2012 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2012!

Am 15. März 2012 hat der Känguru-Mathematikwettbewerb in etwa 50 Ländern der Welt stattgefunden. Auch beinahe 20'000 Schülerinnen und Schüler aus über 220 Schweizer Schulen haben daran teilgenommen und an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben geknobelt.

Vielleicht war es am spannendsten herauszufinden, wie viele Schachpartien Anna höchstens verloren hat oder wie viele Wäscheklammern der Vater für das Aufhängen der Handtücher braucht. Vielleicht auch, wie viele Tunnel auf dem Abenteuerspielplatz sind oder welche Teile das quadratische Puzzle vervollständigen. Auf kleine, mit logisch-mathematischem Schliessen zu lösende Fragestellungen treffen wir überall. Wir finden sie auf dem Spielplatz oder Schulhof ebenso wie beim Einkauf. Mal muss gerechnet werden, oft ist mehr das Erkennen von Strukturen, Kombinieren, Schätzen, das Finden von Ähnlichkeiten und die Fähigkeit, sich etwas gut räumlich vorzustellen, wichtig. Und all dies wird im Mathematikunterricht in besonderem Mass geübt, auf dass es im täglichen Leben zur Hand ist.

Das Interessante, Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von denen anderer Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den etwa 50 Teilnehmerländern des Wettbewerbs einfliessen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall in Deutschland und in der Schweiz an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre enthält die Aufgaben der Klassenstufen 3 bis 8 sowie die zugehörigen Lösungshinweise. In den Klassenstufen 3/4 und 5/6 sind 24 Aufgaben zu lösen, ab Klassenstufe 7/8 sind es 30. Für das erste Drittel der 24 bzw. 30 Aufgaben sind jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte zu erreichen. Bei einer falschen Antwort gibt es Punktabzug, und zwar werden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe 1 Punkt und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe 1.25 Punkte abgezogen. Wenn bei einer Aufgabe keine Antwort oder mehrere Antworten angekreuzt sind, gibt es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekommt 24 bzw. 30 Punkte als Startpunktzahl, wodurch eine negative Gesamtpunktzahl ausgeschlossen ist. Die Höchstpunktzahl beträgt 120 bzw. 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack — Hansjürg Stocker
Mathematikwettbewerb Känguru e. V. — Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von M. Altmann, Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, K. Battaglia, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, R. Schelldorfer, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil
ISBN 978-3-9812144-7-5

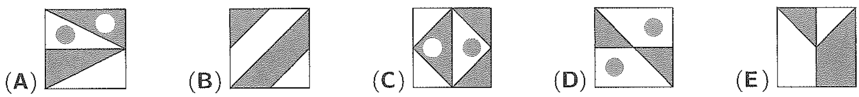
Klassenstufen 3 und 4

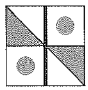
1. Ben schreibt mit Buntstiften in Großbuchstaben MATHEMATIK auf sein Übungsheft. Für verschiedene Buchstaben nimmt er verschiedene Farben, für gleiche Buchstaben nimmt er die gleiche Farbe. Wie viele Farben braucht Ben dafür?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Im Wort MATHEMATIK sind 1. M (zweimal), 2. A (zweimal), 3. T (zweimal), 4. H (einmal), 5. E (einmal), 6. I (einmal), 7. K (einmal). Es sind also 7 verschiedene Farben erforderlich.

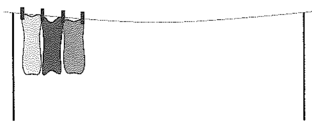
2. Auf welchem Bild sind die dunkle und die helle Fläche *nicht* gleich groß?





Lösung: In den Bildern (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) gehört zu jedem hellen Flächenteil ein ebenso großes dunkles. Wenn wir uns bei (**D**), wie es im Bild rechts zu sehen ist, eine Halbierungslinie durch das Quadrat einzeichnen, erkennen wir, dass die dabei entstandenen weißen Dreiecke ebenso groß wie die beiden dunklen sind. Die dunklen Kreise sind jedoch deutlich kleiner als die weiße Fläche, die sie umgibt.

3. Heute ist mein Vater mit der großen Wäsche dran. Beim Aufhängen braucht er 4 Klammern für die ersten 3 Handtücher. Wie viele Klammern braucht er insgesamt, wenn er auf dieselbe Weise alle 8 Handtücher in einer Reihe aufhängt?



(**A**) 4 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 16

Lösung: Wir stellen uns vor, wie der Vater immer weiter Handtücher aufhängt. Für jedes nach dem 3. Handtuch, also für die übrigen 5, braucht er eine weitere Klammer, die an die rechte obere Ecke gesteckt wird. Insgesamt sind es dann $4 + 5 = 9$ Klammern.

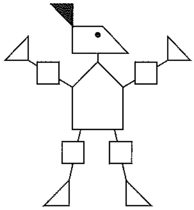
4. In einer Schachtel befinden sich 3 Schachteln, und in jeder der 3 Schachteln sind wiederum 3 Schachteln. Wie viele Schachteln sind das insgesamt?

(**A**) 9 (**B**) 13 (**C**) 7 (**D**) 14 (**E**) 18

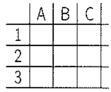
Lösung: Wenn in der ersten Schachtel 3 Schachteln sind, so sind das zusammen schon $1 + 3 = 4$ Schachteln. Nun sind in jeder der 3 mittelgroßen Schachteln wiederum 3 Schachteln, folglich gibt es insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ kleine Schachteln. Die kommen zu den 4 schon gezählten Schachteln dazu. Insgesamt sind es also $4 + 9 = 13$ Schachteln.

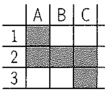
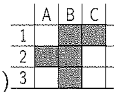
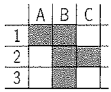
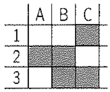
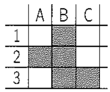
Magisches KAENGURU

Das abgebildete Känguru ist aus 4 Dreiecken, 5 Vierecken, einem Fünfeck und einem schwarzen Dreieck als Ohr zusammengesetzt. In die weißen Figuren sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 so einzutragen, dass sich auf jedem der Beine, jedem dem Arme und dem Kopf die gleiche Summe ergibt.



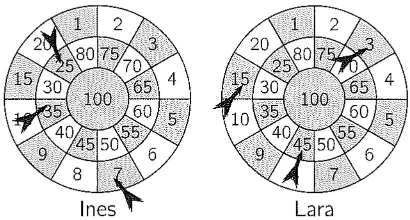
5. Jasmin hat in der rechts gezeichneten Tafel einige Felder ausgemalt, und zwar A2, B1, B2, B3 und C3. Wie sieht die Tafel nun aus?



(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

Lösung: Wir gehen systematisch vor. In der 1. Spalte ist nur das Feld A2 ausgemalt. Folglich kommen von den Tafeln nur (**B**), (**D**) und (**E**) in Frage. In der 2. Spalte sind alle 3 Felder ausgemalt. Damit kann es nicht Tafel (**D**) sein. Und das Feld C3 ist nun nur noch in Tafel (**E**) ausgemalt. Das ist die gesuchte Tafel.

6. Ines und Lara spielen Dart. Beide haben 3 Pfeile geworfen, wie die Bilder zeigen. Wer hat gewonnen und mit wie vielen Punkten Vorsprung?



(**A**) Ines mit 3 Punkten Vorsprung
(**B**) Lara mit 4 Punkten Vorsprung
(**C**) Ines mit 2 Punkten Vorsprung
(**D**) Lara mit 2 Punkten Vorsprung
(**E**) Ines mit 4 Punkten Vorsprung

Lösung: Wer die Zahlen genauer anschaut, stellt schnell fest, dass die Summe der im mittleren Ring getroffenen Punkte von Ines mit der Summe der beiden größten Punktezahlen, die Lara getroffen hat, übereinstimmt: $25 + 35 = 15 + 45$. Also ist nur noch der Unterschied zwischen den 7 Punkten auf dem äußeren Kreis von Ines und den 3 Punkten auf dem von Lara von Bedeutung. Sofort ist klar, dass Ines mit 4 Punkten Vorsprung gewonnen hat.

Die Aufgabe können wir ebenso lösen, indem wir zuerst die drei Punktergebnisse von Ines addieren, $25 + 35 + 7 = 67$, dann die drei Punktergebnisse von Lara, $15 + 45 + 3 = 63$, und anschließend die Differenz $67 - 63 = 4$ bilden. Natürlich finden wir auch hier, dass Ines um 4 Punkte besser war als Lara.

7. Im Wäldchen spielen wir oft Verstecken. Heute sind wir 13 Kinder. Boris muss suchen. Nach einer Weile hat er 9 von uns gefunden. Wie viele sind noch versteckt?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Im Wäldchen sind heute insgesamt 13 Kinder. Wenn Boris sucht, müssen sich also $13 - 1 = 12$ Kinder verstecken. Und nachdem Boris 9 Kinder gefunden hat, fehlen ihm noch $12 - 9 = 3$ Kinder. Die sind noch versteckt.

8. Das Jahr 2012 ist ein Schaltjahr, da hat der Februar 29 Tage. Heute, am 15. März 2012, sind die kleinen Entenküken meines Großvaters 20 Tage alt. Wann sind sie geschlüpft?

(**A**) am 19. Februar (**B**) am 21. Februar (**C**) am 23. Februar
(**D**) am 24. Februar (**E**) am 26. Februar

Lösung: Da heute der 15. März ist, leben die Küken also 15 Tage im März. Daher müssen sie am 29. Februar, dem letzten Tag des Februars in diesem Schaltjahr, $20 - 15 = 5$ Tage alt gewesen sein. Folglich sind sie am 24. Februar geschlüpft.

KAENGURU-Rechnerei

In jedes Kästchen ist eines der Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$ oder $:$ so einzusetzen, dass richtige Rechnungen entstehen. Aber aufgepasst: Es geht Punktrechnung vor Strichrechnung! Wer findet mehr als eine Lösung?

$2 \square 0 \square 1 \square 2 = 0$

$2 \square 0 \square 1 \square 2 = 1$

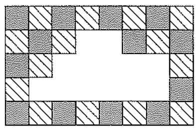
$2 \square 0 \square 1 \square 2 = 2$

$2 \square 0 \square 1 \square 2 = 3$

$2 \square 0 \square 1 \square 2 = 4$

$2 \square 0 \square 1 \square 2 = 5$

9. Im Duschraum unserer Turnhalle mussten für Renovierungsarbeiten einige Bodenplatten entfernt werden. Wie viele *gestreifte* Platten fehlen auf dem Bild von unserem ganz regelmäßig ausgelegten Duschraumboden?



(**A**) 13 (**B**) 10 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

Lösung: Eine gute Möglichkeit zum Lösen der Aufgabe ist es, die fehlenden Kästchen zu ergänzen, dem Muster entsprechend auszumalen und dann abzuzählen.

Es geht jedoch auch, ohne zu malen. Wenn wir uns vorstellen, dass der Boden komplett mit Platten ausgelegt ist, dann gibt es in jeder der 5 Reihen 4 dunkle und 4 gestreifte Bodenplatten, insgesamt also $5 \cdot 4 = 20$ dunkle und ebenso 20 gestreifte Platten. Auf dem Boden, aus dem für die Renovierungsarbeiten einige Platten entfernt wurden, befinden sich 14 gestreifte Bodenplatten, wie sich auf dem Bild leicht auszählen lässt. Es fehlen also $20 - 14 = 6$ gestreifte Bodenplatten.

10. Weil Sabinas eben gekaufter Luftballon gleich zerplatzt ist, will ihre Schwester neue Luftballons kaufen. „Ich hab noch 5 Cent. Wenn du mir 13 Cent dazugibst, reicht es genau, um 3 Ballons zu kaufen", sagt sie zu Sabina. Wie teuer ist ein Luftballon?

(**A**) 4 Cent (**B**) 5 Cent (**C**) 6 Cent (**D**) 8 Cent (**E**) 12 Cent

Lösung: Für 5 Cent + 13 Cent = 18 Cent kann Sabinas Schwester 3 Luftballons kaufen. Dann kostet also ein Luftballon ein Drittel der 18 Cent, d. h. $18 : 3 = 6$ Cent.

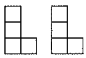
11. Bevor Konrad seine 20 Kekse in den Backofen schiebt, dekoriert er 15 der Kekse mit Rosinen, dann 15 der Kekse mit Mandeln. Einige Kekse sind nun mit beidem dekoriert, also mit Rosinen *und* Mandeln. Wie viele solche Kekse gibt es *mindestens*?

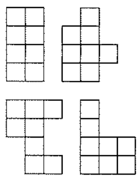
(**A**) 10 (**B**) 7 (**C**) 5 (**D**) 9 (**E**) 8

Lösung: Nachdem 15 Kekse mit Rosinen dekoriert sind, hat Konrad noch 5 Kekse ohne Belag. Diese belegt er mit Mandeln, um so wenig Kekse wie möglich doppelt zu dekorieren. Anschließend muss er von den bereits mit Rosinen dekorierten Keksen noch 10 mit Mandeln dekorieren, damit insgesamt 15 Kekse mit Mandeln dekoriert sind. Er muss also mindestens 10 Kekse mit beidem, mit Rosinen *und* mit Mandeln, belegen.

KAENGURU-Zahlenmagie

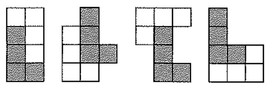
Ich denke mir eine Zahl und addiere 14. Diese Summe verdopple ich und subtrahiere 30. Wenn ich nun durch 2 teile und noch 1 addiere, was erhalte ich dann als Ergebnis?

12. Leo hat aus Karopapier 2 L-förmige Teile  ausgeschnitten. Er schiebt sie zu verschiedenen Figuren zusammen. Wie viele der Figuren rechts kann er so erhalten?



(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle vier

Lösung: Wir versuchen, in jeder der Figuren ein L-förmiges Teil so zu markieren, dass der Rest ebenfalls die L-Form hat. Das gelingt bei allen vier Figuren.



13. Zur Hochzeitsfeier meines Bruders haben wir auf jeden der 15 Tische einen Kerzenhalter gestellt. In die 6 Kerzenhalter von den Großeltern steckten wir jeweils 5 Kerzen, in alle anderen jeweils 3 Kerzen. Wie viele Kerzen waren insgesamt anzuzünden?

(**A**) 45 (**B**) 50 (**C**) 57 (**D**) 59 (**E**) 66

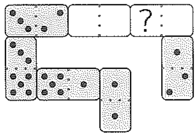
Lösung: Es gibt 6 Kerzenhalter für 5 Kerzen. In diese gehören insgesamt $6 \cdot 5 = 30$ Kerzen. In die restlichen $15 - 6 = 9$ Kerzenhalter passen jeweils 3 Kerzen. Für diese Kerzenhalter werden $9 \cdot 3 = 27$ Kerzen benötigt. Dann waren also insgesamt $30 + 27 = 57$ Kerzen anzuzünden.

14. In der Tierkinderschule unterrichtet eine alte Eule 3 Häschen, einige Lämmer sowie 4 Enten- und 2 Gänseküken. Gemeinsam zählen sie die Beine aller Tierkinder, 44 sind es. „Nun rechnet mal, wie viele Lämmer in der Klasse sind", spricht die Eule. Es sind

(**A**) 11 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 5 (**E**) 2

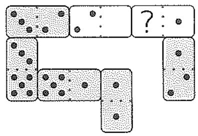
Lösung: Von der Gesamtbeinzahl 44 ziehen wir die Zahl der Beine der Häschen $3 \cdot 4 = 12$ und die Zahl der Beine der Enten- und Gänseküken $(4+2) \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$ ab. Wir erhalten die Lämmergesamtbeinzahl $44 - 12 - 12 = 20$. Da jedes der Lämmer 4 Beine hat, ist noch durch 4 zu teilen. Es sind also $20 : 4 = 5$ Lämmer.

15. In Aylas Dominoschlange stoßen benachbarte Steine stets mit derselben Punktzahl aneinander. Zwei der Steine sind aus der Schlange herausgerutscht. Ayla hatte in der ursprünglichen Schlange die Punkte gezählt – es waren 35. Welche Punktzahl gehört an die Stelle des Fragezeichens?



(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Aus der Spielregel (benachbarte Steine stoßen stets mit derselben Punktzahl aneinander) ergeben sich die eingetragenen Punkte auf den weißen Steinen. Wir zählen alle jetzt sichtbaren Punkte zusammen: $1+2 \cdot 1+2 \cdot 5+2 \cdot 3+2 \cdot 2+2 \cdot 1+2 = 1+2+10+6+4+2+2 = 27$. Die Differenz zur von Ayla gezählten Gesamtpunktzahl 35 ist 8. Folglich gehören wegen $8 : 2 = 4$ auf das Feld mit dem Fragezeichen 4 Punkte.



16. Tim, Paula, Jan und Nele wollen nebeneinander auf ein Foto. Paula ist Neles beste Freundin, die beiden wollen unbedingt direkt nebeneinander stehen. Auch Jan möchte direkt neben Paula stehen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der vier sind möglich?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Da Paula unbedingt neben Nele zu sehen sein will, gibt es die beiden Möglichkeiten PAULA–NELE und NELE–PAULA. Jan will in jedem Fall neben Paula fotografiert werden, also sehen die Möglichkeiten, wenn Jan dazukommt, folgendermaßen aus: JAN–PAULA–NELE und NELE–PAULA–JAN. Tim kann sich nun in beiden Varianten entweder links oder rechts außen an die entsprechende Dreiergruppe stellen. Folglich gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten für die Reihenfolge der vier Kinder auf dem Foto: TIM–JAN–PAULA–NELE, JAN–PAULA–NELE–TIM, TIM–NELE–PAULA–JAN, NELE–PAULA–JAN–TIM.

KAENGURU-Ziffernspielerei

Welche Ziffern müssen in die Lücken geschrieben werden, damit zwei korrekte Rechnungen entstehen?

$$\begin{array}{r} 1\,2\,\ldots\,\ldots\,3\,4 \\ +\ \ldots\,1\,2\,3\,4\,\ldots \\ \hline 5\,\ldots\,6\,7\,\ldots\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,6\,\ldots\,\ldots\,7\,8 \\ -\ \ldots\,5\,6\,7\,8\,\ldots \\ \hline 1\,\ldots\,2\,3\,\ldots\,4 \end{array}$$

17. Märchenprinzessin Lea möchte heiraten, klug und sportlich soll ihr Mann sein. Kommt ein Heiratskandidat, so setzt sie sich auf die oberste Stufe der 22 Stufen hohen Schlosstreppe, und er muss von unten zu ihr hoch springen. Er darf entweder 3 Stufen nach oben oder 4 Stufen nach unten springen und muss mit möglichst wenigen Sprüngen direkt auf ihrer 22. Stufe enden. Wie viele Sprünge sind dazu insgesamt nötig?

(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 14

Lösung: Ein kluger Heiratskandidat kann zuerst einmal so hoch springen, wie es ihm mit den verlangten 3-Stufen-Sprüngen möglich ist. Das sind 7 Sprünge. Dabei landet er auf der 21. Stufe. So nahe an seiner Angebeteten muss er doch noch einmal kehrtmachen und abwärts hüpfen. Zunächst landet er auf der 17. Stufe ($21 - 1 \cdot 4 = 17$), jedoch trennen ihn von Lea nun $22 - 17 = 5$ Stufen – eine nicht durch 3 teilbare Zahl. Erst nach einem weiteren Abwärtssprung auf die 13. Stufe ($21 - 2 \cdot 4 = 13$) ist er wegen $22 - 13 = 9 = 3 \cdot 3$ genau 3 Aufwärtssprünge von Lea entfernt. Insgesamt braucht ein kluger Heiratskandidat also $7 + 2 + 3 = 12$ Sprünge.

18. Von Eriks Mitschülern sind doppelt so viele Mädchen wie Jungen. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl *aller* Kinder in Eriks Klasse sein?

(**A**) 30 (**B**) 25 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 24

Lösung: Wenn unter Eriks Mitschülern doppelt so viele Mädchen wie Jungen sind, dann hat Erik insgesamt 3-mal so viele Mitschüler wie es außer ihm selbst Jungen in der Klasse gibt. Mit anderen Worten: Die Anzahl der *Mitschüler* von Erik muss durch 3 teilbar sein. Gehen wir nun die vorgeschlagenen Zahlen durch, so sind $29 = 30 - 1$, $19 = 20 - 1$, $28 = 29 - 1$ und $23 = 24 - 1$ nicht durch 3 teilbar. Nur $24 = 25 - 1$ ist durch 3 teilbar. In Eriks Klasse gehen *insgesamt* 25 Kinder.

19. Oleg bildet aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zwei 3-stellige Zahlen. Dabei benutzt er jede der Ziffern genau einmal. Dann addiert er die beiden Zahlen. Wie groß ist die kleinste Summe, die er so erhalten kann?

(**A**) 369 (**B**) 381 (**C**) 390 (**D**) 480 (**E**) 579

Lösung: Damit die Summe von Olegs Zahlen möglichst klein wird, müssen an die Stellen mit der höchsten Wertigkeit die kleinsten Ziffern geschrieben werden. Also hat eine der beiden Zahlen an der Hunderterstelle die 1, die andere die 2. An den beiden Zehnerstellen müssen die nächstgrößeren beiden Ziffern verwendet werden, also 3 und 4. Die Einerstellen werden dann mit 5 und 6 besetzt. Ob Oleg für die 1. Zahl an der Hunderterstelle die 1 oder die 2 wählt (und entsprechend für die 2. Zahl die 2 oder die 1), welche der Zahlen 3 und 4 er an die Zehnerstelle setzt und welche der Zahlen 5 und 6 er an die Einerstelle setzt, ist egal, denn das Ergebnis seiner Addition ist stets $1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 381$.

20. In einer Freistunde haben wir „Rechenschlangen" erfunden, bei denen 2012 herauskommt. Tom hat sich für seine „Rechenschlange" eine Zahl ausgedacht und sie mit sich selbst multipliziert. Vom Ergebnis hat er 9 abgezogen und dann nacheinander mit 10 multipliziert, dann halbiert und dann noch einmal mit 10 multipliziert. Ganz zuletzt hat er 12 addiert und 2012 erhalten. Welche Zahl hat Tom sich ausgedacht?

(**A**) 11 (**B**) 1 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 7

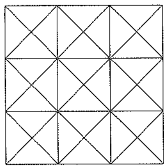
Lösung: Wir rechnen rückwärts. Tom hatte zuletzt 12 addiert, also war das Zwischenergebnis vor diesem letzten Schritt $2012 - 12 = 2000$. Diese Zahl war aus einer Multiplikation mit 10 hervorgegangen. Die Zahl, die mit 10 multipliziert wurde, war dann 200. Die 200 war durch Halbieren entstanden, also müssen wir jetzt beim Rückwärtsrechnen verdoppeln, d. h. vor der 200 befindet sich die 400 in der Rechenschlange. Und die 400 war durch Multiplikation mit 10 entstanden, also aus der 40. Die 40 hatte Tom erhalten, indem er von der vorherigen Zahl 9 subtrahiert hatte. Das war also die 49. Und die 49 hatte Tom bekommen, indem er seine Zahl mit sich selbst multipliziert hat. Das muss die 7 gewesen sein, denn $7 \cdot 7 = 49$.

$$\boxed{\;?\;} \xrightarrow{?\cdot ?} \boxed{} \xrightarrow{-9} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 10} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 10} \boxed{} \xrightarrow{+12} \boxed{2012}$$

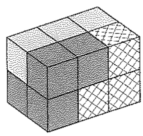
$$\boxed{7} \xleftarrow{7\cdot 7} \boxed{49} \xleftarrow{+9} \boxed{40} \xleftarrow{:10} \boxed{400} \xleftarrow{\cdot 2} \boxed{200} \xleftarrow{:10} \boxed{2000} \xleftarrow{-12} \boxed{2012}$$

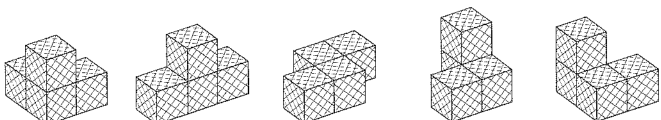
KAENGURU-Quadrate

Wie viele Quadrate sind hier versteckt?



21. Im Bild rechts ist ein Quader zu sehen, der aus 3 Bausteinen gebaut ist. Jeder Baustein besteht aus 4 Würfeln. Für den kariert gemusterten Baustein gibt es 2 Möglichkeiten. Welche?

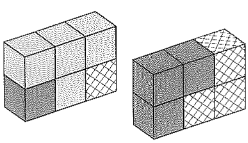


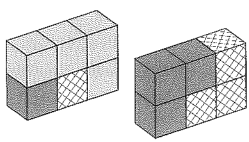


1 2 3 4 5

(**A**) 1 und 2 (**B**) 1 und 4 (**C**) 2 und 5 (**D**) 3 und 5 (**E**) 1 und 5

Lösung: Wenn der hellgraue Stein aus einer Dreierreihe und dem vierten Stein in der Mitte besteht, so hat der karierte Stein die Form 1 (linkes Bild). Ist beim hellgrauen Stein der vierte Würfel nicht in der Mitte, sondern außen angesetzt, so muss der gestreifte Baustein die Form 4 haben (rechtes Bild).





22. Die Zahl 14 ist als Summe von 6 ungeraden Zahlen zu schreiben, wobei die Reihenfolge der Summanden dabei keine Rolle spielt. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

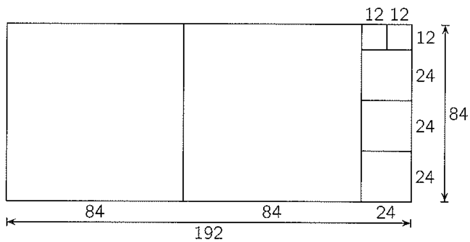
Lösung: Als Summanden kommen nur solche ungeraden Zahlen in Betracht, die kleiner als 14 sind, also 1, 3, 5, 7, 9, 11 und 13. Davon fallen 11 und 13 weg, da jeder der anderen 5 Summanden mindestens 1 ist und bereits $11+1+1+1+1+1 > 14$ gilt. Wir schreiben nun die Summen aus 6 ungeraden Zahlen systematisch auf:

$$\begin{aligned} 1+1+1+1+1+9 &= 14 \\ 1+1+1+1+3+7 &= 14 \\ 1+1+1+1+5+5 &= 14 \\ 1+1+1+3+3+5 &= 14 \\ 1+1+3+3+3+3 &= 14 \end{aligned}$$

Das sind insgesamt 5 Möglichkeiten.

23. Von einem rechteckigen Stück Papier, 192 mm lang und 84 mm breit, schneide ich mit einem geraden Schnitt ein Quadrat ab. Vom Rest schneide ich wieder ein Quadrat ab und wiederhole dieses Abschneiden, bis es nicht mehr möglich ist, ein Quadrat abzuschneiden. Wie lang ist eine Seite des kleinsten Quadrats, das dabei entsteht?

(**A**) 1 mm (**B**) 4 mm (**C**) 6 mm (**D**) 10 mm (**E**) 12 mm



Lösung: Beim ersten Abschneiden wird das Rechteck in ein Quadrat mit der Seitenlänge 84 mm und ein Rechteck mit den Seitenlängen 84 mm und 192 mm − 84 mm = 108 mm zerlegt. Von diesem Rechteck kann noch einmal ein ebenso großes Quadrat abgeschnitten werden. Bei der Zerlegung entsteht neben dem Quadrat ein Rechteck mit den Seitenlängen 84 mm und 108 mm − 84 mm = 24 mm. Im nächsten Schritt hat das Quadrat, das abgeschnitten wird, also die Seitenlänge 24 mm. Drei solche Quadrate lassen sich abschneiden. Das Restrechteck hat die Maße 24 mm und 84 mm − 3 · 24 mm = 12 mm. Nun kann ich dieses Restrechteck in zwei Quadrate mit der Seitenlänge 12 mm zerschneiden. Da mit einem geraden Schnitt von einem Quadrat nicht wieder ein Quadrat abgeschnitten werden kann, sind wir fertig. Also hat das kleinste Quadrat, das beim beschriebenen Zerschneiden entsteht, die Seitenlänge 12 mm.

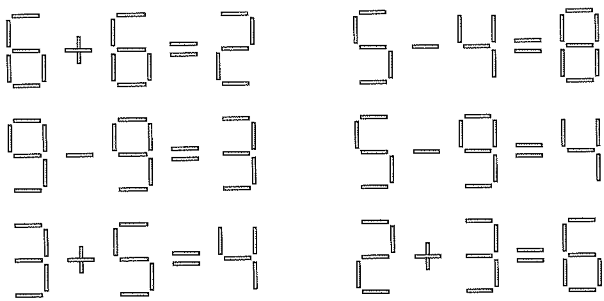
24. In unserer Schule ist das Schachfieber ausgebrochen. Fast alle machen mit. Wer eine Partie gewinnt, bekommt 3 Punkte, der Verlierer 0 Punkte. Beim Unentschieden erhalten die beiden Spieler je einen Punkt. Anna aus meiner Klasse erzählt, dass sie in 38 Partien 80 Punkte bekommen hat. Wie viele Partien hat sie höchstens verloren?

