unabhängig voneinander erfolgt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der Familien mehr als ein Paket bekommt, $1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

20. Im Dreieck ABC liegen die Punkte M und N auf der Seite $\overline{AB}$. Es gilt $|\overline{AN}| = |\overline{AC}|$, $|\overline{BM}| = |\overline{BC}|$ und $\measuredangle MCN = 43°$ (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Dann ist $\measuredangle ACB =$



(**A**) 86° (**B**) 89° (**C**) 90° (**D**) 92° (**E**) 94°

Lösung: Wegen $|\overline{AN}| = |\overline{AC}|$ und $|\overline{BM}| = |\overline{BC}|$ sind die Dreiecke CAN und MBC gleichschenklig. Damit gilt $\measuredangle CNA = \measuredangle ACN$ und $\measuredangle BMC = \measuredangle MCB$. Wir berechnen $\measuredangle ACB = \measuredangle ACN + \measuredangle MCB - 43° = \measuredangle CNA + \measuredangle BMC - 43° = \measuredangle CNM + \measuredangle NMC - 43° = (180° - 43°) - 43° = 94°$.

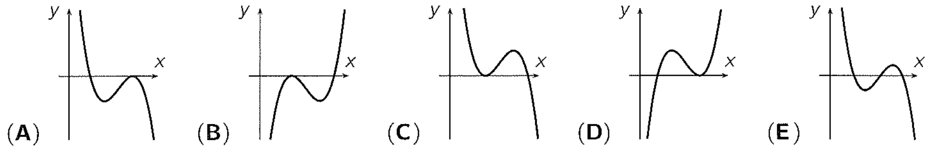
21. Beim Schulmarathon gab es in diesem Jahr einen neuen Rekord: 101 Teilnehmer waren dabei. Silke hatte zum Schluss doppelt so viele hinter sich wie Eva vor sich hatte. Und Eva ihrerseits hatte beim Zieleinlauf dreimal so viele hinter sich wie Silke vor sich hatte. Welchen Platz belegte Eva?

(**A**) den 20. (**B**) den 21. (**C**) den 40. (**D**) den 41. (**E**) den 61.

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der Teilnehmer, die vor Eva bzw. Silke ins Ziel gelangten, mit x bzw. y. Dann haben $3y$ Teilnehmer hinter Eva und $2x$ Teilnehmer hinter Silke das Ziel erreicht. Da sowohl Silke als auch Eva gegen 100 andere Teilnehmer gelaufen ist, gilt $x + 3y = 100$ und $y + 2x = 100$. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert $x = 40$ und $y = 20$. Eva lief also als 41. ins Ziel.

Ein ähnliches Problem mit einer anderen Fragestellung wurde in Aufgabe 25 in Klassenstufe 7/8 und in Aufgabe 22 in Klassenstufe 9/10 gestellt.

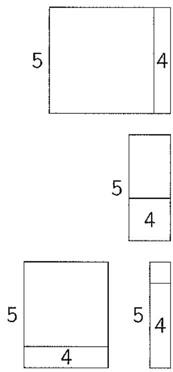
22. Es sei $a < b$. Welcher der folgenden Graphen gehört zur Funktion $W(x) = (a - x)(b - x)^2$?



Lösung: Die Nullstellen von W sind a und b. Da stets $(x - b)^2 \geq 0$ ist, gilt: Für $x < a$ ist $W(x)$ positiv, für $a < x < b$ und $x > b$ ist $W(x)$ negativ. Das trifft nur auf den Graphen in (**A**) zu.

