2011 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2011!

Der Känguru-Mathematikwettbewerb hat heuer am 17. März 2011 stattgefunden. Wieder haben sich in der Schweiz mehr als 16 000 Schülerinnen und Schüler an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben versucht. Sie kamen aus über 200 Schulen.

In diesem Jahr war herauszufinden, welches Ergebnis Nataschas Quatsch-Taschenrechner anzeigt, wie viele Melonen Gerda ernten konnte und welcher Hindernisläufer sich an der Anmeldung noch nicht registriert hat. Der Anwohner der Bogenallee musste entdeckt und „Sockenmathematik" betrieben werden. Wohin wir blicken, überall treffen wir auf Fragen und Probleme, manchmal grosse, oft auch nur kleine, zu deren Formulierung und Lösung Mathematik gebraucht wird. Mathematik umgibt uns in unterschiedlicher Gewandung ständig. Logisches Denken, Strukturieren, das Bilden von Begriffen, Definieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, Trendvoraussagen – all dies wird im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt, auf dass es im täglichen Leben zur Hand ist.

Das Interessante, Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von denen anderer Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den etwa 50 Teilnehmerländern des Wettbewerbs einfliessen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre ist zur Unterstützung einer nachträglichen Beschäftigung mit den verschiedenen mathematischen Problemen gedacht. Für eine ganze Reihe von Aufgaben wurde nicht nur eine Lösungsmöglichkeit angegeben, sondern anhand der Darstellung verschiedener gezeigt, dass es hilfreich ist, unterschiedliche Methoden zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen zu beherrschen.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, L. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk

Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil 978-3-9812144-5-1

Klassenstufen 3 und 4

1. Jan schreibt mit großen Buchstaben KÄNGURU, an jedem Tag einen Buchstaben. Am Freitag schreibt Jan den ersten Buchstaben. Dann schreibt er den letzten Buchstaben am

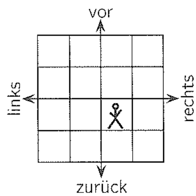
(A) Montag **(B)** Dienstag **(C)** Mittwoch **(D)** Donnerstag **(E)** Freitag

Lösung: Jan schreibt das K am Freitag, das Ä am Samstag, das N am Sonntag, das G am Montag, das erste U am Dienstag, das R am Mittwoch und den letzten Buchstaben, das zweite U, am Donnerstag.

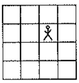
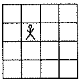
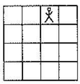
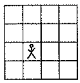
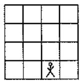
2. $20 \cdot 11 - 20 + 11 =$

(A) 0 **(B)** 1022 **(C)** 2011 **(D)** 211 **(E)** 21

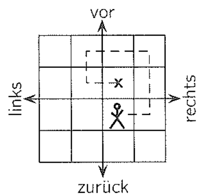
Lösung: Es ist $20 \cdot 11 - 20 + 11 = 220 - 20 + 11 = 200 + 11 = 211$.



3. Auf dem Schulhof ist für ein Hüpfspiel ein 4×4-Feld aufgezeichnet. Bert ist dran und hüpft zuerst ein Feld nach rechts, dann 2 Felder nach vorn, dann 2 Felder nach links, dann eins zurück und dann eins nach rechts. Welches Bild zeigt, wo er sich nun befindet?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Wir zeichnen im Bild rechts, wie Bert auf dem 4×4-Feld gehüpft ist. Seine Endposition ist im Bild **(A)** zu sehen.

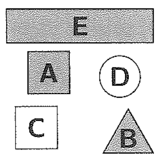


4. Susi wird heute verreisen. Als ihr Vater sie wecken kommt, spielt sie bereits. Susi ist schon vor einer halben Stunde aufgestanden. Nun müssen noch 3 und eine halbe Stunde bis zur Zugabfahrt vergehen. Wie viele Stunden vor Abfahrt des Zuges ist Susi aufgestanden?

(A) 1 **(B)** 2 und eine halbe **(C)** 3
(D) 3 und eine halbe **(E)** 4

Lösung: Wenn 3 und eine halbe Stunde bis zur Zugabfahrt vergehen und Susi schon vor einer halben Stunde aufgestanden ist, als ihr Vater sie wecken kommt, dann vergehen vom Aufstehen bis zur Zugabfahrt 3 und 2 halbe Stunden, also 4 Stunden insgesamt.

5. Von den 5 Figuren rechts im Bild suche ich mir eine aus: Sie ist kein Quadrat. Sie ist grau. Und sie ist entweder rund oder dreieckig. Welche Figur habe ich mir ausgesucht?

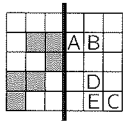


(A) A **(B)** B **(C)** C **(D)** D **(E)** E

Lösung: Da die Figur, die ich mir ausgesucht habe, kein Quadrat ist, fallen die Figuren (**A**) und (**C**) weg. Da die Figur grau sein soll, bleiben nur noch die Figuren (**B**) und (**E**) übrig. Und von diesen beiden ist keine rund, jedoch ist die Figur (**B**) dreieckig.

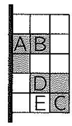
Schneller kommt zur Lösung, wer bemerkt, dass nur (**B**) und (**D**) in Frage kommen, da ja die gesuchte Figur rund oder dreieckig sein muss. Von den beiden ist nur (**B**) grau, also die gesuchte.

6. Falten wir das Stück Karopapier entlang der dicken Linie, so ist einer der 5 Buchstaben *nicht* von einem grauen Karo bedeckt. Welcher?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

Lösung: Wir zeichnen, wie die grauen Quadrate nach dem Falten über den Buchstaben liegen, das heißt, wir spiegeln die Quadrate an der dicken Linie. Das E ist nicht bedeckt.



KAENGURU-Hölzchenspiel

Mit 43 gleich langen Streichhölzchen ist das Wort KAENGURU *zu legen:*

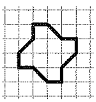
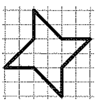
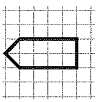
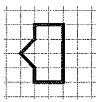
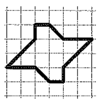
1. *Wer schafft es, durch Umlegen von 12 Hölzchen und Hinzufügen von 2 Hölzchen das Wort* AUFGABEN *zu legen?*
2. *Wer schafft es, durch Umlegen von 13 Hölzchen und Wegnahme von 2 Hölzchen das Wort* MATHEASS *zu legen?*
3. *Wie viele Hölzchen müssen jeweils umgelegt und wie viele weggenommen oder hinzugefügt werden, um aus dem Wort* KAENGURU *die Wörter* PRIMZAHL *und* SECHSECK *zu erzeugen?*

7. Ole will sich ein Heft und eine Buchhülle kaufen. An der Kasse sieht er Isa und Ron. Isa bezahlt gerade 1,80 € für 3 Hefte. Und Ron bezahlt 0,85 € für eine Buchhülle. Da weiß Ole, wie viel er bezahlen muss. Es sind

(**A**) 1,10 € (**B**) 1,15 € (**C**) 1,25 € (**D**) 1,30 € (**E**) 1,45 €

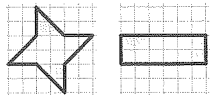
Lösung: Da Isa für 3 Hefte 1,80 € bezahlt, kostet ein Heft 1,80 € : 3 = 0,60 €. Für seine Buchhülle muss Ole ebenso viel bezahlen wie Ron für seine, also 0,85 €. Insgesamt muss Ole also 0,60 € + 0,85 € = 1,45 € bezahlen.

8. Welche Figur hat die größte Fläche?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir können uns vorstellen, dass die Figuren (**A**) und (**E**) aus Figur (**B**) entstehen, indem 4 bzw. 2 Spitzen abgeschnitten werden. Sie sind also kleiner als Figur (**B**).

Nun schneiden wir bei Figur (**B**) die grau gezeichneten Ecken ab und legen sie nach links bzw. rechts, wie im Bild zu sehen. Der Flächeninhalt der Figur bleibt dabei gleich, und wir erkennen sofort, dass (**B**) viel größer ist als (**C**) bzw. (**D**). Figur (**B**) hat also die größte Fläche.



Wer mag, kann die Kästchen auch auszählen. Figur (**B**) besteht aus insgesamt 8 vollständigen und 8 halben kleinen Quadraten. Bei den Figuren (**C**) und (**D**) hingegen kommen zu den 8 vollständigen jeweils nur 2 halbe kleine Quadrate hinzu.

9. Till verbringt die Ferien auf dem Bio-Bauernhof seiner Tante. Heute früh hat er 66 Eier eingesammelt. Für den Verkauf verteilt er sie auf Schachteln für 6 Stück und für 12 Stück. Till soll mit so wenig Schachteln wie möglich auskommen. Wie viele Schachteln sind das?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 11

Lösung: Um mit möglichst wenigen Eierschachteln auszukommen, wird Till so viele Eier wie möglich in 12-er Schachteln legen. Das sind $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 5 \cdot 12 = 60$ Eier. Die restlichen 6 Eier packt er in eine 6-er Schachtel. Er braucht also insgesamt 6 Schachteln.

10. Ronja hat 11 Münzen in ihrer Hosentasche gesammelt, nur 5-Cent-Münzen und 10-Cent-Münzen. Wie viel Geld das insgesamt ist, lässt sich nicht so einfach erraten. Aber einer der folgenden Beträge kann es ganz sicher nicht sein. Welcher?

(**A**) 50 Cent (**B**) 60 Cent (**C**) 75 Cent (**D**) 100 Cent (**E**) 105 Cent

Lösung: Die 11 Münzen, die Ronja in ihrer Tasche hat, sind mindestens 55 Cent wert, denn sie muss ja mindestens $11 \cdot 5$ Cent = 55 Cent haben. Damit ist die Lösung der Aufgabe auch schon gefunden: Weniger als 55 Cent, wie es im Lösungsvorschlag (**A**) angeboten wird, kann Ronja nicht in ihrer Hosentasche haben. 50 Cent sind nicht möglich. Alle anderen Beträge sind möglich:

$$\begin{aligned} 60\text{ Cent} &= 10 \cdot 5\text{ Cent} + 1 \cdot 10\text{ Cent} \\ 75\text{ Cent} &= 7 \cdot 5\text{ Cent} + 4 \cdot 10\text{ Cent} \\ 100\text{ Cent} &= 2 \cdot 5\text{ Cent} + 9 \cdot 10\text{ Cent} \\ 105\text{ Cent} &= 1 \cdot 5\text{ Cent} + 10 \cdot 10\text{ Cent}. \end{aligned}$$

KAENGURU-Lesevielfalt

K	A	E	N	G	U	R	U	S	K	E
M	E	N	G	E	N	U	P	I	A	T
E	N	G	U	R	U	L	N	E	E	A
N	B	U	C	U	I	M	U	G	N	G
G	U	R	U	S	E	U	R	U	T	U
E	U	U	N	O	R	M	U	N	U	R

Wie viele verschiedene Lesemöglichkeiten gibt es für das Wort KAENGURU in dem abgebildeten Buchstaben-Gitter? Dabei darf nur von oben nach unten, von unten nach oben, von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen werden. Ein Wort darf beim Lesen beliebig oft „abknicken“.

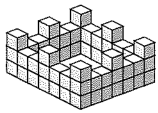
11. Gestern gab es zur Erwärmung in der Mathe-AG ein Wettrechnen mit 10 Aufgaben. Zu Beginn hat jeder 10 Punkte bekommen. Für jede richtige Lösung gab es einen Punkt dazu. Für jede falsche Lösung wurde ein Punkt abgezogen. Gisa hat für ihre 10 Lösungen insgesamt 16 Punkte bekommen. Wie viele Aufgaben hatte sie richtig?

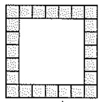
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Gisa hat von den 20 Punkten, die bei richtiger Lösung aller Aufgaben möglich sind, 4 Punkte nicht bekommen. Also hat sie bei 2 Aufgaben statt je eines Punktes dazu je einen Punkt abgezogen bekommen, das heißt, sie hatte 8 Aufgaben richtig.

Wer mag, kann auch die möglichen Punktzahlen Schritt für Schritt auflisten: Wenn Gisa alles richtig hat, bekommt sie 20 Punkte. Hat sie eine Aufgabe falsch, so bekommt sie für die 9 richtigen Aufgaben zu den 10 Punkten 9 hinzu und für die falsche einen Punkt abgezogen, erhält also 18 Punkte. Hat sie zwei Aufgaben falsch gelöst, so bekommt sie 8 Punkte dazu und 2 abgezogen, also $10 + 8 - 2 = 16$ Punkte. Folglich hatte Gisa 8 Aufgaben richtig.