(**A**) 12 (**B**) 11 (**C**) 10 (**D**) 9 (**E**) 8

Lösung: Die größte Zahl an verlorenen Spielen ergibt sich, wenn Anna die 80 Punkte durch möglichst viele gewonnene Spiele erzielt hätte, da sie für jedes gewonnene Spiel ja 3 Punkte (und nicht nur einen Punkt) erhält. Die größte durch 3 teilbare Zahl kleiner als 80 ist 78. Anna hätte dann $78 : 3 = 26$ Spiele gewonnen und die restlichen beiden Punkte für zwei unentschiedene Partien erhalten. Übrig blieben $38 - 26 - 2 = 10$ verlorene Spiele. Das ist die größte Zahl an Partien, die Anna verloren haben könnte.

KAENGURU-Streichholzknobelei

Die sechs „Streichholzgleichungen" sind alle falsch. Doch in jeder dieser Gleichungen genügt das Umlegen eines einzigen Hölzchens, damit eine richtige Gleichung entsteht. Welche Hölzchen müssen umgelegt werden und wie sehen die richtigen Gleichungen aus?

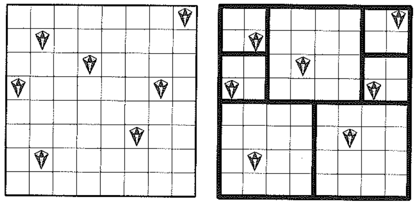


Kopfnüsse I

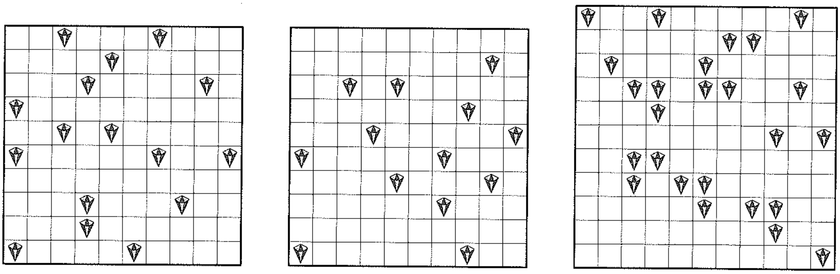
Im Jahre 2007 erschien für die Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus „Das große Buch der Kopfnüsse" von W. A. Portugalow, eine wunderschöne Sammlung von interessanten, kniffligen Knobeleien. Hier einige Kostproben:

Diamanten

Das große Quadrat ist in mehrere kleine Quadrate vollständig zu zerlegen. Die kleinen Quadrate dürfen sich dabei nicht überlappen, und jedes der kleinen Quadrate soll genau einen Diamanten enthalten. Rechts ist ein Beispiel angegeben.



Wer findet die richtigen Zerlegungen?

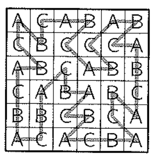


Buchstabenwege

Die Buchstaben in den Figuren sind in der richtigen Reihenfolge miteinander zu verbinden, so dass ein geschlossener Weg entsteht. Der Weg darf sich nirgendwo selbst überschneiden, und die Wegabschnitte dürfen nur waagerecht, senkrecht oder diagonal verlaufen. Jedes Kästchen muss genau einmal passiert werden.

Die Reihenfolge der Buchstaben ist im kleinen Quadrat also ...→A→B→C→A→B→C→A→... bzw. ...→A→B→C→D→A→B→C→D→A→... im großen Quadrat.
Ein Beispiel ist rechts zu sehen.

A	C	A	B	A	B
C	B	C	C	C	A
A	B	C	A	B	B
C	A	B	A	B	C
B	B	C	B	C	A
A	C	A	C	B	A



Wie sehen richtige Buchstabenwege in den folgenden Quadraten aus?

A	B	C	A	B	A
C	B	C	B	C	B
B	C	A	B	A	C
A	C	C	A	C	A
A	B	A	B	B	C
C	B	A	C	B	A

A	C	A	B	A	C
B	B	A	C	C	B
A	C	B	B	C	A
B	C	B	C	A	B
C	B	A	A	B	A
A	C	A	B	C	C

A	B	C	D	B	C	D	B
D	C	B	B	A	A	A	C
C	B	D	A	C	D	D	D
D	A	A	B	D	A	C	A
C	A	D	C	B	A	B	D
B	D	C	C	D	B	C	A
C	A	B	C	D	C	B	B
B	A	D	B	A	A	D	C

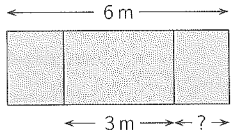
Klassenstufen 5 und 6

1. Als wir heute ins Klassenzimmer kamen, stand in großen Buchstaben mit bunter Kreide an der Tafel KÄNGURUWETTBEWERB. Gleiche Buchstaben waren mit gleicher Farbe geschrieben, verschiedene Buchstaben mit verschiedenen Farben. Wie viele verschiedene Farben waren dazu nötig?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Da das Wort KÄNGURUWETTBEWERB die 10 verschiedenen Buchstaben K, Ä, N, G, U, R, W, E, T, B enthält und keine weiteren, sind 10 verschiedene Farben nötig.

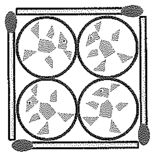
2. Die Tafel in unserem Klassenzimmer ist 6 m breit. Das fest an die Wand geschraubte Mittelteil ist 3 m breit. Wie breit ist einer der beiden gleich breiten Flügel, die im Bild aufgeklappt sind?



(**A**) 1 m (**B**) 1,25 m (**C**) 1,5 m
(**D**) 1,75 m (**E**) 2 m

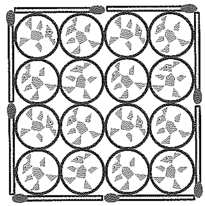
Lösung: Die beiden beweglichen, gleich breiten Flügel sind zusammen $6\,\text{m} - 3\,\text{m} = 3\,\text{m}$ breit, jeder der Flügel also $3\,\text{m} : 2 = 1{,}5\,\text{m}$.

3. Ida hat ein Quadrat aus 4 Spielgeldmünzen gelegt und es mit 4 Streichhölzern eingefasst. Nun legt sie aus 16 dieser Münzen ein Quadrat, 4 Münzen in jeder Reihe. Wie viele Streichhölzer braucht Ida, um dieses größere Münzenquadrat einzufassen?



(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 14 (**D**) 18 (**E**) 20

Lösung: Ida kann 4 eingefasste Quadrate mit 4 Münzen zu einem großen Quadrat zusammenlegen und dann die in der Mitte liegenden Steichhölzer entfernen. Für den Rand um die 16 zu einem Quadrat gelegten Münzen braucht sie insgesamt nur 8 Streichhölzer.



4. Im Flugzeug, das wir besichtigt haben, waren die Sitzreihen für die Passagiere von 1 bis 25 nummeriert. Allerdings gab es keine Reihe mit der Nummer 13. Und die Reihe 15 am Notausstieg hatte nur 4 Sitze und nicht wie die anderen Reihen 6 Sitze. Wie viele Sitzplätze waren das insgesamt?

(**A**) 148 (**B**) 144 (**C**) 142 (**D**) 138 (**E**) 120

Lösung: Im Flugzeug befanden sich, da die 13. Reihe fehlte, genau 24 Sitzreihen. Von diesen Reihen hatten 23 jeweils 6 Plätze und die 15. Reihe nur 4 Plätze. Damit waren es insgesamt $23 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 142$ Sitzplätze.

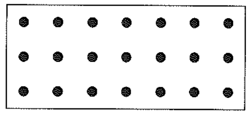
5. Mit einem Ballon kann ein Korb mit einem bis zu 80 kg schweren Inhalt gehoben werden. Mit zwei solchen Ballons kann derselbe Korb gehoben werden, wenn sich im Korb bis zu 180 kg befinden. Wie schwer ist der leere Korb?

(**A**) 10 kg (**B**) 20 kg (**C**) 30 kg (**D**) 40 kg (**E**) 50 kg

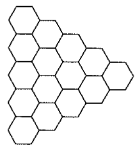
Lösung: Wenn ein Ballon den leeren Korb und 80 kg Last heben kann, so können 2 Ballons 2 leere Körbe und $2 \cdot 80\,\text{kg} = 160\,\text{kg}$ Last heben. Da es aber nur ein Korb ist, in dem die Last sich befindet, und diese Last 180 kg sein kann, wiegt der leere Korb $180\,\text{kg} - 160\,\text{kg} = 20\,\text{kg}$.

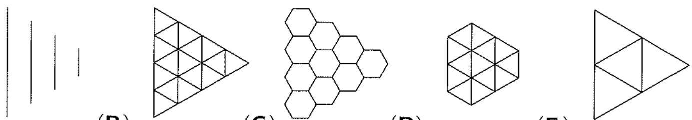
KAENGURU-Zerlegung

Wer findet 3 Geraden, die das Rechteck in 6 Teile zerlegen, so dass sich in einem Teil ein Punkt befindet, in einem befinden sich 2, in einem 3, in einem 4, in einem 5 und in einem 6?



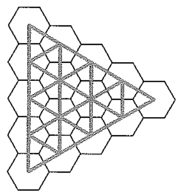
6. Auf Dorotheas Arbeitsblatt befindet sich die rechts abgebildete Figur aus Sechsecken. Dorothea hat die Mittelpunkte aller zueinander benachbarten Sechsecke durch Strecken verbunden. Wie sieht das Muster aus, das sie gezeichnet hat?





(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Wir zeichnen alle Strecken ein, die zwei benachbarte Sechsecksmittelpunkte miteinander verbinden und vergleichen anschließend mit den vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten. (**B**) ist das gesuchte Muster.

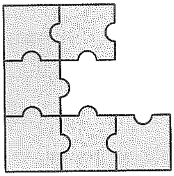


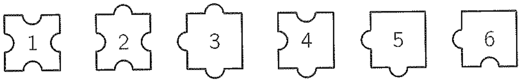
7. Zur Zahl 6 addiere ich 3. Das Resultat multipliziere ich mit 2. Und dann addiere ich noch 1. Meine Rechnung kann ich schreiben als

(**A**) $(6 + 3 \cdot 2) + 1$ (**B**) $6 + 3 \cdot 2 + 1$ (**C**) $(6 + 3) \cdot (2 + 1)$
(**D**) $(6 + 3) \cdot 2 + 1$ (**E**) $6 + 3 \cdot (2 + 1)$

Lösung: Nach dem ersten Addieren soll das Resultat, also die Summe, mit 2 multipliziert werden. Folglich muss $6 + 3$ in Klammern gesetzt werden. Zum Ergebnis der Multiplikation mit 2 soll 1 addiert werden. Die auszuführende Rechnung ist somit $(6 + 3) \cdot 2 + 1$, das Ergebnis ist 19. Die anderen Rechnungen führen übrigens zu anderen Ergebnissen: (**A**) $(6 + 3 \cdot 2) + 1 = 13$, (**B**) $6 + 3 \cdot 2 + 1 = 13$, (**C**) $(6 + 3) \cdot (2 + 1) = 27$ und (**E**) $6 + 3 \cdot (2 + 1) = 15$.

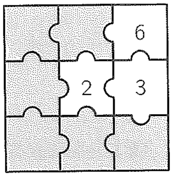
8. Welche drei von den abgebildeten sechs Teilen vervollständigen das quadratische Puzzle?





(**A**) 1, 3 und 4 (**B**) 1, 3 und 6 (**C**) 2, 3 und 5 (**D**) 2, 4 und 5 (**E**) 2, 3 und 6

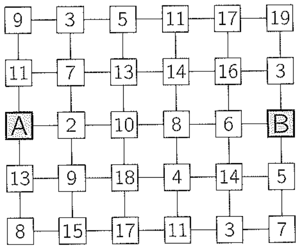
Lösung: Das zum Quadrat vervollständigte Puzzle sieht folgendermaßen aus:



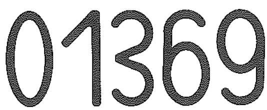
KAENGURU-Zahlenwege

Im Zahlengitter sollen Wege von A nach B entlang der Linien gefunden werden, die nur über Zahlen mit bestimmten Eigenschaften führen. Auf jedem Weg darf aber jedes Kästchen höchstens einmal überquert werden. Wer findet alle Wege, die

(a) nur über gerade Zahlen,
(b) nur über ungerade Zahlen,
(c) nur über Primzahlen führen?

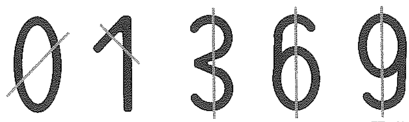


9. Knut hat die Zahlen 0, 1, 3, 6 und 9 aus Knete geformt. Seine kleine Schwester will ihn ärgern und schneidet jede Knetezahl mit einem einzigen geraden Schnitt mit einem Messer in möglichst viele Teile. Bei welcher Zahl bekommt sie die größte Anzahl von Teilen?



(**A**) bei der 0 (**B**) bei der 1 (**C**) bei der 3 (**D**) bei der 6 (**E**) bei der 9

Lösung: Das Bild zeigt, wie Knuts kleine Schwester die Knetezahlen zerschnitten haben könnte, um möglichst viele Teile zu erhalten. Die Anzahl der Teile ist bei der 3 am größten.



2 Teile 3 Teile 5 Teile 3 Teile 3 Teile

10. Franz und Thomas haben beim Onkel im Garten Äpfel und Birnen gepflückt, große und kleine, insgesamt 25 Stück. Auf dem Weg nach Haus isst Franz einen Apfel und 3 Birnen, Thomas isst 3 Äpfel und 2 Birnen. Zu Hause beim Auspacken stellen sie fest, dass es nun gleich viele Äpfel und Birnen sind. Wie viele Birnen hatten sie gepflückt?

(A) 12 **(B)** 21 **(C)** 16 **(D)** 19 **(E)** 13

Lösung: Von den 25 Stück Obst, die Franz und Thomas gepflückt haben, verzehren sie auf dem Nachhauseweg 4 Äpfel und 5 Birnen. Sie bringen also insgesamt noch $25 - 4 - 5 = 16$ Stück Obst bis nach Hause. Und das sind zur einen Hälfte Äpfel und zur anderen Hälfte Birnen, d. h. je 8 Stück. Dann haben sie also $8 + 5 = 13$ Birnen gepflückt.

11. In einem alten Rechenheft habe ich mit Buntstiften Zahlen geschrieben. Die 1 habe ich blau geschrieben, die 2 grün, die 3 rot, die 4 wieder blau, die 5 grün, die 6 rot und immer so weiter. Nun frage ich mich, welche Farbe das Ergebnis hat, wenn ich eine blaue und eine grüne Zahl addiere. Das Ergebnis ist ganz sicher

(A) blau oder grün **(B)** grün **(C)** rot
(D) blau **(E)** Jede der 3 Farben ist möglich.

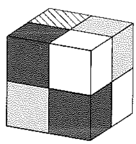
Lösung: Die blauen Zahlen $1, 4, 7, 10, \ldots$ haben die Eigenschaft, dass sie beim Dividieren durch 3 den Rest 1 lassen, denn sie folgen immer auf eine rote Zahl, und die roten Zahlen $3, 6, 9, 12, \ldots$ sind durch 3 teilbar. Die grünen Zahlen $2, 5, 8, 11, \ldots$ lassen alle bei Division durch 3 den Rest 2. Addieren wir nun eine Zahl, die den Rest 1 lässt, zu einer, die den Rest 2 lässt, so addieren sich die beiden Reste zu 3. Also ist die Summe stets durch 3 teilbar. Folglich ist die Summe einer blauen und einer grünen Zahl ganz sicher rot.

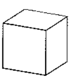
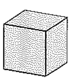
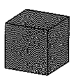
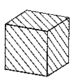
KAENGURU-Puzzelei

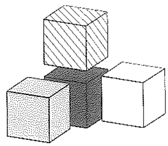
Die abgebildete Figur kann entlang der Linien in 4 Teile zerschnitten werden, so dass die 4 Teile alle dieselbe Form haben und sich aus den Buchstaben eines jeden Teils ein Begriff aus der Mathematik bilden lässt.
Wie sieht die Zerlegung aus, und welche vier Begriffe sind gesucht?

	M	E	E	U	
M	U	M	R	E	R
N	S	U	T	A	K
I	S			S	I

12. Winni besitzt Würfel aus 4 unterschiedlichen Materialien. Sie hat 8 davon zu einem größeren Würfel zusammengesetzt, bei dem an keiner Stelle Würfel aus dem gleichen Material mit einer Seitenfläche aneinanderstoßen (siehe Bild). Einer der 8 Würfel ist im Bild nicht zu sehen. Wie sieht dieser Würfel aus?

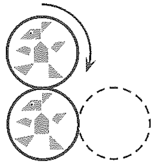


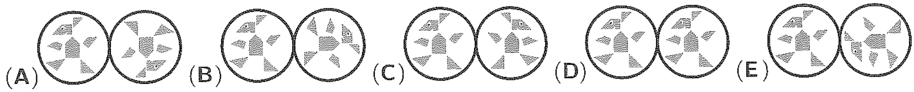
(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** Es gibt mehr als eine Möglichkeit.



Lösung: Der in der hinteren unteren Ecke versteckte Würfel stößt mit 3 anderen Würfeln mit einer Seitenfläche aneinander: oben mit dem gestreiften, links vorn mit dem grauen und rechts vorn mit dem weißen. Folglich ist der gesuchte Würfel der schwarze.

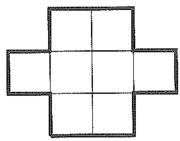
13. Joanna hat zwei Spielgeldmünzen nebeneinander auf den Tisch gelegt. Sie rollt die eine Münze so um die andere, wie es im Bild rechts dargestellt ist. In welcher Position befinden sich die beiden Kängurus auf den Münzen, nachdem die rollende Münze die gestrichelt gezeichnete Endposition erreicht hat?





Lösung: Zu Beginn berühren sich der höchste Punkt der festliegenden Münze und der Fußpunkt der rollenden Münze. Nachdem die rollende Münze im gestrichelt gezeichneten Kreis angekommen ist, ist der Berührungspunkt bei der festliegenden Münze derjenige, der genau einen Viertelkreis vom Anfangsberührungspunkt entfernt ist. Da die beiden Münzenumfänge aneinander abrollen, muss der Berührungspunkt der gerollten Münze ebenfalls einen Viertelkreis vom Anfangsberührungspunkt entfernt sein. Folglich liegt die gerollte Münze auf dem Kopf, das Tangramkänguru zeigt mit der Hand, die am Anfang nach rechts gezeigt hat, nun nach links. (**A**) ist die Lösung.

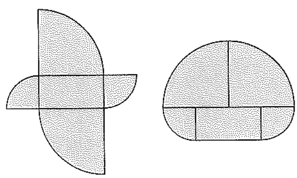
14. Die abgebildete Figur ist aus 8 Quadraten zusammengesetzt. Der Umfang, also die Länge des dick gezeichneten Randes dieser Figur, beträgt 42 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?



(**A**) 8 cm^2 (**B**) 9 cm^2 (**C**) 24 cm^2 (**D**) 72 cm^2 (**E**) 128 cm^2

Lösung: Wir zählen die Quadratseiten, die den Umfang der Figur bilden. Es sind 14. Da der Umfang 42 cm lang ist, ist eine Quadratseite 42 cm : 14 = 3 cm lang. Die Figur besteht aus 8 Quadraten, folglich ist der gesuchte Flächeninhalt $8 \cdot 3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 72\,\text{cm}^2$.

15. Die beiden abgebildeten Figuren bestehen aus denselben 5 Teilen: 2 großen Viertelkreisen, 2 kleinen Viertelkreisen und einem Rechteck, das 10 cm lang und 5 cm breit ist. Die Umfänge der beiden Figuren allerdings sind verschieden. Sie unterscheiden sich um



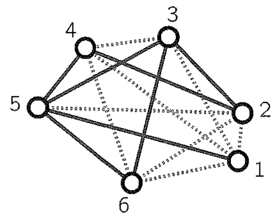
(**A**) 30 cm (**B**) 20 cm (**C**) 15 cm (**D**) 10 cm (**E**) 5 cm

Lösung: In beiden Figuren gehören die 4 Viertelkreisbögen zum Umfang. Während bei der links abgebildeten Figur 2 Strecken dazugehören, die so lang sind wie die lange Rechtecksseite, und 2 Strecken, die so lang sind wie die kurze Rechtecksseite, enthält der Rand der rechts abgebildeten Figur nur eine Strecke, die die Länge der langen Rechtecksseite hat. Dann unterscheiden sich die beiden Umfänge also um $10\,\text{cm} + 2 \cdot 5\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$.

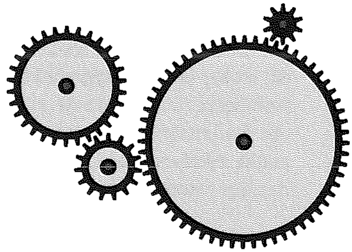
16. Auf unserem Abenteuerspielplatz spielen wir am liebsten im „Drunter-und-Drüber". Das ist eine Kombination aus Klettergarten und Tunnelsystem. Es gibt 6 Stationen, jede ist von jeder anderen auf genau einem direkten Weg zu erreichen. Dieser verläuft entweder mit Kletterei oberirdisch oder als Tunnel durch den Berg. Die Kletterwege kann man zählen, 7 sind es. Wie viele Tunnel gibt es insgesamt?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wenn jede der 6 Stationen mit jeder anderen auf genau einem direkten Weg verbunden ist, dann gehen also von jeder der 6 Stationen 5 direkte Wege aus. Wenn wir nun $6 \cdot 5 = 30$ rechnen, haben wir allerdings jeden Weg zweimal gezählt, d. h. es gibt insgesamt $30 : 2 = 15$ Wege. Von diesen Wegen verlaufen 7 als Kletterwege (dicke Linien). Folglich gibt es $15 - 7 = 8$ Wege als Tunnel (gestrichelte Linien).



17. Vier Zahnräder sind so miteinander verbunden, wie es in der Zeichnung rechts zu sehen ist. Sie haben – von links nach rechts – 30, 15, 60 und 10 Zähne. Wie viele Umdrehungen macht das kleinste Rad, wenn das Rad ganz links eine Umdrehung macht?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Wenn das linke Rad sich einmal um seine Achse dreht, haben seine 30 Zähne das Rad mit den 15 Zähnen Zahn für Zahn bewegt und dieses Rad hat dabei 2 Umdrehungen gemacht. Dabei hat es 30 Zähne des großen Rades berührt, wodurch dieses Rad eine halbe Umdrehung gemacht hat. Und auch am kleinsten Rad haben 30 Zähne ineinander gegriffen, wodurch dieses Rad mit seinen 10 Zähnen folglich 3 Umdrehungen gemacht hat.

18. Dorians Salat-Dressing besteht aus Essig, Öl und Wasser. Es enthält halb so viel Essig wie Öl und dreimal so viel Öl wie Wasser. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? In Dorians Salat-Dressing ist

(**A**) mehr Essig als Öl.
(**B**) weniger Essig als Wasser.
(**C**) mehr Essig als Öl und Wasser zusammen.
(**D**) mehr Wasser als Essig und Öl zusammen.
(**E**) mehr Öl als Essig und Wasser zusammen.

Lösung: Wir schreiben die Aussagen, die wir über Dorians Dressing erhalten, geordnet auf. Es ist zweimal so viel Öl wie Essig, und es ist dreimal so viel Öl wie Wasser, damit ist also weniger Wasser als Essig im Dressing. Daraus folgt: Da vom Essig halb so viel wie vom Öl im Dressing ist, ist vom Wasser weniger als halb so viel vorhanden. Folglich gibt es nicht nur am meisten Öl, sondern sogar mehr Öl als Essig und Wasser zusammen. Die Aussage (**E**) trifft zu.

19. Abids Hausnummer ist 3-stellig. Streicht er die 1. Stelle dieser Zahl, ergibt sich die Hausnummer von Hanni. Streicht er die 1. Stelle von Hannis Hausnummer, dann erhält er die Hausnummer von Nils. Die Summe aller drei Hausnummern ist 312. Welche Ziffer steht an der 1. Stelle von Hannis Hausnummer?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

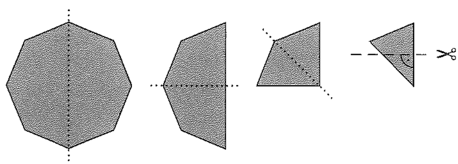
Lösung: Angenommen Abids Hausnummer ist abc. Dann ist die Hausnummer von Hanni bc und die von Nils ist c. Werden die 3 Hausnummern addiert, so ist die letzte Stelle der Summe 312 auch die letzte Stelle der Summe $c + c + c = 3c$. Die einzige Ziffer c, deren Dreifaches auf 2 endet, ist $c = 4$. Bei der Addition $4 + 4 + 4$ entsteht der Übertrag 1, der auch in der Summe an der Zehnerposition steht. Das kann nur der Fall sein, wenn $b = 0$ oder $b = 5$ ist. Die Möglichkeit $b = 0$ entfällt, weil sonst Hannis Hausnummer nicht zweistellig wäre. Also ist $b = 5$ und folglich $a = 2$. Die Hausnummern der drei sind 254, 54 und 4.

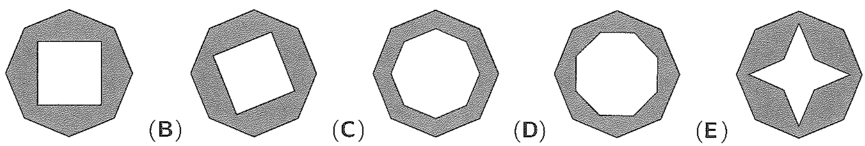
KAENGURU-Kryptogramm

Im abgebildeten Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Addition entsteht. Dabei stehen gleiche Buchstaben für die gleiche Ziffer, verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. Wer findet mehr als nur eine Lösung?

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\,A\,E\,N} \\ +\;\; \mathrm{G\,U\,R\,U} \\ \hline \mathrm{L\,E\,R\,N\,E} \end{array}$$

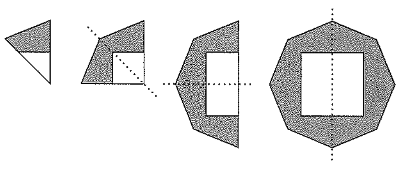
20. Ein regelmäßiges Achteck ist dreimal gefaltet worden. Danach ist, wie es die Zeichnung zeigt, die Ecke abgeschnitten worden. Welches Bild zeigt das nach dem Abschneiden auseinandergefaltete Achteck?



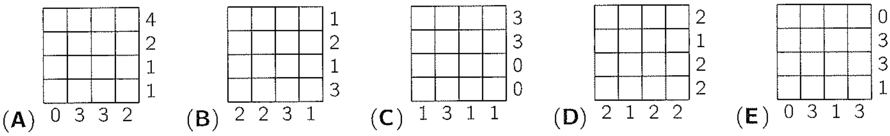


(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

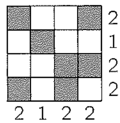
Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir beim dreifach gefalteten Papier die Ecke abschneiden und dann Stück für Stück das Achteck wieder auseinanderfalten. Wir erhalten das Bild (**A**).



21. „Heute ist Logik gefragt!", sagt unser Mathelehrer und malt fünf 4×4-Felder an die Tafel. An jede Zeile und jede Spalte schreibt er eine Zahl. „Es sollen in jeder Zeile und jeder Spalte so viele Kästchen blau ausgemalt werden, wie dort als Zahl vermerkt ist. Aber passt auf, das klappt nur in einem einzigen Fall. Und den müsst ihr finden", setzt er fort. Welches Feld ist gemeint?

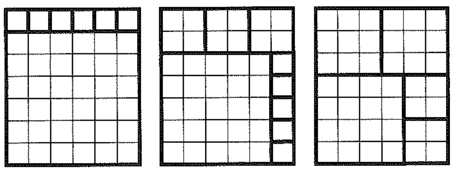


Lösung: Wenn es möglich sein soll, die Kästchen in der entsprechenden Anzahl blau auszumalen, dann muss zuallererst die Summe der auszumalenden Kästchen in den Zeilen und in den Spalten übereinstimmen. Das ist im Fall (**B**) nicht so, dies kann also nicht die Lösung sein. Das Feld (**A**) kommt nicht in Frage, weil einerseits in der obersten Zeile alle 4 Felder ausgemalt sein müssen und andererseits die erste Spalte leer sein muss. Das Feld (**C**) entfällt aus ähnlichem Grund: Die zweite Spalte muss 3 ausgemalte Felder enthalten, was nicht damit zusammengeht, dass die beiden letzten Zeilen leer sein müssen. Im Feld (**E**) ist die oberste Zeile leer, also müssen die 2. und 4. Spalte außer in der ersten Zeile blau ausgemalt sein. Das widerspricht der Tatsache, dass in der letzten Zeile nur ein Feld blau ist. Das Feld (**D**) lässt sich den Bedingungen entsprechend ausmalen, wie das Bild zeigt.



22. Marlen ist dabei, ein Rechteck, das 7 Kästchen lang und 6 Kästchen breit ist, so in Quadrate zu zerschneiden, dass keines der Kästchen zerschnitten wird. Sie könnte es in höchstens $6 \cdot 7 = 42$ Quadrate zerschneiden. Aber welches ist die *kleinste* Zahl von Quadraten, in die Marlen das Rechteck zerschneiden kann?