23. Christina will ein Rechteck zeichnen, dessen eine Seite 5 cm lang ist. Das Rechteck soll so beschaffen sein, dass es durch eine gerade Linie in zwei Teile zerlegt werden kann, von denen eines ein Quadrat ist und außerdem eines der beiden Teile 4 cm^2 groß ist. Wie viele verschiedene Rechtecke kann Christina zeichnen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

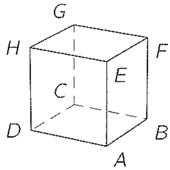


Lösung: Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden:
Fall 1: Die Teilungsgerade ist parallel zur 5 cm langen Seite.
Dann muss das Quadrat 25 cm^2 groß sein. Das 4 cm^2 große Rechteck hat folglich als zweite Seitenlänge $\frac{4}{5}$ cm. Das Ausgangsrechteck hat die Maße 5 cm $\times$ $\frac{29}{5}$ cm.
Fall 2: Die Teilungsgerade steht senkrecht auf der 5 cm langen Seite.
Fall 2a: Das *Quadrat* ist 4 cm^2 groß.
Dann hat das Quadrat eine Seitenlänge von 2 cm, das Ausgangsrechteck hat die Maße 5 cm $\times$ 2 cm.
Fall 2b: Das *nicht-quadratische Rechteck* ist 4 cm^2 groß.
Bezeichnen wir die Seitenlänge des Quadrats mit x, dann gilt für den Flächeninhalt des nicht-quadratischen Rechtecks $4 = 5x - x^2$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $x = 1$ und $x = 4$. Die zugehörigen Ausgangsrechtecke haben die Maße 5 cm $\times$ 1 cm und 5 cm $\times$ 4 cm.

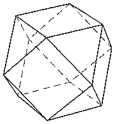
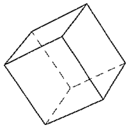
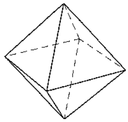
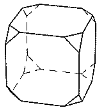
Christina kann vier verschiedene Rechtecke zeichnen.

Das folgende 6 × 6-Quadrat ist so in 3 Quadrate und 4 nicht-quadratische Rechtecke zu zerlegen, dass das Produkt der Zahlen in jedem der Teile gleich 72 ist.

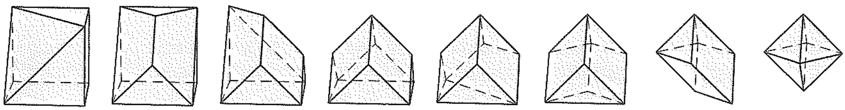
1	2	3	4	1	6
4	3	2	3	4	3
3	1	6	1	2	1
8	9	1	3	1	2
1	2	3	1	1	8
2	3	1	2	9	1



24. Zu jedem Eckpunkt des Würfels $ABCDEFGH$ stelle ich mir die Ebene vor, die durch die drei zu diesem Eckpunkt benachbarten Eckpunkte bestimmt ist. Zum Eckpunkt E gehört z. B. die Ebene durch A, F und H. Ich schneide entlang aller dieser acht Ebenen. Dadurch zerfällt der Würfel in mehrere Teilkörper. Welche Gestalt hat der Teilkörper, der den Würfelmittelpunkt enthält?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** Es bleibt nur der Würfelmittelpunkt übrig.

Lösung: Die Schnittebenen verlaufen stets durch Flächenmittelpunkte des Würfels. Wenn die Ecken nacheinander abgeschnitten werden, entsteht ein Oktaeder. Seine Eckpunkte sind genau die Mittelpunkte der Seitenflächen des ursprünglichen Würfels. In der Bildfolge ist das sukzessive Ecken-Abschneiden dargestellt:



25. Wie viele Lösungen (x, y), wobei x und y reelle Zahlen sind, hat die Gleichung $x^2 + y^2 = x + y$?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** unendlich viele

Lösung: Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu $x^2 - x - (y - y^2) = 0$. Dies ist eine quadratische Gleichung in x mit der Diskriminante $\frac{1}{4} + (y - y^2)$. Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, wenn die Diskriminante positiv ist, was mit Sicherheit für $y - y^2 \geq 0$ erfüllt ist. Das trifft auf alle $y \in [0, 1]$, also unendlich viele, zu. Die Gleichung hat also unendlich viele verschiedene Lösungen (x, y).

Wir geben eine zweite Lösungsidee: Die Menge aller Punkte, für die $x^2 + y^2 = c$ gilt, wobei $c > 0$ eine reelle Konstante ist, ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $\sqrt{c}$. Die Menge aller Punkte, für die $x + y = c$ gilt, ist eine Gerade mit Anstieg -1 und Absolutglied c. Für jedes $c < 1$ ist $\sqrt{c} > c$, also schneidet die Gerade $x + y = c$ den Kreis $x^2 + y^2 = c$ in zwei Punkten. Folglich gibt es unendlich viele Lösungen.