12. Graf Stolzenbein lässt die Mauer seiner neuen Burg aus Granitwürfeln bauen. Die Mauer kostet ein Vermögen: 1 Goldstück pro Würfel. Wie viele Goldstücke kostet die Mauer?




von oben

(**A**) 56 (**B**) 60 (**C**) 64 (**D**) 68 (**E**) 72

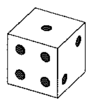
Lösung: Wir können an der Ansicht von oben gut erkennen, wie viele Granitwürfel in der ersten und zweiten Schicht der Mauer übereinander lagern. Es sind $2 \cdot 24 = 48$. Für die dritte Schicht, also die Zinnen, sind noch einmal 8 Granitwürfel erforderlich. Das sind dann insgesamt $48 + 8 = 56$. Da jeder Granitwürfel 1 Goldstück kostet, muss Graf Stolzenbein für die Mauer 56 Goldstücke bezahlen.

13. Unsere schöne alte Schuluhr schlägt zu jeder vollen Stunde die Stundenzahl, also um 7:00 Uhr 7-mal, um 8:00 Uhr 8-mal usw. Zu den halben Stunden, also um 7:30 Uhr, um 8:30 Uhr usw. schlägt sie jeweils einmal. Heute kam ich schon kurz vor 7:30 Uhr in die Schule. Um 10:15 Uhr verlasse ich die Schule zum Schwimmunterricht. Wie oft schlägt die Schuluhr heute, während ich in der Schule bin?

(**A**) 22-mal (**B**) 27-mal (**C**) 30-mal (**D**) 37-mal (**E**) 43-mal

Lösung: Wir zählen die Schläge der Uhr mit dem Gang der Zeit: Da ich kurz vor 7:30 Uhr in der Schule angelangt bin, höre ich zuerst den einen Schlag um 7:30 Uhr. Dann folgen 8 Schläge um 8:00 Uhr, ein Schlag um 8:30 Uhr, 9 Schläge um 9:00 Uhr, ein Schlag um 9:30 Uhr, 10 Schläge um 10:00 Uhr. Und bevor die Uhr ein weiteres Mal schlägt, bin ich schon zum Schwimmunterricht unterwegs. Es ist $1 + 8 + 1 + 9 + 1 + 10 = 30$, also höre ich die Uhr 30-mal schlagen.

14. Reni, Leo, Gabor, Tina, John und Vincent würfeln mit einem Spielwürfel, jeder genau einmal. Jeder würfelt eine andere Punktzahl. Es ist bekannt:



- Reni hat doppelt so viele Punkte wie Leo und dreimal so viele wie Gabor.
- Tina hat viermal so viele Punkte wie John.

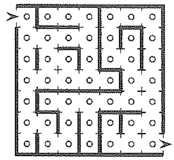
Dann ist die Punktzahl, die Vincent gewürfelt hat, eine

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Wenn Reni doppelt so viele Punkte wie Leo hat, können es nur 2, 4 oder 6 Punkte sein. Sie hat außerdem 3-mal so viele Punkte wie Gabor, dann können es nur 3 oder 6 Punkte sein. Damit beides zutrifft, bleibt nur eine Möglichkeit, nämlich, dass Reni 6 Punkte gewürfelt hat. Daraus folgt, dass Leo eine 3 gewürfelt hat, und Gabor eine 2.

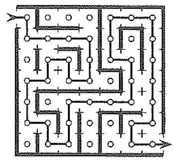
Da Tina 4-mal so viele Punkte wie John gewürfelt hat, kann Tina nur eine 4 gewürfelt haben – und John demzufolge eine 1.

Für Vincent bleibt die 5, denn jeder hat ja eine andere Punktzahl gewürfelt.



15. Ich habe ein Computerspiel, bei dem ich ein Labyrinth durchlaufen und dabei „Juwelen" einsammeln muss. In jeder Zelle ist ein „Juwel", aber ich darf keine der Zellen zweimal betreten. Ich möchte so viele „Juwelen" wie möglich sammeln. Wie viele sind das?

(**A**) 17 (**B**) 33 (**C**) 37 (**D**) 41 (**E**) 49



Lösung: Gehe ich den gezeichneten Weg durch das Labyrinth, kann ich von den 49 „Juwelen" 37 einsammeln. Die verbleibenden „Juwelen" liegen in Nischen, in die ich zwar hineingehen, aber nicht wieder herauskommen kann, ohne die Regeln des Spiels zu verletzen. Auf jedem anderen gültigen Weg durch das Labyrinth liegen weniger als 37 „Juwelen". Also kann ich höchstens 37 „Juwelen" sammeln.

KAENGURU-Kryptogramm I

Im rechts stehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch die 10 Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe entsteht.
Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.
Wer findet mindestens zwei verschiedene Lösungen?

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\ A\ E\ N} \\ +\ \mathrm{G\ U\ R\ U} \\ \hline \mathrm{Z\ A\ H\ L} \end{array}$$

16. Viele Kinder in der Klasse meines Bruders Uli haben ein Haustier. Insgesamt sind es 8 Katzen, 5 Hunde, 6 Kaninchen und 1 Schildkröte. Tim, Lea und Mia haben kein Haustier. Aber es gibt Kinder, die sogar 2 Tiere haben: Emma hat 2 Hunde, Rufus 2 Katzen und Peter außer der Schildkröte noch ein Kaninchen. Wie viele Kinder sind in Ulis Klasse?

(**A**) 17 (**B**) 20 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

Lösung: Die 8 Katzen gehören zu 7 Kindern, weil Rufus 2 Katzen hat. Die 5 Hunde gehören zu 4 Kindern, weil Emma 2 Hunde hat. 5 Kinder haben jedes ein Kaninchen, und Peter hat ein Kaninchen und die Schildkröte. Zusammen mit den 3 Kindern, die kein Haustier haben, sind das $7 + 4 + 5 + 1 + 3 = 20$ Kinder in Ulis Klasse.

Eine andere Möglichkeit, zu diesem Ergebnis zu gelangen, ist die folgende: Wenn die 3 Kinder mit je zwei Haustieren den 3 Kindern ohne Haustier jeweils eins ihrer Tiere abgeben würden, hätten alle Kinder in der Klasse genau ein Haustier. Damit gibt es in der Klasse genauso viele Kinder wie die Kinder Haustiere haben, also $8 + 5 + 6 + 1 = 20$.

17. Mit den drei Karten im Bild lassen sich Zahlen bilden, z. B. 989 oder 689. Wie viele *verschiedene 3-stellige* Zahlen lassen sich mit diesen Karten bilden?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Wichtig ist, dass die 6, dreht man sie einmal herum, zu einer 9 wird (und umgekehrt). Das kommt in den Beispielzahlen der Aufgabe bereits zum Ausdruck. In jeder 3-stelligen Zahl, die gelegt werden kann, zeigt eine Karte die 8. Für die anderen beiden Karten gibt es die folgenden Möglichkeiten:

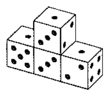
1. Auf beiden Karten ist die 6.
2. Auf beiden Karten ist die 9.
3. Auf einer Karte ist die 6, auf der anderen die 9.

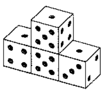
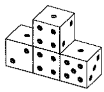
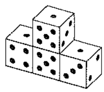
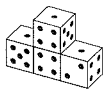
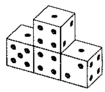
Wir listen rechts alle Zahlen ganz systematisch auf, um keine Möglichkeit zu übersehen. Mit den drei Karten lassen sich die folgenden Zahlen bilden.

668	998	698	968
686	989	689	986
866	899	869	896

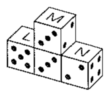
Das sind 12 verschiedene 3-stellige Zahlen.

18. Vier völlig gleiche Würfel sind zu einem Podest zusammengebaut. Bei diesen Würfeln ist die Summe der Punktzahlen auf einander gegenüberliegenden Seiten 7. Wie sieht das rechts gezeichnete Podest von hinten aus?

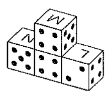


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass der Blick von oben nicht davon beeinflusst ist, ob von vorn oder von hinten auf das Podest geguckt wird. Damit es sich besser argumentieren lässt, beschriften wir die Würfel, die von oben sichtbar sind, mit L, M und N. Der Würfel L hat natürlich hinten drauf die 2 Punkte (denn $5 + 2 = 7$). Da diese 2 Punkte und der eine Punkt auf der oberen Seite so zueinander liegen, wie es beim Würfel N (von vorn) zu sehen ist, gehören auf die rechte Seite (von hinten) die 4 Punkte. Der Würfel M hat – ebenso wie der darunterliegende – von hinten die 4 Punkte, denn $3 + 4 = 7$. Außerdem ist beim Würfel M, wenn man von hinten guckt, die rechte Seitenfläche das Gegenüber der 2-Punkte-Seite, also sind dort die 5 Punkte zu sehen. Damit kann nur (**D**) die Ansicht des Podestes von hinten sein.



von vorn



von hinten

Wer gleich bemerkt hat, dass der oberste Würfel von hinten an seiner rechten Seite die 5 Punkte zeigen muss, konnte unmittelbar schließen, dass nur (**D**) die richtige Lösung sein kann.

19. Ersetze ich die Sternchen in $5{\star}4{\star}1{\star}3{\star}4$ durch + oder −, so entsteht eine Rechenaufgabe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Sternchen so zu ersetzen, dass das Ergebnis 9 ist?

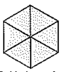
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

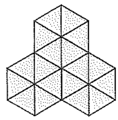
Lösung: Zur 5 muss 4 addiert werden, damit das Ergebnis der Rechnung 9 ist. Setze ich für das erste Sternchen ein +, so muss der Rest 0 ergeben. Das ist nur möglich, indem $5 + 4 - 1 - 3 + 4$ oder $5 + 4 + 1 + 3 - 4$ geschrieben wird. Setze ich für das erste Sternchen ein −, so muss der Rest 8 ergeben, wofür es nur eine Möglichkeit gibt: $5 - 4 + 1 + 3 + 4$. Insgesamt gibt es also drei Möglichkeiten, wie die Zeichen gesetzt werden können.

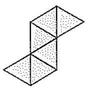
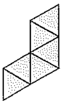
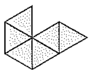
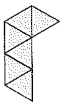
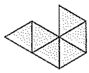
20. Als die Bremer Stadtmusikanten Esel, Hund, Katze und Hahn auf schmalem Pfad nach Bremen loswandern, laufen sie in irgendeiner Reihenfolge einer hinter dem anderen im Gänsemarsch. Nach einer Pause haben Esel und Katze ihre Plätze in der Reihe getauscht. Später tauschen noch Katze und Hahn die Plätze. Dadurch ist die Reihenfolge Hahn, Esel, Hund, Katze entstanden. In welcher Reihenfolge liefen sie zu Beginn?

(**A**) Katze, Esel, Hund, Hahn (**B**) Hahn, Hund, Esel, Katze (**C**) Hund, Esel, Katze, Hahn
(**D**) Esel, Katze, Hund, Hahn (**E**) Katze, Hahn, Hund, Esel

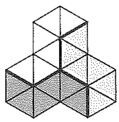
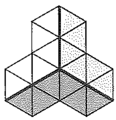
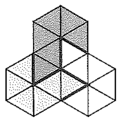
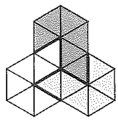
Lösung: Wir erfahren, wie die Reihenfolge der Stadtmusikanten am Ende ihrer Wanderung ist: Hahn, Esel, Hund, Katze. Diese Reihenfolge war entstanden durch den Tausch von Katze und Hahn. Folglich war die Reihenfolge vor diesem Tausch: Katze, Esel, Hund, Hahn. Davor gab es bereits einen Tausch, aus dem diese Reihenfolge entstanden war. Und zwar hatten Esel und Katze ihre Plätze getauscht. Also war die Reihenfolge zu Beginn der Wanderung: Esel, Katze, Hund, Hahn.

21. Tom hat 3 gleiche Teile  zu einem hübschen Legebild zusammengeschoben. Lilli möchte dasselbe Bild wie Tom legen – ebenfalls aus 3 gleichen Teilen. Mit 4 der 5 abgebildeten Sorten ist das möglich. Mit welcher Sorte nicht?