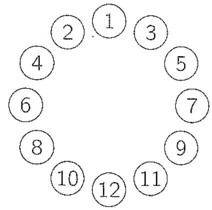
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8



Lösung: Das größtmögliche Quadrat, das wir unterbringen können, ist 6×6 Kästchen groß. Schneiden wir ein solches Quadrat von dem Kästchenpapier ab, bleibt ein Streifen, den wir nur auf eine Weise zerschneiden können, und zwar in 6 Kästchen der Größe 1×1. Das sind insgesamt 7 Quadrate. Wenn das größte Quadrat, das wir ausschneiden, 5×5 Kästchen groß ist, so ist die günstigste Teilung, also die Teilung, bei der die wenigsten Quadrate ausgeschnitten werden müssen, sicher die in der Mitte gezeichnete, die aus 9 Quadraten besteht. Ist nun das größte Quadrat, das wir ausschneiden, 4×4 Kästchen groß, so finden wir die rechts gezeichnete Teilung in nur 5 Quadrate. Wäre das größte Quadrat höchstens 3×3 Kästchen groß, so reichen sicherlich nicht weniger als 5 Quadrate, da diese dann höchstens $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 < 42$ Quadrate umfassen. (**B**) ist die Lösung.

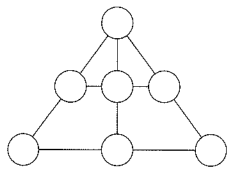
23. Die 12 Zahlen von 1 bis 12 sind so im Kreis angeordnet, dass sich benachbarte Zahlen entweder um 1 oder um 2 unterscheiden. Welche der folgenden Zahlen müssen dann Nachbarn sein?

(**A**) 5 und 6 (**B**) 10 und 9 (**C**) 6 und 7 (**D**) 8 und 10 (**E**) 4 und 3



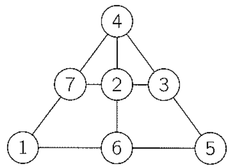
Lösung: Beginnen wir, in 12 Felder, die im Kreis angeordnet sind, die Zahlen den Regeln entsprechend einzuordnen, so stellen wir schnell fest, dass dies nur auf eine einzige Weise (bis auf Drehung und Spiegelung) geschehen kann. Beginnen wir mit der 1. In die Nachbarfelder müssen Zahlen geschrieben werden, die sich von der 1 entweder um 1 oder um 2 unterscheiden. Dafür kommen nur die beiden Zahlen 2 und 3 in Frage. Wir schreiben sie in die beiden Nachbarfelder und fragen uns nun, welche Zahl der zweite Nachbar der 2 und welche der zweite Nachbar der 3 ist. Als Nachbarn der 2 kommen nur die Zahlen 1, 3 und 4 in Frage. Da die 1 und die 3 bereits in den Kreis eingeordnet wurden, muss der zweite Nachbar der 2 die 4 sein. Als Nachbarn der 3 kommen nur die Zahlen 1, 2, 4 und 5 in Frage. Da 1, 2 und 4 bereits in den Kreis eingeordnet sind, muss der zweite Nachbar der 3 die 5 sein. Auf diese Weise können wir den gesamten Kreis eindeutig ausfüllen und finden dabei, dass die 8 und die 10 benachbart sein müssen.

24. Die Zahlen von 1 bis 7 sind so in die Kreise zu platzieren, dass die Summe der Zahlen auf jeder Linie dieselbe ist. Welche Zahl gehört in die obere Ecke des Dreiecks?



(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Lösung kann durch geschicktes Kombinieren der 7 Zahlen gefunden werden. Rechts ist ein Beispiel für das ausgefüllte Diagramm abgebildet.



Eine logische Herleitung, bei der wir auch sehen, dass die gesuchte Zahl eindeutig bestimmt ist, ist diese: Im ersten Schritt versuchen wir, etwas über die Summe der Zahlen auf jeder Linie, die „Liniensumme", herauszufinden. Dazu bilden wir zuerst die Summe der Zahlen auf jeder der 3 Linien, die die gesuchte Zahl enthalten, und addieren diese 3 Liniensummen. Diese Summe ist dann das Dreifache der Liniensumme. Sie enthält alle 7 Zahlen, darunter die gesuchte Zahl dreimal, die restlichen je einmal. Die Summe der Zahlen in den waagerechten Linien ergibt das Zweifache der Liniensumme. Sie wird aus allen Zahlen außer der gesuchten gebildet. Bilden wir die Differenz der beiden Summen, dann sehen wir, dass das Dreifache der gesuchten Zahl gerade gleich der Liniensumme sein muss. Also ist die Liniensumme eine durch 3 teilbare Zahl.
Nun fragen wir uns als nächstes, wie groß die Liniensumme sein kann. Es gibt eine Linie, auf der die 1 steht. Und auf dieser Linie können höchstens noch die 6 und die 7 stehen, die Liniensumme ist also gewiss nicht größer als $1+6+7=14$. Andererseits gibt es eine Linie, auf der die 7 steht. Und dort müssen mindestens noch 1 und 2 dazukommen; die Liniensumme ist also mindestens $7+1+2=10$. Da die Liniensumme durch 3 teilbar ist, bleibt dafür nur 12. Und da das Dreifache der gesuchten Zahl die Liniensumme ist, gehört die 4 in den oberen Kreis.

Kopfnüsse II

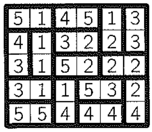
Im Folgenden sind noch einmal einige Kostproben der Knobeleien aus dem „Großen Buch der Kopfnüsse“ zusammengestellt:

Domino-Rechtecke

Das abgebildete Rechteck wurde aus den daneben liegenden Dominosteinen zusammengeschoben.
Die Dominosteine durften dabei beliebig gedreht werden.

5	1	4	5	1	3
4	1	3	2	2	3
3	1	5	2	2	2
3	1	1	5	3	2
5	5	4	4	4	4

1 5
1 4 2 5
1 3 2 4 3 5
1 2 2 3 3 4 4 5
1 1 2 2 3 3 4 4 5 5



Wer findet die genaue Lage der Dominosteine in den folgenden Aufgaben?

3	4	2	1	3	5
5	1	3	5	5	2
3	2	2	2	5	1
2	4	4	3	3	1
5	4	4	1	4	1

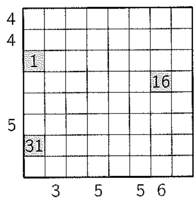
1 5
1 4 2 5
1 3 2 4 3 5
1 2 2 3 3 4 4 5
1 1 2 2 3 3 4 4 5 5

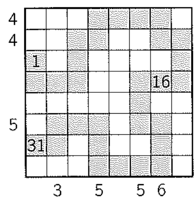
1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6
1 2 2 3 3 4 4 5 5 6
1 3 2 4 3 5 4 6
1 4 2 5 3 6
1 5 2 6
1 6

3	3	3	1	4	2	6
4	2	5	5	4	2	6
1	4	5	5	1	1	5
4	3	3	6	6	6	1
4	4	6	1	3	5	1
2	5	2	2	2	6	3

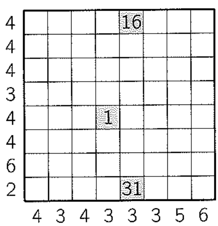
Weg-Suche

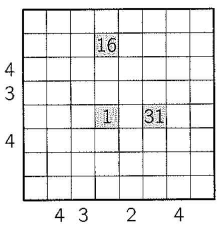
Auf dem Kästchenpapier soll ein Weg eingezeichnet werden. Die 3 Zahlen legen der Reihe nach Anfangspunkt, Mittelpunkt und Endpunkt des Weges fest. Die größte der Zahlen gibt die Weglänge an. Der Weg verläuft entweder senkrecht oder waagerecht, so dass aufeinanderfolgende Wegstücke mit einer ganzen Seite zusammentreffen. Die Zahlen an einigen Zeilen bzw. Spalten geben an, wie viele Wegstücke in dieser Zeile bzw. Spalte zum Weg gehören.
Rechts ist ein Beispiel abgebildet.

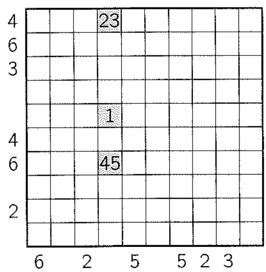




Wer findet die gesuchten Wege?







Klassenstufen 7 und 8

1. Auf dem Jahrmarkt fährt Johanna einmal mit dem Karussell. Ihr Freund Aaron fährt 4-mal mit dem Karussell und bezahlt 6 Euro mehr als Johanna. Wie viel kostet eine Fahrt mit dem Karussell?

(**A**) 1 Euro (**B**) 2 Euro (**C**) 3 Euro (**D**) 4 Euro (**E**) 5 Euro

Lösung: Aaron hat mit dem Karussell 3 Fahrten mehr als Johanna gemacht. Diese 3 Fahrten haben zusammen 6 Euro gekostet, eine einzelne Fahrt also 6 Euro : 3 = 2 Euro.

2. $11{,}1 - 1{,}11 =$

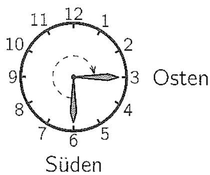
(**A**) 9,009 (**B**) 9,09 (**C**) 9,89 (**D**) 9,99 (**E**) 10

Lösung: Wir rechnen $11{,}1 - 1{,}11 = 9{,}99$.

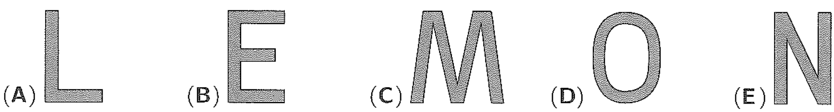
3. Als ich die alte Taschenuhr meines Großvaters neben die Landkarte auf den Tisch legte, zeigte der Minutenzeiger exakt nach Süden. Und als ich – nach weniger als einer Stunde – mit meinen Geographiehausaufgaben fertig war, zeigte er nach Osten. Wie viele Minuten waren vergangen?

(**A**) 45 (**B**) 40 (**C**) 36 (**D**) 30 (**E**) 15

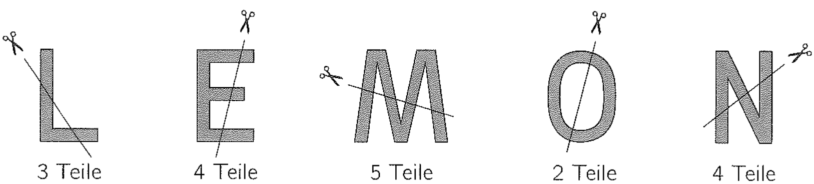
Lösung: Da weniger als eine Stunde vergangen ist, hat der Minutenzeiger von seiner Startrichtung „Süden" bis zu seiner Endrichtung „Osten" eine Dreiviertel-Umdrehung vollzogen. Dafür hat er eine Dreiviertelstunde, also 45 Minuten gebraucht.



4. Jeder der folgenden Buchstaben wird mit einem einzigen geraden Schnitt in so viele Teile wie möglich zerschnitten. Welcher der Buchstaben zerfällt in die meisten Teile?



Lösung: In den Bildern ist dargestellt, wie die Buchstaben zerschnitten werden können, damit sie in so viele Teile wie möglich zerfallen. Die Anzahl der Teile ist beim M am größten.



5. Von ihren 206 Sammelkarten nimmt Marina 6 Karten zum Tauschen in die Schule mit. In der Pause kann sie 5 dieser Karten tauschen, jede gegen 3 andere. Wie viele Karten hat Marina jetzt?

(**A**) 213 (**B**) 214 (**C**) 215 (**D**) 216 (**E**) 217

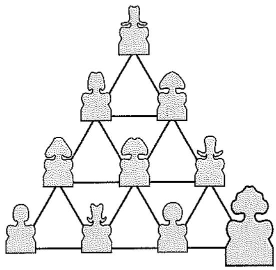
Lösung: Marina lässt $206 - 6 = 200$ Karten zu Hause. Eine der 6 Karten, die sie in die Schule mitnimmt, bekommt sie nicht getauscht. Bei den anderen 5 Karten ist sie erfolgreich, für jede dieser 5 bekommt sie 3 Karten, zusammen also $5 \cdot 3 = 15$ Karten. Damit hat Marina jetzt insgesamt $200 + 1 + 15 = 216$ Karten.

6. Wenn $15 \cdot 16 = 20 \cdot x$ ist, für welche Zahl steht dann x?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

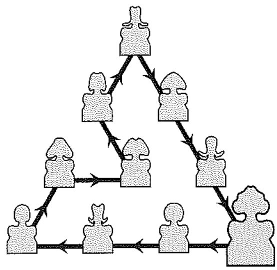
Lösung: Die Lösung können wir finden, wenn wir 15 und 16 multiplizieren und dann durch 20 teilen. Wir können diese Rechnerei vermeiden, wenn wir die auftretenden Zahlen in Primfaktoren zerlegen. Auf der linken Seite steht $15 \cdot 16 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, auf der rechten Seite steht $20 \cdot x = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x$. Also ist $x = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

7. Im „Dichterpark" stehen Skulpturen an den Wegkreuzungen. Von einer Kreuzung zur nächsten sind es jeweils 50 m. Ich beginne meinen Spaziergang an der größten Skulptur, zu der ich zurückkehre, nachdem ich alle Skulpturen angesehen habe. Wie lang ist der kürzeste Weg, den ich gehen kann?



(**A**) 600 m (**B**) 550 m (**C**) 500 m (**D**) 450 m (**E**) 400 m

Lösung: Wenn ich jede der 10 Skulpturen ansehe und danach zur größten Skulptur zurückkehre, muss ich zu jeder der Skulpturen mindestens einmal hinlaufen. Ich muss somit mindestens so viele Wegabschnitte gehen, wie es Skulpturen gibt, und das sind 10. Der rechts abgebildete Weg ist ein Beispiel für einen Weg, der aus nur 10 Wegabschnitten besteht. Folglich ist der kürzeste mögliche Weg $10 \cdot 50\,\text{m} = 500\,\text{m}$ lang.



8. Die 5 höflichen Affen Bongo, Cili, Doro, Eddie und Fips schlendern in dieser Reihenfolge hintereinander zum Zirkuszelt. Jeder ist verrückt danach, den anderen auf dem Weg eine der 8 Türen aufzuhalten. Jede Tür wird vom ersten Affen in der Reihe aufgehalten. Dieser geht dann als letzter in der Reihe weiter, nachdem die anderen Affen der Reihe nach durch die Tür gegangen sind. Welcher Affe hält die 8. Tür auf?

(**A**) Bongo (**B**) Cili (**C**) Doro (**D**) Eddie (**E**) Fips

Lösung: Bongo hält die 1. Tür auf, Cili die 2., Doro die 3., Eddie die 4., Fips die 5., dann wieder Bongo die 6., Cili die 7., und schließlich hält Doro die 8. Tür auf.

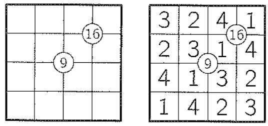
9. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) $\frac{1503}{2012} = \frac{3}{4}$ (B) $\frac{1503}{2012} = \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1503}{2012} > \frac{3}{4}$ (D) $\frac{1503}{2012} = \frac{2}{3}$ (E) $\frac{1503}{2012} < \frac{3}{4}$

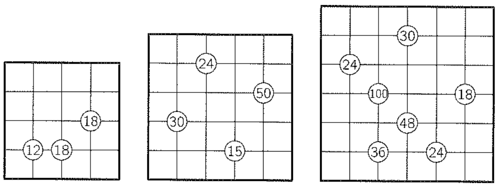
Lösung: Wer ein gutes Gefühl für Brüche hat, wird bemerkt haben, dass $\frac{1503}{2012}$ sehr nahe bei $\frac{3}{4}$ liegt, denn $\frac{1503}{2012} \approx \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$. Da $2012 : 4 = 503$ ist, erweitern wir $\frac{3}{4}$ mit 503 und erhalten $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 503}{4 \cdot 503} = \frac{1509}{2012}$. Nun sehen wir: $\frac{1503}{2012} < \frac{1509}{2012} = \frac{3}{4}$. (**E**) ist richtig.

KAENGURU-Multiplikations-Sudoku

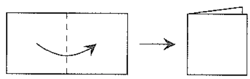
In die Quadrate sind die Zahlen von 1 bis 4 (bzw. 5 oder 6) so einzutragen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Zahl genau einmal vorkommt. Die Zahlen in den Kreisen geben das Produkt der vier Nachbarzahlen an. Im Beispiel rechts ergibt sich $9 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$ *und* $16 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$.

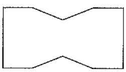
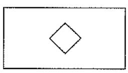
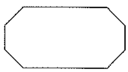
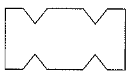
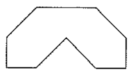


Wie sehen die ausgefüllten Sudokus aus?

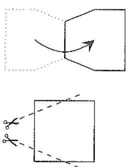
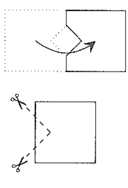
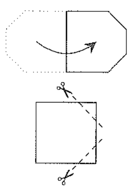
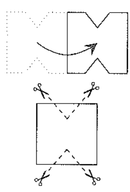
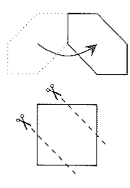


10. Ulla faltet ein rechteckiges Blatt Papier einmal auf die Hälfte (siehe Bild). Dann macht sie mit einer Schere 2 gerade Schnitte und faltet das Blatt wieder auseinander. Wie sieht das Blatt dann sicher *nicht* aus?

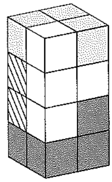


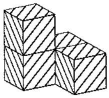
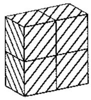
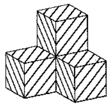
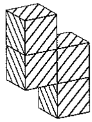
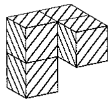
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: In Gedanken falten wir die Blätter in den fünf Antwortmöglichkeiten zusammen und überlegen, wie die Muster entstanden sein könnten. Bei (**D**) reichen zwei gerade Schnitte nicht aus.

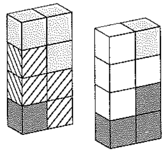
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Der abgebildete Quader besteht aus 4 verschieden gefärbten Teilen, die aus jeweils 4 Würfeln zusammengesetzt sind. Welche Form hat das hintere, gestreifte Teil?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Im Bild rechts sind die vordere und hintere Schicht des Quaders abgebildet. Das gestreifte Teil hat die Form (**D**).



12. Ich bilde zwei 4-stellige Zahlen, wobei ich jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 genau einmal verwende. Dann addiere ich die beiden Zahlen. Welche größte mögliche Summe kann ich erhalten?

(**A**) 17103 (**B**) 16173 (**C**) 16083 (**D**) 14085 (**E**) 13086

Lösung: Die Summe der beiden 4-stelligen Zahlen wird dann am größten, wenn die beiden größten Ziffern, 8 und 7, an den Tausenderstellen stehen, die nächstkleineren Ziffern, 6 und 5, an den Hunderterstellen, 4 und 3 an den Zehnerstellen und 2 und 1 an den Einerstellen. Dafür gibt es mehrere mögliche Zahlenpaare, zum Beispiel 7531 und 8642 oder 8532 und 7641. Stets ist die größtmögliche Summe $8000 + 7000 + 600 + 500 + 40 + 30 + 2 + 1 = 16173$.

13. Doreen lässt einen Gummiball aus einer Höhe von 2 m auf einen glatten Parkettboden fallen, von wo er wieder in die Höhe springt. Der Ball erreicht nach jedem Aufprall 3/4 der Höhe vor diesem Aufprall. Wie oft springt der Ball zurück in eine Höhe, die größer als 1 m ist?

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal

Lösung: Nach dem ersten Aufprall erreicht der Gummiball eine Höhe von $\frac{3}{4} \cdot 2\,\text{m} = \frac{6}{4}\,\text{m}$, nach dem zweiten $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\,\text{m} = \frac{18}{16}\,\text{m}$, nach dem dritten $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\,\text{m} = \frac{54}{64}\,\text{m}$, usw. Die Höhe ist genau dann größer als 1 m, wenn der Zähler des entsprechenden Bruchs größer als der Nenner ist. Das ist für die ersten beiden Brüche $\frac{6}{4}$ und $\frac{18}{16}$ der Fall, aber $\frac{54}{64}$ ist kleiner als 1, wie auch jeder weitere Bruch, der ja nur $\frac{3}{4}$ des vorherigen ist. Der Gummiball springt nur 2-mal höher als 1 m.

14. Mein kleiner Bruder Willi freut sich über den Würfelturm, den er gerade aus 3 Würfeln gebaut hat. Die Höhe der Würfel wird von unten nach oben um jeweils 2 cm kleiner, und der größte Würfel ist genauso hoch wie die beiden anderen zusammen. Wie hoch ist Willis Würfelturm?

(**A**) 6 cm (**B**) 8 cm (**C**) 10 cm (**D**) 12 cm (**E**) 14 cm

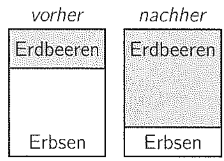
Lösung: Bezeichnen wir mit x die Höhe (in cm) des kleinsten Würfels, dann ist die des mittleren Würfels $x + 2$ und die des größten Würfels $x + 4$. Laut Aufgabe gilt $x + (x + 2) = x + 4$, also $2x + 2 = x + 4$. Wir lösen nach x auf und erhalten $x = 2$. Der kleinste Würfel ist also 2 cm hoch, die anderen folglich 4 cm und 6 cm. Die Höhe des Turms beträgt $2\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

15. Taro hat entdeckt, dass in seiner 8-stelligen Telefonnummer keine Ziffer doppelt so groß ist wie eine der anderen Ziffern. Wie viele *verschiedene* Ziffern kann Taros Telefonnummer höchstens haben?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

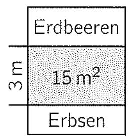
Lösung: Zuerst bilden wir alle Paare verschiedener Ziffern, bei denen die eine Ziffer doppelt so groß ist wie die andere: (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8). Das sind alle Paare aus verschiedenen Ziffern, die aus den Ziffern in Taros Telefonnummer *nicht* gebildet werden können. Von den zwei Ziffern jedes dieser Paare darf die Telefonnummer also *höchstens eine* enthalten. Wir sehen schnell, dass von den Ziffern 3 und 6 höchstens eine enthalten sein kann. Von den Ziffern 1, 2, 4, und 8 können nicht alle vier vorkommen, und auch nicht drei, da die fehlende Ziffer in jedem der drei Paare (1; 2), (2; 4) und (4; 8) vorkommen müsste. Zwei der Ziffern 1, 2, 4, und 8 sind möglich, wenn wir sie geschickt wählen (1 und 4, 1 und 8 oder 2 und 8). Von 3 und 6 haben wir also höchstens eine Ziffer, von den Ziffern 1, 2, 4 und 8 höchstens 2 und die anderen Ziffern 0, 5, 7 und 9 können alle zu Taros Telefonnummer gehören. Insgesamt kommen höchstens 7 verschiedene Ziffern vor. Taros 8-stellige Telefonnummer könnte also beispielsweise 91465570 oder 80238975 sein. Eine Ziffer muss doppelt vorkommen, das kann jede außer der 0 sein, denn es gilt ja $0 = 2 \cdot 0$.

16. Ben hat in seinem Erdbeer-Erbsen-Beet den rechteckigen Erdbeer-Teil zu einem Quadrat vergrößert, indem er eine Seite dieses Teils um 3 m verlängert hat. Die Fläche des Erbsen-Teils ist dadurch um 15 m^2 kleiner geworden. Welchen Flächeninhalt hatte der Erdbeer-Teil vor der Änderung?



(**A**) 5 m^2 (**B**) 6 m^2 (**C**) 10 m^2 (**D**) 15 m^2 (**E**) 18 m^2

Lösung: Wir zeichnen die Trennlinie zwischen Erdbeer-Teil und Erbsen-Teil vor der Änderung in das Bild. Von dem Rechteck, welches zum Erdbeer-Teil dazugekommen ist, kennen wir eine Seitenlänge und die Fläche. Daraus können wir die andere Seitenlänge, welche zugleich die Breite des gesamten Beetes ist, ermitteln. Sie beträgt $15\,\mathrm{m}^2 : 3\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$. Da der Erdbeer-Teil nach der Änderung die Form eines Quadrats hat, ist die andere Seite dieses Teils ebenfalls 5 m lang, vor der Änderung also $5\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$. Der Flächeninhalt des Erdbeer-Teils betrug daher vor der Änderung $2\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2$.



17. Mia schreibt fünf Zahlen in eine Reihe, als erste eine 2 und als letzte eine 15:

2		?		15

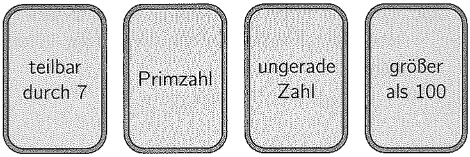
Die Summe der ersten drei Zahlen soll 10 sein, die Summe der mittleren drei Zahlen 20 und die Summe der letzten drei Zahlen 30. Welche Zahl steht in der Mitte?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Differenz zwischen der Summe der ersten drei Zahlen und der mittleren drei Zahlen entspricht dem Unterschied zwischen der ersten und der vierten Zahl in der Reihe (die zweite und dritte Zahl kommen ja in beiden Summen vor). Die vierte Zahl in der Reihe muss folglich um 10 größer sein als 2, ist also die 12. Die mittlere Zahl können wir nun aus der Summe der letzten drei Zahlen ableiten: $30 - 15 - 12 = 3$. Die vollständige Reihe ist:

2	5	3	12	15

18. Die abgebildeten Karten sind auf der Rückseite so mit den Zahlen 2, 5, 7 und 12 beschriftet, dass die jeweilige Zahl die auf der Karte genannte Eigenschaft *nicht* besitzt. Welche Zahl steht auf der Rückseite der Karte mit der Beschriftung „größer als 100"?



(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 12 (**E**) Es gibt mehr als eine Möglichkeit.

Lösung: Wir bezeichnen die Karten von links nach rechts mit A, B, C und D und notieren für jede der Zahlen 2, 5, 7 und 12, auf welchen Karten diese stehen könnte, damit die angegebene Eigenschaft gerade *nicht* zutrifft:

2: A, C oder D 5: A oder D 7: nur D 12: A, B, C oder D

Die Zahl 7 kann nur auf der letzten Karte mit der Beschriftung „größer als 100" stehen, das ist die gesuchte Zahl. Die vollständige Zuordnung können wir schnell ablesen: A–5, B–12, C–2, D–7.

19. Einer der folgenden Ausdrücke ändert seinen Wert nicht, wenn die Zahl 8 durch eine beliebige andere positive Zahl ersetzt wird, aber jede 8 durch die gleiche. Welcher?

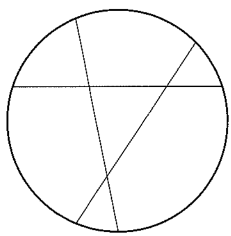
(**A**) $(8+8):8+8$ (**B**) $8\cdot(8+8):8$ (**C**) $8+8-8+8$
(**D**) $(8+8-8)\cdot 8$ (**E**) $(8+8-8):8$

Lösung: Eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, besteht darin, für jeden der fünf Ausdrücke den Wert zu berechnen, dann eine beliebige andere Ziffer anstelle der 8 einzusetzen (zum Beispiel 1), diesen Wert zu berechnen und anschließend zu vergleichen. Wir tun dies beispielhaft für (**A**): $(8+8):8+8=16:8+8=2+8=10$ und $(1+1):1+1=2:1+1=2+1=3$. Wenn wir für *nur* einen der fünf Ausdrücke dasselbe Ergebnis erhalten, muss dieser – nach den Regeln des Känguru-Wettbewerbs – der gesuchte sein. (**A**) ist also nicht die Lösung.

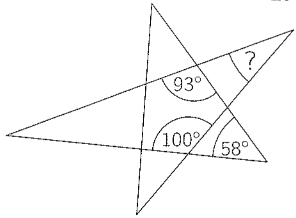
Da der Wert eines der Ausdrücke unabhängig davon sein soll, durch welche Zahl die 8 ersetzt wird, können wir anstelle der 8 auch eine Variable, zum Beispiel x, einsetzen und vereinfachen: (**A**) $(x+x):x+x=2x:x+x=2+x$, (**B**) $x\cdot(x+x):x=x\cdot 2x:x=2x$, (**C**) $x+x-x+x=2x$, (**D**) $(x+x-x)\cdot x=x\cdot x=x^2$, (**E**) $(x+x-x):x=x:x=1$. Nur beim letzten Ausdruck ist der Wert unabhängig von x, (**E**) ist die Lösung.

KAENGURU-Kreislogelei

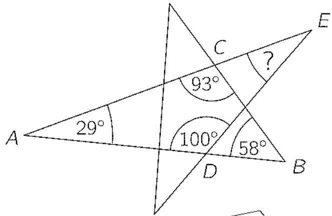
Drei Sehnen teilen das Innere eines Kreises in 7 Gebiete.
Die Zahlen von 1 bis 7 sollen in die Gebiete geschrieben werden, in jedes Gebiet eine andere.
Für jede der Sehnen soll die Summe der Zahlen auf der einen Seite der Sehne gleich der Summe der Zahlen auf der anderen Seite der Sehne sein.
Welche Zahlen können in dem mittleren Gebiet stehen?
Wer findet mehr als eine Lösung?