26. Daniela untersucht eine Zahlenfolge, die mit $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 15, \ldots$ beginnt. Daniela stellt fest, dass es für alle $m, n \in \mathbb{N}$ einen Zusammenhang zwischen den Gliedern a_m, a_n und a_{m+n} gibt. Es gilt nämlich $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$. Wie groß ist a_{100}?

(A) 100 **(B)** 1000 **(C)** 2012 **(D)** 4950 **(E)** 5050

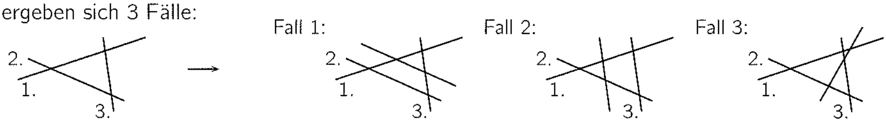
Lösung: Wir rechnen $a_{100} = a_{50} + a_{50} + 50 \cdot 50 = 2a_{50} + 2500$. Analog ist $a_{50} = 2a_{25} + 625$ und $a_{25} = a_{10} + a_{15} + 150$ sowie $a_{15} = a_{10} + a_5 + 50$ und schließlich $a_{10} = 2a_5 + 25$. Da $a_5 = 15$ ist, gilt nun $a_{10} = 2 \cdot 15 + 25 = 55$, also $a_{15} = 55 + 15 + 50 = 120$, also $a_{25} = 55 + 120 + 150 = 325$, also $a_{50} = 2 \cdot 325 + 625 = 1275$ und schließlich $a_{100} = 2 \cdot 1275 + 2500 = 5050$.

Übrigens ist a_n gleich der Summe der ersten n natürlichen Zahlen, denn nach der Formel aus der Aufgabe gilt $a_n = a_{(n-1)+1} = a_{n-1} + a_1 + (n - 1) = a_{n-1} + n$, also ist a_n um n größer als sein Vorgänger a_{n-1}. Wer weiß, dass $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ gilt, hat schnell die Lösung $a_{100} = 5050$.

27. In der Ebene seien mehrere Geraden gegeben. Die 1. Gerade schneidet genau 3 der anderen Geraden. Die 2. Gerade schneidet genau 4 der anderen Geraden. Und die 3. Gerade schneidet weder genau 3 noch genau 4 der anderen Geraden. Um wie viele Geraden handelt es sich insgesamt?

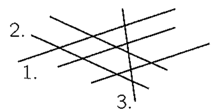
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Die in der Aufgabe genannte 1., 2. und 3. Gerade müssen sich paarweise schneiden. Denn wären zwei dieser parallel, hätten sie entgegen der Bedingung der Aufgabe nicht unterschiedlich viele Schnittpunkte mit den anderen Geraden. Die erste Gerade schneidet noch genau eine weitere Gerade, die entweder parallel zur 2. Geraden oder parallel zur 3. Geraden ist oder diese beiden schneidet. Es ergeben sich 3 Fälle:

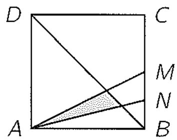


Alle weiteren Geraden sind parallel zur 1. Geraden und schneiden damit die 2. und 3. Gerade.

Im zweiten und dritten Fall muss die 2. Gerade genau eine weitere Gerade schneiden. Dann würde aber die 3. Gerade drei bzw. vier Geraden schneiden, was laut Aufgabe nicht zutrifft. Im ersten Fall muss die 2. Gerade noch genau zwei weitere Geraden schneiden. Dann würde die 3. Gerade genau fünf Geraden schneiden. Das ist möglich, insgesamt sind es 6 Geraden (s. Abb).

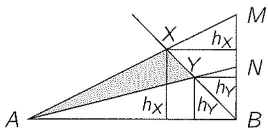


28. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 1 m. M ist Mittelpunkt von $\overline{BC}$, N ist Mittelpunkt von $\overline{BM}$. Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Dreiecks?