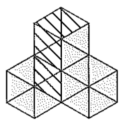
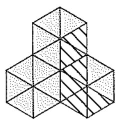
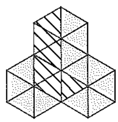


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir zeichnen mit dicken Linien ein, wie die Teile zusammengelegt sein können und heben die Teile hervor. Wir sehen, dass sich aus jeweils 3 Teilen der Sorten (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) das Legebild zusammenschieben lässt. Im Fall (**D**), bei dem von den 6 kleinen Dreiecken 5 in einer Reihe hintereinander angeordnet sind, finden wir keine Möglichkeit, das Legebild zu puzzeln. Egal, wie wir die lange 5-er-Reihe platzieren, sie teilt stets den Rest in zwei ungleiche Teile. In der unteren Abbildung haben wir das für die senkrechte Lage dargestellt.

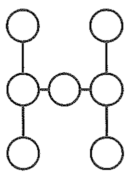
   

(**A**) (**B**) (**C**) (**E**)

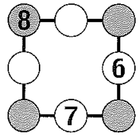
  

KAENGURU-Multiplikation

In die Kreise sollen einstellige natürliche Zahlen so geschrieben werden, dass die drei Produkte der Zahlen, die in einer Linie stehen, gleich sind.

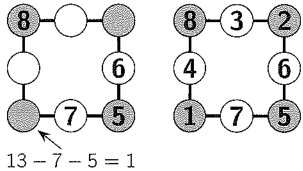


22. Georg schreibt die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 so in die leeren Kreise, dass auf jeder der 4 Quadratseiten die Summe der 3 Zahlen 13 ist. Wie groß ist dann die Summe der 4 Zahlen in den grauen Kreisen?

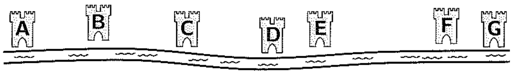


(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Georg könnte sich überlegen, dass er ganz gewiss die 5 nicht in eine Reihe mit der 8 schreiben darf, denn dann bliebe bis zur Summe 13 nur noch 0, und 0 ist bei den Zahlen, die er eintragen darf, nicht dabei. Folglich muss die 5 in der Ecke unten rechts stehen. Nachdem dort die 5 ist, sind alle anderen Eintragungen ein Leichtes, denn es ist stets nur die Ergänzung zu 13 auszurechnen. Die Summe in den grauen Kreisen ist folglich $8+2+5+1=16$.



23. An den Hängen eines Flusses liegen 7 Burgen. Der Bote Agnus soll eine Nachricht von der A-Burg zur G-Burg bringen. Er kennt einige Entfernungen: A-Burg $\longleftrightarrow$ F-Burg: 62 km; B-Burg $\longleftrightarrow$ D-Burg: 25 km; D-Burg $\longleftrightarrow$ A-Burg: 36 km; F-Burg $\longleftrightarrow$ C-Burg: 38 km; B-Burg $\longleftrightarrow$ G-Burg: 60 km. Wie weit muss Agnus gehen?



(**A**) 64 km (**B**) 71 km (**C**) 85 km (**D**) 96 km (**E**) 121 km

Lösung: Wir überlegen uns, dass die einzige Entfernungsangabe, in der das Ziel des Boten Agnus, die G-Burg, auftaucht, diejenige für die Entfernung der B-Burg zur G-Burg ist. Sie beträgt 60 km. Nun müssen wir herausfinden, wie weit es von der A-Burg zur B-Burg ist. Diese Entfernung ist nicht angegeben, aber wir finden, dass für die B-Burg die Entfernung zur D-Burg bekannt ist. Sie beträgt 25 km. Da es von der D-Burg zur A-Burg 36 km sind, ist die B-Burg von der A-Burg also $36\,\text{km} - 25\,\text{km} = 11\,\text{km}$ entfernt. Daraus errechnen wir dann, dass von der A-Burg zur G-Burg $11\,\text{km} + 60\,\text{km} = 71\,\text{km}$ zurückzulegen sind.

24. Charlott stellt eine Knobelaufgabe mit ihrem Namen: Wenn in der Rechenaufgabe verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern und gleiche für gleiche Ziffern stehen, wie groß ist dann die Summe $A+R+T$?

$$\begin{array}{r} C\,H\,A\,R \\ -\,L\,O\,T\,T \\ \hline 2\;0\;1\;1 \end{array}$$

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Wir schreiben die Aufgabe in Form einer Additionsaufgabe, damit sich diese Känguruaufgabe leichter lösen lässt:

$$\begin{array}{r} 2\;0\;1\;1 \\ +\,L\,O\,T\,T \\ \hline C\,H\,A\,R \end{array}$$

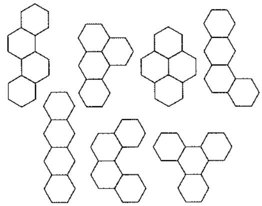
Falls T eine der Ziffern von 0 bis 8 ist, dann ist die Summe $11+TT$ eine zweistellige Zahl, die aus zwei gleichen Ziffern besteht. Da jedoch A und R verschiedene Ziffern sind, muss $T=9$ sein. Bei der Addition $1+T$ wird also der Zehner überschritten. Und dann ergibt sich $11+99=110$, also $A=1$ und $R=0$. Die gesuchte Summe ist $A+R+T=1+0+9=10$.

Kopfnüsse I

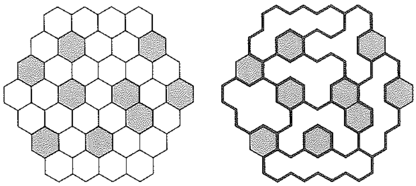
Im Jahre 2007 erschien für die Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus „Das große Buch der Kopfnüsse" von W. A. Portugalow, eine wunderschöne Sammlung von interessanten, kniffligen Knobeleien. Hier einige Kostproben:

Wabenfeldfüllungen

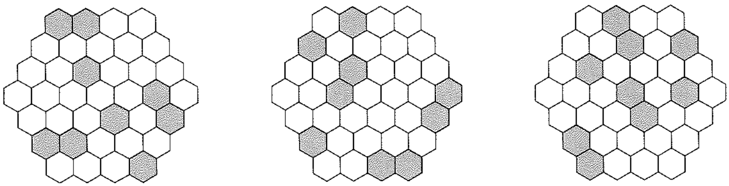
In das Wabenfeld sind – unter Auslassung der dunklen Sechsecksfelder – die rechts abgebildeten 7 Sechsecksteinchen alle einzupassen. Dabei darf es keine Löcher und keine Überlappungen geben.



Die Abbildung rechts zeigt die Lösung einer Wabenfüllaufgabe. Alle 7 Sechsecksteinchen sind in das Feld eingepasst.



Wer kann die folgenden Aufgaben lösen?



Fünf Damen

Auf den Feldern des kleinen 5×5-Schachbretts sind 5 Damen unterzubringen. Es handelt sich um Damen aus dem Schachspiel, die auf dem Brett in jede Richtung beliebig weit ziehen und schlagen dürfen, also sowohl waagerecht, senkrecht als auch diagonal. Die Damen sollen so aufgestellt werden, dass die Felder, auf denen Zahlen stehen, von so vielen Damen bedroht werden, wie die entsprechende Zahl angibt.

Hier ist ein Beispiel, bei dem eines der Felder von 3 der 5 Damen bedroht ist, eines von allen 5 Damen und eines von nur einer der 5 Damen – und die Lösung dieser Aufgabe ist rechts zu sehen.

3				
				5
		1		

3			♕	♕
♕				5
			♕	
		1		♕

Wer kann die folgenden Aufgaben lösen?

		4		
	4			
4			4	

			5	
				3
	1			

			5	
	2			
2				
		2		

Klassenstufen 5 und 6

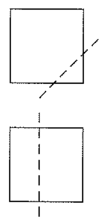
1. Zum Kängurutag soll ein großer bunter Würfel gleich am Eingang unserer Schule aufgehängt werden. Wenzel streicht alle Seitenflächen des Würfels, an jedem Tag genau eine. Am Mittwoch streicht er die erste. Wann ist die letzte Seitenfläche dran?

(**A**) am Sonntag (**B**) am Montag (**C**) am Dienstag
(**D**) am Mittwoch (**E**) am Donnerstag

Lösung: Da der Würfel sechs Seitenflächen hat, braucht Wenzel nach dem Mittwoch noch fünf weitere Tage. Die letzte Seitenfläche ist also am Montag dran.

2. Ein quadratisches Papierstück ist entlang einer geraden Linie in zwei Teile zerschnitten worden. Welche Form kann *keines* der beiden Papierstücken haben?

(**A**) Quadrat (**B**) Rechteck (**C**) rechtwinkliges Dreieck
(**D**) Fünfeck (**E**) gleichschenkliges Dreieck



Lösung: Wenn von einem Quadrat mit geradem Schnitt etwas abgeschnitten wird, so ist die Restfigur gewiss kein Quadrat mehr. Beim Quadrat sind alle vier Seiten gleich lang. Also müsste vom ursprünglichen Quadrat – mit einem geraden Schnitt – von *jeder* Seite ein gleich langes Stück abgeschnitten werden. Das ist jedoch nicht möglich.

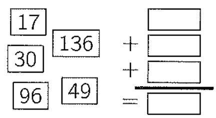
Das obere Bild zeigt eine Zerlegung in ein Fünfeck und ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck, (**C**), (**D**) und (**E**) sind also möglich. Im unteren Bild wird das Quadrat in zwei (nicht-quadratische) Rechtecke geteilt, auch (**B**) ist möglich.

3. $2011 - 1102 =$

(**A**) 909 (**B**) 1809 (**C**) 1109 (**D**) 1009 (**E**) 809

Lösung: Wir rechnen aus $2011 - 1102 = 909$. Wer nicht gern subtrahiert, konnte auch die Lösungszahlen zur 1102 addieren. Wer mit (**A**) beginnt, findet $909 + 1102 = 2011$ und ist fertig.

4. Vier der fünf eingerahmten Zahlen sind in die Additionsaufgabe einzusetzen, so dass diese korrekt ist. Welche der eingerahmten Zahlen ist nicht dabei?



(**A**) 17 (**B**) 30 (**C**) 49 (**D**) 96 (**E**) 136

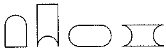
Lösung: Da nur eine der fünf Zahlen auszusondern ist, kann Schätzen eine gute Methode sein, um schnell zur Lösung zu kommen. Wer beispielsweise für die 49 zur Schätzung die 50 nimmt, dem fällt sofort auf, dass $50 + 30$ schon sehr dicht an 96 liegt. Dann ist der Schritt naheliegend, es mit $17 + 30 + 49$ zu versuchen. Die Zahl 136 ist nicht dabei.

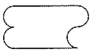
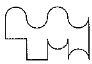
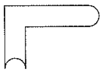
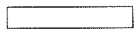
Eine andere gute Möglichkeit zur Lösung der Aufgabe ist es, sich die Endziffern anzugucken. Nur die Kombination $7 + 9 + 0$ führt – außer der sofort zu verwerfenden $6 + 6 + 7$ – auf eine vorhandene Endziffer. Dann ist auch bei dieser Vorgehensweise schon klar, dass die einzige mögliche Kombination $17 + 30 + 49 = 96$ ist.

5. Manchmal spielen wir zum Beginn unserer Mathe-AG ein Konzentrationsspiel. Wir 14 Kinder sagen der Reihe nach alle ungeraden Zahlen, jedes Kind eine Zahl. Allerdings lassen wir die Zahlen aus, die als Ziffer die 3 enthalten. Das erste Kind nennt 1, das nächste nicht 3, sondern 5, das nächste 7 usw. Welche Zahl muss das 14. Kind nennen?

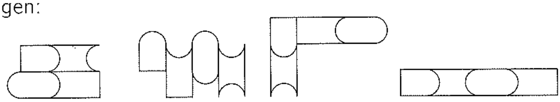
(A) 17 **(B)** 23 **(C)** 29 **(D)** 41 **(E)** 45

Lösung: Wir listen die ersten Zahlen auf, die zu nennen sind: 1; 5; 7; 9. Es ist bereits zu erkennen, dass auch von den Zahlen zwischen 10 und 20 und zwischen 20 und 30 wieder jeweils 4 existieren, die bei dem Abzählspiel genannt werden müssen. Wer mag, kann die auch hinschreiben, es dauert nicht lange: 11; 15; 17; 19; 21; 25; 27; 29. Damit haben wir schon $3 \cdot 4 = 12$ der gesuchten „Rufzahlen". Die restlichen beiden müssen jetzt größer als 40 sein, denn alle 30-er Zahlen fallen weg. Es sind 41 und 45, und 45 ist demnach diejenige Zahl, die das 14. Kind zu rufen hat.