20. Wie groß ist der mit dem Fragezeichen gekennzeichnete Winkel? (Abbildung *nicht* maßstabsgerecht)

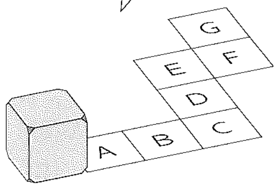


(**A**) 51° (**B**) 55° (**C**) 56° (**D**) 60° (**E**) 65°

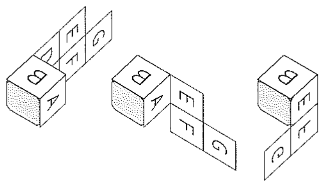


Lösung: Im Dreieck ABC (siehe Bild) können wir den Innenwinkel bei A berechnen: $180° - 58° - 93° = 29°$. Der gesuchte Winkel ist der einzige unbekannte Innenwinkel im Dreieck ADE. Er ist $180° - 100° - 29° = 51°$ groß.

21. Ein Würfel wird über seine Kanten auf den abgebildeten Feldern von A nach G gerollt. Auf genau zwei Feldern kommt der Würfel dabei mit derselben Seitenfläche zu liegen. Das sind die Felder



(**A**) B und E (**B**) B und F (**C**) A und E
(**D**) B und G (**E**) A und F



Lösung: Wir stellen uns vor, dass die bezeichneten Felder auf einem Papierstreifen gezeichnet sind. Wir halten den Würfel in Gedanken fest und wickeln den Streifen um den Würfel, wie es im Bild rechts zu sehen ist (dabei ist der Würfel leicht gedreht). Feld A liegt auf der rechten Seite des Würfels, B oben und C links. D bedeckt die hintere Fläche, E die rechte (genauso wie A) und schließlich F die untere und G die vordere. Nur auf A und E kommt dieselbe Seitenfläche des Würfels zu liegen.

22. Im fernen Polygonien haust die Hexe Hexagona. Erst gestern hat sie das Quadrat Quentin verzaubert. Sagt Quentin eine wahre Aussage, wird jede seiner Seiten 2 cm kürzer. Bei einer falschen Aussage verdoppelt sich sein Umfang. Im Moment sind Quentins Seiten jeweils 8 cm lang, er traut sich kaum zu sprechen. Welche Seitenlänge kann das Quadrat Quentin nach 4 Aussagen, von denen 2 wahr und 2 falsch sind, höchstens haben?

(**A**) 28 cm (**B**) 26 cm (**C**) 22 cm (**D**) 20 cm (**E**) 16 cm

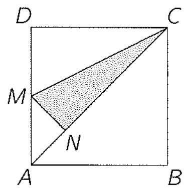
Lösung: Eine Verdopplung des Umfangs eines Quadrats ist gleichbedeutend mit einer Verdopplung jeder Seitenlänge. Wenn bei einer wahren und einer falschen Aussage die Verkürzung der Seitenlänge um 2 cm vor der Verdopplung stattfindet, dann ist die resultierende Seitenlänge um $2 \cdot 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$ kürzer als das Doppelte der ursprünglichen Seitenlänge. Wird hingegen erst verdoppelt und dann verkürzt, dann ist die resultierende Seitenlänge nur um 2 cm kürzer als das Doppelte der ursprünglichen Seitenlänge. Die größte mögliche Seitenlänge wird bei 4 Aussagen – 2 wahren und 2 falschen – also dann erreicht, wenn erst 2-mal verdoppelt und dann 2-mal verkürzt wird. Die größte mögliche Seitenlänge beträgt folglich $8\,\text{cm} \cdot 2 \cdot 2 - 2\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 28\,\text{cm}$.

23. Am Flughafen läuft Lilly gleichzeitig mit ihrer elektrischen Schildkröte Ida auf das lange Laufband. Lilly bleibt stehen, während Ida mit 1 km/h weiterläuft. Auf einem Schild liest Lilly die technischen Details des Laufbands: „Länge: 400 m, Geschwindigkeit: 7 km/h". Wie groß ist der Abstand zwischen Lilly und Ida, wenn Ida das Ende des Laufbands erreicht hat?

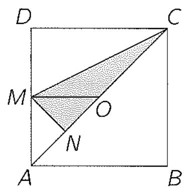
(**A**) 25 m (**B**) 50 m (**C**) 70 m (**D**) 75 m (**E**) 100 m

Lösung: Wenn die Schildkröte Ida auf dem Laufband weiterläuft, ist ihre Geschwindigkeit die Summe aus ihrer eigenen und der des Laufbands, also 8 km/h. Lilly, die auf dem Laufband steht, bewegt sich hingegen genau mit der Geschwindigkeit des Laufbands fort, also mit 7 km/h. Bei gleichförmigen Bewegungen sind Geschwindigkeit und Weg direkt proportional zueinander ($s = v \cdot t$). Das heißt, wenn Ida das Ende des Laufbands erreicht hat, verhält sich der zurückgelegte Weg s von Lilly zu den 400 m von Ida genauso wie sich ihre Geschwindigkeiten zueinander verhalten, 7 : 8. Lilly hat folglich $s = 400\,\text{m} \cdot 7/8 = 350\,\text{m}$ zurückgelegt, wenn Ida das Ende des Laufbands erreicht, und Ida ist Lilly damit $400\,\text{m} - 350\,\text{m} = 50\,\text{m}$ voraus.

24. Im Quadrat $ABCD$ ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Der Punkt N liegt so auf der Diagonalen $\overline{AC}$, dass die Strecke $\overline{MN}$ senkrecht auf $\overline{AC}$ steht. Welchen Anteil am Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ hat das grau markierte Dreieck MNC?



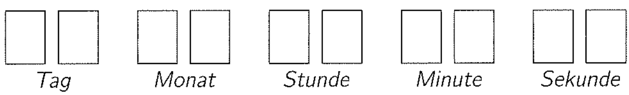
(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{1}{5}$ (**C**) $\frac{7}{36}$ (**D**) $\frac{3}{16}$ (**E**) $\frac{7}{40}$



Lösung: Es sei Q der Flächeninhalt des Quadrats. Der Flächeninhalt von $\triangle ACD$ ist $\frac{1}{2}Q$. Da M der Mittelpunkt von $\overline{DA}$ ist, haben die Dreiecke $\triangle DMC$ und $\triangle MAC$ denselben Flächeninhalt $\frac{1}{4}Q$. Der Punkt O ist der Mittelpunkt des Quadrats, also ist $\overline{MO}$ parallel zu $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ und hat von diesen beiden Quadratseiten denselben Abstand. Folglich haben die Dreiecke $\triangle MOC$ und $\triangle OMA$ denselben Flächeninhalt $\frac{1}{8}Q$. Da $\overline{MN}$ senkrecht auf $\overline{AO}$ steht, ist der Flächeninhalt von $\triangle OMN$ gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}Q = \frac{1}{16}Q$. Der Flächeninhalt des grauen Dreiecks $\triangle MNC$ ist somit $\frac{1}{8}Q + \frac{1}{16}Q = \frac{3}{16}Q$.

KAENGURU-Datumsrätsel

In der abgebildeten Anzeige geben 10 Ziffern den Tag, den Monat, die Stunde, die Minute und die Sekunde an:



Wann sind zum ersten Mal im Jahr alle diese Ziffern verschieden sind? Und wann zum letzten Mal?

25. In Bärbels Backbuch stehen 30 leckere Rezepte. Die Hälfte der Rezepte ist eine Seite lang, die anderen, etwas komplizierteren sind 2 Seiten lang. Leerseiten gibt es nicht, und jedes Rezept beginnt auf einer neuen Seite. Bärbel fällt auf, dass viele Rezepte auf einer Seite mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen, das erste auf Seite 1. Welches ist die größte mögliche Anzahl von Rezepten, die auf einer Seite mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen können?

(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 20 (**D**) 22 (**E**) 23

Lösung: Steht ein Ein-Seiten-Rezept auf einer Seite mit gerader (bzw. ungerader) Seitenzahl, dann beginnt das nächste Rezept mit einer ungeraden (bzw. geraden) Seitenzahl. Bei einem Zwei-Seiten-Rezept beginnt das nächste Rezept ebenso mit einer geraden (bzw. ungeraden) Seitenzahl. Bei Ein-Seiten-Rezepten wechselt also die Seitenzahl zwischen gerade und ungerade – bei Zwei-Seiten-Rezepten nicht. Folglich stehen die 15 Ein-Seiten-Rezepte – unabhängig davon, wo genau die Zwei-Seiten-Rezepte stehen – abwechselnd auf Seiten mit ungerader bzw. gerader Seitenzahl. Da das Buch auf Seite 1 beginnt, stehen 8 Ein-Seiten-Rezepte auf einer Seite mit ungerader Seitenzahl und 7 auf einer Seite mit gerader Seitenzahl.

Die Anzahl der Rezepte, die mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen, wird nun möglichst groß, wenn die 15 Zwei-Seiten-Rezepte *alle* mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen. Das ist möglich, zum Beispiel, wenn alle diese Rezepte gleich zum Anfang im Buch stehen.

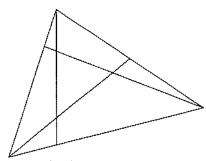
Insgesamt können höchstens $8 + 15 = 23$ Rezepte mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen.

26. Wie groß ist die Summe aller 3-stelligen Zahlen, bei denen sowohl die ersten beiden Ziffern als auch die letzten beiden Ziffern eine 2-stellige Quadratzahl bilden?

(**A**) 1177 (**B**) 1344 (**C**) 1629 (**D**) 1829 (**E**) 1993

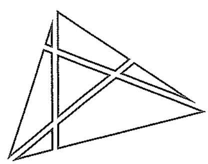
Lösung: Jede 3-stellige Zahl, die der Bedingung der Aufgabe genügt, entspricht einem Paar 2-stelliger Quadratzahlen, bei denen die Einerstelle der ersten Zahl und die Zehnerstelle der zweiten Zahl übereinstimmen. Die 2-stelligen Quadratzahlen sind 16, 25, 36, 49, 64 und 81, die zur Aufgabe passenden Paare sind (16; 64), (36; 64), (64; 49) und (81; 16). Die Summe der zugehörigen 3-stelligen Zahlen ist $164 + 364 + 649 + 816 = 1993$.

27. Ein Dreieck wird durch 3 Strecken in 3 Vierecke und 4 Dreiecke zerlegt. Die Umfänge der 3 Vierecke ergeben zusammen 25 cm, die der 4 Dreiecke zusammen 20 cm, und der Umfang des Ausgangsdreiecks beträgt 19 cm (Abbildung *nicht* maßstabsgerecht). Wie lang sind die 3 Strecken zusammen?



(**A**) 11 cm (**B**) 12 cm (**C**) 13 cm (**D**) 14 cm (**E**) 15 cm

Lösung: Rechts sind die Umfänge der Dreiecke und Vierecke abgesetzt gezeichnet. Wir sehen, dass die Summe dieser sieben Umfänge den Umfang des Ausgangsdreiecks einmal enthält und die Summe der 3 Streckenlängen im Inneren doppelt. Die Gesamtlänge der 3 inneren Strecken ist folglich die Hälfte der Summe der 7 Umfänge, von der der Umfang des Ausgangsdreiecks abzuziehen ist, also $1/2 \cdot (25\,\text{cm} + 20\,\text{cm} - 19\,\text{cm}) = 13\,\text{cm}$.



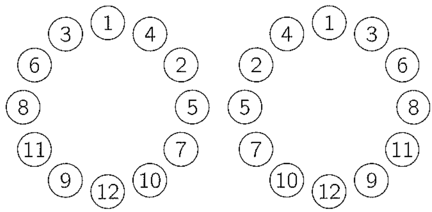
28. David ordnet die Zahlen von 1 bis 12 so im Kreis an, dass sich benachbarte Zahlen entweder um 2 oder um 3 unterscheiden. Welche Zahlen sind dann sicher Nachbarn?

(**A**) 5 und 8 (**B**) 3 und 5 (**C**) 7 und 9 (**D**) 4 und 6 (**E**) 6 und 8

Lösung: Wir versuchen, die Zahlen nach Davids Regeln anzuordnen und beginnen dabei mit den Zahlen, für die nur sehr wenige Nachbarn in Frage kommen. Neben 1 können nur 3 und 4 stehen, 2 kann nur die Nachbarn 4 und 5 haben. Die Anordnung der ersten fünf Zahlen ist also 3–1–4–2–5 bzw. umgekehrt 5–2–4–1–3. Als Nachbarn der 3 kommen nur 1, 5 und 6 in Frage. Da 5 und 1 nicht mehr als Nachbarn zur Verfügung stehen, muss neben der 3 die 6 stehen. Wir erhalten die einzig mögliche Anordnung 6–3–1–4–2–5 bzw. umgekehrt 5–2–4–1–3–6.

Da es für die beiden Randzahlen 5 und 6 mehrere Möglichkeiten gibt, wenden wir uns nun der 12 zu. Völlig analog können neben 12 nur 10 und 9 stehen, neben 11 nur 9 und 8. Für 10 kommen nur 12, 8 und 7 in Frage, von denen jedoch 8 und 12 schon vergeben sind. Somit ist die Anordnung der sechs größten der zwölf Zahlen klar: 7–10–12–9–11–8 bzw. umgekehrt 8–11–9–12–10–7.

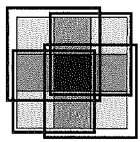
Nun gilt es, die beiden Zahlenreihen aus sechs Zahlen zu einem Kreis zu verknüpfen. Das ist nach Davids Bedingung nur möglich, wenn 5 mit 7 verbunden wird und 6 mit 8. Folglich ist (**E**) die Lösung. Insgesamt gibt es also nur zwei mögliche Anordnungen der 12 Zahlen, wobei diese beiden Möglichkeiten zueinander gespiegelt sind.



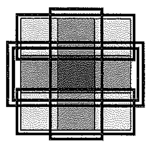
29. In das 3×3-Feld sollen positive rationale Zahlen so geschrieben werden, dass das Produkt der 3 Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich 1 ist und das Produkt der 4 Zahlen in jedem 2×2-Teilquadrat gleich 2 ist. Welche Zahl gehört ins mittlere Feld?

	?	

(**A**) 16 (**B**) 8 (**C**) 4 (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{8}$



Lösung: Wir versuchen, die Zahlen geschickt zu multiplizieren – zeilenweise, spaltenweise oder je 2×2-Teilquadrat. Zuerst bilden wir das Produkt P_1 der vier 2×2-Teilquadrate: $P_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. In P_1 stecken als Faktoren die Zahlen in den Ecken des 3×3-Quadrats je einmal, die restlichen Zahlen an den Rändern je zweimal und die gesuchte Zahl in der Mitte viermal (siehe Bild oben).



Nun bilden wir ein ähnliches Produkt P_2 mit Hilfe der Zeilen und Spalten und versuchen, die Faktoren von P_1 zu rekonstruieren. Multiplizieren wir die drei Zeilen, dann haben wir jede der Zahlen bereits einmal. Dann multiplizieren wir noch mit der mittleren Zeile und der mittleren Spalte, um auf die richtige Anzahl der Randzahlen zu kommen (siehe Bild Mitte). Das gebildete Produkt P_2 ist natürlich gleich 1.

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

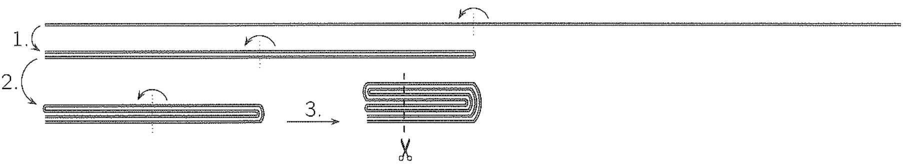
Die Zahlen in den Ecken und am Rand sind in jedem der beiden Produkte P_1 und P_2 gleich oft als Faktoren vertreten, aber die gesuchte Zahl in der Mitte kommt im ersten Produkt viermal vor, im zweiten Produkt nur dreimal. Somit gilt $P_1 = ? \cdot P_2$, also $16 = ? \cdot 1$. Die gesuchte Zahl ist 16.

Das untere Bild zeigt das vollständig ausgefüllte Quadrat.

30. Ein dünner Strick wird 3-mal hintereinander auf die Hälfte gefaltet. Dann wird das entstandene Bündel mit einem Schnitt zerteilt. Unter den entstehenden Stücken gibt es ein 4 cm langes und ein 9 cm langes Stück. Welche der folgenden Längen kann *nicht* die Länge des ursprünglichen Stricks sein?

(**A**) 52 cm (**B**) 68 cm (**C**) 72 cm
(**D**) 88 cm (**E**) Jede dieser vier Längen ist möglich.

Lösung: Die folgende Skizze zeigt, wie der Strick gefaltet wird:

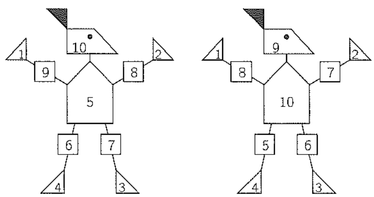


Durch das Durchschneiden des Bündels an einer beliebigen Stelle entstehen mehrere, verschieden lange Stücke. Aus dem Bild erkennen wir, dass auf der rechten Seite des Schnitts 4 gleich lange Stücke entstehen, ihre Länge bezeichnen wir mit x. Auf der linken Seite entstehen zwei kurze Stücke der Länge y und 3 doppelt so lange Stücke der Länge $z = 2y$. Damit können y und z nicht das 4 cm und das 9 cm lange Stück sein. Nun gibt es genau 4 Möglichkeiten für die Maße 4 cm und 9 cm: eine dieser Längen ist x, die andere entweder y oder z. Die vier Möglichkeiten und die Gesamtlänge des Stricks $4x + 2y + 3z = 4x + z + 3z = 4(x + z)$ sind in der Tabelle aufgelistet:

x	y	z	Gesamtlänge des Stricks
4 cm	**9 cm**	18 cm	$4(x+z) = 4(4\,\text{cm} + 18\,\text{cm}) = 4 \cdot 22\,\text{cm} = 88\,\text{cm}$
4 cm	4,5 cm	**9 cm**	$4(x+z) = 4(4\,\text{cm} + 9\,\text{cm}) = 4 \cdot 13\,\text{cm} = 52\,\text{cm}$
9 cm	**4 cm**	8 cm	$4(x+z) = 4(9\,\text{cm} + 8\,\text{cm}) = 4 \cdot 17\,\text{cm} = 68\,\text{cm}$
9 cm	2 cm	**4 cm**	$4(x+z) = 4(9\,\text{cm} + 4\,\text{cm}) = 4 \cdot 13\,\text{cm} = 52\,\text{cm}$

Die Länge 72 cm ist nicht möglich.

Lösungen der Känguru-Knobeleien



Seite 4, Magisches KAENGURU: Im Bauch des Kängurus kann nur die 5 oder die 10 stehen. Abgebildet sind zwei mögliche ausgefüllte Kängurus – eines mit der Summe 15 und eines mit der Summe 19.

Seite 5, KAENGURU-Rechnerei: Es gibt für alle Aufgaben mehr als eine Lösung, zum Beispiel:

$2 + 0 : 1 - 2 = 0$ oder $2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$ $2 \cdot 0 + 1 + 2 = 3$ oder $2 + 0 - 1 + 2 = 3$

$2 + 0 + 1 - 2 = 1$ oder $2 \cdot 0 - 1 + 2 = 1$ $2 + 0 \cdot 1 + 2 = 4$ oder $2 + 0 + 1 \cdot 2 = 4$

$2 + 0 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ oder $2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$ $2 + 0 + 1 + 2 = 5$ oder $2 - 0 + 1 + 2 = 5$

Seite 6, KAENGURU-Zahlenmagie: Das Ergebnis ist stets die ursprünglich gedachte Zahl.

Seite 7, KAENGURU-Ziffernspielerei: Rechts stehen die vollständigen, richtigen Rechenaufgaben.

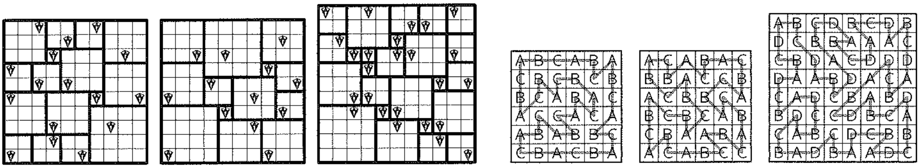
$$\begin{array}{r} 1\,2\,4\,4\,3\,4 \\ +\ 4\,1\,2\,3\,4\,4 \\ \hline 5\,3\,6\,7\,7\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,6\,9\,1\,7\,8 \\ -\ 4\,5\,6\,7\,8\,4 \\ \hline 1\,1\,2\,3\,9\,4 \end{array}$$

Seite 9, KAENGURU-Quadrate: Es gibt 5 Sorten Quadrate, insgesamt sind es 31 Stück.

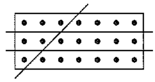
Seite 11, KAENGURU-Streichholzknobelei: Rechts sind die berichtigten Gleichungen zu sehen.

8-6=2 5+4=9
9-6=3 9-5=4
9-5=4 3+3=6

Seite 12, Kopfnüsse I: Die Lösungen der sechs Kopfnüsse sind:

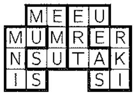


Seite 14, KAENGURU-Zerlegung: Die Abbildung zeigt eine Möglichkeit, bei der sich in den sechs Teilen 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 Punkte befinden.



Seite 15, KAENGURU-Zahlenwege: (a) Es gibt 6 Wege, die nur über gerade Zahlen führen: 2-10-8-6, 2-10-8-14-16-6, 2-10-18-4-14-6, 2-10-18-4-8-6, 2-10-18-4-8-14-16-6, 2-10-8-4-14-6.
(b) Es gibt 5 Wege, die nur über ungerade Zahlen führen: 11-7-13-5-11-17-19-3, 11-7-3-5-11-17-19-3, 11-9-3-5-11-17-19-3, 11-9-3-7-13-5-11-17-19-3, 13-9-15-17-11-3-7-5.
(c) Es gibt 4 Wege, die nur über Primzahlen führen: 2-7-13-5-11-17-19-3, 2-7-3-5-11-17-19-3, 11-7-13-5-11-17-19-3, 11-7-3-5-11-17-19-3.

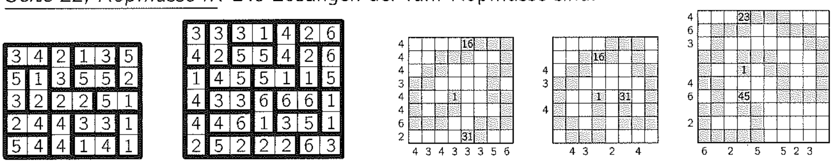
Seite 16, KAENGURU-Puzzelei: Rechts ist die Zerlegung abgebildet, die gesuchten Begriffe sind MINUS, SUMME, RAUTE und KREIS.



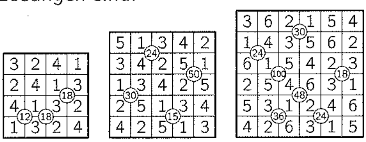
Seite 19, KAENGURU-Kryptogramm: Zwei mögliche Lösungen sind:

$$\begin{array}{r} 4508 \\ +\ 6272 \\ \hline 10780 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3927 \\ +\ 8545 \\ \hline 12472 \end{array}$$

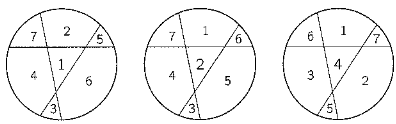
Seite 22, Kopfnüsse II: Die Lösungen der fünf Kopfnüsse sind:



Seite 25, KAENGURU-Multiplikations-Sudoku: Die Lösungen sind:



Seite 28, KAENGURU-Kreislogelei: In der Mitte kann nur 1, 2 oder 4 stehen. Für jeden dieser Fälle ist eine mögliche Lösung abgebildet:



Seite 30, KAENGURU-Datumsrätsel: Der früheste Zeitpunkt, zu dem alle diese Ziffern verschieden sind, ist am 26.03. um 17:48:59 Uhr. Der späteste Zeitpunkt ist am 28.09. um 17:56:43 Uhr.

Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	A	D	C	B	E	E	A	D

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	C	A	E	C	D	C	B

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	D	B	B	E	B	C	E	C

Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	D	C	A	C	B	B	D	E

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	C	E	C	C	A	D	B	E

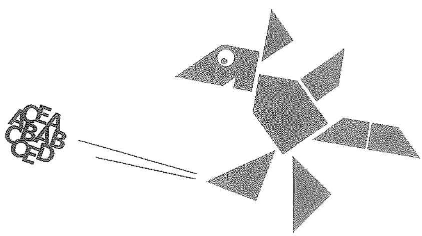
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	A	E	A	A	D	B	D	C

Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	A	C	D	E	C	C	E	D

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	B	A	D	B	C	B	C	E	A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	B	D	E	E	C	E	A	C



www.mathe-kaenguru.ch

2012 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2012!

Am 15. März 2012 hat der Känguru-Mathematikwettbewerb in etwa 50 Ländern der Welt stattgefunden. Auch beinahe 20'000 Schülerinnen und Schüler aus über 220 Schweizer Schulen haben daran teilgenommen und an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben geknobelt.

Vielleicht war es am spannendsten herauszufinden, wie viele Schachpartien Anna höchstens verloren hat oder wie viele Wäscheklammern der Vater für das Aufhängen der Handtücher braucht. Vielleicht auch, wie viele Tunnel auf dem Abenteuerspielplatz sind oder welche Teile das quadratische Puzzle vervollständigen. Auf kleine, mit logisch-mathematischem Schliessen zu lösende Fragestellungen treffen wir überall. Wir finden sie auf dem Spielplatz oder Schulhof ebenso wie beim Einkauf. Mal muss gerechnet werden, oft ist mehr das Erkennen von Strukturen, Kombinieren, Schätzen, das Finden von Ähnlichkeiten und die Fähigkeit, sich etwas gut räumlich vorzustellen, wichtig. Und all dies wird im Mathematikunterricht in besonderem Mass geübt, auf dass es im täglichen Leben zur Hand ist.

Das Interessante, Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von denen anderer Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den etwa 50 Teilnehmerländern des Wettbewerbs einfliessen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall in Deutschland und in der Schweiz an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre enthält die Aufgaben der Klassenstufen 7 bis 13 sowie die zugehörigen Lösungshinweise. In jeder Klassenstufe sind 30 Aufgaben zu lösen. Für das erste Drittel der 30 Aufgaben sind jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte zu erreichen. Bei einer falschen Antwort gibt es Punktabzug, und zwar werden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe 1 Punkt und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe 1.25 Punkte abgezogen. Wenn bei einer Aufgabe keine Antwort oder mehrere Antworten angekreuzt sind, gibt es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekommt 30 Punkte als Startpunktzahl, wodurch eine negative Gesamtpunktzahl ausgeschlossen ist. Die Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von M. Altmann, Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, K. Battaglia, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, R. Schelldorfer, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil
ISBN 978-3-9812144-6-8

Klassenstufen 7 und 8

1. Auf dem Jahrmarkt fährt Johanna einmal mit dem Karussell. Ihr Freund Aaron fährt 4-mal mit dem Karussell und bezahlt 6 Euro mehr als Johanna. Wie viel kostet eine Fahrt mit dem Karussell?

(**A**) 1 Euro (**B**) 2 Euro (**C**) 3 Euro (**D**) 4 Euro (**E**) 5 Euro

Lösung: Aaron hat mit dem Karussell 3 Fahrten mehr als Johanna gemacht. Diese 3 Fahrten haben zusammen 6 Euro gekostet, eine einzelne Fahrt also 6 Euro : 3 = 2 Euro.

2. $11{,}1 - 1{,}11 =$

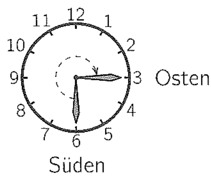
(**A**) 9,009 (**B**) 9,09 (**C**) 9,89 (**D**) 9,99 (**E**) 10

Lösung: Wir rechnen $11{,}1 - 1{,}11 = 9{,}99$.

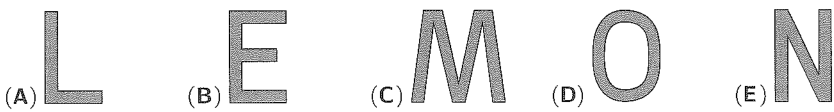
3. Als ich die alte Taschenuhr meines Großvaters neben die Landkarte auf den Tisch legte, zeigte der Minutenzeiger exakt nach Süden. Und als ich – nach weniger als einer Stunde – mit meinen Geographiehausaufgaben fertig war, zeigte er nach Osten. Wie viele Minuten waren vergangen?

(**A**) 45 (**B**) 40 (**C**) 36 (**D**) 30 (**E**) 15

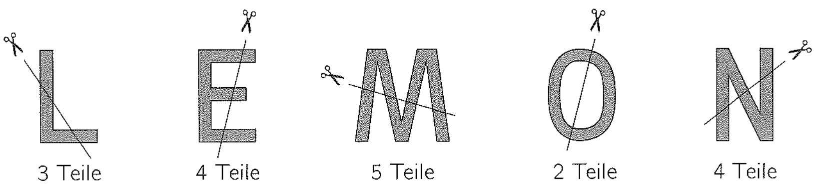
Lösung: Da weniger als eine Stunde vergangen ist, hat der Minutenzeiger von seiner Startrichtung „Süden" bis zu seiner Endrichtung „Osten" eine Dreiviertel-Umdrehung vollzogen. Dafür hat er eine Dreiviertelstunde, also 45 Minuten gebraucht.