(**A**) $\frac{1}{7}\,\mathrm{m}^2$ (**B**) $\frac{1}{8}\,\mathrm{m}^2$ (**C**) $\frac{1}{15}\,\mathrm{m}^2$ (**D**) $\frac{1}{18}\,\mathrm{m}^2$ (**E**) $\frac{1}{21}\,\mathrm{m}^2$

Lösung: Den Schnittpunkt von AM mit BD nennen wir X und Y den von AN mit BD. Wir bezeichnen mit h_X bzw. h_Y die Länge des Lotes von X bzw. Y auf AB. Diese stimmen mit den Längen der Lote der Punkte X bzw. Y auf BC überein, da BD Symmetrieachse von $ABCD$ ist. Für die Flächeninhalte gilt:



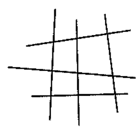
$$\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2 = A_{\triangle ABM} = A_{\triangle ABX} + A_{\triangle BMX} = \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot h_X + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\cdot h_X = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}\cdot h_X \text{ und}$$

$$\frac{1}{8}\,\mathrm{m}^2 = A_{\triangle ABN} = A_{\triangle ABY} + A_{\triangle BNY} = \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot h_Y + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{m}\cdot h_Y = \frac{5}{8}\,\mathrm{m}\cdot h_Y\,.$$

Daraus lassen sich $h_X = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}$ und $h_Y = \frac{1}{5}\,\mathrm{m}$ errechnen. Der gesuchte Flächeninhalt ist damit gleich $A_{\triangle AYX} = A_{\triangle ABX} - A_{\triangle ABY} = \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot\frac{1}{5}\,\mathrm{m} = \frac{1}{15}\,\mathrm{m}^2$.

In der Ebene können 6 Strecken mühelos so angeordnet werden, dass jede genau 3 andere schneidet, siehe Bild.

Geht das auch mit 7 Strecken? Oder mit 8 Strecken?



29. Die Probe der Theatergruppe begann heute mit einem Erwärmungsspiel. Jeder bekam eine Rolle zugewiesen und ist nun entweder ein „Bösling", der stets lügt, oder ein „Gutling", der stets die Wahrheit spricht. René, der verspätet kommt, soll durch Ja-Nein-Fragen erkunden, welche Rollen Jan und Jörg haben. „Seid ihr beide Gutlinge?", fragt er Jan, der voll in seiner Rolle ist. Dessen Antwort reicht jedoch nicht aus, um zu wissen, wer welche Rolle hat. René fragt daher Jörg: „Ist Jan ein Gutling?" Nach Jörgs Antwort ist René voll informiert und kann die Rollen der beiden benennen. Was gilt?

(**A**) Beide sind Böslinge. (**B**) Beide sind Gutlinge.
(**C**) Jan ist ein Gutling, Jörg ein Bösling. (**D**) Jörg ist ein Gutling, Jan ein Bösling.
(**E**) Man muss die Antworten von Jan und Jörg kennen, um die Rollen zu bestimmen.

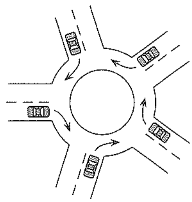
Lösung: Die obere Tabelle gibt die möglichen Antworten von Jan auf Renés Frage wieder. Wäre Jans Antwort „Nein" gewesen, hätte René sofort Bescheid gewusst. Das war aber nicht der Fall, also war Jans Antwort „Ja".

Die untere Tabelle gibt die möglichen Antworten von Jörg auf Renés Frage wieder. Wäre Jörgs Antwort „Ja", so gäbe es zwei mögliche Konstellationen. Da René jedoch nach Jörgs Antwort die Rollen der beiden bestimmen kann, muss Jörgs Antwort „Nein" gewesen sein. *Eine* mögliche Konstellation hatten wir nach Jans Antwort bereits ausgeschlossen. Die andere ist die gesuchte: Jörg ist ein Gutling, Jan ein Bösling.