6. Aus den vier Pappteilen  lassen sich verschiedene Figuren legen. Welche Figur lässt sich mit den Pappteilen *nicht* legen?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Figur **(B)** lässt sich nicht legen, denn sie hat drei „Beulen" nach außen, die mit den gegebenen Pappstücken nicht erzeugt werden können. Die anderen vier Figuren lassen sich legen, wie die Skizzen zeigen:



KAENGURU-Summen

Die Summe von 8 ungeraden natürlichen Zahlen beträgt 20. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die 8 Summanden, wenn auch gleiche Zahlen vorkommen dürfen?

7. Karl entwirft Buchstabenschlangen. In ein 4×2-Karopapier wollte er MATHEASS so schreiben, dass aufeinander folgende Buchstaben des Wortes in benachbarten Karos stehen, also solchen, die zumindest eine gemeinsame Ecke haben. Welche der 4×2-Tafeln ist *nicht* nach dieser Regel gefüllt?

(A)

A	H	E	A
T	M	S	S

(B)

S	M	A	T
S	A	E	H

(C)

M	T	S	A
S	A	H	E

(D)

A	S	H	A
S	E	T	M

(E)

T	H	S	A
A	M	E	S

Lösung: Bei Tafel **(C)** hat Karl sich geirrt. Damit die Buchstabenschlange auf das doppelte S endet, müssen die beiden S in benachbarten Karos stehen. Die anderen Buchstabenschlangen können nach Karls Regel geschrieben werden, wie wir hier zeigen:

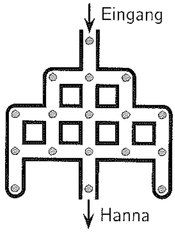
A	H	E	A
T	M	S	S

S	M	A	T
S	A	E	H

A	S	H	A
S	E	T	M

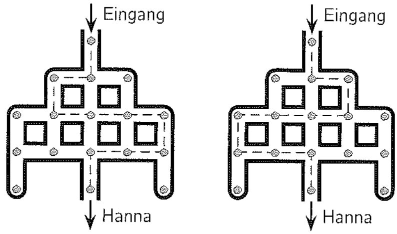
T	H	S	A
A	M	E	S

8. Heute hat Hamster Hannibal Hochzeitstag. Hurtig huscht er hin zu Hanna, seinem Hamsterweibchen. Auf dem Weg durch das Tunnelsystem liegen Haselnüsse (siehe Bild). Hannibal will möglichst viele für Hanna sammeln. Um schnell zu sein, geht er kein Wegstück zweimal und betritt auch keinen Kreuzungspunkt zweimal. Welche größte Anzahl von Haselnüssen kann er sammeln?



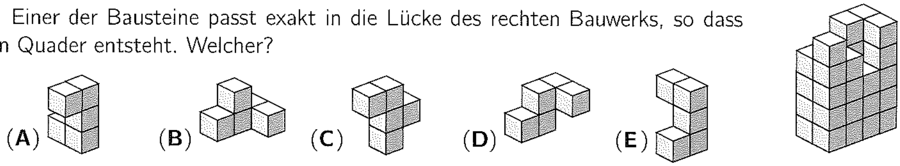
(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Hannibal kann sich, gleich nachdem er die zweite Haselnuss eingesammelt hat, nach links oder nach rechts wenden. Der eingezeichnete Weg zeigt, dass er in beiden Fällen auf der nächsten „Ebene" die Möglichkeit hat, nach rechts bzw. links zu gehen. Ganz klar ist dann, für welche Richtung er sich entscheiden muss, um seiner Hanna möglichst viele Nüsse schenken zu können. Auf jedem der gezeichneten Wege, die ja zueinander gespiegelt sind, kann er 11 Haselnüsse sammeln.

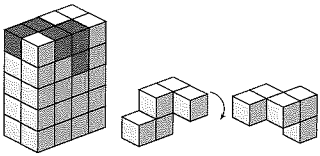


Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 10 gestellt.

9. Einer der Bausteine passt exakt in die Lücke des rechten Bauwerks, so dass ein Quader entsteht. Welcher?



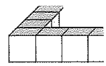
Lösung: In den Bausteinen (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) ist jeweils eine Reihe aus 3 Würfeln enthalten. So etwas passt in das große Bauwerk keinesfalls hinein. Also ist (**D**) der gesuchte Baustein. Er passt auch wirklich, wie das folgende Bild zeigt. Außerdem ist dargestellt, wie der Baustein gedreht werden muss:



10. An Tagen, an denen Kater Hugo einfach nur herumspaziert, trinkt er 60 ml Milch. An Tagen, an denen Hugo auf Mäusejagd geht, trinkt er jedoch ein Drittel mehr. In den letzten 14 Tagen war Hugo jeden zweiten Tag auf Mäusejagd. Wie viel Milch musste ich ihm da insgesamt bereitstellen?

(**A**) 840 ml (**B**) 980 ml (**C**) 1050 ml (**D**) 1120 ml (**E**) 1960 ml

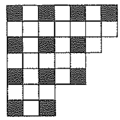
Lösung: Wenn Hugo jeden zweiten Tag – nämlich an den mäusejagdfreien Tagen – in den letzten 14 Tagen 60 ml Milch getrunken hat, so waren dies insgesamt $7 \cdot 60\,\text{ml} = 420\,\text{ml}$. An den Tagen mit Jagd – ebenfalls 7 an der Zahl – hat er ein Drittel mehr getrunken. Ein Drittel von 60 ist $60 : 3 = 20$. Also hat er an diesen Tagen pro Tag $60\,\text{ml} + 20\,\text{ml} = 80\,\text{ml}$ Milch getrunken. Damit hat er an den Jagdtagen insgesamt $7 \cdot 80\,\text{ml} = 560\,\text{ml}$ Milch getrunken. In den 14 Tagen musste ich dem Kater Hugo $420\,\text{ml} + 560\,\text{ml} = 980\,\text{ml}$, also fast einen ganzen Liter Milch hinstellen.



11. Ich spiele mit meinem Freund mit lauter gleich großen Würfeln. Er hat aus 36 Würfeln eine Mauer um ein quadratisches Spielfeld gebaut. Ich lege das Spielfeld innerhalb der Mauer komplett aus. Wie viele Würfel brauche ich?

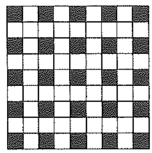
(**A**) 36 (**B**) 49 (**C**) 64 (**D**) 81 (**E**) 100

Lösung: Von den 36 Würfeln umrahmen 32 das quadratische Spielfeld, denn 4 Würfel sind in den Ecken. Folglich hat eine Seite des Spielfelds eine Seitenlänge von $32 : 4 = 8$ kleinen Würfeln. Es passen also $8 \cdot 8 = 64$ Würfel in das quadratische Spielfeld.



12. Im Garten wollen wir eine große quadratische Tanzfläche bauen: Quadratische Fliesen in weiß und schwarz, in den Ecken schwarze Fliesen und zwischen zwei schwarzen Fliesen liegt immer eine weiße. Ein Teil der Fläche ist schon fertig (siehe Bild). Wie viele weiße Fliesen brauchen wir insgesamt, wenn wir 25 schwarze Fliesen verlegen wollen?

(**A**) 25 (**B**) 39 (**C**) 45 (**D**) 56 (**E**) 81



Lösung: Die fertige Tanzfläche ist rechts gezeichnet. Und mit dem Auszählen der weißen Fliesen ist man nach kurzer Zeit fertig. Es sind 56.

Die Aufgabe lässt sich allerdings auch lösen, ohne zu zeichnen und auszuzählen: In der fertigen Tanzfläche sind, da in den Ecken stets schwarze Fliesen liegen, 9×9 Fliesen verbaut. Denken wir uns die weißen Fliesen weg, so können wir die restlichen Fliesen zu einem schwarzen 5×5-Quadrat zusammenschieben. Folglich sind $9 \cdot 9 - 5 \cdot 5 = 81 - 25 = 56$ Fliesen weiß.

KAENGURU-Kryptogramm II

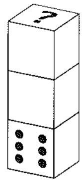
Im rechts stehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch die 10 Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe entsteht.
Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.
Wer findet mindestens zwei verschiedene Lösungen?

$$\begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{P L U S} \end{array}$$

13. Tinko wollte eine Zahl mit 301 multiplizieren, hat jedoch die 0 dabei vergessen und nur mit 31 multipliziert. Sein Ergebnis war 372. Was hätte er erhalten, wenn er mit 301 multipliziert hätte?

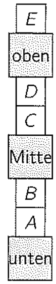
(**A**) 3010 (**B**) 3612 (**C**) 3702 (**D**) 3720 (**E**) 30720

Lösung: Beim Multiplizieren einer noch unbekannten Zahl mit 31 ist als Produkt 372 entstanden. Dann ist der Quotient aus 372 und 31 also die unbekannte Zahl, $372 : 31 = 12$. Die Zahl, die Tinko tatsächlich ausrechen wollte, ist demzufolge $12 \cdot 301 = 3612$.



14. Bei Spielwürfeln ist die Summe der Punkte auf einander gegenüberliegenden Seiten stets 7. Aus 3 Spielwürfeln will ich einen Turm bauen. Die Summe der Punkte auf zwei Seitenflächen, die direkt aufeinanderliegen, soll jeweils 5 sein. Wenn die Punktzahl 6 des untersten Würfels nach vorn zeigt, dann weiß ich, welche Punktzahl von oben zu sehen ist. Welche Punktzahl ist es?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6



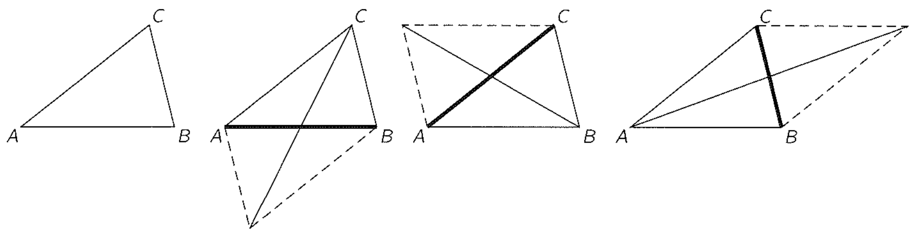
Lösung: In einer Skizze stellen wir die aufeinanderliegenden Seiten des Würfelturms dar. A soll die Zahl der Punkte bedeuten, die sich auf der oberen Seite des untersten Würfels befinden, B die Zahl der Punkte auf der unteren Seite des mittleren Würfels usw. Dann muss also $A + B = 5$ und $C + D = 5$ sein. Folglich können weder A noch B noch C noch D 5 oder 6 sein. A kann auch nicht 1 sein, weil die Seite mit einem Punkt der Seite mit 6 Punkten gegenüberliegt. Die Seite mit 6 Punkten ist jedoch nach vorn gerichtet. Außerdem kann A nicht 3 und nicht 4 sein, denn im ersten Fall wäre $B = 2$ und folglich $C = 5$, im zweiten Fall wäre $B = 1$ und folglich $C = 6$, was wir bereits ausgeschlossen hatten. Damit bleibt nur $A = 2$. Daraus ergibt sich $B = 3$ und folglich $C = 4$. Also ist $D = 1$ und schließlich $E = 6$.

15. Gero hat drei Punkte an der Tafel markiert, die ein Dreieck bilden. Dana soll einen vierten Punkt dazu markieren, so dass die vier Punkte ein Parallelogramm bilden. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?

(**A**) eine (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) vier (**E**) mehr als vier

Lösung: Die drei Punkte, die Gero an der Tafel markiert hat, bilden ein Dreieck, das wir ABC nennen. Wenn wir die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ als Seiten des Parallelogramms wählen, dann finden wir den Punkt D als Schnittpunkt der Parallelen zu $\overline{AB}$ durch C mit der Parallelen zu $\overline{BC}$ durch A. Analog finden wir einen vierten Punkt, wenn wir die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ oder $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ als Seiten des Parallelogramms festlegen. Insgesamt gibt es also 3 Möglichkeiten.

Ein anderer Zugang, zu dem die Zeichnungen gehören, nutzt die Tatsache, dass die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren. In dem Dreieck ABC kann jede der Seiten als eine der Diagonalen genommen werden. Die andere Diagonale ist dann die um die eigene Länge verlängerte Seitenhalbierende jener Seite, die die Diagonale ist.



16. Bei der Fußball-Schulmeisterschaft hat unsere Klasse 3 Tore geschossen, nur einmal wurde unser Tor getroffen. Wir haben ein Spiel gewonnen, eines unentschieden gespielt und eines verloren. Welches ist das Ergebnis unseres gewonnenen Spiels?