4. Jeder der folgenden Buchstaben wird mit einem einzigen geraden Schnitt in so viele Teile wie möglich zerschnitten. Welcher der Buchstaben zerfällt in die meisten Teile?



Lösung: In den Bildern ist dargestellt, wie die Buchstaben zerschnitten werden können, damit sie in so viele Teile wie möglich zerfallen. Die Anzahl der Teile ist beim M am größten.



5. Von ihren 206 Sammelkarten nimmt Marina 6 Karten zum Tauschen in die Schule mit. In der Pause kann sie 5 dieser Karten tauschen, jede gegen 3 andere. Wie viele Karten hat Marina jetzt?

(**A**) 213 (**B**) 214 (**C**) 215 (**D**) 216 (**E**) 217

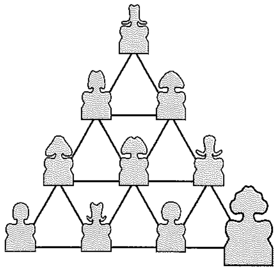
Lösung: Marina lässt $206 - 6 = 200$ Karten zu Hause. Eine der 6 Karten, die sie in die Schule mitnimmt, bekommt sie nicht getauscht. Bei den anderen 5 Karten ist sie erfolgreich, für jede dieser 5 bekommt sie 3 Karten, zusammen also $5 \cdot 3 = 15$ Karten. Damit hat Marina jetzt insgesamt $200 + 1 + 15 = 216$ Karten.

6. Wenn $15 \cdot 16 = 20 \cdot x$ ist, für welche Zahl steht dann x?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

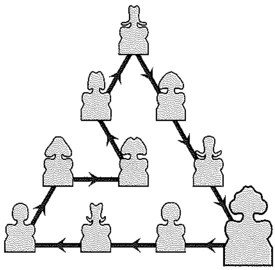
Lösung: Die Lösung können wir finden, wenn wir 15 und 16 multiplizieren und dann durch 20 teilen. Wir können diese Rechnerei vermeiden, wenn wir die auftretenden Zahlen in Primfaktoren zerlegen: $15 \cdot 16 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x = 20 \cdot x$. Also ist $x = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

7. Im „Dichterpark" stehen Skulpturen an den Wegkreuzungen. Von einer Kreuzung zur nächsten sind es jeweils 50 m. Ich beginne meinen Spaziergang an der größten Skulptur, zu der ich zurückkehre, nachdem ich alle Skulpturen angesehen habe. Wie lang ist der kürzeste Weg, den ich gehen kann?



(**A**) 600 m (**B**) 550 m (**C**) 500 m (**D**) 450 m (**E**) 400 m

Lösung: Wenn ich zu jeder der 10 Skulpturen hingehe, um sie anzusehen, und danach zur größten Skulptur zurückkehre, muss ich zu jeder der Skulpturen mindestens einmal hinlaufen. Ich muss somit mindestens so viele Wegabschnitte gehen, wie es Skulpturen gibt, und das sind 10. Der rechts abgebildete Weg ist ein Beispiel für einen Weg, der aus nur 10 Wegabschnitten besteht. Folglich ist der kürzeste mögliche Weg $10 \cdot 50\,\text{m} = 500\,\text{m}$ lang.



8. Die 5 höflichen Affen Bongo, Cili, Doro, Eddie und Fips schlendern in dieser Reihenfolge hintereinander zum Zirkuszelt. Jeder ist verrückt danach, den anderen auf dem Weg eine der 8 Türen aufzuhalten. Jede Tür wird vom ersten Affen in der Reihe aufgehalten. Dieser geht dann als letzter in der Reihe weiter, nachdem die anderen Affen der Reihe nach durch die Tür gegangen sind. Welcher Affe hält die 8. Tür auf?

(**A**) Bongo (**B**) Cili (**C**) Doro (**D**) Eddie (**E**) Fips

Lösung: Bongo hält die 1. Tür auf, Cili die 2., Doro die 3., Eddie die 4., Fips die 5., dann wieder Bongo die 6., Cili die 7., und schließlich hält Doro die 8. Tür auf.

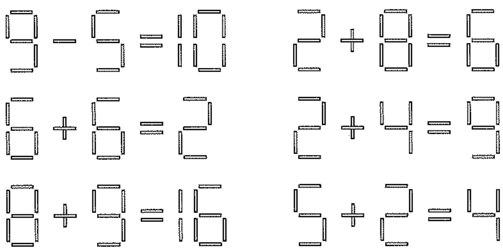
9. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) $\frac{1503}{2012} = \frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1503}{2012} = \frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1503}{2012} > \frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{1503}{2012} = \frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{1503}{2012} < \frac{3}{4}$

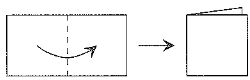
Lösung: Wer ein gutes Gefühl für Brüche hat, kann bemerken, dass $\frac{1503}{2012}$ sehr nahe bei $\frac{3}{4}$ liegt, denn $\frac{1503}{2012} \approx \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$. Da $2012 : 4 = 503$ ist, erweitern wir $\frac{3}{4}$ mit 503 und erhalten $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 503}{4 \cdot 503} = \frac{1509}{2012}$. Nun sehen wir: $\frac{1503}{2012} < \frac{1509}{2012} = \frac{3}{4}$. **(E)** ist richtig.

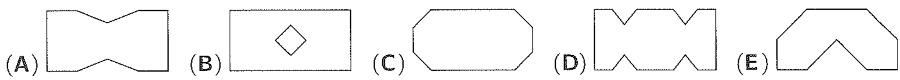
KAENGURU-Streichholzknobelei

Die sechs „Streichholzgleichungen" sind alle falsch. Doch in jeder dieser Gleichungen genügt das Umlegen eines einzigen Hölzchens, damit eine richtige Gleichung entsteht. Welche Hölzchen müssen umgelegt werden und wie sehen die richtigen Gleichungen aus?

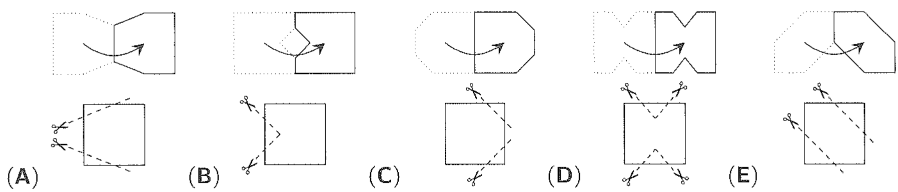


10. Ulla faltet ein rechteckiges Blatt Papier einmal auf die Hälfte (siehe Bild). Dann macht sie mit einer Schere 2 gerade Schnitte und faltet das Blatt wieder auseinander. Wie sieht das Blatt dann sicher *nicht* aus?

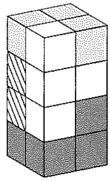


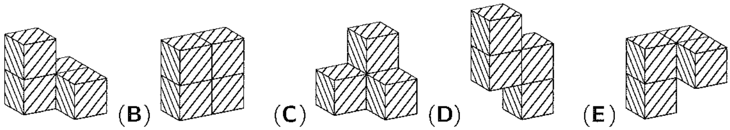


Lösung: In Gedanken falten wir die Blätter in den fünf Antwortmöglichkeiten zusammen und überlegen, wie die Muster entstanden sein könnten. Bei **(D)** reichen zwei gerade Schnitte nicht aus.



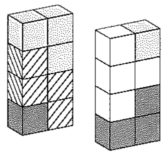
11. Der abgebildete Quader besteht aus 4 verschieden gefärbten Teilen, die aus jeweils 4 Würfeln zusammengesetzt sind. Welche Form hat das hintere, gestreifte Teil?





(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Im Bild rechts sind die vordere und hintere Schicht des Quaders abgebildet. Das gestreifte Teil hat die Form (**D**).



12. Ich bilde zwei 4-stellige Zahlen, wobei ich jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 genau einmal verwende. Dann addiere ich die beiden Zahlen. Welche größte mögliche Summe kann ich erhalten?

(**A**) 17103 (**B**) 16173 (**C**) 16083 (**D**) 14085 (**E**) 13086

Lösung: Die Summe der beiden 4-stelligen Zahlen wird dann am größten, wenn die beiden größten Ziffern, 8 und 7, an den Tausenderstellen stehen, die nächstkleineren Ziffern, 6 und 5, an den Hunderterstellen, 4 und 3 an den Zehnerstellen und 2 und 1 an den Einerstellen. Dafür gibt es mehrere mögliche Zahlenpaare, zum Beispiel 7531 und 8642 oder 8532 und 7641. Stets ist die größtmögliche Summe $8000 + 7000 + 600 + 500 + 40 + 30 + 2 + 1 = 16173$.

13. Doreen lässt einen Gummiball aus einer Höhe von 2 m auf einen glatten Parkettboden fallen, von wo er wieder in die Höhe springt. Der Ball erreicht nach jedem Aufprall 3/4 der Höhe vor diesem Aufprall. Wie oft springt der Ball zurück in eine Höhe, die größer als 1 m ist?

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal

Lösung: Nach dem ersten Aufprall erreicht der Gummiball eine Höhe von $\frac{3}{4} \cdot 2\,\text{m} = \frac{6}{4}\,\text{m}$, nach dem zweiten $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\,\text{m} = \frac{18}{16}\,\text{m}$, nach dem dritten $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\,\text{m} = \frac{54}{64}\,\text{m}$, usw. Die Höhe ist genau dann größer als 1 m, wenn der Zähler des entsprechenden Bruchs größer als der Nenner ist. Das ist für die ersten beiden Brüche $\frac{6}{4}$ und $\frac{18}{16}$ der Fall, aber $\frac{54}{64}$ ist kleiner als 1, wie auch jeder weitere Bruch, der ja nur $\frac{3}{4}$ des vorherigen ist. Der Gummiball springt nur 2-mal höher als 1 m.

14. Mein kleiner Bruder Willi freut sich über den Würfelturm, den er gerade aus 3 Würfeln gebaut hat. Die Höhe der Würfel wird von unten nach oben um jeweils 2 cm kleiner, und der größte Würfel ist genauso hoch wie die beiden anderen zusammen. Wie hoch ist Willis Würfelturm?

(**A**) 6 cm (**B**) 8 cm (**C**) 10 cm (**D**) 12 cm (**E**) 14 cm

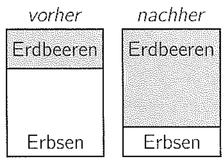
Lösung: Bezeichnen wir mit x die Höhe (in cm) des kleinsten Würfels, dann ist die des mittleren Würfels $x + 2$ und die des größten Würfels $x + 4$. Laut Aufgabe gilt $x + (x + 2) = x + 4$, also $2x + 2 = x + 4$. Wir lösen nach x auf und erhalten $x = 2$. Der kleinste Würfel ist also 2 cm hoch, die anderen folglich 4 cm und 6 cm. Die Höhe des Turms beträgt $2\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

15. Taro hat entdeckt, dass in seiner 8-stelligen Telefonnummer keine Ziffer doppelt so groß ist wie eine der anderen Ziffern. Wie viele *verschiedene* Ziffern kann Taros Telefonnummer höchstens haben?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

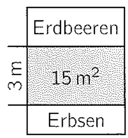
Lösung: Zuerst bilden wir *alle* Paare verschiedener Ziffern, bei denen die eine Ziffer doppelt so groß ist wie die andere: (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8). Keines dieser Paare kann in Taros Telefonnummer enthalten sein. Von den zwei Ziffern, aus denen jeder dieser Paare besteht, darf die Telefonnummer also *höchstens eine* enthalten. Insbesondere darf von den Ziffern 3 und 6 höchstens eine enthalten sein. Von den Ziffern 1, 2, 4, und 8 können nicht alle vier vorkommen, und auch nicht drei, da die fehlende Ziffer in jedem der drei Paare (1; 2), (2; 4) und (4; 8) vorkommen müsste. Zwei der Ziffern 1, 2, 4 und 8 sind möglich, wenn wir sie geschickt wählen (1 und 4, 1 und 8 oder 2 und 8). Von 3 und 6 haben wir also höchstens eine Ziffer, von den Ziffern 1, 2, 4 und 8 höchstens 2. Alle anderen Ziffern, 0, 5, 7 und 9, können zu Taros Telefonnummer gehören. Insgesamt kommen höchstens 7 verschiedene Ziffern vor. Taros 8-stellige Telefonnummer könnte also beispielsweise 91465570 oder 80238975 sein. *Eine* Ziffer muss doppelt vorkommen, das kann jede außer der 0 sein, denn es gilt ja $0 = 2 \cdot 0$.

16. Ben hat in seinem Erdbeer-Erbsen-Beet den rechteckigen Erdbeer-Teil zu einem Quadrat vergrößert, indem er eine Seite dieses Teils um 3 m verlängert hat. Die Fläche des Erbsen-Teils ist dadurch um 15 m^2 kleiner geworden. Welchen Flächeninhalt hatte der Erdbeer-Teil vor der Änderung?



(**A**) 5 m^2 (**B**) 6 m^2 (**C**) 10 m^2 (**D**) 15 m^2 (**E**) 18 m^2

Lösung: Wir zeichnen die Trennlinie zwischen Erdbeer-Teil und Erbsen-Teil vor der Änderung in das Bild. Von dem Rechteck, das zum Erdbeer-Teil dazugekommen ist, kennen wir eine Seitenlänge und die Fläche. Daraus können wir die andere Seitenlänge, die zugleich die Breite des gesamten Beetes ist, ermitteln. Sie beträgt $15\,\text{m}^2 : 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$. Da der Erdbeer-Teil nach der Änderung die Form eines Quadrats hat, ist die andere Seite dieses Teils ebenfalls 5 m lang, vor der Änderung also $5\,\text{m} - 3\,\text{m} = 2\,\text{m}$. Der Flächeninhalt des Erdbeer-Teils betrug daher vor der Änderung $2\,\text{m} \cdot 5\,\text{m} = 10\,\text{m}^2$.



17. Mia schreibt fünf Zahlen in eine Reihe, als erste eine 2 und als letzte eine 15:

2		?		15

Die Summe der ersten drei Zahlen soll 10 sein, die Summe der mittleren drei Zahlen 20 und die Summe der letzten drei Zahlen 30. Welche Zahl steht in der Mitte?

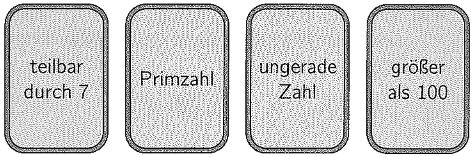
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Differenz zwischen der Summe der ersten drei Zahlen und der mittleren drei Zahlen entspricht dem Unterschied zwischen der ersten und der vierten Zahl in der Reihe (die zweite und dritte Zahl kommen ja in beiden Summen vor). Die vierte Zahl in der Reihe muss folglich um 10 größer sein als 2, ist also die 12. Die mittlere Zahl können wir nun aus der Summe der letzten drei Zahlen ableiten: $30 - 15 - 12 = 3$. Die vollständige Reihe ist:

2	5	3	12	15

Ähnlich ist Aufgabe 6 in Klassenstufe 11–13.

18. Die abgebildeten Karten sind auf der Rückseite so mit den Zahlen 2, 5, 7 und 12 beschriftet, dass die jeweilige Zahl die auf der Karte genannte Eigenschaft *nicht* besitzt. Welche Zahl steht auf der Rückseite der Karte mit der Beschriftung „größer als 100"?



(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 12 (**E**) Es gibt mehr als eine Möglichkeit.

Lösung: Wir bezeichnen die Karten von links nach rechts mit A, B, C und D und notieren für jede der Zahlen 2, 5, 7 und 12, auf welchen Karten diese stehen könnte, damit die angegebene Eigenschaft gerade *nicht* zutrifft:

2: A, C oder D 5: A oder D 7: nur D 12: A, B, C oder D

Die Zahl 7 kann nur auf der letzten Karte mit der Beschriftung „größer als 100" stehen, das ist die gesuchte Zahl. Die vollständige Zuordnung können wir schnell ablesen: A–5, B–12, C–2, D–7.

19. Einer der folgenden Ausdrücke ändert seinen Wert nicht, wenn die Zahl 8 durch eine beliebige andere positive Zahl ersetzt wird, aber jede 8 durch die gleiche. Welcher?

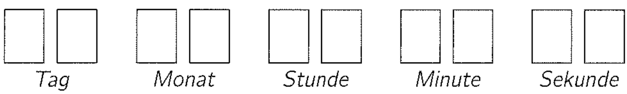
(**A**) $(8+8):8+8$ (**B**) $8\cdot(8+8):8$ (**C**) $8+8-8+8$
(**D**) $(8+8-8)\cdot 8$ (**E**) $(8+8-8):8$

Lösung: Eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, besteht darin, für jeden der fünf Ausdrücke den Wert zu berechnen, dann eine beliebige andere Ziffer anstelle der 8 einzusetzen (zum Beispiel 1), diesen Wert zu berechnen und anschließend zu vergleichen. Wir tun dies beispielhaft für (**A**): $(8+8):8+8=16:8+8=2+8=10$ und $(1+1):1+1=2:1+1=2+1=3$. (**A**) ist also nicht die Lösung. Dies müssten wir für die anderen Lösungsvorschläge ebenso tun, und wenn wir für *nur* einen der fünf Ausdrücke dasselbe Ergebnis erhalten, muss dieser – nach den Regeln des Känguru-Wettbewerbs – der gesuchte sein.

Einfacher ist es, die 8 durch eine Variable, zum Beispiel x, zu ersetzen, da der Wert eines der Ausdrücke unabhängig davon sein soll, durch welche Zahl die 8 ersetzt wird. Wir erhalten: (**A**) $(x+x):x+x=2x:x+x=2+x$, (**B**) $x\cdot(x+x):x=x\cdot 2x:x=2x$, (**C**) $x+x-x+x=2x$, (**D**) $(x+x-x)\cdot x=x\cdot x=x^2$, (**E**) $(x+x-x):x=x:x=1$. Nur beim letzten Ausdruck ist der Wert unabhängig von x, (**E**) ist die Lösung.

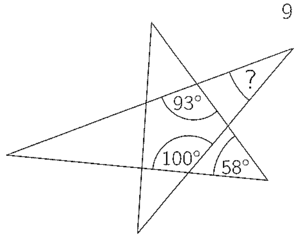
KAENGURU-Datumsrätsel

In der abgebildeten Anzeige geben 10 Ziffern den Tag, den Monat, die Stunde, die Minute und die Sekunde an:

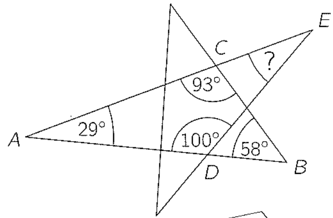


Wann sind zum ersten Mal im Jahr alle diese Ziffern verschieden? Und wann zum letzten Mal?

20. Wie groß ist der mit dem Fragezeichen gekennzeichnete Winkel? (Abbildung *nicht* maßstabsgerecht)

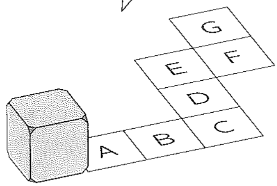


(**A**) 51° (**B**) 55° (**C**) 56° (**D**) 60° (**E**) 65°

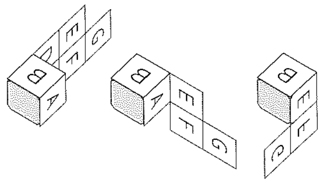


Lösung: Im Dreieck ABC (siehe Bild) können wir den Innenwinkel bei A berechnen: $180° - 58° - 93° = 29°$. Der gesuchte Winkel ist nun der einzige unbekannte Innenwinkel im Dreieck ADE. Er ist $180° - 100° - 29° = 51°$ groß.

21. Ein Würfel wird über seine Kanten auf den abgebildeten Feldern von A nach G gerollt. Auf genau zwei Feldern kommt der Würfel dabei mit derselben Seitenfläche zu liegen. Das sind die Felder



(**A**) B und E (**B**) B und F (**C**) A und E
(**D**) B und G (**E**) A und F



Lösung: Wir stellen uns vor, dass die bezeichneten Felder auf einen Papierstreifen gezeichnet sind. Wir halten den Würfel in Gedanken fest und wickeln den Streifen um den Würfel, wie es im Bild rechts zu sehen ist (dabei ist der Würfel leicht gedreht). Feld A liegt auf der rechten Seite des Würfels, B oben und C links. D bedeckt die hintere Fläche, E die rechte (genauso wie A) und schließlich F die untere und G die vordere. Nur auf A und E kommt dieselbe Seitenfläche des Würfels zu liegen, wenn er über die Felder gerollt wird.

22. Im fernen Polygonien haust die Hexe Hexagona. Erst gestern hat sie das Quadrat Quentin verzaubert. Sagt Quentin eine wahre Aussage, wird jede seiner Seiten 2 cm kürzer. Bei einer falschen Aussage verdoppelt sich sein Umfang. Im Moment sind Quentins Seiten jeweils 8 cm lang, er traut sich kaum zu sprechen. Welche Seitenlänge kann das Quadrat Quentin nach 4 Aussagen, von denen 2 wahr und 2 falsch sind, höchstens haben?

(**A**) 28 cm (**B**) 26 cm (**C**) 22 cm (**D**) 20 cm (**E**) 16 cm

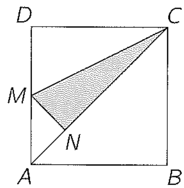
Lösung: Eine Verdopplung des Umfangs eines Quadrats ist gleichbedeutend mit einer Verdopplung jeder Seitenlänge. Wenn bei einer wahren und einer falschen Aussage die Verkürzung der Seitenlänge um 2 cm vor der Verdopplung stattfindet, dann ist die resultierende Seitenlänge um $2 \cdot 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$ kürzer als das Doppelte der ursprünglichen Seitenlänge. Wird hingegen erst verdoppelt und dann verkürzt, dann ist die resultierende Seitenlänge nur um 2 cm kürzer als das Doppelte der ursprünglichen Seitenlänge. Die größte mögliche Seitenlänge wird bei 4 Aussagen – 2 wahren und 2 falschen – also dann erreicht, wenn zuerst 2-mal verdoppelt und dann 2-mal verkürzt wird. Die größte mögliche Seitenlänge beträgt folglich $8\,\text{cm} \cdot 2 \cdot 2 - 2\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 28\,\text{cm}$.

23. Am Flughafen läuft Lilly gleichzeitig mit ihrer elektrischen Schildkröte Ida auf das lange Laufband. Lilly bleibt stehen, während Ida mit 1 km/h weiterläuft. Auf einem Schild liest Lilly die technischen Details des Laufbands: „Länge: 400 m, Geschwindigkeit: 7 km/h". Wie groß ist der Abstand zwischen Lilly und Ida, wenn Ida das Ende des Laufbands erreicht hat?

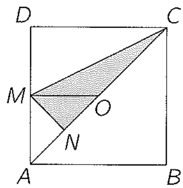
(**A**) 25 m (**B**) 50 m (**C**) 70 m (**D**) 75 m (**E**) 100 m

Lösung: Wenn die Schildkröte Ida auf dem Laufband weiterläuft, ist ihre Geschwindigkeit die Summe aus ihrer eigenen und der des Laufbands, also 8 km/h. Lilly, die auf dem Laufband steht, bewegt sich hingegen genau mit der Geschwindigkeit des Laufbands fort, also mit 7 km/h. Bei gleichförmigen Bewegungen sind Geschwindigkeit und Weg direkt proportional zueinander ($s = v \cdot t$). Das heißt, wenn Ida das Ende des Laufbands erreicht hat, verhält sich der zurückgelegte Weg s von Lilly zu den 400 m von Ida genauso wie sich ihre Geschwindigkeiten zueinander verhalten, 7 : 8. Lilly hat folglich $s = 400\,\mathrm{m} \cdot 7/8 = 350\,\mathrm{m}$ zurückgelegt, wenn Ida das Ende des Laufbands erreicht, und Ida ist Lilly damit $400\,\mathrm{m} - 350\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}$ voraus.

24. Im Quadrat $ABCD$ ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Der Punkt N liegt so auf der Diagonalen $\overline{AC}$, dass die Strecke $\overline{MN}$ senkrecht auf $\overline{AC}$ steht. Welchen Anteil am Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ hat das grau markierte Dreieck MNC?



(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{1}{5}$ (**C**) $\frac{7}{36}$ (**D**) $\frac{3}{16}$ (**E**) $\frac{7}{40}$



Lösung: Es sei Q der Flächeninhalt des Quadrats. Der Flächeninhalt von $\triangle ACD$ ist $\frac{1}{2}Q$. Da M der Mittelpunkt von $\overline{DA}$ ist, haben die Dreiecke $\triangle DMC$ und $\triangle MAC$ denselben Flächeninhalt $\frac{1}{4}Q$. Der Punkt O ist der Mittelpunkt des Quadrats, also ist $\overline{MO}$ parallel zu $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ und hat von diesen beiden Quadratseiten denselben Abstand. Folglich haben die Dreiecke $\triangle MOC$ und $\triangle OMA$ denselben Flächeninhalt $\frac{1}{8}Q$. Da $\overline{MN}$ senkrecht auf $\overline{AO}$ steht, ist der Flächeninhalt von $\triangle OMN$ gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}Q = \frac{1}{16}Q$. Der Flächeninhalt des grauen Dreiecks $\triangle MNC$ ist somit $\frac{1}{8}Q + \frac{1}{16}Q = \frac{3}{16}Q$.

KAENGURU-Puzzelei

Die abgebildete Figur kann entlang der Linien in 4 Teile zerschnitten werden, so dass die 4 Teile alle dieselbe Form haben und sich aus den Buchstaben eines jeden Teils ein Begriff aus der Mathematik bilden lässt.
Wie sieht die Zerlegung aus, und welche vier Begriffe sind gesucht?

P	A	S	A	E	T
R	A	U	H	Z	N
T	A	B	T	R	P
Z	E	K	L	S	O

25. In Bärbels Backbuch stehen 30 leckere Rezepte. Die Hälfte der Rezepte ist eine Seite lang, die anderen, etwas komplizierteren sind 2 Seiten lang. Leerseiten gibt es nicht, und jedes Rezept beginnt auf einer neuen Seite. Bärbel fällt auf, dass viele Rezepte auf einer Seite mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen, das erste auf Seite 1. Welches ist die größte mögliche Anzahl von Rezepten, die auf einer Seite mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen können?

(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 20 (**D**) 22 (**E**) 23

Lösung: Steht ein Ein-Seiten-Rezept auf einer Seite mit gerader (bzw. ungerader) Seitenzahl, dann beginnt das nächste Rezept mit einer ungeraden (bzw. geraden) Seitenzahl. Ein Rezept, das auf ein Zwei-Seiten-Rezept folgt, beginnt mit einer geraden (bzw. ungeraden) Seitenzahl, wenn das Zwei-Seiten-Rezept mit einer geraden (bzw. ungeraden) Seitenzahl begann. Bei Ein-Seiten-Rezepten wechselt also die Seitenzahl zwischen gerade und ungerade – bei Zwei-Seiten-Rezepten nicht. Folglich stehen die 15 Ein-Seiten-Rezepte – unabhängig davon, wo genau die Zwei-Seiten-Rezepte stehen – abwechselnd auf Seiten mit ungerader bzw. gerader Seitenzahl. Da das Buch auf Seite 1 beginnt, stehen 8 Ein-Seiten-Rezepte auf einer Seite mit ungerader Seitenzahl und 7 auf einer Seite mit gerader Seitenzahl.

Die Anzahl der Rezepte, die mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen, wird nun möglichst groß, wenn *alle* 15 Zwei-Seiten-Rezepte mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen. Das ist zum Beispiel möglich, wenn alle diese Rezepte gleich zum Anfang im Buch stehen.

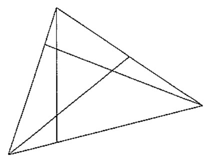
Insgesamt können höchstens $8 + 15 = 23$ Rezepte mit einer ungeraden Seitenzahl beginnen.

26. Wie groß ist die Summe aller 3-stelligen Zahlen, bei denen sowohl die ersten beiden Ziffern als auch die letzten beiden Ziffern eine 2-stellige Quadratzahl bilden?

(**A**) 1177 (**B**) 1344 (**C**) 1629 (**D**) 1829 (**E**) 1993

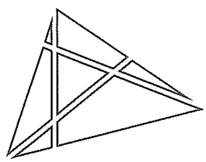
Lösung: Jede 3-stellige Zahl, die der Bedingung der Aufgabe genügt, gehört zu einem Paar 2-stelliger Quadratzahlen, bei denen die Einerstelle der ersten Zahl und die Zehnerstelle der zweiten Zahl übereinstimmen. Die 2-stelligen Quadratzahlen sind 16, 25, 36, 49, 64 und 81, die zur Aufgabe passenden Paare sind (16; 64), (36; 64), (64; 49) und (81; 16). Die Summe der zugehörigen 3-stelligen Zahlen ist $164 + 364 + 649 + 816 = 1993$.