Jörg / Jan	Gutling	Bösling
Gutling	Ja	Nein
Bösling	Ja	Ja

Jörg / Jan	Gutling	Bösling
Gutling	Ja	Nein
Bösling	Nein	Ja

30. Fünf Autos fahren gleichzeitig in einen Kreisverkehr, jedes aus einer anderen Richtung (s. Abb.). Jedes der Autos fährt weniger als eine ganze Runde und alle Autos verlassen den Kreisverkehr in unterschiedliche Richtungen. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es für die Autos, den Kreisverkehr zu verlassen?



(**A**) 24 (**B**) 44 (**C**) 60 (**D**) 81 (**E**) 120

Lösung: Die Einschränkung, dass jedes Auto weniger als eine ganze Runde fährt, bedeutet, dass kein Auto dort ausfährt, wo es eingefahren ist. Lassen wir diese Einschränkung weg, so gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschiedene Ausfahrkombinationen. Darin enthalten sind nun jene, bei denen ein Auto oder mehrere Autos dieselbe Ausfahrt nutzen, die ihre Einfahrt war. Es gibt genau eine Kombination, bei der alle 5 Autos dieselbe Ausfahrt nutzen, die ihre Einfahrt war. Der Fall, dass genau 4 Autos die Ausfahrt nutzen, die ihre Einfahrt war, kann nicht eintreten. Nutzen genau 3 Autos dieselbe Ausfahrt, die ihre Einfahrt war, so wechseln die beiden anderen Autos die Ausfahrten. Für die Auswahl dieser 3 Autos aus den 5 Autos gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten, die sich auch schnell aufschreiben lassen, wenn man die verwendete Formel nicht kennt. Nutzen genau 2 Autos dieselbe Ausfahrt, die ihre Einfahrt war, so tauschen die anderen 3 ihre Ausfahrten zyklisch, wofür es 2 Möglichkeiten gibt. Insgesamt gibt es also $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ solche Ausfahrkombinationen. Nutzt nur genau ein Auto dieselbe Ausfahrt, so gibt es für die übrigen 4 Autos 9 verschiedene Ausfahrkombinationen (siehe Aufgabe 26 in Klassenstufe 7/8). Damit erhalten wir für diesen Fall $\binom{5}{1} \cdot 9 = 45$ Kombinationen. Die Anzahl der gesuchten Ausfahrkombinationen ist $120 - 1 - 0 - 10 - 20 - 45 = 44$.

Lösungen der Känguru-Knobeleien

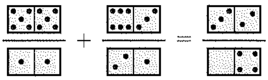
Hier befinden sich die Lösungen der kleinen Extra-Aufgaben, die zur Auflockerung und weiteren Beschäftigung an einigen Stellen zwischen die Aufgaben- und Lösungstexte geschoben sind. Die Lösungen der Aufgaben auf den zusätzlichen Seiten (12, 13, 14, 23 und 24) sind im Internet auf www.mathe-kaenguru.de unter „Chronik" zu finden.

Seite 3: Hier sind je 2 Möglichkeiten:

$$\begin{array}{r} 7\,5\,3\,2 \\ +\,8\,4\,0\,4 \\ \hline 1\,5\,9\,3\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,0\,6\,5 \\ +\,9\,8\,7\,8 \\ \hline 1\,2\,9\,4\,3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6\,4\,5\,2 \\ +\,7\,8\,9\,8 \\ \hline 1\,4\,3\,5\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,0\,9 \\ +\,8\,5\,6\,5 \\ \hline 1\,2\,8\,7\,4 \end{array}$$

Seite 6: Eine mögliche Bauweise ist die folgende, die entsprechende Gleichung ist $\frac{55}{11} + \frac{63}{21} = \frac{32}{04}$.



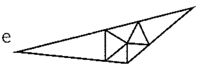
Seite 8: Ohne Klammern zu verwenden, findet man eine Darstellung für 0, 2, 3, 4, 5 und 6, zum Beispiel $0 = 2+0+1-3$, $2 = 2+0\cdot 1\cdot 3$, $3 = 2\cdot 0\cdot 1+3$, $4 = 2\cdot 0+1+3$, $5 = 2+0\cdot 1+3$ bzw. $6 = 2+0+1+3$. Für die Zahlen 1, 8 und 9 müssen Klammern geschickt gesetzt werden: $1 = (2+0+1) : 3$, $8 = 2\cdot(0+1+3)$ bzw. $9 = (2+0+1)\cdot 3$. Die 7 kann nicht dargestellt werden.