(**A**) 2:0 (**B**) 3:0 (**C**) 1:0 (**D**) 2:1 (**E**) 3:1

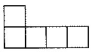
Lösung: Da die gegnerische Mannschaft ein Spiel gewonnen hat und nur insgesamt ein Tor geschossen hat, muss das für unsere Schulmannschaft verlorene Spiel 0:1 ausgegangen sein. Damit ist für das Unentschieden nur die Möglichkeit 0:0 übrig, und die drei Tore, die wir geschossen haben, müssen wir in dem von uns gewonnenen Spiel erzielt haben. Das ist 3:0 für uns ausgegangen.

Inhaltlich ist diese Aufgabe identisch mit Aufgabe 16 in Klassenstufe 7/8.

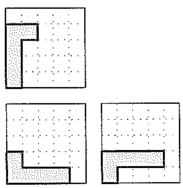
17. Bei Sonnenaufgang erwartet die Tauprinzessin ihre 11 Elfen zum Verteilen der Tautropfen. „Da haben doch tatsächlich welche verschlafen!" stellt sie fest. Also verteilt sie ihre 121 Tautropfen-Kännchen auf die Elfen, die gekommen sind. Jede bekommt die gleiche Anzahl. Es bleiben 4 Tautropfen-Kännchen übrig, die sie nicht mehr gerecht aufteilen kann. Wie viele Elfen haben verschlafen?

(**A**) eine (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) vier (**E**) fünf

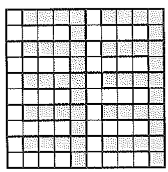
Lösung: Die Tauprinzessin hat $121 - 4 = 117$ Kännchen auf eine Zahl von weniger als 11 Elfen gleichmäßig verteilen können. Die Zahl der Elfen muss also ein Teiler von 117 sein. Nun ist $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$. Wären es nur 3 Elfen, die nicht verschlafen haben, so hätte die Tauprinzessin die 4 restlichen Kännchen noch weiter gerecht aufteilen können; jede der 3 pünktlichen Elfen hätte ein weiteres Kännchen bekommen können, und es wäre nur eines übrig geblieben. Da dies nicht geschehen ist, muss die Zahl der Elfen, die gekommen sind, größer als 4 und kleiner als 11 sein. Dann kann die Zahl der Elfen nur $3 \cdot 3 = 9$ sein, da sich die 117 Kännchen unter 9 Elfen gerecht aufteilen lassen, wobei jede Elfe 13 Kännchen bekommt. Zwei Elfen haben verschlafen.

18. In einer Freistunde versuchen wir, aus lauter gleichen „Haken"  ein Quadrat zu legen. Es darf keine Löcher und keine Überlappungen geben. Welches ist die kleinste Zahl von solchen „Haken", mit denen das überhaupt möglich ist?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 20



Lösung: Ein „Haken" besteht aus 5 kleinen Quadraten. Da ein großes Quadrat entstehen soll, muss die Gesamtzahl der in diesem großen Quadrat „verbauten" kleinen Quadrate eine Quadratzahl sein. Diese Quadratzahl muss durch 5 teilbar sein, da das große Quadrat aus den „Haken" gelegt ist. Also muss die Seitenlänge des großen Quadrats durch 5 teilbar sein. Das kleinstmögliche Quadrat hätte demzufolge die Seitenlänge 5 und würde aus 5 „Haken" bestehen. Dass sich aus 5 „Haken" kein Quadrat erzeugen lässt, sehen wir nach wenigen Versuchen: Wir versuchen ein 5×5-Quadrat mit „Haken" auszulegen und beginnen in einer Ecke. Es gibt nur drei Möglichkeiten, einen „Haken" in eine Ecke zu legen, so wie es die obere Zeichnung zeigt. Wie die weiteren „Haken" zu legen wären, ergibt sich, und schnell ist zu erkennen, dass sich in keinem Fall alle fünf „Haken" unterbringen lassen.



Das nächstgrößere mögliche Quadrat hätte die Seitenlänge 10 und würde aus $10 \cdot 10 : 5 = 20$ „Haken" bestehen. Für die Lösungsmöglichkeit (**E**) finden wir Varianten, die 20 „Haken" so zu legen, dass sie ein Quadrat bilden. Eine Variante ist in der unteren Zeichnung dargestellt.

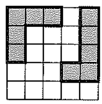
19. Der kleine Bruno hat 7 Kuscheltierkatzen, eine ist weiß, eine gelb, eine rot, eine gelb-weiß, eine rot-weiß, eine gelb-rot und eine rot-weiß-gelb. Er will sich 4 Kuscheltierkatzen zum Schlafen mitnehmen. Von diesen 4 Katzen sollen immer 2 in mindestens einer Farbe übereinstimmen. Wie viele Möglichkeiten hat Bruno für seine Auswahl von 4 Katzen?

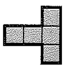
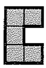
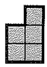
(**A**) eine (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) vier (**E**) fünf

Lösung: Wenn Bruno die vier mehrfarbigen Katzen nimmt, so ist die Bedingung der Aufgabe ganz gewiss erfüllt, denn wie auch immer er zwei von diesen Katzen herausgreift, es gibt immer eine Farbe, in der sie übereinstimmen, da es ja insgesamt nur drei Farben sind. Wenn Bruno eine der einfarbigen Katzen nimmt, so passen dazu immer genau drei andere Kuscheltierkatzen und zwar jene, die *diese* eine Farbe enthalten. Es gibt also folgende vier Möglichkeiten für Brunos Kuscheltierkatzenauswahl:

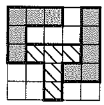
Möglichkeit 1:	gelb-weiß	rot-weiß	gelb-rot	rot-weiß-gelb
Möglichkeit 2:	rot	rot-weiß	gelb-rot	rot-weiß-gelb
Möglichkeit 3:	gelb	gelb-weiß	gelb-rot	rot-weiß-gelb
Möglichkeit 4:	weiß	gelb-weiß	rot-weiß	rot-weiß-gelb

20. Carlotta hat 2 Spielsteine auf ein quadratisches Brett gelegt. Welchen der folgenden 5 Spielsteine kann sie so auf das Brett dazulegen, dass keiner der 4 übrigen mehr passt? (Jeder Spielstein darf beliebig gedreht und gewendet werden, muss aber vollständige Quadrate auf dem Brett bedecken.)



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

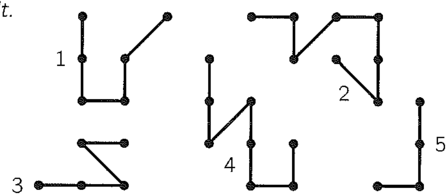
Lösung: Legt Carlotta den Spielstein (**A**) in das Spielfeld, wie es die nebenstehende Zeichnung zeigt, so hat sie damit in den drei Teilgebieten, in die sie das weiße Spielfeldstück geteilt hat, jeweils nur höchstens 4 zusammenhängende Felder. Das sind zu wenige, um einen weiteren Spielstein unterzubringen, denn alle Spielsteine sind 5 Felder groß.

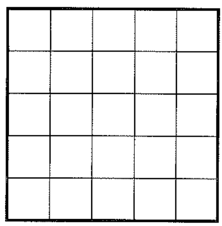


Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 26 gestellt.

KAENGURU-Quadratknobelei

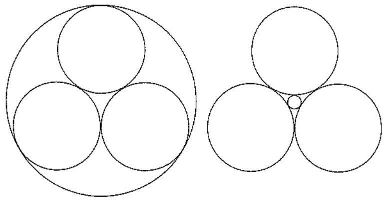
Vier der fünf Punktsysteme sind so in das quadratische Feld einzupassen, dass jedes der 25 Quadrate genau einen Punkt enthält.





21. Ich möchte 4 Kreise an die Tafel zeichnen. Je zwei dieser Kreise sollen *genau einen gemeinsamen* Punkt haben. Welches ist die größtmögliche Anzahl von Punkten, die zu mehr als einem dieser Kreise gehören?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 8



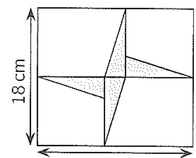
Lösung: Wenn zwei Kreise entsprechend der Aufgabe *genau einen gemeinsamen* Punkt haben, dann berühren sie sich. Würden sie sich schneiden, dann hätten sie zwei gemeinsame Punkte. Wenn also *jeder* der 4 Kreise *alle 3 anderen* berührt, sind das $4 \cdot 3 = 12$ Punkte – allerdings ist hier jeder Punkt doppelt gezählt worden. Die maximale Anzahl von Berührungspunkten von vier Kreisen kann folglich nie größer als 6 sein. Die Zeichnung zeigt zwei Möglichkeiten, wie die Kreise liegen können, so dass es wirklich 6 Berührungspunkte gibt.

KAENGURU-Rechen-Quadrat

In die leeren Felder sind voneinander verschiedene Zahlen zwischen 0 und 10 so einzutragen, dass alle Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

4	·		−		=	1
·		·		+		
	·		−		=	1
−		+		−		
	·		−		=	2
=		=		=		
6		7		2		

22. Vier gleiche rechtwinklige Dreiecke sind, wie es die Abbildung zeigt, in ein Rechteck gezeichnet. Welchen Flächeninhalt hat die gesamte graue Fläche?



(**A**) $20\,\text{cm}^2$ (**B**) $35\,\text{cm}^2$ (**C**) $36\,\text{cm}^2$ (**D**) $42\,\text{cm}^2$ (**E**) $54\,\text{cm}^2$

Lösung: Die Seite, die mit der kürzesten Seite des rechtwinkligen Dreiecks den rechten Winkel einschließt, ist $18\,\text{cm} : 2 = 9\,\text{cm}$ lang. Die kürzeste Seite ist $21\,\text{cm} - 2 \cdot 9\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ lang. Zwei der Dreiecke bilden zusammen ein Rechteck, das folglich 9 cm lang und 3 cm breit ist. Sein Flächeninhalt beträgt $3\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} = 27\,\text{cm}^2$. Da aus den Dreiecken zwei solche Rechtecke gebildet werden können, beträgt der Flächeninhalt der grauen Fläche insgesamt $54\,\text{cm}^2$.

23. Es gibt einige 3-stellige Zahlen, bei denen die Summe ihrer Ziffern gleich dem Produkt dieser Ziffern ist. Wie viele solche 3-stelligen Zahlen gibt es?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 9

Lösung: Viele werden bei dieser Aufgabe nach einigem Probieren vermutet haben, dass nur für die Ziffern 1, 2 und 3 ihre Summe gleich ihrem Produkt ist. Diese Vermutung ist richtig und führt zu den 6 möglichen Zahlen 123, 132, 213, 231, 312 und 321.

Im Folgenden führen wir den exakten Nachweis, dass 1, 2 und 3 tatsächlich die einzigen Ziffern mit der beschriebenen Eigenschaft sind.

Zuerst stellen wir fest, dass keine der drei Ziffern 0 sein darf, da sonst das Produkt 0 ist und nicht gleich der Summe der Ziffern der 3-stelligen Zahl sein kann.

Angenommen *alle drei Ziffern* sind größer oder gleich 2. Sind alle drei Ziffern gleich 2, so ist das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, während die Summe $2 + 2 + 2 = 6$ kleiner ist. Ist nun eine der Ziffern zum Beispiel 3, also um 1 größer als 2, so kommt zur *Summe* der drei Ziffern 1 hinzu, während sich das *Produkt* der drei Ziffern um $4 \cdot 1 = 4$ vergrößert. Wir stellen allgemein fest, dass unter der Voraussetzung, dass keine der Ziffern kleiner als 2 ist, jede Vergrößerung von einer der Ziffern um 1 zu einer Vergrößerung der Summe um 1, des Produktes jedoch um mindestens 4 führt. Der Fall, dass alle drei Ziffern mindestens 2 sind, ist also ausgeschlossen.

Also muss mindestens eine der Ziffern 1 sein. Angenommen, es sind zwei Ziffern gleich 1. In diesem Fall ist die Summe gleich der um 2 vermehrten dritten Ziffer, während das Produkt *gleich* dieser Ziffer ist. Diese Möglichkeit scheidet damit auch aus. Also muss genau eine der Ziffern 1 sein. Für die beiden anderen, a und b, gilt $1 + a + b = 1 \cdot a \cdot b$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $a = 2$ ist. Dann folgt wegen $1 + 2 + b = 2 \cdot b$ sofort $b = 3$. Im Fall $a = 3$ erhalten wir natürlich $b = 2$. Wählen wir $a = 4$, so finden wir $1 + 4 + b = 4 \cdot b$, woraus $5 = 3 \cdot b$ folgt. Keine natürliche Zahl b erfüllt diese Gleichung. Auch für $a = 5, 6, 7, 8, 9$ erhalten wir für b Gleichungen, nämlich $6 = 4 \cdot b$, $7 = 5 \cdot b$, $8 = 6 \cdot b$, $9 = 7 \cdot b$ und $10 = 8 \cdot b$, die keine natürlichen Zahlen als Lösung haben.