27. Ein Dreieck wird durch 3 Strecken in 3 Vierecke und 4 Dreiecke zerlegt. Die Umfänge der 3 Vierecke ergeben zusammen 25 cm, die der 4 Dreiecke zusammen 20 cm, und der Umfang des Ausgangsdreiecks beträgt 19 cm (Abbildung *nicht* maßstabsgerecht). Wie lang sind die 3 Strecken zusammen?



(**A**) 11 cm (**B**) 12 cm (**C**) 13 cm (**D**) 14 cm (**E**) 15 cm

Lösung: Rechts sind die Umfänge der Dreiecke und Vierecke abgesetzt gezeichnet. Wir sehen, dass die Summe der sieben Umfänge den Umfang des Ausgangsdreiecks einmal enthält und die Summe der 3 Streckenlängen im Inneren doppelt. Die Gesamtlänge der 3 inneren Strecken ist folglich die Hälfte der Summe der 7 Umfänge, von der der Umfang des Ausgangsdreiecks abzuziehen ist, also $1/2 \cdot (25\,\text{cm} + 20\,\text{cm} - 19\,\text{cm}) = 13\,\text{cm}$.



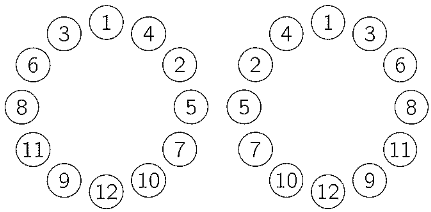
28. David ordnet die Zahlen von 1 bis 12 so im Kreis an, dass sich benachbarte Zahlen entweder um 2 oder um 3 unterscheiden. Welche Zahlen sind dann sicher Nachbarn?

(**A**) 5 und 8 (**B**) 3 und 5 (**C**) 7 und 9 (**D**) 4 und 6 (**E**) 6 und 8

Lösung: Wir versuchen, die Zahlen nach Davids Regel anzuordnen und beginnen dabei mit den Zahlen, für die nur sehr wenige Nachbarn in Frage kommen. Neben 1 können nur 3 und 4 stehen, 2 kann nur die Nachbarn 4 und 5 haben. Die Anordnung der ersten fünf Zahlen ist also 3–1–4–2–5 bzw. umgekehrt 5–2–4–1–3. Als Nachbarn der 3 kommen nur 1, 5 und 6 in Frage. Da 1 und 5 nicht mehr als Nachbarn zur Verfügung stehen, muss neben der 3 die 6 stehen. Wir erhalten die einzig mögliche Anordnung 6–3–1–4–2–5 bzw. umgekehrt 5–2–4–1–3–6.

Da es für die beiden Randzahlen 5 und 6 mehrere Möglichkeiten gibt, wenden wir uns nun der 12 zu. Völlig analog können neben 12 nur 10 und 9 stehen, neben 11 nur 9 und 8. Für 10 kommen nur 12, 8 und 7 in Frage, von denen jedoch 12 und 8 schon vergeben sind. Somit ist die Anordnung der sechs größten der zwölf Zahlen klar: 7–10–12–9–11–8 bzw. umgekehrt 8–11–9–12–10–7.

Nun gilt es, die beiden Zahlenreihen aus sechs Zahlen zu einem Kreis zu verknüpfen. Das ist nach Davids Bedingung nur möglich, wenn 5 mit 7 verbunden wird und 6 mit 8. Folglich ist (**E**) die Lösung. Insgesamt gibt es also nur zwei mögliche Anordnungen der 12 Zahlen, wobei diese beiden Möglichkeiten zueinander gespiegelt sind.

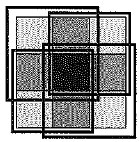


29. In das 3×3-Feld sollen positive rationale Zahlen so geschrieben werden, dass das Produkt der 3 Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich 1 ist und das Produkt der 4 Zahlen in jedem 2×2-Teilquadrat gleich 2 ist. Welche Zahl gehört ins mittlere Feld?

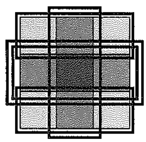
	?	

(**A**) 16 (**B**) 8 (**C**) 4 (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{8}$

Lösung: Wir versuchen, die Zahlen geschickt zu multiplizieren – zeilenweise, spaltenweise oder je 2×2-Teilquadrat. Zuerst bilden wir das Produkt P_1 der vier 2×2-Teilquadrate: $P_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. In P_1 stecken als Faktoren die Zahlen in den Ecken des 3×3-Quadrats je einmal, die restlichen Zahlen an den Rändern je zweimal und die gesuchte Zahl in der Mitte viermal (siehe Bild oben).



Nun bilden wir ein ähnliches Produkt P_2 mit Hilfe der Zeilen und Spalten und versuchen, die Faktoren von P_1 zu rekonstruieren. Multiplizieren wir die drei Zeilen, dann haben wir jede der Zahlen bereits einmal. Dann multiplizieren wir noch mit der mittleren Zeile und der mittleren Spalte, um auf die richtige Anzahl der Randzahlen zu kommen (siehe Bild Mitte). Das gebildete Produkt P_2 ist natürlich gleich 1.



Die Zahlen in den Ecken und am Rand sind in jedem der beiden Produkte P_1 und P_2 gleich oft als Faktoren vertreten, aber die gesuchte Zahl in der Mitte kommt im ersten Produkt viermal vor, im zweiten Produkt nur dreimal. Somit gilt $P_1 = ? \cdot P_2$, also $16 = ? \cdot 1$. Die gesuchte Zahl ist 16.

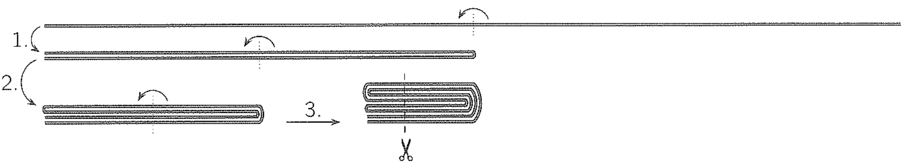
Das untere Bild zeigt das vollständig ausgefüllte Quadrat.

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

30. Ein dünner Strick wird 3-mal hintereinander auf die Hälfte gefaltet. Dann wird das entstandene Bündel mit einem Schnitt zerteilt. Unter den entstehenden Stücken gibt es ein 4 cm langes und ein 9 cm langes Stück. Welche der folgenden Längen kann *nicht* die Länge des ursprünglichen Stricks sein?

(**A**) 52 cm (**B**) 68 cm (**C**) 72 cm
(**D**) 88 cm (**E**) Jede dieser vier Längen ist möglich.

Lösung: Die folgende Skizze zeigt, wie der Strick gefaltet wird:



Durch das Durchschneiden des Bündels an einer beliebigen Stelle entstehen mehrere, verschieden lange Stücke. Aus dem Bild erkennen wir, dass auf der rechten Seite des Schnitts 4 gleich lange Stücke entstehen, ihre Länge bezeichnen wir mit x. Auf der linken Seite entstehen zwei kurze Stücke der Länge y und 3 doppelt so lange Stücke der Länge $z = 2y$. Damit können y und z nicht das 4 cm und das 9 cm lange Stück sein. Nun gibt es *genau 4* Möglichkeiten für die Maße 4 cm und 9 cm: eine dieser Längen ist x, die andere entweder y oder z. Die vier Möglichkeiten und die Gesamtlänge des Stricks $4x + 2y + 3z = 4x + z + 3z = 4(x + z)$ sind in der Tabelle aufgelistet:

x	y	z	Gesamtlänge des Stricks
4 cm	**9 cm**	18 cm	$4(x+z) = 4(4\,\text{cm} + 18\,\text{cm}) = 4 \cdot 22\,\text{cm} = 88\,\text{cm}$
4 cm	4,5 cm	**9 cm**	$4(x+z) = 4(4\,\text{cm} + 9\,\text{cm}) = 4 \cdot 13\,\text{cm} = 52\,\text{cm}$
9 cm	**4 cm**	8 cm	$4(x+z) = 4(9\,\text{cm} + 8\,\text{cm}) = 4 \cdot 17\,\text{cm} = 68\,\text{cm}$
9 cm	2 cm	**4 cm**	$4(x+z) = 4(9\,\text{cm} + 4\,\text{cm}) = 4 \cdot 13\,\text{cm} = 52\,\text{cm}$

Die Länge 72 cm ist nicht möglich.

Klassenstufen 9 und 10

1. Wir beginnen mit der Bruchrechnung des Tages: Am 15.3.2012 rechnen wir $\frac{15}{3} + \frac{20}{12} =$

(**A**) $\frac{35}{15}$ (**B**) $\frac{15}{12}$ (**C**) $\frac{20}{3}$ (**D**) $\frac{35}{12}$ (**E**) $\frac{10}{3}$

Lösung: Das Ergebnis der „Datumsrechnung" ist $\frac{15}{3} + \frac{20}{12} = \frac{15}{3} + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$.

2. Als ich die alte Taschenuhr meines Großvaters neben die Landkarte auf den Tisch legte, wies der Minutenzeiger exakt nach Nordost. Und als ich – nach weniger als einer Stunde – mit meinen Geographiehausaufgaben fertig war, wies er nach Nordwest. Wie viele Minuten waren vergangen?

(**A**) 45 (**B**) 42 (**C**) 40 (**D**) 36 (**E**) 30

Lösung: Die Richtung Nordost ist die Winkelhalbierende der senkrecht aufeinander stehenden Himmelsrichtungen Nord und Ost. Ebenso ist die Richtung Nordwest die Winkelhalbierende der senkrecht aufeinander stehenden Himmelsrichtungen Nord und West. Nordost und Nordwest stehen also senkrecht aufeinander. Der Winkel, den der Uhrzeiger in weniger als einer Stunde von Nordost bis Nordwest zurücklegt, ist also 270°. Dem entsprechen 45 Minuten.

KAENGURU-Sechser-Kryptogramme

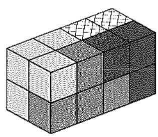
In den abgebildeten Kryptogrammen sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Addition entsteht. Dabei stehen gleiche Buchstaben für die gleiche Ziffer, verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern.

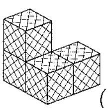
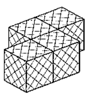
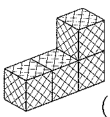
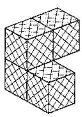
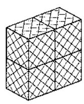
Eines der Kryptogramme ist lösbar, das andere nicht! Warum? Wer findet für das lösbare mehr als nur eine Lösung?

```
    D R E I
 +  D R E I
 ----------
  S E C H S

    Z W E I
 +  V I E R
 ----------
  S E C H S
```

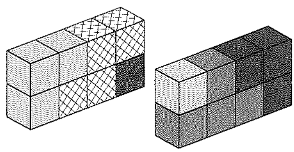
3. Der Quader rechts besteht aus vier verschieden bemalten Bausteinen, jeder dieser Bausteine aus vier Würfeln. Wie sieht der gemusterte Baustein aus?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Abbildung zeigt die vordere und die hintere Schicht des Quaders. Der gesuchte Baustein ist (**B**).

Sehr ähnlich ist Aufgabe 11 in Klassenstufe 7/8.



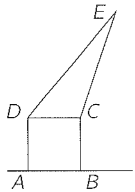
4. $111{,}111 - 11{,}1111 =$

(A) 90,9099 **(B)** 99,0009 **(C)** 99,0909 **(D)** 99,9999 **(E)** 100

Lösung: Wir rechnen schriftlich:

$$\begin{array}{r} 111{,}1110 \\ -\ 11{,}1111 \\ \hline 99{,}9999 \end{array}$$

5. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 4 cm. Das Dreieck DCE hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat. Welchen Abstand hat E von der Geraden durch A und B?



(A) 8 cm **(B)** $(4+\sqrt{3})$ cm **(C)** $10\sqrt{2}$ cm
(D) 12 cm **(E)** Das hängt von der Lage von E ab.

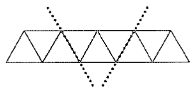
Lösung: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist das Produkt aus Grundlinie und Höhe geteilt durch 2. Wir wählen als Grundlinie des Dreiecks DCE die Quadratseite $\overline{DC}$. Damit der Flächeninhalt gleich dem des Quadrats ist, muss also die Höhe doppelt so groß sein wie eine Quadratseite. Der Abstand von E zur Geraden AB ist demzufolge $4\,\text{cm} + 2\cdot 4\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

6. Wenn die Summe der Ziffern einer 6-stelligen Zahl 5 ist, dann ist das Produkt dieser Ziffern gleich

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 5 **(D)** $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$ **(E)** $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$

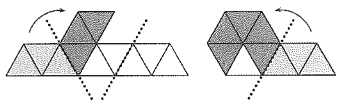
Lösung: Wenn in einer 6-stelligen Zahl keine der Ziffern 0 ist, so ist die Summe der Ziffern mindestens 6. Da sie jedoch 5 sein soll, muss eine der Ziffern 0 sein und folglich ist das Produkt der Ziffern auch 0.

7. Ein Papierstreifen ist in gleichseitige Dreiecke aufgeteilt (s. Bild). Welche Figur entsteht, wenn der Streifen entlang der gestrichelten Linien gefaltet wird?



(A) ein Dreieck **(B)** ein Viereck **(C)** ein Fünfeck **(D)** ein Sechseck **(E)** ein Neuneck

Lösung: In der Abbildung ist der Faltprozess dargestellt. Es entsteht ein regelmäßiges Sechseck.



8. Vier der Terme **(A)** bis **(E)** ändern ihren Wert nicht, wenn die vier Achten durch vier andere positive, untereinander gleiche Zahlen ersetzt werden. Bei welchem Term ist dies *nicht* der Fall?

(A) $(8+8-8):8$ **(B)** $8+(8:8)-8$ **(C)** $8-(8:8)+8$
(D) $8:(8+8+8)$ **(E)** $8\cdot(8:8):8$

Lösung: In jedem der Terme setzen wir statt 8 die positive reelle Zahl a ein und vereinfachen: **(A)** $(a+a-a):a=1$, **(B)** $a+(a:a)-a=1$, **(C)** $a-(a:a)+a=2a-1$, **(D)** $a:(a+a+a)=\frac{1}{3}$, **(E)** $a\cdot(a:a):a=1$. Nur der Wert von **(C)** hängt von a ab, zum Beispiel ist $8-(8:8)+8=15$, aber $1-(1:1)+1=1\neq 15$. Also ist der Term **(C)** nicht von der Art, dass die Achten durch vier andere, untereinander gleiche Zahlen ersetzt werden können, ohne dass sich der Wert ändert.

Eine ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 19 gestellt.

9. Sebastian und Olivia haben für kurze Briefe eine Geheimschrift vereinbart. Zuerst wird dem A die 1, dem B die 2, dem C die 3 usw. zugeordnet, und anschließend die entsprechende Zahl mit 2 multipliziert und 9 addiert. So wird zum Beispiel aus dem F die Zahl $6 \cdot 2 + 9 = 21$. Heute früh fand Olivia in einer Nachricht von Sebastian: 25 | 19 | 33 | 42. Welches Wort ist hier verschlüsselt?

(**A**) HELD (**B**) HOLZ (**C**) HELM
(**D**) HOLD (**E**) Sebastian hat einen Fehler gemacht.

Lösung: Sebastian muss einen Fehler gemacht haben, denn jede Verschlüsselung eines Buchstabens ist eine ungerade Zahl, da sie ja durch Multiplikation einer natürlichen Zahl mit 2 entsteht, zu der die ungerade Zahl 9 addiert wird. 42 ist jedoch eine gerade Zahl.

10. Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, die an ihrer Hunderterstelle eine 3 haben und bei denen die Summe der anderen drei Ziffern ebenfalls 3 ist?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die gesuchten Zahlen haben alle die Form $\overline{a3bc}$ und es gilt $a + b + c = 3$ mit der Zusatzbedingung $a \neq 0$, denn sonst wäre die Zahl nicht vierstellig. Wir listen nun die möglichen Belegungen von a, b und c systematisch auf und schreiben dabei gleich die 4-stelligen Zahlen mit der 3 an der Hunderterstelle: 3300; 2310; 2301; 1320; 1302; 1311. Das sind 6 Möglichkeiten.

11. Wenn mein kleiner Bruder auf dem Tisch steht und meine Schwester auf dem Boden daneben, dann überragt er sie um 80 cm. Stellt sie sich dagegen auf diesen Tisch und er steht daneben auf dem Boden, dann beträgt der Unterschied sogar 1 m. Wie hoch ist unser Tisch?

(**A**) 70 cm (**B**) 75 cm (**C**) 80 cm (**D**) 85 cm (**E**) 90 cm

KAENGURU-Kreuz-und-Quer

Die folgenden Begriffe sind waagerecht, senkrecht oder diagonal in die Kästchen einzutragen. Begriff 1–2 beginnt bei 1 und endet in Kästchen 2, Begriff 2–3 beginnt bei 2 und endet bei 3, usw.

12		13	1	10		9
	6				5	
			2			
	7					8
11	3				4	14

1–2 Unendlichkeitsstelle einer Funktion; 2–3 Abk. für „Leuchtdiode"; 3–4 physikalische Anordnung aus zwei benachbarten gegensätzlichen Polen; 4–5 engl.: lang; 5–6 Bezugsfläche zur Vermessung der Erdfigur; 6–7 Abk. für „Disk Operating System"; 7–8 Ausschnitt aus einer Kreisfläche; 8–9 wirklich; 9–10 auf einer Geraden oder Ebene senkrecht stehende Gerade; 10–11 abwickelbare Fläche; 11–12 bedeutender Schweizer Mathematiker (1707–1783); 12–13 engl. Abk. für „Nur-Lese-Speicher"; 13–14 eingliedriger mathematischer Ausdruck.

Bei richtiger Eintragung der Begriffe ergeben die Buchstaben in den Kästchen 1,11,12,14 die Bezeichnung für den jüngsten Teil des Erdaltertums (Paläozoikum) und in den Kästchen 7,10,11,12 ein Raummaß für Holz.

Lösung: Setzen wir für die Höhe des Tischs t, für die Größe von Bruder und Schwester b bzw. s. Dann wissen wir, dass $b + t = s + 80\,\text{cm}$ und weiter $s + t = b + 100\,\text{cm}$. Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir $b + t + s + t = b + s + 180\,\text{cm}$ bzw. $2t = 180\,\text{cm}$, woraus $t = 90\,\text{cm}$ folgt.

12. Anela hat im Verlauf einer längeren Rechnung sowohl 128 als auch 193 durch dieselbe Zahl dividiert. Und beide Male hat sie den Rest 11 bekommen. „Dann weiß ich, durch welche Zahl du geteilt hast", sagt ihre Freundin Elisa. Es ist die

(**A**) 7 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 15 (**E**) 19

Lösung: Da der Rest bei Division von 128 durch eine nicht bekannte Zahl gleich jenem bei Division von 193 durch diese Zahl ist – nämlich 11 –, muss die Differenz $193 - 128 = 65$ durch diese nicht bekannte Zahl teilbar sein. Die möglichen Teiler von 65 sind 1, 5, 13 und 65, und da der Rest stets kleiner ist als die Zahl, durch die dividiert wird, kommen für die gesuchte Zahl nur noch 13 und 65 in Frage. Da jedoch $128 : 65 = 1$ Rest 63 ist, kann nur 13 die gesuchte Zahl sein. In der Tat gilt $128 : 13 = 9$ Rest 11 und $193 : 13 = 14$ Rest 11.

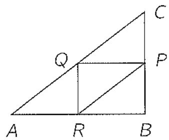
13. Unsere Schildkröten Trude, Rosi und Kasimir haben wir zu einem Schildkrötenrennen antreten lassen und dazu Prognosen über die Zielankunft abgegeben. Meine Mutter: „Entweder Trude oder Rosi wird Sieger." Mein Vater: „Wenn Rosi Zweite ist, gewinnt Kasimir." Mein Bruder: „Falls Rosi Letzte ist, ist Trude nicht Erste." Und ich: „Entweder Rosi oder Kasimir wird Zweiter." Nach dem Rennen stellten wir fest, dass wir alle vier richtig prognostiziert hatten. Wie war die Zielankunft?

(**A**) Trude vor Rosi vor Kasimir (**B**) Trude vor Kasimir vor Rosi (**C**) Kasimir vor Rosi vor Trude
(**D**) Rosi vor Kasimir vor Trude (**E**) Rosi vor Trude vor Kasimir

Lösung: Da die Mutter Recht hat, hat entweder Trude oder Rosi gewonnen. Angenommen, Trude ist Erste. Da der Vater auch Recht hat, kann Rosi nicht Zweite sein, da sonst Kasimir gewonnen hätte. Also wäre im Fall „Trude ist Erste" die Reihenfolge „Trude vor Kasimir vor Rosi", was der Aussage des Bruders widerspricht. Also muss nach der Aussage der Mutter der Fall „Rosi ist Erste" vorliegen. Aus meiner Aussage folgt nun, dass Kasimir Zweiter ist und Trude Letzte.

14. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 6 cm bzw. 8 cm lang sind. Die Punkte P, Q und R seien die Mittelpunkte der drei Dreiecksseiten. Welchen Umfang hat das Dreieck PQR?

(**A**) 10 cm (**B**) 12 cm (**C**) 15 cm (**D**) 20 cm (**E**) 24 cm



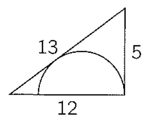
Lösung: Wir skizzieren das rechtwinklige Dreieck einschließlich der Seitenmittelpunkte, die wir miteinander verbinden. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind die vier durch das Verbinden entstandenen Dreiecke zueinander kongruent und ähnlich zum Ausgangsdreieck. Dessen dritte Seitenlänge errechnen wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Die Hypotenuse ist $\sqrt{6^2\,\text{cm}^2 + 8^2\,\text{cm}^2} = \sqrt{100\,\text{cm}^2} = 10\,\text{cm}$ lang. Da die Seitenlängen des Dreiecks PQR nur halb so lang sind wie jene des Ausgangsdreiecks, ist der gesuchte Umfang gleich $(3 + 4 + 5)\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

15. Am Ende der Woche gibt es bei unserem Gemüsehändler oft Sonderangebote. Am Freitagnachmittag war der Preis für Äpfel aus der Region um 10 % gegenüber dem Preis vom Donnerstag herabgesetzt. Und am Samstag war der Apfelpreis noch einmal um 20 % niedriger als am Freitagnachmittag. Um wie viel Prozent war der Preis am Samstag niedriger als am Donnerstag?

(**A**) um 30 % (**B**) um 28 % (**C**) um 27 % (**D**) um 25 % (**E**) um 24 %

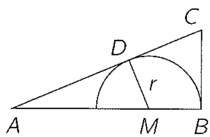
Lösung: Wir bezeichnen den Preis der Äpfel vor der Freitagspreissenkung mit P. Nach dieser Preissenkung kosten die Äpfel $P \cdot 0{,}9$. Am Samstag wird dieser Preis weiter gesenkt, so dass er dann $P \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = P \cdot 0{,}72$ beträgt. Die Äpfel kosten nun noch 72 % des ursprünglichen Preises, sind also um 28 % billiger als am Donnerstag.

16. Das Dreieck mit den Seitenlängen 5, 12 und 13 ist rechtwinklig. Welche Länge hat der Radius des einbeschriebenen Halbkreises (Abb. *nicht* maßstabsgerecht)?



(**A**) $\frac{10}{3}$ (**B**) $\frac{12}{3}$ (**C**) $\frac{13}{3}$ (**D**) $\frac{15}{3}$ (**E**) $\frac{17}{3}$

Lösung: Da der Berührungsradius $\overline{MD}$ des Halbkreises senkrecht auf der Tangente AC an den Halbkreis steht, ist das Dreieck AMD ähnlich zum Dreieck ABC (2 Winkel stimmen überein). Dann gilt nach dem Ähnlichkeitssatz folgende Verhältnisgleichung: $\overline{MD} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{AB}$, wobei $\overline{MD} = r$ ist. Wegen der Gleichheit der Tangentenabschnitte $\overline{CD} = \overline{CB}$ nimmt die Gleichung folgende Form an: $r : 5 = (13 - 5) : 12$ bzw. $r = \frac{8}{12} \cdot 5 = \frac{10}{3}$.



Dasselbe Problem war mit anderen Seitenlängen in Klassenstufe 11/13 in Aufgabe 15 gestellt. Dort sind zwei andere Lösungsideen zu finden, bei denen eine geschickte Zerlegung des Flächeninhalts oder der Satz des Pythagoras.

17. Unser Nachbar hat vier besonders schöne Kuckucksuhren. Damit stündlich alle Kuckucksrufe einzeln zu hören sind, geht allerdings jede entweder vor oder nach, eine 2 Minuten, eine 3 Minuten, eine 4 Minuten und eine 5 Minuten. Als ich gestern dort auf die Uhren guckte, zeigte eine gerade 6 Minuten vor 9 Uhr, eine 3 Minuten vor 9 Uhr, eine 2 Minuten nach 9 Uhr und eine 3 Minuten nach 9 Uhr. „Wie spät es in diesem Moment wirklich ist, kannst du leicht herausfinden", sagte der Nachbar. Wie spät war es in diesem Moment?

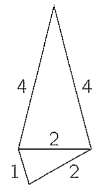
(**A**) 8:57 Uhr (**B**) 8:58 Uhr (**C**) 8:59 Uhr (**D**) 9:00 Uhr (**E**) 9:01 Uhr

Lösung: Zwischen der frühesten und der spätesten Anzeige der Uhren liegen 9 Minuten. Da die Vor- und Nachgehzeiten in Minuten 2, 3, 4 und 5 sind, ist klar, dass die 9 Minuten Abstand nur von den beiden Uhren realisiert werden können, von denen die eine 5 Minuten vorgeht und die andere 4 Minuten nachgeht – oder umgekehrt 5 Minuten nach- und 4 Minuten vorgeht. Die Differenz zwischen der Anzeige 8:54 (6 Minuten vor 9 Uhr) und 8:57 (3 Minuten vor 9 Uhr) beträgt 3 Minuten. Da nur die Differenz $5 - 2 = 3$ ist, muss die Zeitangabe 8:54 von der Uhr kommen, die 5 Minuten falsch geht. Jetzt wissen wir, dass die Uhr, die 8:54 zeigt, 5 Minuten nachgeht. Folglich ist die gesuchte genaue Uhrzeit 8:59 Uhr.

18. Ein Viereck hat eine Seite von 4 cm und eine Seite von 1 cm Länge. Eine der Diagonalen ist 2 cm lang. Diese Diagonale teilt das Viereck in zwei gleichschenklige Dreiecke. Welchen Umfang hat das Viereck?

(**A**) 8 cm (**B**) 9 cm (**C**) 10 cm (**D**) 11 cm (**E**) 12 cm

Lösung: Da jede Diagonale in einem Viereck stets mit jeder der Seiten genau einen gemeinsamen Punkt hat, betrachten wir zuerst den gemeinsamen Punkt der 2-cm-Diagonale mit der 1-cm-Seite. Die Verbindung der beiden anderen Eckpunkte ist eine Vierecksseite und das entstehende Dreieck soll gleichschenklig sein. Dies ist nach Dreiecksungleichung nur in der Konstellation 2 cm–2 cm–1 cm möglich. Betrachten wir nun den gemeinsamen Punkt der 2-cm-Diagonale mit der 4-cm-Seite. Die Verbindung der beiden anderen Eckpunkte ist die vierte Vierecksseite und das entstehende Dreieck soll wieder gleichschenklig sein. Dies ist nach Dreiecksungleichung nur in der Konstellation 2 cm–4 cm–4 cm möglich. Das in der Aufgabe beschriebene Viereck ist eindeutig bestimmt und hat den Umfang $(4 + 4 + 2 + 1)$ cm $= 11$ cm.

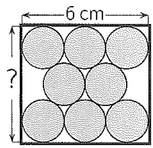


19. Als Gutenacht-Geschichte las ich meinen Geschwistern neulich vom Tischlein-deck-dich, Goldesel und Knüppel-aus-dem-Sack vor. Dass der Goldesel, wenn man „Bricklebritt" spricht, ganz zufällig mal vorn 3 Goldtaler und mal hinten 2 Goldtaler ausspeit, fanden sie am tollsten. Ich beendete das Märchen mit einem Rätsel: „Nachdem der Esel insgesamt 30-mal Gold gespien hatte, lagen vorn und hinten gleich viele Goldtaler. Wie oft hatte der Esel nach vorn gespien?"

(**A**) 6-mal (**B**) 12-mal (**C**) 18-mal (**D**) 24-mal (**E**) 30-mal

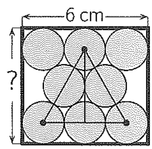
Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir gezählt haben, wie oft der Goldesel nach vorn speit, diese Zahl nennen wir v, und wie oft er nach hinten speit, diese Zahl nennen wir h. Dann gilt zum einen $v + h = 30$ und zum anderen $3v = 2h$. Dieses Gleichungssystem mit zwei Unbekannten lösen wir, indem wir die erste Gleichung nach h auflösen und den für h erhaltenen Term in die zweite Gleichung einsetzen. Wir erhalten $3v = 2 \cdot (30 - v)$ bzw. $5v = 60$, also $v = 12$.

20. In einer 6 cm langen rechteckigen Schachtel liegen 8 einander berührende Münzen (s. Bild). Welche Breite (in cm) hat diese Schachtel?