Seite 10: Waagerecht sind einzutragen: 225 ($= 15^2$), 841 ($= 29^2$), 256 ($= 16^2$), 196 ($= 14^2$), 100 ($= 10^2$) und 144 ($= 12^2$); senkrecht stehen die Quadratzahlen: 22201 ($= 149^2$), 25600 ($= 160^2$), 68121 ($= 261^2$), 11664 ($= 108^2$), 25 ($= 5^2$) und 49 ($= 7^2$).

2		2		6		1
2	2	5		8	4	1
2	5	6		1	9	6
0		0		2		6
1	0	0		1	4	4

Seite 16: Die erste Gleichung lautet $98\cdot 9 = 882$. Für die zweite gibt es 9 Möglichkeiten: $11\cdot 101 = 1111, 11\cdot 111 = 1221, 11\cdot 121 = 1331, \ldots, 11\cdot 181 = 1991$.

Seite 19: Es werden mindestens 7 spitzwinklige Dreiecke benötigt, eine mögliche Zerlegung ist rechts zu sehen.



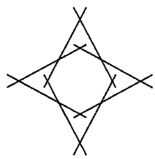
Seite 20: 2013 ist das $(1+2+3+5) = 11$-fache des ersten Summanden, dieser ist also $2013 : 11 = 183$. Die anderen Summanden sind $2\cdot 183 = 366$, $3\cdot 183 = 549$ und $5\cdot 183 = 915$.

Seite 27: Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist $(J, A, H, R) = (2, 0, 1, 3)$.

Seite 30: $72 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$ ist die Primfaktorzerlegung von 72. Damit lässt sich die Unterteilung schnell finden:

1	2	3	4	1	6
4	3	2	3	4	3
3	1	6	1	2	1
8	9	1	3	1	2
1	2	3	1	1	8
2	3	1	2	9	1

Seite 32: Ein solches Bild mit 7 Strecken ist nicht möglich. Auf jeder der 7 Geraden wären 3 Schnittpunkte, also insgesamt $7\cdot 3 = 21$, wobei jedoch jeder Schnittpunkt doppelt gezählt würde, da er ja auf 2 der Geraden liegt. Folglich wären es $21 : 2 = 10{,}5$ Schnittpunkte, was nicht möglich ist. – Mit 8 Strecken klappt es, wie rechts zu sehen ist.



Diese Lösungsbuchstaben gelten für die Wettbewerbsaufgaben vom 21. März 2013 für die Schweiz.
Die Aufgaben in dieser Broschüre (und somit die Lösungsbuchstaben) sind leicht verändert!

Lösungsbuchstaben für die Schweizer Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	C	D	B	D	B	A	A	E	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	B	C	E	D	E	C	C	B	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	B	E	E	A	B	D	D	B	C

Lösungsbuchstaben für die Schweizer Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	A	C	E	B	D	C	A	B	E	E
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	A	A	D	D	D	C	E	B	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	A	C	D	B	D	A	E	C	C

Lösungsbuchstaben für die Schweizer Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	B	B	A	D	E	B	B	C	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	A	D	C	D	C	D	B	E	C
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	B	A	E	B	E	C	C	D

Waagerecht

1 2 , 17, 41 sind es, aber auch 257
2 für Sand oder Primzahlen
3 steht zwischen Epsilon und Eta
4 eine Eigenschaft von Zahlen, zum Beispiel von π
6 Spielwürfel haben davon 21
9 bleibt bisweilen übrig beim Teilen
10 Würfel haben 8 davon
13 passt vor Watt, aber auch hinter O

Senkrecht

2 so heißt ein Winkel, der kleiner als 90 Grad ist
4 Adam ... aus Annaberg-Buchholz
5 steht meist vor www
7 die Kugel ist es nicht
8 1 ... = 28,349523125 Gramm
11 Klassenzimmer während der Ferien
12 Ziffer
14 vornehme Behauptung

www.mathe-kaenguru.ch