Damit haben wir gefunden, dass *nur* die Ziffern 1, 2 und 3 möglich sind.

24. Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden wir alle möglichen 5-stelligen Zahlen, wobei jede Ziffer genau einmal benutzt wird. Gesucht sind nun jene Zahlen $\overline{abcde}$ unter ihnen, für die gilt: Die Zahl $\overline{a}$ ist durch 1, die Zahl $\overline{ab}$ durch 2, die Zahl $\overline{abc}$ durch 3, die Zahl $\overline{abcd}$ durch 4 und die Zahl $\overline{abcde}$ ist durch 5 teilbar. Wie viele solche Zahlen gibt es?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) fünf (**E**) 60

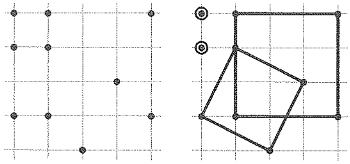
Lösung: Da die 5-stellige Zahl $\overline{abcde}$ durch 5 teilbar sein soll, muss $e = 5$ sein. Da die 4-stellige Zahl $\overline{abcd}$ durch 4 teilbar sein soll, muss zunächst $d = 2$ oder $d = 4$ sein. Die Zahl $\overline{abcd}$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $\overline{cd}$ durch 4 teilbar ist. Falls also $d = 4$ wäre, müsste $c = 2$ sein, denn weder 14 noch 34 ist durch 4 teilbar. Die Ziffer c kann aber nicht gleich 2 sein, da ja die 2-stellige Zahl $\overline{ab}$ durch 2 teilbar sein soll, und folglich $b = 2$ oder $b = 4$ sein muss. Demzufolge muss $d = 2$ sein. Folglich besteht die 3-stellige Zahl $\overline{abc}$ aus den Ziffern 1, 3 und 4. Die Summe dieser Ziffern ist jedoch nicht durch 3 teilbar, also ist $\overline{abc}$ keine durch 3 teilbare Zahl. Und damit wissen wir, dass es keine Zahl mit den geforderten Eigenschaften gibt.

Kopfnüsse II

Im Folgenden sind noch einmal einige Kostproben der Knobeleien aus dem großen Buch der Kopfnüsse zusammengestellt:

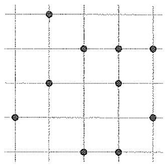
Verborgene Quadrate

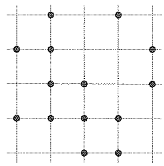
Vor uns liegt ein Gitter, in dem einige der Schnittpunkte dick gezeichnet sind. Wir suchen nun Quadrate, deren vier Eckpunkte „dicke" Punkte sind. Bis auf *genau zwei* dieser dick gezeichneten Punkte sollen alle dick gezeichneten Punkte als Eckpunkte zu Quadraten gehören. Keiner der Punkte soll in mehr als einem Quadrat Eckpunkt sein. Welche zwei Punkte sind es, die zu keinem Quadrat gehören?

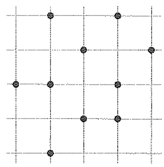


In der Abbildung rechts ist gezeigt, wie die Suche nach verborgenen Quadraten zum Erfolg geführt hat.

Wer kann die folgenden Aufgaben lösen?



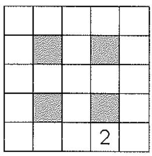




Kreuzende Zahlen

In die Zeilen und Spalten der abgebildeten Felder sollen die aufgelisteten Zahlenkolonnen (aus 5 Zahlen bzw. 7 Zahlen) eingetragen werden. In jedes Kästchen gehört eine Zahl.

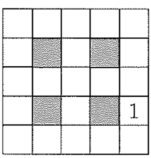
Im rechts abgebildeten Beispiel gehören die 5 Zahlen einer solchen Zahlenkolonne jeweils in eine Zeile oder Spalte. Wie dann die Lösung aussieht, zeigt das rechte Bild.



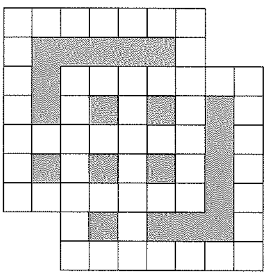
12345
12435
13525
23521
24131
52314

2	4	1	3	1
3		2		2
5	2	3	1	4
2		4		3
1	3	5	2	5

Wer kann die folgenden Aufgaben lösen?



32451
35124
41523
42315
51432
53214



1 2 1 2 3 2 1
1 3 1 3 2 3 1
1 3 2 1 2 1 3
1 3 2 1 2 3 2
2 3 1 2 1 2 3
2 3 1 3 2 3 1
3 1 2 3 1 2 1
3 1 3 2 1 3 1
3 2 1 2 3 2 1
3 2 3 1 2 1 3

Klassenstufen 7 und 8

1. Bea hilft Lea beim Streichen der langen Wand im Flur. Lea möchte senkrechte Streifen, abwechselnd rote und gelbe, je 50 cm breit. Der erste und der letzte Streifen sollen rot sein. Bea misst die Wand und stellt fest: „Das werden insgesamt 6 rote Streifen, das geht genau auf." Wie lang ist die Wand?

(**A**) 4,50 m (**B**) 5,50 m (**C**) 6,50 m (**D**) 7,50 m (**E**) 8,50 m

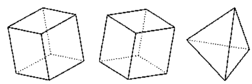
Lösung: Da der erste und der letzte Streifen rot sein sollen, kommen zu den 6 roten Streifen noch 5 gelbe Streifen dazu. Die Wand ist also genauso lang wie $6 + 5 = 11$ Streifen breit sind. Das sind $11 \cdot 50\,\text{cm} = 550\,\text{cm} = 5{,}50\,\text{m}$.

2. Welcher der folgenden Werte ist am größten?

(**A**) 2011^1 (**B**) 1^{2011} (**C**) $1 \cdot 2011$ (**D**) $1 + 2011$ (**E**) $\frac{1}{2011}$

Lösung: Da $\frac{1}{2011}$ als einzige der fünf Zahlen kleiner als 1 ist, ist (**E**) sicher nicht die Lösung. Es ist $2011^1 = 2011$, $1^{2011} = 1$, $1 \cdot 2011 = 2011$ und $1 + 2011 = 2012$. Also ist (**D**) die Lösung.

3. Für ein Spiel malt Emre sämtliche Seitenflächen zweier Würfel und eines Tetraeders farbig an. Wie viele Seitenflächen sind nun insgesamt farbig?



(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 22 (**E**) 24

Lösung: Ein Würfel hat 6 Seitenflächen, ein Tetraeder hat 4 Seitenflächen. Insgesamt sind also $2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 16$ Seitenflächen farbig.

4. Natascha hat einen Quatsch-Taschenrechner: Wenn sie multiplizieren will, dividiert er, und wenn sie addieren will, subtrahiert er. Rasch gibt Natascha $(12 \cdot 3) + (4 \cdot 2)$ ein. Welches Ergebnis zeigt Nataschas Taschenrechner an?

(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 12 (**D**) 28 (**E**) 38

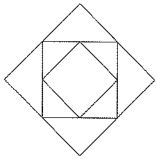
Lösung: Wir ersetzen in der Rechnung „$\cdot$" durch „:" und „+" durch „−". Der Quatsch-Taschenrechner rechnet also $(12 : 3) - (4 : 2) = 4 - 2 = 2$.

5. Beim Blick auf ihre Digitaluhr muss Silvie schmunzeln: „20:11, das ist ja genau die Jahreszahl!" Wann erscheint das nächste Mal eine Uhrzeit, in der wir die vier Ziffern $0, 1, 1, 2$ in irgendeiner Reihenfolge vorfinden?

(**A**) in 40 Minuten (**B**) in 45 Minuten (**C**) in 50 Minuten (**D**) in 55 Minuten (**E**) in 60 Minuten

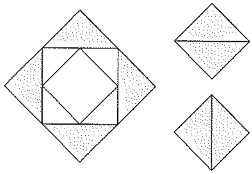
Lösung: Nach 20:11 gibt es mit derselben Stundenzahl keine weitere Uhrzeit mit diesen vier Ziffern. Wir versuchen es in der nächsten Stunde mit der Stundenzahl 21. Es bleiben 0 und 1 für die Minuten, und damit ist klar, dass die Uhrzeit 21:01 die gesuchte Uhrzeit ist. Von 20:11 bis dahin vergehen 50 Minuten.

6. Die Ecken des kleinsten Quadrats halbieren die Seiten des mittleren Quadrats, und die Ecken des mittleren Quadrats halbieren die Seiten des größten Quadrats. Der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats beträgt $6\,\text{cm}^2$. Um wie viel unterscheidet sich der Flächeninhalt des größten Quadrats von dem des mittleren Quadrats?



(**A**) um $6\,\text{cm}^2$ (**B**) um $9\,\text{cm}^2$ (**C**) um $12\,\text{cm}^2$ (**D**) um $15\,\text{cm}^2$ (**E**) um $18\,\text{cm}^2$

Lösung: Der gesuchte Flächeninhalt ist die Summe der Flächeninhalte der vier grauen Dreiecke (siehe Bild). Da die längste Seite eines solchen Dreiecks genauso lang ist wie die Diagonale des kleinsten Quadrats, lassen sich zwei dieser Dreiecke zu einem Quadrat zusammensetzen, das denselben Flächeninhalt wie das kleinste Quadrat hat. Damit ist der Flächeninhalt der grauen Fläche $2 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$.



7. $\dfrac{2011 \cdot 20{,}11}{2{,}011 \cdot 201{,}1} =$

(**A**) 0,01 (**B**) 0,1 (**C**) 1 (**D**) 10 (**E**) 100

Lösung: Wir rechnen:

$$\frac{2011 \cdot 20{,}11}{2{,}011 \cdot 201{,}1} = \frac{2{,}011 \cdot 1000 \cdot 2{,}011 \cdot 10}{2{,}011 \cdot 2{,}011 \cdot 100} = \frac{\cancel{2{,}011} \cdot 1000 \cdot \cancel{2{,}011} \cdot 10}{\cancel{2{,}011} \cdot \cancel{2{,}011} \cdot 100} = \frac{1000 \cdot 10}{100} = 100\,.$$

8. Rike stellt Paolo ein Rätsel: „Ich addiere die kleinste dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8 und die größte dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8. Was ist mein Ergebnis?"

(**A**) 707 (**B**) 907 (**C**) 916 (**D**) 1000 (**E**) 1001

Lösung: Die kleinste dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8 ist 107, die größte dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8 ist 800. Somit ist die gesuchte Summe gleich $107 + 800 = 907$.

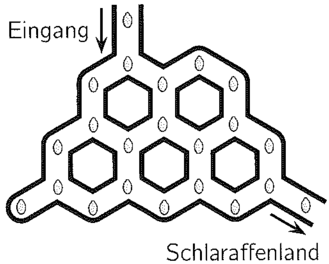
9. Ich möchte die Zahl 96 als Summe von mindestens 2 *aufeinanderfolgenden* natürlichen Zahlen schreiben. Wie viele Zahlen brauche ich dafür?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Summe *zweier* aufeinanderfolgender Zahlen ist stets ungerade, also müssen es mindestens 3 Summanden sein. Wenn sich 96 als eine Summe von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen schreiben lässt, dann muss die mittlere dieser 3 Zahlen $96 : 3 = 32$ sein. Es gilt $96 = 31 + 32 + 33$ und (**B**) ist die Lösung.

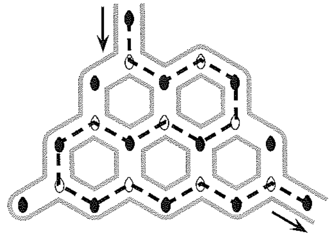
Der Vollständigkeit halber überlegen wir uns noch, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt, die Zahl 96 als Summe von *aufeinanderfolgenden* natürlichen Zahlen zu schreiben. Ist nämlich die Anzahl der Summanden ungerade, muss 96 wie bei 3 Summanden durch diese Anzahl teilbar sein. Aber $96 = 2^5 \cdot 3$ hat keine weiteren ungeraden Teiler. Bei einer geraden Anzahl von Summanden liegt der Durchschnitt der Summanden genau in der Mitte zwischen zwei natürlichen Zahlen. Dann ist aber der Durchschnitt der mit 2 multiplizierten Summanden eine natürliche Zahl, und wie vorher müsste die Anzahl der Summanden ein Teiler von $2 \cdot 96 = 2^6 \cdot 3$ sein, aber kein Teiler von 96. Das können nur $2^6 = 64$ oder $2^6 \cdot 3 = 192$ sein. Das wären jedoch zu viele Summanden, einige müssten dann negativ sein.