(**A**) 5 (**B**) $4\sqrt{2}$ (**C**) $2\sqrt{3} + 2$ (**D**) $2\sqrt{2} + 3$ (**E**) $3\sqrt{3}$

Lösung: Da die Schachtel 6 cm lang ist, ist der Radius der Münzen 1 cm. Aufgrund der Symmetrie der Figur bilden die eingezeichneten Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck. Die Seitenlänge dieses Dreiecks ist so lang wie 4 Radien, also 4 cm. Wer die Formel für die Höhe im gleichseitigen Dreieck nicht im Kopf hat, kann die Länge der Höhe mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ausrechnen: Wenn a die Seitenlänge ist, so gilt für die Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$. In unserem Fall ist die Höhe also $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Nun addieren wir noch die beiden Radien, die auf beiden Seiten bis zur Wand der Schachtel fehlen, und erhalten mit $2\sqrt{3} + 2$ die Lösung.



21. Marcel will aus Spielwürfeln eine Würfelreihe legen. Die Augenzahlen von je zwei aneinanderstoßenden Seiten sollen dabei gleich sein. Außerdem möchte er, dass die Summe der Augenzahlen auf allen Seiten, die *nicht* aneinanderstoßen, 100 ist. Marcel weiß, dass bei allen Würfeln die Summe der Augen auf gegenüberliegenden Seiten stets 7 ist. Wie viele Würfel benötigt Marcel für die Würfelreihe?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) Diese Reihe ist nicht möglich.

Lösung: Die Summe aller Punkte auf den 4 (langen) Seitenflächen einer Würfelreihe ist stets eine durch $2 \cdot 7 = 14$ teilbare Zahl. Da $100 : 14 = 7$ Rest 2 ist, müssten auf den Stirnseiten von Marcels Würfelreihe zusammen 2 Punkte sein bzw. auf den beiden Stirnseiten jeweils ein Punkt. Da Marcel aufeinander folgende Würfel stets mit Seiten zusammenkleben will, die dieselbe Punktzahl zeigen, ist dies jedoch nur dann möglich, wenn die Reihe aus einer *geraden* Zahl von Würfeln besteht – es sind jedoch 7. Weniger als 7 Würfel können es nicht sein, weil dann die Summe der Punkte auf den Stirnseiten mindestens 16 sein müsste, die größtmögliche Summe aber 12 ist. (**E**) trifft zu, eine solche Würfelreihe ist nicht möglich.

KAENGURU-Rösselsprung

Am 23. Januar dieses Jahres jährte sich zum 150. Mal der Geburtstag des deutschen Mathematikers David Hilbert (1862-1943). Er zählt zu den bedeutendsten und universellsten Mathematikern des 19./20. Jahrhunderts, denn er hat auf zahlreichen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik grundlegende neue Resultate erzielt und wesentliche neue Entwicklungen angestoßen, insbesondere auch durch die Formulierung von 23 damals ungelösten mathematischen Problemen (Hilbertsche Probleme), die er im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris vortrug.

In der abgebildeten Figur ist ein Ausspruch von David Hilbert über die Geometrie eingetragen – in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, wobei jedes Feld nur genau einmal betreten werden darf. Wie lautet dieses Zitat von David Hilbert, das im markierten Kästchen mit „IM GROSSEN GARTEN...“ beginnt?

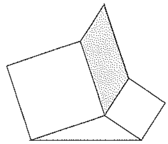
	L	E	C	G	M	S	R	
K	S	E	A	N	S	A	E	H
U	N	F	E	H	M	E	E	N
P	C	S	E	C	I	J	C	D
I	T	K	I	H	T	E	E	N
N	U	N	A	S	E	E	E	R
R	E	S	C	R	N	G	D	O
	E	A	N	K	I	M	T	
			G	I	R			
			S	R	N			
			M	A	S			
			O	E	G			

22. Die letzte von Null verschiedene Ziffer der Zahl $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ ist

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 9

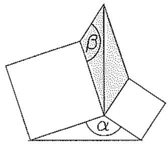
Lösung: Wir fassen geeignet zusammen: $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53} = (2 \cdot 5)^{53} \cdot 2^6 \cdot 3^4 = (10)^{53} \cdot 2^6 \cdot 3^4$. Die letzte von Null verschiedene Ziffer ist also die letzte Ziffer der Zahl $2^6 \cdot 3^4$. Wer jetzt weiß, dass $2^6 = 64$ und $3^4 = 81$ ist, hat sofort die 4 als letzte Ziffer gefunden. Wer es nicht weiß, muss die entsprechenden Potenzen ausrechnen.

23. Rechts ist ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $8\,\mathrm{cm}^2$ gezeichnet. Über zwei seiner Seiten sind Quadrate mit den Seitenlängen 4 cm bzw. 5 cm errichtet (Abb. *nicht* maßstabsgerecht). Die graue Figur ist ein Parallelogramm. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms beträgt



(**A**) $12\,\mathrm{cm}^2$ (**B**) $16\,\mathrm{cm}^2$ (**C**) $18\,\mathrm{cm}^2$ (**D**) $20\,\mathrm{cm}^2$ (**E**) $24\,\mathrm{cm}^2$

Lösung: Jedes Parallelogramm wird durch jede seiner Diagonalen in zwei zueinander kongruente Dreiecke zerlegt. In das Parallelogramm aus der Aufgabe ist eine Diagonale eingezeichnet. Wir überlegen uns zuerst, dass der eingezeichnete Winkel β gleich dem Winkel α im $8\,\mathrm{cm}^2$ großen Ausgangsdreieck ist. Dies ist so, weil α und der ihm gegenüberstehende Winkel des Parallelogramms sich zu 180° ergänzen, und sich im Parallelogramm benachbarte Winkel ebenfalls zu 180° ergänzen. Die beiden kongruenten grauen Dreiecke sind damit kongruent zum Ausgangsdreieck, denn neben dem Winkel stimmen auch die Längen der beiden diesen Winkel einschließenden Seiten überein, die jeweils so groß sind wie die Seitenlängen der Quadrate. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist demzufolge doppelt so groß wie der des Ausgangsdreiecks, also $16\,\mathrm{cm}^2$.



24. In das rechts gezeichnete 3×4-Gitter sind in die leeren Felder Zahlen so einzutragen, dass die vier Summen der Zahlen in den Spalten untereinander gleich sind und die drei Summen der Zahlen in den Zeilen untereinander gleich sind. Welche Zahl steht dann in dem grauen Kästchen?

2	4		2
	3	3	
6		1	?

(**A**) 1 (**B**) 9 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 4

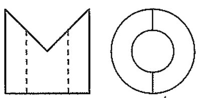
Lösung: Wir schreiben in die leeren Felder die Variablen a bis e (s. rechts oben). Da die Spaltensummen untereinander gleich sind, gilt insbesondere $7 + d = 4 + a$ und analog, da die Zeilensummen untereinander gleich sind, $8 + a = 7 + d + e$. In der letzten Gleichung können wir $7 + d$ durch $4 + a$ ersetzen und erhalten $8 + a = 4 + a + e$ bzw. $e = 4$.

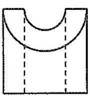
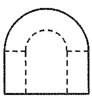
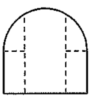
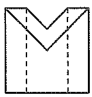
2	4	a	2
b	3	3	c
6	d	1	e

Indem wir die anderen Gleichungen für die Spalten bzw. Zeilen hinzuziehen, können wir alle Werte ausrechnen und erhalten so ein auf eindeutige Weise vollständig ausgefülltes 3×4-Gitter (s. rechts unten).

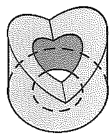
2	4	8	2
4	3	3	6
6	5	1	4

25. Im Bild rechts sind die Ansichten eines Körpers von vorn und von oben zu sehen, wobei unsichtbare Kanten gestrichelt gezeichnet sind. Welche der folgenden Zeichnungen stellt die Ansicht von links dar?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) Keiner der Vorschläge (**A**) bis (**D**).

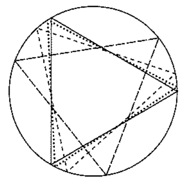
Lösung: Die Abbildung rechts zeigt ein Bild des Körpers, dessen Ansicht von vorn und von oben gegeben war. Damit ist klar, dass die Ansicht von links dem Bild (**B**) entspricht.



Die Ansicht eines sehr ähnlichen Körpers war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 16 gesucht.

26. Zuerst zeichne ich ein gleichseitiges Dreieck. Dann drehe ich es um 3 Grad um seinen Mittelpunkt und zeichne das gedrehte Dreieck. Dieses gedrehte Dreieck drehe ich um seinen Mittelpunkt in dieselbe Richtung um weitere 9 Grad, dann um weitere 27 Grad usw., im n-ten Schritt also um weitere 3^n Grad. Ich zeichne das jeweilige Dreieck, sofern ich es nicht bereits gezeichnet habe. Wie viele Dreiecke, das erste eingeschlossen, muss ich insgesamt zeichnen?

(**A**) 4 (**B**) 12 (**C**) 24 (**D**) 120 (**E**) 360



Lösung: Die Figur, die nach einer Drehung um 3° zu zeichnen ist, unterscheidet sich offenbar von der Ausgangsfigur, und dies trifft auch für die um weitere 9°, also insgesamt um 12° gedrehte Figur zu sowie für die um $3° + 9° + 27° = 39°$ gedrehte. Bei der nun folgenden Figur beträgt die Gesamtdrehung $39° + 81° = 120°$. Das um 120° gedrehte *gleichseitige* Dreieck geht in sich selbst über, es muss nicht erneut gezeichnet werden.

Wie geht es nun weiter? Allgemein ist um $(3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n)$ Grad zu drehen. Die Fälle $n = 0, 1, 2, 3, 4$ haben wir bereits betrachtet, nun kommt der Fall $n > 4$. Wir schreiben $n = 4k + r$, worin r eine der Zahlen 0, 1, 2 oder 3 ist. Die Summe $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{4k+r}$ können wir dann aufteilen in die Summe der ersten r Summanden und die der folgenden $4k$ Summanden. Die zweite Summe lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} & 3^r\left(3+3^2+3^3+3^4+\ldots+3^{4k}\right) \\ = \; & 3^r\left((3+3^2+3^3+3^4)+3^4\cdot(3+3^2+3^3+3^4)+\ldots+3^{4(k-1)}\cdot(3+3^2+3^3+3^4)\right) \\ = \; & 3^r\cdot N\left(3+3^2+3^3+3^4\right) = 3^r\cdot N\cdot 120 \end{aligned}$$

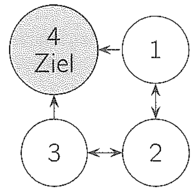
D. h., dass die zweite Summe ein Vielfaches (mit $3^r \cdot N$ bezeichnet) einer Drehung um 120° ist, das Dreieck also in sich überführt. In Abhängigkeit von r findet also im allgemeinen Fall eine Drehung des Ausgangsdreiecks um entweder 3°, 12°, 39° oder 120° statt. Gezeichnet werden müssen also neben dem Ausgangsdreieck nur das um 3°, um 12° und um 39° gedrehte Dreieck, insgesamt also vier Dreiecke.

27. Boris baut eine raffinierte Schaltung mit 5 Lampen. Jede lässt sich einzeln ein- und ausschalten. Wird eine der Lampen ein- bzw. ausgeschaltet, so wird außerdem zufällig irgendeine der anderen Lampen ausgewählt und auch deren Zustand geändert. Sie geht aus, falls sie vorher an war und umgekehrt. Als Boris die Schaltung fertig hat, sind alle Lampen aus. Welche der folgenden Aussagen ist nach 10-maligem Schalten *mit Sicherheit* wahr?

(**A**) Es sind alle Lampen an.
(**B**) Dass alle Lampen aus sind, kann nicht sein.
(**C**) Keine Lampe ist an.
(**D**) Dass alle Lampen an sind, kann nicht sein.
(**E**) Keine der Aussagen (**A**) bis (**D**) ist wahr.

Lösung: Es sei E die Anzahl der eingeschalteten Lampen. Da jedes Ein- bzw. Ausschalten das An- bzw. Ausgehen einer weiteren Lampe nach sich zieht, bleibt bei der Zahl E die Eigenschaft, eine gerade oder eine ungerade Zahl zu sein, stets erhalten, denn entweder wird 2 addiert (zwei Lampen gehen an), 0 „addiert" (eine Lampe geht an, eine weitere aus) oder 2 subtrahiert (zwei Lampen gehen aus). Im Anfangszustand ist $E = 0$. Folglich ist (**A**) gewiss falsch, denn dann wäre $E = 5$, eine ungerade Zahl. Wenn (**A**) gewiss falsch ist, ist (**D**) gewiss richtig. Die Aussage (**C**) kann zutreffen, muss aber nicht, und die Aussagen (**B**) und (**E**) sind falsch.

28. Um uns die Wartezeit am Bahnhof zu verkürzen, spiele ich mit meiner kleinen Schwester „Hopse". Ich habe vier Kreise in den Sand gemalt, Kreis 1 ist „Start", Kreis 4 ist „Ziel". Sie soll das Ziel zuerst mit einem Hüpfer erreichen, dann mit 3 Hüpfern, mit 5, mit 7 usw. Dabei darf sie in benachbarte Kreise beliebig hüpfen, im Zielkreis ist jedoch stets Schluss. Wir zählen, wie viele Möglichkeiten sie jeweils hat: Für 3 Hüpfer gibt es z. B. 2 Möglichkeiten (1–2–1–Ziel und 1–2–3–Ziel), für 5 Hüpfer gibt es 4 Möglichkeiten. Wie viele Möglichkeiten gibt es für 11 Hüpfer?



(**A**) 12 (**B**) 16 (**C**) 25 (**D**) 32 (**E**) 48

Lösung: Schreiben wir uns auf, wie die unterschiedlichen Möglichkeiten bei 5 Hüpfern aussehen: 1–2–1–2–1–Z; 1–2–3–2–1–Z; 1–2–1–2–3–Z; 1–2–3–2–3–Z. Daraus lässt sich erkennen, wie sich die Anzahl für 11 Hüpfer errechnet. Stellen wir uns die verschiedenen Möglichkeiten vor: Die erste Zahl ist stets eine 1, am Ende steht Z. Dazwischen ist die 2., 4., 6., 8. und 10. Zahl jeweils die 2. Für jede der anderen 5 Zahlen gibt es jeweils genau 2 Möglichkeiten, sie kann entweder 1 oder 3 sein. Gesucht sind folglich alle 5-stelligen Zahlen, die aus Einsen und Dreien bestehen. Und das sind $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

29. Maya hat 6 verschiedene positive ganze Zahlen aufgeschrieben. Danach hat sie alle möglichen Paare aus diesen 6 Zahlen gebildet und bemerkt: Mit einer Ausnahme gilt für jedes Paar, dass die kleinere Zahl Teiler der größeren ist. Es sei n die größte von Mayas Zahlen. Wie groß ist n mindestens?

(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 24 (**D**) 32 (**E**) 36

Lösung: Da wir die kleinste mögliche Zahl n suchen, beginnen wir die mögliche Reihe der 6 Zahlen, die Maya aufgeschrieben haben könnte, mit 1. Die nächstgrößere Zahl ist 2, und es folgt 3 oder 4. Falls wir 3 wählen, ist mit $\{2, 3\}$ bereits das eine Paar festgelegt, bei dem die kleinere die größere nicht teilt. Alle folgenden müssen dann Vielfache ihrer Vorgänger sein. Wenn wir wollen, dass die größte der 6 Zahlen so klein wie möglich ist, finden wir $\{1, 2, 3, 6, 12, 24\}$. Falls wir statt der 3 die 4 wählen, müssten von den folgenden 3 Zahlen mindestens 2 Zahlen durch 4 teilbar sein. Unter dieser Voraussetzung könnte 24 wiederum die größte Zahl sein, denn sowohl die 6 Zahlen $\{1, 2, 4, 6, 12, 24\}$, die 6 Zahlen $\{1, 2, 4, 8, 12, 24\}$ als auch die 6 Zahlen $\{1, 2, 4, 8, 16, 24\}$ erfüllen die Bedingung.

Dass die größte der 6 Zahlen nicht kleiner als 24 sein kann, kann man sich überlegen, indem man die 6 Zahlen der Größe nach ordnet. Dann muss genau eines der fünf Paare aufeinanderfolgender Zahlen das Ausnahmepaar sein, in dem die größere Zahl nicht durch die kleinere Zahl teilbar ist. Bis auf dieses Paar ist jede Zahl in der Reihe mindestens das Doppelte der vorhergehenden, und es lässt sich schließen, dass die größte der 6 Zahlen mindestens durch 3-faches Verdoppeln und einmaliges Verdreifachen (durch das Ausnahmepaar) aus der ersten Zahl entsteht, die mindestens 1 ist. Die größte der 6 Zahlen ist also mindestens $1 \cdot 2^3 \cdot 3 = 24$.

KAENGURU-Kuchenteilung

Wie lässt sich mit 3 geraden Schnitten ein Kuchen in 8 gleiche Teile teilen?

30. Der EuroCity EC 179 brauchte heute 8 Sekunden für das Passieren des Signals, das ich vom Küchenfenster aus sehe. Danach begegnete er dem Regio RE 15, und die beiden passierten einander in 9 Sekunden. Anschließend fuhr der RE 15 am Signal vorbei, was 12 Sekunden dauerte. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

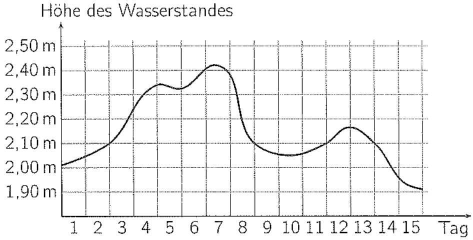
(**A**) Der EC war doppelt so lang wie der RE.
(**B**) Der EC war 50 % länger als der RE.
(**C**) Der RE war 50 % länger als der EC.
(**D**) Der RE war doppelt so lang wie der EC.
(**E**) Der EC und der RE waren gleich lang.

Lösung: Die Länge des EC 179 bezeichnen wir mit s_e, die Länge des RE 15 mit s_r. Für die Geschwindigkeiten der beiden Züge schreiben wir entsprechend v_e bzw. v_r. Dann gilt für die Geschwindigkeit des EC, errechnet aus der Vorbeifahrzeit am (als punktförmig anzunehmenden) Signal, $v_e = \frac{s_e}{8\,\mathrm{s}}$, für die Summe der Geschwindigkeiten beider Züge, ermittelt aus der Vorbeifahrzeit der Züge aneinander, $v_e + v_r = \frac{s_e + s_r}{9\,\mathrm{s}}$ und für die Geschwindigkeit des RE, errechnet aus der Vorbeifahrzeit des RE am Signal, $v_r = \frac{s_r}{12\,\mathrm{s}}$. In die zweite Gleichung setzen wir die Einzel-Geschwindigkeiten ein und erhalten $\frac{s_e}{8\,\mathrm{s}} + \frac{s_r}{12\,\mathrm{s}} = \frac{s_e + s_r}{9\,\mathrm{s}}$, woraus durch Multiplikation mit 72 s die Gleichung $9s_e + 6s_r = 8s_e + 8s_r$ bzw. $s_e = 2s_r$ folgt. Der EC ist also doppelt so lang wie der Regio.

Dasselbe mathematische Problem wurde in Aufgabe 12 in Klassenstufe 11–13 gestellt – jedoch in einem völlig anderen Zusammenhang.

Klassenstufen 11 bis 13

1. Auf Grund starker Regenfälle ist im Dorf der Wasserstand des Mühlbachs stark gestiegen. Das Diagramm zeigt den Verlauf in den letzten 15 Tagen. An wie vielen Tagen stand das Wasser höher als der kritische Wasserstand von 2,10 m?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Die kritische Höhe von 2,10 m wurde vom Beginn des 3. bis zum Ende des 8. Tages sowie am 12. und am 13. Tag überstiegen. Das sind insgesamt 8 Tage.

2. Die Summe der Ziffern einer 7-stelligen Zahl ist 6. Was ist das Produkt der Ziffern dieser Zahl?

(**A**) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ (**B**) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$ (**C**) 6 (**D**) 1 (**E**) 0

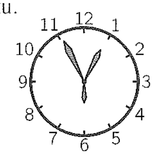
Lösung: Da die Summe der sieben Ziffern 6 ist, können *nicht alle* Ziffern größer als 0 sein. Also ist mindestens eine der Ziffern eine 0 und folglich ist das Produkt der sieben Ziffern gleich 0.

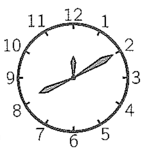
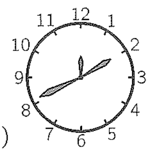
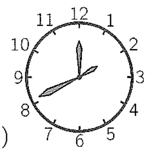
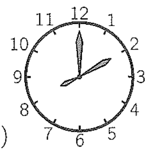
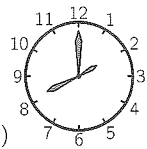
3. Clown Alfredo hat für seine neue Show 42 Flöhe dressiert. Auf ein Signal ordnen sich alle zu lauter gleich großen Gruppen. Welche der folgenden Zahlen kann sicher *nicht* die Anzahl der Gruppen sein?

(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 12 (**E**) 14

Lösung: Die Anzahl der Flöhe, also 42, ist unabhängig von ihrer Aufstellung stets das Produkt aus der Anzahl der Gruppen und der Anzahl der Flöhe je Gruppe. Die Anzahl der Gruppen ist also ein Teiler 42. Während 2, 6, 7 und 14 Teiler von 42 sind, trifft das auf 12 nicht zu.

4. Beim Reparieren einer alten Uhr ist der Uhrmacherlehrling nicht sicher, ob er alles richtig gemacht hat. Das Uhrwerk ist in Ordnung, aber er könnte die drei Zeiger für Stunden, Minuten und Sekunden vertauscht haben. Das Bild rechts zeigt die Uhr um 12:55:30 Uhr. Wie sieht diese Uhr um 8:10:00 Uhr aus?



(**A**)

(**B**)

(**C**)

(**D**)

(**E**)


Lösung: Um 12:55:30 stehen der Sekunden-Zeiger genau auf der 6, der Minuten-Zeiger knapp hinter der 11 und der Stunden-Zeiger etwas vor der 1. Folglich ist bei dieser Uhr der kleine Zeiger der Sekunden-Zeiger, der mittlere der Stunden-Zeiger und der längste der Minuten-Zeiger. Die Zeit 8:10:00 zeigt die Uhr im Bild (**A**).

5. Till und Jan bekommen 5 Pakete geliefert, die 1 kg, 4 kg, 7 kg, 8 kg und 12 kg wiegen. Sie helfen dem Paketzusteller beim Hochtragen. Ein Paket trägt der Paketzusteller, und Till und Jan tragen den Rest, und zwar beide dasselbe Gewicht. Welches Gewicht hat das Paket, das der Paketzusteller trägt?

(**A**) 1 kg (**B**) 4 kg (**C**) 7 kg (**D**) 8 kg (**E**) 12 kg

Lösung: Sicher kann der Paketzusteller nicht das 1-kg- oder das 7-kg-Paket tragen, da sich dann das ungeradzahlige Restgewicht nicht auf Till und Jan zu gleichen Teilen aufteilen ließe. Mit ein wenig Probieren wird klar, dass der Paketzusteller das 8-kg-Paket trägt, und von den Jungen trägt einer das 12-kg-Paket und der andere die restlichen drei Pakete.

6. Karen schreibt 5 Zahlen in eine Reihe, als erste eine 2 und als letzte eine 10:

2		?		10

Das Produkt der ersten drei Zahlen soll 20 sein, das Produkt der mittleren drei Zahlen 60 und das Produkt der letzten drei Zahlen 300. Welche Zahl steht in der Mitte?

(**A**) 5 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 10 (**E**) 4

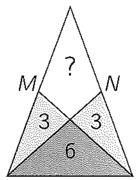
Lösung: Wenn das Produkt der ersten drei Zahlen 20 und das der mittleren 60, also dreimal so groß ist, muss die Zahl links von der 10 dreimal so groß wie 2, also 6 sein. Und da das Produkt der drei rechts stehenden Zahlen 300 ist, ist die gesuchte Zahl $300 : (6 \cdot 10) = 5$.

Ähnlich ist Aufgabe 17 in Klassenstufe 7/8.

7. Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3 werden zwei Zahlen gebildet, wobei jede Ziffer genau einmal verwendet wird. Dann werden diese Zahlen miteinander multipliziert. Wie groß kann das Produkt höchstens sein?

(**A**) 600 (**B**) 620 (**C**) 630 (**D**) 640 (**E**) 650

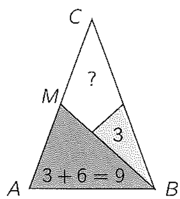
Lösung: Sicher kann im größtmöglichen Produkt keiner der Faktoren 0 sein. Damit das Produkt möglichst groß wird, stellen wir die Ziffern in beiden Faktoren so um, dass sie in absteigender Reihenfolge erscheinen. Wir schreiben diese Möglichkeiten auf und berechnen für diese das jeweilige Produkt: $10 \cdot 32 = 320 \cdot 1 = 320$, $20 \cdot 31 = 310 \cdot 2 = 620$ und $30 \cdot 21 = 210 \cdot 3 = 630$. Das größtmögliche Produkt ist 630.



8. Das rechts gezeichnete Dreieck ist gleichschenklig, die Punkte M und N sind die Mittelpunkte der Schenkel. Von drei Teilflächen ist der Flächeninhalt bekannt. Welchen Flächeninhalt hat die vierte, weiße Teilfläche?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Die Dreiecke ABM und MBC haben denselben Flächeninhalt, da die Grundseiten $\overline{AM}$ und $\overline{MC}$ gleich lang sind und die beiden Dreiecke dieselbe Höhe besitzen. Somit ist der gesuchte Flächeninhalt $9 - 3 = 6$.



9. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} =$

(**A**) 1 (**B**) $\sqrt{2}$ (**C**) $\sqrt[6]{4}$ (**D**) $\sqrt[3]{4}$ (**E**) 2

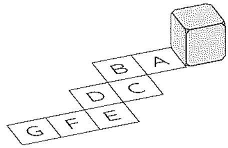
Lösung: Wir schreiben den Term unter der Wurzel um und vereinfachen anschließend: $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt{2}$.

10. Für eine reelle Zahl x gilt $x^3 < 64 < x^2$. Welche Aussage trifft dann auf x zu?

(**A**) $0 < x < 64$ (**B**) $-8 < x < 4$ (**C**) $x > 8$ (**D**) $-4 < x < 8$ (**E**) $x < -8$

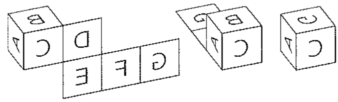
Lösung: Eine reelle Zahl x erfüllt die erste Ungleichung, $x^3 < 64$, genau dann, wenn $x < 4$ ist. Die zweite Ungleichung, $64 < x^2$, erfüllt solch ein x genau dann, wenn $8 < |x|$, also entweder $x < -8$ oder $x > 8$ ist. Die reellen Zahlen, die kleiner als 4 sind und deren Betrag größer als 8 ist, sind genau diejenigen, die kleiner als -8 sind. (**E**) ist richtig.

11. Ein Würfel wird über seine Kanten auf den abgebildeten Feldern von A nach G gerollt. Auf genau zwei Feldern kommt der Würfel dabei mit derselben Seitenfläche zu liegen. Das sind die Felder



(**A**) A und G (**B**) A und F (**C**) A und E (**D**) B und F (**E**) B und G

Lösung: Wir stellen uns vor, dass die bezeichneten Felder auf einem Papierstreifen gezeichnet sind. Wir halten den Würfel in Gedanken fest und wickeln den Streifen um den Würfel, wie es im Bild rechts zu sehen ist. Feld A liegt auf der linken Seite des Würfels, B oben und C vorn. D bedeckt die rechte Seite, E die untere, F die hintere und schließlich G die obere – genauso wie B. Nur auf B und G kommt bei Abrollen auf den Feldern dieselbe Seitenfläche des Würfels zu liegen.



Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 21 gestellt.

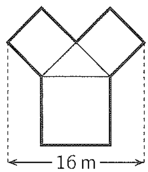
12. Die letzte Mathearbeit in Inas Klasse ist gut ausgefallen, die durchschnittliche Punktzahl war 20. Im Durchschnitt hatten die Jungen 21 und die Mädchen 18 Punkte. Dann sind in Inas Klasse

(**A**) doppelt so viele Jungen wie Mädchen. (**B**) doppelt so viele Mädchen wie Jungen.
(**C**) viermal so viele Jungen wie Mädchen. (**D**) viermal so viele Mädchen wie Jungen.
(**E**) genauso viele Jungen wie Mädchen.

Lösung: Sei j die Anzahl der Jungen in Inas Klasse, m die der Mädchen. Die Gesamtpunktzahl der Mädchen ist $18m$, die der Jungen $21j$. Die Gesamtpunktzahl aller Schüler ist dann einerseits $18m + 21j$, anderseits $20(m + j)$, da im Durchschnitt 20 Punkte erreicht wurden. Folglich gilt $18m+21j = 20m+20j$ bzw. $j = 2m$, also sind doppelt so viele Jungen wie Mädchen in Inas Klasse.