10. Um das legendäre Schlaraffenland zu erreichen, muss Hamster Fridolin durch ein unterirdisches Labyrinth laufen. In den Tunneln locken 22 knackige Kürbiskerne (siehe Bild). Fridolin stopft sich die Backen voll. Er darf aber keine Strecke und keine Kreuzung mehr als einmal betreten. Wie viele der Kürbiskerne kann Fridolin höchstens sammeln?



(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: Im Bild rechts ist ein möglichst langer Weg eingezeichnet, der kein Wegstück und keine Kreuzung mehrfach benutzt. Auf ihm liegen 19 knackige Kürbiskerne.



Um zu sehen, dass Hannibal nicht mehr als 19 Kürbiskerne sammeln kann, markieren wir die Kürbiskerne wie im Bild abwechselnd schwarz und weiß. Nun ist schnell klar, dass Hannibal schwarze und weiße Kürbiskerne abwechselnd sammelt. Insgesamt gibt es 13 schwarze, aber nur 9 weiße. Also kann Hannibal höchstens die 9 weißen und 10 schwarze sammeln, also insgesamt 19. Drei schwarze Kürbiskerne bleiben übrig.

Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 8 gestellt.

11. Was ist am größten?

(**A**) $\frac{2}{3}$ von 4 (**B**) $\frac{3}{4}$ von 5 (**C**) $\frac{4}{5}$ von 6 (**D**) $\frac{5}{6}$ von 7 (**E**) $\frac{6}{7}$ von 8

Lösung: Zu vergleichen sind $\frac{2}{3} \cdot 4$, $\frac{3}{4} \cdot 5$, $\frac{4}{5} \cdot 6$, $\frac{5}{6} \cdot 7$ und $\frac{6}{7} \cdot 8$. Da in diesen Produkten beide Faktoren von (**A**) nach (**E**) wachsen, ist (**E**) die größte der fünf Zahlen.

Alternativ könnten wir rechnen: $\frac{n-1}{n} \cdot (n+1) = \frac{(n-1)(n+1)}{n} = \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2}{n} - \frac{1}{n} = n - \frac{1}{n}$. Die Zahl $n - \frac{1}{n}$ liegt zwischen $n-1$ und n. Also liegen die Zahlen in den Lösungsvorschlägen immer zwischen dem Zähler und dem Nenner des ersten Faktors, und folglich ist für das größte n der Wert am größten.

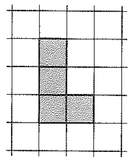
12. Beim Sportfest kontrolliert Moritz die 9 Hindernisläufer, die die Startnummern von 1 bis 9 tragen. Die ersten 8 Läufer erscheinen paarweise bei Moritz, der aus Spaß jeweils die Summe beider Nummern notiert: 17, 13, 7, 5. Immerhin ist jetzt klar: der letzte Läufer trägt die Nummer

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Die Summe der Startnummern aller 9 Teilnehmer ist $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Die Summe der Startnummern der 8 Teilnehmer, die Moritz kontrolliert, ist $17+13+7+5 = 42$. Folglich muss der letzte Läufer die Startnummer $45 - 42 = 3$ tragen.

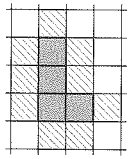
Die Lösung lässt sich auch ermitteln, indem wir für die Zahlen, die Moritz notiert hat, passende Summanden suchen. So kann 17 nur $8+9$ und 13 nur $6+7$ sein. Es bleiben 1, 2, 3, 4 und 5. Durch systematisches Probieren finden wir schnell $7 = 5+2$ und $5 = 1+4$ als einzige Möglichkeit. Die fehlende Startnummer ist die Nummer 3.

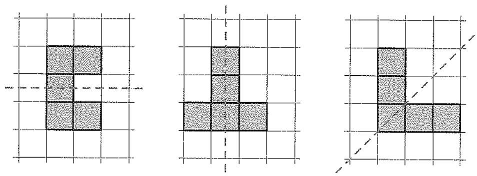
13. Auf kariertem Papier habe ich vier Quadrate grau ausgemalt. Nun möchte ich noch ein fünftes Quadrat grau ausmalen, so dass die entstehende graue Figur eine Symmetrieachse besitzt. Wie viele Möglichkeiten habe ich dafür?



(A) keine **(B)** eine **(C)** zwei **(D)** drei **(E)** vier

Lösung: Da die Figur aus vier Quadraten keine Symmetrieachse besitzt, muss das noch zu färbende Quadrat an ein bereits grau ausgemaltes Quadrat angrenzen. Die möglichen Quadrate sind im Bild rechts schraffiert. Von diesen möglichen Figuren haben nur die folgenden 3 eine Symmetrieachse:





KAENGURU-Kryptogramm III

Im rechts stehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe entsteht.
Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.
Wer findet mindestens zwei verschiedene Lösungen?

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\ A\ E\ N} \\ +\ \mathrm{G\ U\ R\ U} \\ \hline \mathrm{S\ P\ A\ S\ S} \end{array}$$

14. In Gerdas Gewächshaus reifen köstliche Melonen. In den letzten 3 Wochen konnte Gerda schon 12 Melonen ernten. In der 2. Woche erntete sie mehr Melonen als in der 1. Woche. Und in der 3. Woche erntete sie mehr Melonen als in der 2. Woche, allerdings waren das nicht so viele wie in den ersten beiden Wochen zusammen. Wie viele Melonen hat Gerda in der 3. Woche geerntet?

(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 6 **(D)** 5 **(E)** 4

Lösung: Gerda kann in der 3. Woche nicht $12 : 2 = 6$ oder mehr Melonen geerntet haben, da das dann genauso viele oder mehr Melonen wären als in den ersten beiden Wochen zusammen. Also waren es in der 3. Woche höchstens 5 Melonen. Angenommen, es waren in der 3. Woche weniger als 5 Melonen. Dann wären es in der 3. Woche höchstens 4 Melonen, in der 2. Woche höchstens 3 und in der 1. Woche höchstens 2, also ingesamt höchstens $2 + 3 + 4 = 9$ Melonen. Nun ist klar, dass es in der 3. Woche 5 Melonen gewesen sein müssen. Und in den beiden Wochen zuvor hatte Gerda 3 bzw. 4 Melonen.

15. Von einer sechsstelligen, durch 12 teilbaren Zahl sind nur die ersten fünf Ziffern bekannt: 25762. Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Wir bezeichnen die fehlende letzte Ziffer der sechsstelligen Zahl mit x und dividieren schriftlich (siehe Rechnung). Damit die sechsstellige Zahl ohne Rest durch 12 teilbar ist, muss die dreistellige Zahl $10x$ durch 12 teilbar sein. Die gesuchte Ziffer x kann nur die 8 sein.

$$\begin{array}{l} 25762x : 12 = 2146 \\ \underline{24} \\ 17 \\ \underline{12} \\ 56 \\ \underline{48} \\ 82 \\ \underline{72} \\ 10x \end{array}$$

Für die Lösung dieser Aufgabe können wir auch Teilbarkeitsregeln verwenden: Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist. Für die Teilbarkeit durch 3 muss die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar sein. Dann kann die letzte Ziffer nur 2, 5 oder 8 sein. Für die Teilbarkeit durch 4 müssen die letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden: Hier gibt es nur die Möglichkeiten 20, 24 und 28. Damit ist die 8 die einzige Ziffer, für die die Zahl sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist.

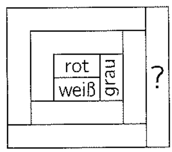
16. Haukes Hockey-Mannschaft hat beim ersten Sommer-Turnier alles gegeben. Von den drei Vorrunden-Spielen hat die Mannschaft ein Spiel gewonnen, ein Spiel verloren, und ein Spiel ging unentschieden aus. Haukes Mannschaft hat insgesamt drei Tore geschossen. Leider gab es auch genau ein Gegentor. Wie war das Ergebnis des gewonnenen Spiels?

(**A**) 2 : 0 (**B**) 3 : 0 (**C**) 1 : 0 (**D**) 2 : 1 (**E**) 3 : 1

Lösung: Das eine Gegentor muss in dem verlorenen Spiel gefallen sein, das also 0 : 1 endete. Das Spiel, das unentschieden ausgegangen ist, kann nur 0 : 0 geendet haben, da die Mannschaft keine weiteren Gegentore kassierte. Das gewonnene Spiel kann damit nur 3 : 0 ausgegangen sein.

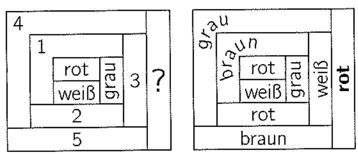
Inhaltlich ist diese Aufgabe identisch mit Aufgabe 16 in Klassenstufe 5/6.

17. Aus roten, braunen, grauen und weißen Stoffresten näht die Großmutter eine Decke (siehe Bild). Dabei sorgt sie dafür, dass je zwei Streifen, die sich berühren, verschiedene Farben haben. Welche Farbe hat der Streifen mit dem Fragezeichen?



(**A**) rot (**B**) braun (**C**) weiß (**D**) grau (**E**) grau oder braun

Lösung: Da es nur 4 mögliche Farben für die Streifen gibt, ist die Farbe eines Streifens eindeutig bestimmt, wenn er an drei Streifen verschiedener Farben angrenzt. So ist die Farbe des Streifens 1, der an rot, weiß und grau grenzt, braun. Streifen 2 grenzt nun an braun, weiß und grau, ist demzufolge rot. Nacheinander finden wir die übrigen Farben, wie sie rechts zu sehen sind. Die gesuchte Farbe ist rot.



18. Von den acht Zahlen 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12, 16 sind zwei Zahlen zu streichen. Dabei soll der Durchschnitt der verbleibenden sechs Zahlen gleich dem Durchschnitt der ursprünglichen acht Zahlen sein. Welche zwei Zahlen müssen gestrichen werden?

(**A**) 5 und 17 (**B**) 9 und 16 (**C**) 10 und 12 (**D**) 10 und 14 (**E**) 9 und 13

Lösung: Der Durchschnitt aller 8 Zahlen ist $\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8} = \frac{96}{8} = 12$. Die beiden zu streichenden Zahlen müssen ebenfalls den Durchschnitt 12, also die Summe 24 haben. Folglich sind die gesuchten Zahlen 10 und 14.

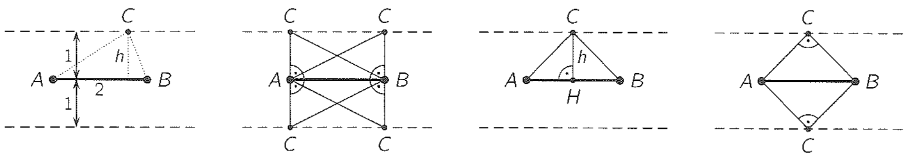
19. Auf ein Blatt Papier ist eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge 2 cm gezeichnet. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, einen Punkt C so zu zeichnen, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und einen Flächeninhalt von $1\,\mathrm{cm}^2$ besitzt?

(**A**) zwei (**B**) vier (**C**) sechs (**D**) acht (**E**) zehn

Lösung: Damit das Dreieck ABC den Flächeninhalt $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ hat, muss C im Abstand von 1 cm zur Grundlinie $\overline{AB}$ liegen, also auf einer der im ersten Bild gezeichneten Parallelen. Der Abstand von C zu $\overline{AB}$ ist dann gleich der Höhe h, so dass $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{cm}\cdot 1\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{cm}^2$ ist.