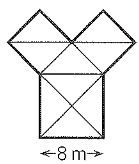
Das mathematische Problem dieser Aufgabe ist identisch zu Aufgabe 30 in Klassenstufe 9/10.

13. Herr Pythagoras hat – seinem Namen Ehre machend – ein Beet in der abgebildeten Form angelegt. In das rechtwinklige Dreieck in der Mitte pflanzt er rote Rosen, in das große Quadrat weiße Rosen und in die zwei identischen kleineren Quadrate gelbe Rosen. Insgesamt ist das Beet 16 m breit. Welche Fläche hat es?



(**A**) $114\,\mathrm{m}^2$ (**B**) $130\,\mathrm{m}^2$ (**C**) $144\,\mathrm{m}^2$ (**D**) $160\,\mathrm{m}^2$ (**E**) $186\,\mathrm{m}^2$

Lösung: Da das Dreieck im Beet gleichschenklig ist, entstehen durch die Hilfslinien im Bild 9 zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse $16\,\mathrm{m} : 2 = 8\,\mathrm{m}$ lang ist. Die dazugehörige Höhe ist halb so lang wie die Hypotenuse, also 4 m. Die Fläche des Beetes ist $9 \cdot \dfrac{8\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m}}{2} = 144\,\mathrm{m}^2$.

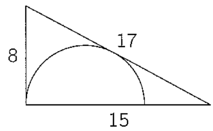


14. In unserer Schülerzeitung ist diesmal ein Bericht über die sportbegeisterte Klasse 5a. Darin steht, dass an jeder der vier angebotenen Sport-AGs 80 % der Kinder teilnehmen, einige sogar an mehreren. Nun stellt sich die Frage: Wie viele Kinder sind es mindestens, die an *allen vier* AGs teilnehmen?

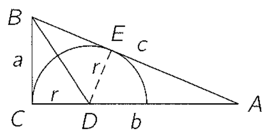
(**A**) 80 % (**B**) 60 % (**C**) 40 % (**D**) 20 % (**E**) 16 %

Lösung: An jeder der 4 angebotenen Sport-AGs nehmen 20 % der Kinder *nicht* teil. Die größte Anzahl an Kindern, die an einer AG *nicht* teilnehmen, ist also $4 \cdot 20\,\% = 80\,\%$. Das ist der Fall, wenn jedes Kind, das an einer AG *nicht* teilnimmt, an allen drei anderen teilnimmt, da dann keiner an mehreren AGs *nicht* teilnimmt. Also nehmen mindestens 20 % der Klasse an allen vier AGs teil.

15. Einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 8, 15 und 17 ist ein Halbkreis einbeschrieben (Abb. *nicht* maßstabsgerecht). Wie groß ist sein Radius?



(**A**) $\frac{24}{5}$ (**B**) $\frac{17}{3}$ (**C**) $\frac{21}{4}$ (**D**) $\frac{20}{3}$ (**E**) 5

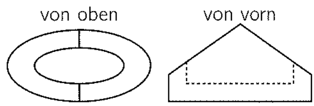


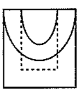
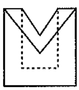
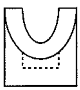
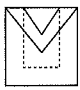
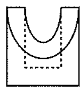
Lösung: Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $\frac{ab}{2}$, der Flächeninhalt des Dreiecks CDB ist $\frac{ar}{2}$ und der Flächeninhalt des Dreiecks DAB ist $\frac{cr}{2}$, da der Radius des Halbkreises auf $\overline{AB}$ als Tangente senkrecht steht. Da die beiden Dreiecke CDB und DAB zusammen das Dreieck ABC bilden, gilt $\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+c)r}{2}$.
Der Radius ist $r = \frac{ab}{a+c} = \frac{8 \cdot 15}{8+17} = \frac{24}{5}$.

Eine andere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, besteht darin, den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck DAE anzuwenden. Die Katheten dieses Dreiecks haben die Längen $\overline{DE} = r$ und $\overline{EA} = c - a$, da wegen der Gleichheit der Tangentenabschnitte $\overline{BE} = a$ gilt. Die Länge der Hypotenuse ist $\overline{DA} = b - r$, und wir erhalten $r^2 + (c-a)^2 = (b-r)^2$, woraus wir durch Einsetzen und Umstellen den Radius r berechnen können.

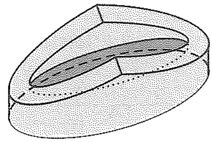
Eine dritte Lösungsmöglichkeit verwendet Ähnlichkeit. Diese Variante ist in der Lösung der Aufgabe 16 in Klassenstufe 9/10 dargestellt.

16. Rechts sind die Ansichten eines Körpers von oben und von vorn zu sehen, wobei unsichtbare Kanten gestrichelt gezeichnet sind. Welche der folgenden Zeichnungen stellt die Ansicht von links dar?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Von oben ist ein runder Rand zu sehen. Dieser wird bei der Ansicht von links nicht plötzlich eckig – (**B**) und (**D**) sind falsch. Die kleinere Ellipse, die von oben zu sehen ist, gibt an, dass der mittlere Teil des Körpers nach oben oder nach unten gegen den Rand verschoben ist. Wegen der gestrichelten Linie in der Vorderansicht, liegt der mittlere Teil tiefer als der Rand und bildet einen Boden – also ist auch (**A**) falsch, da in diesem Bild der mittlere Teil über den Rand hinaus ragt. Die gestrichelte Linie, die in der Ansicht von links zu sehen sein muss, muss von der Oberkante des Bodens bis ganz zur obersten Kante gehen. (**C**) ist also ebenfalls falsch, die richtige Ansicht ist (**E**).



17. Für eine der folgenden Funktionen gilt: Wird $\frac{1}{x}$ anstelle von x in die Funktion $f(x)$ eingesetzt, dann erhält man $\frac{1}{f(x)}$. Für welche?

(**A**) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (**B**) $f(x) = \frac{1}{x}$ (**C**) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (**D**) $f(x) = \frac{2}{x}$ (**E**) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Lösung: Diese Aufgabe lässt sich schnell lösen, indem wir für x beispielsweise 1 einsetzen. Es soll $f(1) = \frac{1}{f(1)}$ gelten, was nur für $f(1) = 1$ oder $f(1) = -1$ möglich ist. Bei (**A**) ergibt sich $f(1) = 2$, bei (**B**) $f(1) = 1$, bei (**C**) $f(1) = \frac{1}{2}$, bei (**D**) $f(1) = 2$ und bei (**E**) $f(1) = 2$. Es kann also nur (**B**) stimmen. Um zu beweisen, dass für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ tatsächlich die in der Aufgabe genannte Eigenschaft gilt, setzen wir $\frac{1}{x}$ statt x ein und erhalten wie in der Aufgabe gefordert $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{f(x)}$.

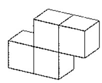
18. Georg hat bei einem Quiz mitgemacht, bei dem für die erste Frage ein Punkt zu erreichen war, für die zweite 2 Punkte, für die dritte 3 Punkte usw. Nach dem Quiz wurde ihm mitgeteilt, dass er alle Fragen richtig beantwortet hat und dafür insgesamt 149 Punkte erhält. Georg hat sofort bemerkt, dass diese Punktzahl nicht stimmen kann. Tatsächlich wurde eine der Aufgaben doppelt gezählt. Welche?

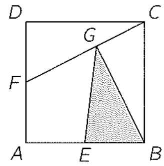
(**A**) 2 (**B**) 7 (**C**) 10 (**D**) 13 (**E**) 17

Lösung: Die Anzahl der Aufgaben in diesem Quiz bezeichnen wir mit n. Die maximal zu erreichende Punktzahl war $1 + 2 + \cdots + n$, was gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist. Wer will, kann auch die Punktzahlen der Reihe nach addieren. So findet man heraus, dass es 16 Aufgaben gewesen sein müssen und die Gesamtpunktzahl $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$ betrug. Mehr als 16 Aufgaben können es nicht gewesen sein, dann wäre die Summe der Punkte bereits größer als 149. Und weniger als 16 Aufgaben sind auch nicht möglich, da dann die Nummer der doppelt gezählten Aufgabe größer als 16 wäre. Die Differenz zu 149 gibt die Nummer der doppelt gezählten Aufgabe an: $149 - 136 = 13$.

KAENGURU-Würfelbauer

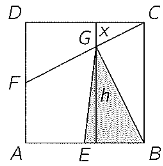
Wie lässt sich aus Bausteinen der abgebildeten Form ein $4 \times 4 \times 4$-Würfel bauen?





19. In einem Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 2 ist E Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und F Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Der Punkt G liegt so auf der Strecke $\overline{CF}$, dass $3\,\overline{CG} = 2\,\overline{GF}$ ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks EBG?

(**A**) $\frac{7}{10}$ (**B**) $\frac{4}{5}$ (**C**) $\frac{8}{5}$ (**D**) $\frac{3}{5}$ (**E**) $\frac{6}{5}$



Lösung: Die Länge von $\overline{EB}$ und $\overline{DF}$ ist 1, da E und F Mittelpunkte auf den Quadratseiten sind. Wir zeichnen durch G die Höhe h auf $\overline{EB}$ und verlängern diese zum Schnittpunkt mit CD. Nach Strahlensatz gilt $\frac{x}{1} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CF}} = \frac{2}{5}$. Also ist $h = 2 - x = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks EBG ist $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$.

20. Welches ist die größte natürliche Zahl n, für die $n^{20} < 5^{30}$ gilt?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 11 (**E**) 12

Lösung: Da n und 5 beides positive Zahlen sind, können wir auf beiden Seiten der Ungleichung die 10. Wurzel ziehen und erhalten die äquivalente Ungleichung $n^2 < 5^3 = 125$. Diese Zahl liegt zwischen $11^2 = 121$ und $12^2 = 144$. Das heißt, dass $n = 11$ die Ungleichung erfüllt, $n = 12$ jedoch zu groß ist. Die gesuchte Zahl ist also 11.

21. In der Zahlenfolge $1, 1, 0, 1, -1, \ldots$ sind die ersten beiden Glieder a_1 und a_2 gleich 1. Das dritte Glied ist die Differenz der beiden vorhergehenden Glieder: $a_3 = a_1 - a_2$. Das vierte Glied ist die Summe der beiden vorhergehenden Glieder: $a_4 = a_2 + a_3$. Weiter ist $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, $a_7 = a_5 - a_6$ usw. Wie groß ist die Summe der ersten 25 Glieder dieser Zahlenfolge?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) -12 (**D**) 25 (**E**) -2

Lösung: Die ersten Folgenglieder sind:

Folgenglied	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\cdots$
Operation			-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	$\cdots$
Wert	1	1	0	1	-1	0	-1	-1	0	-1	1	0	1	1	0	$\cdots$

Aus der Tabelle entnehmen wir $a_{13} = 1$, $a_{14} = 1$ und $a_{15} = a_{13} - a_{14} = 0$. Da alle weiteren Glieder laut Vorschrift nur von den beiden vorherigen Gliedern abhängen, ist die Folge periodisch, die Periodenlänge ist 12. Die Summe der ersten 12 Glieder der Folge ist 0, und wegen der Periodizität ist die Summe der ersten $12 \cdot 2 = 24$ Glieder ebenfalls 0. Die Summe der ersten 25 Glieder ist also gleich $0 + a_{25} = a_1 = 1$.

22. Die vier Buchstaben A, B, C, D sollen so durch die vier Zahlen 1, 2, 3, 4 ersetzt werden, dass $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot D + D \cdot A$ durch 3 teilbar ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 24

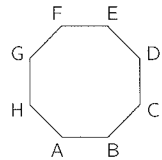
Lösung: Die Summe in der Aufgabe lässt sich schreiben als $(A + C)(B + D)$, ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn einer der Faktoren durch 3 teilbar ist. Mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ ist das nur möglich, wenn einer der Faktoren $1 + 2$ oder $2 + 4$ ist. Daraus ergeben sich durch Vertauschen die aufgelisteten 16 Möglichkeiten:

A	C	B	D	A	C	B	D	A	C	B	D	A	C	B	D
1	2	3	4	2	4	1	3	3	4	1	2	1	3	2	4
1	2	4	3	2	4	3	1	4	3	1	2	3	1	2	4
2	1	3	4	4	2	1	3	3	4	2	1	1	3	4	2
2	1	4	3	4	2	3	1	4	3	2	1	3	1	4	2

Eine andere Lösung ist die folgende: Eine der Zahlen A, B, C, D muss gleich 3 sein. Wir betrachten zuerst den Fall $A = 3$. In dem Ausdruck $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot D + D \cdot A$ sind $A \cdot B$ und $D \cdot A$ bereits durch 3 teilbar. Es muss also $B \cdot C + C \cdot D = C(B + D)$ durch 3 teilbar sein. Da $C \neq 3$ ist, muss $(B + D)$ ein Vielfaches von 3 sein. Es bleiben nur die vier Möglichkeiten $B = 1, D = 2$; $B = 2, D = 1$; $B = 2, D = 4$ und $B = 4, D = 2$. Wir finden dieselbe Anzahl von Möglichkeiten, wenn einer der anderen Buchstaben gleich 3 ist. Folglich gibt es $4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten.

23. In einem regelmäßigen Achteck $ABCDEFGH$ wird von den Eckpunkten C, D, E, F, G, H einer zufällig ausgewählt und mit A verbunden. Dann wird noch einmal unter denselben 6 Eckpunkten einer zufällig ausgewählt und mit B verbunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Achteck durch die beiden Strecken in genau 3 Teile geteilt wird?

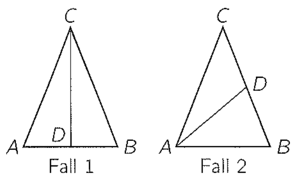
(**A**) $\frac{5}{18}$ (**B**) $\frac{2}{5}$ (**C**) $\frac{4}{9}$ (**D**) $\frac{7}{15}$ (**E**) $\frac{1}{3}$



Lösung: Da es für jeden der zwei Punkte A und B genau 6 mögliche Verbindungspunkte gibt, gibt es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Streckenpaare. Von diesen bestimmen wir nun diejenigen, durch die das Achteck in 3 Teile geteilt wird. Wenn A mit C oder H verbunden ist, gibt es kein solches Streckenpaar. Ist A mit D verbunden, so wird das Achteck nur durch die Strecke $\overline{BD}$ in 3 Teile geteilt. Wenn A mit E verbunden ist, sind die 2 Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ möglich, wenn A mit F verbunden ist, die 3 Strecken $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, und wenn A mit G verbunden ist, die 4 Strecken $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{BG}$. Das sind insgesamt 10 Möglichkeiten, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

24. Wie groß ist der kleinstmögliche Winkel in einem gleichschenkligen Dreieck ABC, in dem es eine Seitenhalbierende gibt, die das Dreieck ABC in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt?

(**A**) 15° (**B**) 22,5° (**C**) 30° (**D**) 36° (**E**) 45°



Lösung: Wir betrachten zuerst den Fall, dass die Seitenhalbierende die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC halbiert. Da die entstehenden Dreiecke rechtwinklig sind, sind deren Basiswinkel 45° groß. Folglich ist das Ausgangsdreieck ebenfalls rechtwinklig, der gesuchte kleinste Winkel ist in diesem Fall 45° groß. Im anderen Fall, dass die Seitenhalbierende einen der Schenkel halbiert, ist einer der Winkel $\measuredangle ADB$ oder $\measuredangle CDA$ mindestens 90° groß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies wie im Bild $\measuredangle CDA$. Dann ist $\overline{AD}$ ein Schenkel im gleichschenkligen Dreieck ADC, also $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{DB}$. Folglich ist $\overline{AB}$ Basis im Dreieck ABD. Aber $\measuredangle BAC > \measuredangle BAD = \measuredangle DBA = \measuredangle BAC$. Das ist ein Widerspruch, dieser Fall tritt gar nicht ein.

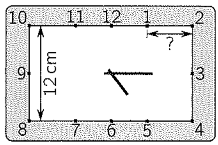
Bis auf Ähnlichkeit gibt es also nur ein einziges Dreieck mit der geforderten Eigenschaft, der kleinste Winkel ist 45° groß.

25. Beginnend mit dem Bruch $\frac{7}{8}$ führt Yildiz nacheinander, ohne die entstehenden Brüche zu kürzen, eine von zwei möglichen Operationen aus: Entweder addiert sie 8 zum Zähler, oder sie addiert 7 zum Nenner. Nach mehreren Operationen erhält Yildiz wieder einen Bruch mit dem Wert $\frac{7}{8}$. Wie viele Operationen hat Yildiz mindestens ausgeführt?

(**A**) 56 (**B**) 81 (**C**) 109 (**D**) 113 (**E**) 128

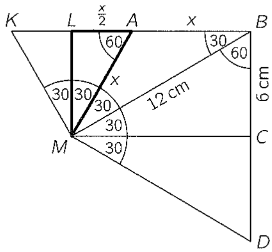
Lösung: Nach mehreren ausgeführten Operationen hat Yildiz' Bruch die Form $\frac{7+8n}{8+7m}$, wobei $\frac{7+8n}{8+7m} = \frac{7}{8}$ gelten soll. Daraus erhalten wir $8(7+8n) = 7(8+7m)$ bzw. $64n = 49m$. Da n und m positiv und ganzzahlig sind und 64 und 49 keinen gemeinsamen Teiler haben, muss n ein Vielfaches von 49 und m ein Vielfaches von 64 sein. Die kleinsten positiven Zahlen, die das erfüllen, sind $n = 49$ und $m = 64$. Yildiz hat mindestens $49 + 64 = 113$ Operationen ausgeführt und war offenbar sehr geduldig.

26. Zacharias Zeiger hat eine modische, rechteckige Uhr gebaut. Die Zeiger drehen sich gleichmäßig wie bei jeder anderen Uhr. Der Abstand zwischen der 8 und der 10 beträgt 12 cm. Wie groß ist der Abstand (in cm) zwischen der 1 und der 2? (Abb. *nicht* maßstabsgerecht)



(**A**) $3\sqrt{3}$ (**B**) $2\sqrt{3}$ (**C**) $4\sqrt{3}$ (**D**) $2+\sqrt{3}$ (**E**) $12-3\sqrt{3}$

Lösung: Im rechten oberen Ausschnitt des hellen Rechtecks in der Uhr bezeichnen wir mit M den Drehpunkt der Zeiger, das ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Rechtecks. Der Punkt A gehört zur 1, B zur 2 usw. Da sich die Zeiger gleichmäßig drehen, beträgt jeder Winkel bei M von einer zur nächsten Zahl $360° : 12 = 30°$. $\triangle MDB$ ist gleichseitig, da $\overline{MD} = \overline{MB}$ und der Winkel $\measuredangle DMB = 2 \cdot 30° = 60°$ groß ist. Damit ist $\measuredangle ABM = 90° - 60° = 30°$ und folglich $\triangle MBA$ gleichschenklig, also $\overline{MA} = x$. $\triangle MAL$ ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Folglich ist $\overline{AL} = \frac{x}{2}$, und nach dem Satz des Pythagoras gilt $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (6\,\text{cm})^2$, woraus $x = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ folgt.

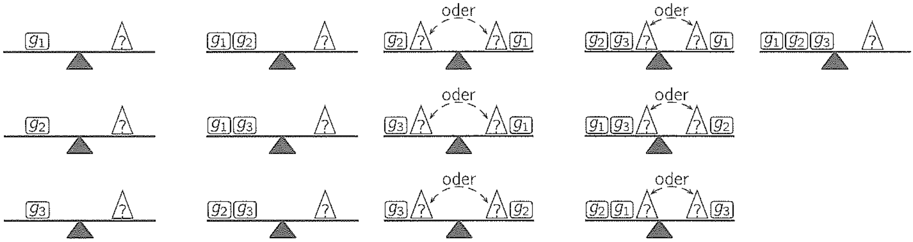


27. Feinmechaniker Friebe fertigt einen Satz aus 3 Gewichtsstücken an. Mit Hilfe dieser 3 Gewichtsstücke möchte er mit einer Balkenwaage die ganzzahligen Gewichte 1 g, 2 g, 3 g, ..., N g abwiegen können, wobei N so groß wie möglich sein soll. Jedes Gewichtsstück kann auf jeder der beiden Waagschalen verwendet oder auch beiseite gestellt werden. Wie groß ist N?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 13 (**E**) 16

Lösung: Wir fragen uns zuerst, wie viele verschiedene Gewichte mit 3 beliebigen Gewichtsstücken maximal gewogen werden können. Es gibt 3 Möglichkeiten, nur ein Gewicht zu benutzen. Wenn wir zwei Gewichte benutzen, können wir entweder beide auf die gleiche oder auf verschiedene Waagschalen stellen, dafür gibt es jeweils 3 Möglichkeiten. Wenn wir alle drei Gewichte verwenden, gibt es eine Möglichkeit alle drei Gewichte auf eine Waagschale zu stellen und 3 Möglichkeiten zwei Gewichte auf die eine und ein Gewicht auf die andere Waagschale zu stellen.

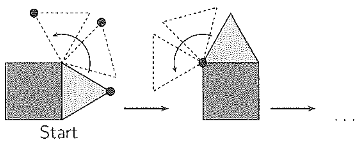
Insgesamt sind theoretisch maximal 13 verschiedene Gewichte messbar, in der folgenden Abbildung sind die Möglichkeiten dargestellt:



Mit etwas Probieren lässt sich herausfinden, dass es tatsächlich einen passenden Satz Gewichtsstücke gibt, mit dem sich alle Gewichte von 1 g bis 13 g wiegen lassen. Eine logische Herleitung ist folgende: Wenn alle Gewichte zwischen 1 g und 13 g gewogen werden könnten, dann müssten alle drei Gewichtsstücke zusammen 13 g wiegen und die beiden schwersten zusammen 12 g. Das leichteste der Gewichtsstücke muss folglich 1 g wiegen. Das Gewicht 11 g können wir wiegen, indem wir die beiden schwersten Gewichtsstücke auf eine Waagschale legen und das 1-g-Stück auf die andere. Das Gewicht 10 g können wir nur erhalten, indem wir die beiden Gewichtsstücke auf eine Waagschale legen, die zusammen am zweitschwersten sind. Da dazu das 1-g-Stück gehören muss, gibt es also auch ein 9-g-Stück. Das dritte Gewichtsstück wiegt folglich 3 g.

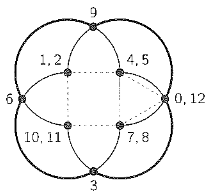
Wer sich die Gewichte genau ansieht, stellt fest, dass es sich um die ersten Dreierpotenzen handelt: $1 = 3^0, 3 = 3^1, 9 = 3^2$. Wäre die Aufgabe für m Gewichtsstücke gestellt, wären die passenden Gewichte in Gramm: $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{m-1}$. Mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe ergibt sich dann als größtes wiegbares Gewicht $N = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{m-1} = \frac{1}{2}(3^m - 1)$.

28. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1 rollt, ohne zu rutschen, um ein Quadrat der Seitenlänge 1 (siehe Bild). Wie lang ist der Weg, den der markierte Punkt zurückgelegt hat, wenn das Dreieck und der Punkt ihre Startposition zum ersten Mal wieder erreicht haben?



(A) 4π **(B)** $\frac{28}{3}\pi$ **(C)** $\frac{14}{3}\pi$ **(D)** 8π **(E)** $\frac{21}{2}\pi$

Lösung: In der Abbildung ist zum einen zu sehen, in welcher Position sich der Punkt nach n Drehungen des Dreiecks befindet und zum anderen, auf welchem Weg sich der Punkt bewegt. Die dicker gezeichneten Kreissegmente durchläuft der Punkt je zweimal und die anderen Kreissegmente jeweils einmal. Nach 12 Drehungen haben Dreieck und Punkt ihre Ausgangslage wieder erreicht. Bei 4 dieser 12 Drehungen bewegt sich der Punkt nicht. Bei den anderen 8 Drehungen wandert der Punkt jeweils auf einem Kreis mit Radius 1 um $30° + 180° = 210°$ weiter. Das ist $\frac{210}{360} = \frac{7}{12}$ des Kreisumfangs 2π. Bei der beschriebenen Bewegung legt der Punkt also einen Weg der Länge $8 \cdot \frac{7}{12} \cdot 2\pi = \frac{28}{3}\pi$ zurück.



29. Gestern in unserer Mathe-AG sollten wir uns vorstellen, wie der Graph der Funktion $g(x) = x^2$ von 2012 Geraden in jeweils 2 Punkten geschnitten wird. Dabei ist jede dieser 2012 Geraden parallel zur Geraden $y = x$. Wie groß ist dann die Summe der x-Koordinaten aller Schnittpunkte?

(**A**) 0 (**B**) 1006 (**C**) 2012
(**D**) 4024 (**E**) Es hängt von der Lage der Geraden ab.

Lösung: Eine Gerade, die parallel zu der Geraden $y = x$ verläuft, wird durch die Gleichung $y = x + c$ beschrieben. Ein Schnittpunkt (x_0, y_0) der beiden Graphen erfüllt $y_0 = x_0^2$ und $y_0 = x_0 + c$, und durch Gleichsetzen erhalten wir die quadratische Gleichung $x_0^2 = x_0 + c$ bzw. $x_0^2 - x_0 - c = 0$. Der Satz von Vieta besagt, dass die Summe der Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + ax + b = 0$ gleich $-a$ ist, in diesem Fall also $-(-1) = 1$ (unabhängig von der konkreten Lage der Geraden). Die Summe der x-Koordinaten der 2012 Schnittpunkte ist also $2012 \cdot 1 = 2012$.

Wer den Satz von Vieta nicht kennt, kann die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung auch mit der Lösungsformel finden und diese dann addieren.

30. Frau Unkes magische Kröten sind äußerlich alle gleich, doch es gibt gute und böse. Ist eine gute Kröte mit 3 bösen in einem Raum, wird auch sie böse. Ist eine böse Kröte mit 3 guten in einem Raum, wird sie rot und schämt sich. Zu Testzwecken setzt Frau Unke 3 Kröten in einen leeren Raum. Dann setzt sie die 4. Kröte dazu und nimmt kurz danach die 1. wieder heraus. Dann setzt sie die 5. dazu und nimmt kurz danach die 2. wieder heraus usw. Als sie die 2012. Kröte in den Raum setzt, läuft zum ersten Mal eine Kröte rot an. Welche der folgenden Kröten könnten beide von Beginn an böse gewesen sein?

(**A**) die 1. und die 2011. (**B**) die 2. und die 2010. (**C**) die 3. und die 2009. (**D**) die 4. und die 2012. (**E**) die 2. und die 2011.

Lösung: Aus der Eigenschaft der Kröten folgt sofort, dass genau eine der Kröten mit den Nummern 2009, 2010, 2011 und 2012 böse ist. Wir gehen die möglichen Fälle durch.

Wenn die 2012. Kröte böse ist, so müssen die 2011., 2010. und 2009. gut sein. Dann muss aber auch die 2008. Kröte gut sein, da sie, falls sie böse gewesen wäre, rot angelaufen wäre, als die 2011. Kröte in den Raum gesetzt wurde. Aber das ist *erstmalig* bei der 2012. Kröte passiert. Aus dem gleichen Grund waren auch alle anderen Kröten von Beginn an gut – (**D**) ist also falsch.

Wenn die 2011. Kröte böse ist, so muss auch die 2008. Kröte böse sein, sonst wäre bereits die 2011. Kröte rot angelaufen. Die 2007. Kröte muss aus demselben Grund ebenfalls böse sein. Die 2006. Kröte hingegen ist gut, denn sonst wäre die 2009. Kröte als einzige gute von 4 Kröten böse geworden. So lässt sich weiter argumentieren und wir erhalten schließlich folgendes Muster, wobei g für gut und b für böse steht:

Kröte	1	2	3	4	...	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
	g	g	b	b	...	b	g	g	b	b	g	g	b	g

Die bösen Kröten sind diejenigen, deren Nummern durch 4 teilbar sind oder bei Division durch 4 den Rest 3 lassen. (**A**) und (**E**) sind also auch falsch.

In den beiden anderen Fällen ergibt sich ebenfalls ein Muster. Wenn die 2010. Kröte böse ist, dann sind die bösen Kröten diejenigen, deren Nummer geradzahlig ist – (**B**) ist die Lösung.

Den letzten möglichen Fall erwähnen wir der Vollständigkeit halber: Wenn die 2009. Kröte von Beginn an böse gewesen war, dann sind die bösen Kröten diejenigen, deren Nummer durch 4 teilbar ist oder bei Division durch 4 den Rest 1 lässt – wie zu erwarten war, ist (**C**) also falsch.

Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	A	C	D	E	C	C	E	D

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	B	A	D	B	C	B	C	E	A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	B	D	E	E	C	E	A	C

Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	B	D	D	A	D	C	E	E

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	C	D	B	B	A	C	D	B	C

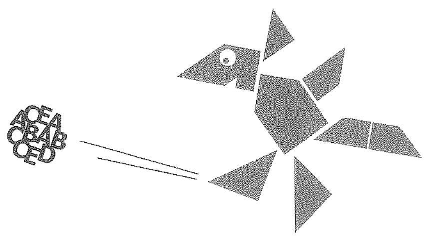
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	C	B	E	B	A	D	D	C	A

Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	E	D	A	D	A	C	D	B	E

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	A	C	D	A	E	B	D	B	D

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	A	E	D	C	D	B	C	B



www.mathe-kaenguru.ch