Nun überlegen wir uns, an welchem der drei Punkte A, B und C sich der rechte Winkel des Dreiecks ABC befinden kann. Zunächst kann der rechte Winkel an einem der beiden gegebenen Punkte A oder B sein. Dafür gibt es offenbar 4 Möglichkeiten (siehe zweites Bild).
Nun überlegen wir, ob sich der rechte Winkel auch bei C befinden kann. Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist mit Basis $\overline{AB}$. Der Winkel bei C hat dann seinen größtmöglichen Wert. Wir zeigen, dass der Winkel in diesem Fall 90° groß ist, und folglich nur diese und die an $\overline{AB}$ gespiegelte Lage als weitere mögliche Positionen für C hinzukommen. In diesem Fall zerlegt nämlich die Höhe h das Dreieck ABC in zwei ebenfalls gleichschenklige Dreiecke, da $\overline{AH} = \overline{HB} = 1\,\mathrm{cm} = h$. Die beiden spitzen Winkel dieser kleinen Dreiecke sind jeweils 45°. Also ist $\measuredangle ACB = 90°$.

Insgesamt gibt es 6 Möglichkeiten für die Lage von C.



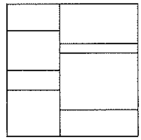
20. Die Zahl a ist größer als 0, aber kleiner als 1. Die Zahl b ist größer als 1. Welcher der folgenden Ausdrücke hat den größten Wert?

(**A**) $a \cdot b$ (**B**) $a + b$ (**C**) $a : b$ (**D**) b (**E**) $\frac{1}{a} + b$

Lösung: Es ist $b > 1$, also $a : b < a < a \cdot b$. Weiter ist $a < 1$, also $a \cdot b < b < a + b$. Wegen $a < 1$ ist $\frac{1}{a} > 1$, also $a + b < \frac{1}{a} + b$. Also ist (**E**) die Lösung.

KAENGURU-Produkt

Auf welche Ziffer endet die Zahl $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2007 \cdot 2009 \cdot 2011$?



21. Ich zerlege ein Quadrat in 8 Rechtecke (siehe Bild). Addiere ich die Umfänge dieser 8 Rechtecke, erhalte ich 120 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats?

(A) $36\,\text{cm}^2$ **(B)** $64\,\text{cm}^2$ **(C)** $100\,\text{cm}^2$ **(D)** $144\,\text{cm}^2$ **(E)** $256\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir bezeichnen die Seitenlänge des Quadrats mit a. Wenn wir nun die Umfänge der Rechtecke addieren, zählen wir jede Rechtecksseite *im Inneren* des Quadrats zweimal. Die Summe der Umfänge aller Rechtecke zu bilden heißt also: Die senkrechten Seiten des Quadrats je einmal und die mittlere senkrechte Linie zweimal zu zählen; das sind $4a$. Von den waagerechten Linien zählen wir die waagerechten Seiten des Quadrats je einmal; das sind weitere $2a$. Die inneren waagerechten Strecken zählen wir je zweimal; das sind noch einmal $6a$. Die genaue Lage der waagerechten Strecken ist nicht von Bedeutung, wichtig ist nur, dass es genauso viele (nämlich 3) waagerechte Linien links von der senkrechten inneren Strecke wie rechts davon gibt. Also ist die Summe der Umfänge $120\,\text{cm} = 4a + 2a + 6a = 12a$, d. h. $a = 10\,\text{cm}$. Der Flächeninhalt des Quadrats ist folglich $a^2 = 100\,\text{cm}^2$.

22. Um die Leistung seiner Hühner zu prüfen, führt Bauer Franz eine Eier-Statistik. Diese Woche war ein Viertel der Hühner faul und legte kein einziges Ei. Seine fleißigsten Hühner hingegen legten ein jedes 7 Eier, und genauso viele Hühner legten je 6 Eier. Die restlichen Hühner legten je 5 Eier. Insgesamt legten die Hühner diese Woche 99 Eier. Wie viele Hühner hat Bauer Franz?

(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 20 **(E)** 24

Lösung: Wir bezeichnen mit x die Anzahl der Hühner, die 7 Eier gelegt haben, mit y die Anzahl der Hühner, die 6 Eier gelegt haben, und mit z die Anzahl der Hühner, die 5 Eier gelegt haben. Nach Voraussetzung gilt $7x + 6y + 5z = 99$, und da $x = y$ ist, folgt $13x + 5z = 99$.

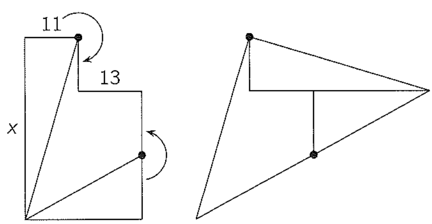
Eine Möglichkeit, die ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung zu finden, besteht darin, schrittweise für x die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ einzusetzen und zu überprüfen, ob der Rest zu 99 durch 5 teilbar ist:

x	$13x$	$99 - 13x$	
0	0	99	nicht durch 5 teilbar
1	13	86	nicht durch 5 teilbar
2	26	73	nicht durch 5 teilbar
3	39	60	$60 = 5 \cdot 12$, also $z = 12$
4	52	47	nicht durch 5 teilbar
5	65	34	nicht durch 5 teilbar
6	78	21	nicht durch 5 teilbar
7	91	8	nicht durch 5 teilbar

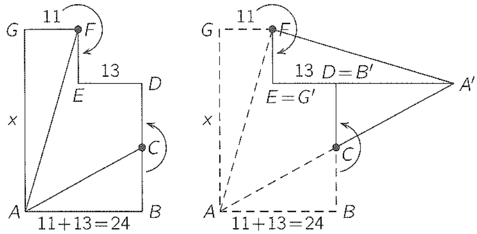
Die einzige Lösung der Gleichung mit positivem, ganzzahligem x und z ist also $x = 3, z = 12$. Die Anzahl der legewilligen Hühner ist somit $x+y+z = 3+3+12 = 18$. Das sind aber nur 3/4 aller Hühner, da noch die faulen Hühner fehlen. Die Gesamtzahl aller Hühner ist somit $18 \cdot 4 : 3 = 24$.

23. Von der abgebildeten Figur (linkes Bild) werden zwei Dreiecke abgeschnitten und um die dick markierten Punkte gedreht, so dass ein Dreieck entsteht (rechtes Bild). Wie lang ist die Seite x?

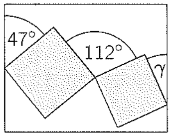
(A) 36 **(B)** 37 **(C)** 38 **(D)** 39 **(E)** 40



Lösung: Wir bezeichnen die Punkte der gegebenen Figur wie im Bild. Bei der Drehung gehen A in A', B in B' und G in G' über. Dabei gilt $x = \overline{A'G'} = \overline{A'B'} + \overline{DE} = \overline{AB} + \overline{DE}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{DE} = 13$. Weiter ist $\overline{AB} = 11 + 13 = 24$. Also ist $24 + 13 = 37$ die gesuchte Länge der Seite x.

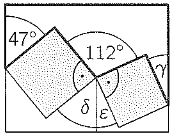


24. In einem Rechteck sind zwei Quadrate enthalten, die sich gegenseitig und das Rechteck mit je einem Eckpunkt berühren (siehe Bild). Wie groß ist der Winkel γ?



(**A**) 18° (**B**) 21° (**C**) 24° (**D**) 28° (**E**) 47°

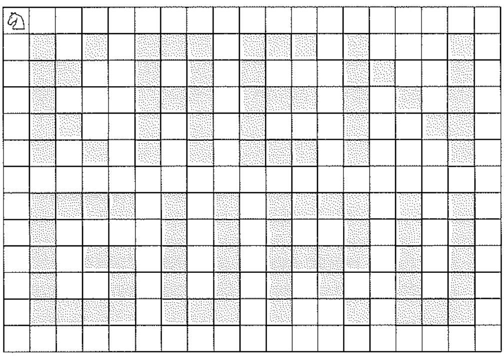
Lösung: Wir geben zwei unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten an. Zuerst berechnen wir γ, indem wir eine Parallele zu den senkrechten Rechtecksseiten durch den Scheitel des 112°-Winkels zeichnen und dort die Winkel δ und ε eintragen (siehe Bild). Die Schenkel des 47°-Winkels und die von δ sind paarweise parallel, also ist $\delta = 47°$. Dasselbe gilt für ε und γ, also $\varepsilon = \gamma$. Für den Vollwinkel am Berührungspunkt der beiden Quadrate gilt somit $360° = 112° + 90° + \gamma + 47° + 90° = 339° + \gamma$. Also ist $\gamma = 360° - 339° = 21°$.



Im zweiten Lösungsweg berechnen wir γ aus der Innenwinkelsumme des dick umrandeten Siebenecks. Die Innenwinkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2)\cdot 180°$, also die des Siebenecks $5\cdot 180° = 900°$. Wir rechnen $900° = 2 \cdot 90° + 2 \cdot 270° + 47° + 112° + \gamma$. Daraus erhalten wir ebenfalls $\gamma = 21°$.

KAENGURU-Rösselsprung

Ein Springer ♘ soll in seiner beim Schachspiel üblichen Gangart über das abgebildete „Schachbrett“ gezogen werden. In der linken oberen Ecke wird begonnen. Jedes der 95 grauen Felder, die das Wort KAENGURU bilden, soll genau einmal betreten werden. Die anderen Felder dürfen für Zwischensprünge genutzt werden.
Wer schafft es, diese Aufgabe mit 136 oder sogar weniger Zügen zu lösen?



25. Vor 7 Jahren war Kurts Alter durch 8 teilbar, und in 8 Jahren wird sein Alter durch 7 teilbar sein. Das Alter seines Bruders Walter war vor 8 Jahren durch 7 teilbar, und in 7 Jahren wird sein Alter durch 8 teilbar sein. Keiner der beiden ist älter als 100. Welche Aussage ist richtig?

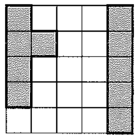
(**A**) Walter ist zwei Jahre älter als Kurt.
(**B**) Walter ist ein Jahr älter als Kurt.
(**C**) Walter und Kurt sind gleich alt.
(**D**) Walter ist ein Jahr jünger als Kurt.
(**E**) Walter ist zwei Jahre jünger als Kurt.

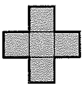
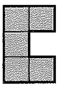
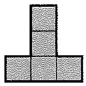
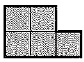
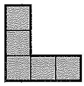
Lösung: Kurts Alter war vor 7 Jahren eine durch 8 teilbare Zahl, also (da Kurts gegenwärtiges Alter geringer als 100 Jahre ist) eine der Zahlen $8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88$. Addieren wir $15 = 7+8$ zu Kurts Alter vor 7 Jahren, dann erhalten wir Kurts Alter in 8 Jahren, also eine der Zahlen $23, 31, 39, 47, 55, 63, 71, 79, 87, 95, 103$. Die einzige durch 7 teilbare Zahl in dieser Folge ist 63. Kurt ist also $63 - 8 = 55$ Jahre alt.

Mit Walters Alter verfahren wir genauso: Vor 8 Jahren war sein Alter eine der Zahlen $7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91$ und in 7 Jahren folglich eine der Zahlen $22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106$. Von diesen ist die einzige durch 8 teilbar Zahl die 64. Walter ist folglich $64 - 7 = 57$ Jahre alt.

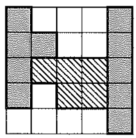
Walter ist somit 2 Jahre älter als Kurt, wie in Antwortmöglichkeit (**A**) angegeben ist.

26. Auf ein 5×5-Feld hat Lina 2 Spielsteine gelegt (siehe Bild). Nun will sie einen der folgenden 5 Spielsteine so dazulegen, dass für *keinen* der 4 übrigen mehr Platz ist. Die Spielsteine dürfen beliebig gedreht und gewendet werden, müssen aber in das Raster auf dem Spielfeld passen. Welcher Spielstein ist der gesuchte?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Legen wir den kompakten Stein (**D**) in die Mitte des Feldes (Bild rechts), dann bleiben zwei Gebiete aus 5 Quadraten übrig. Keiner dieser 2 Bereiche hat die Form eines der anderen 4 Steine. (**D**) ist der gesuchte Spielstein.



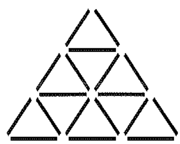
Durch systematisches Probieren lässt sich unschwer herausfinden, dass mit keinem der anderen 4 Steine die Bedingung der Aufgabe erfüllt werden kann.

Ein ähnliches Problem wurde in Aufgabe 20 in Klassenstufe 5/6 gestellt.

KAENGURU-Streichholzdreiecke

Die Figur wurde aus 18 gleichen Streichhölzchen gelegt.
In der Figur können 13 Dreiecke gezählt werden.

Um wie viel kann die Anzahl der Dreiecke durch Entfernen eines Hölzchens verringert werden?



27. Ich denke mir eine natürliche Zahl und ersetze jede gerade Ziffer durch ihre Hälfte und jede ungerade Ziffer durch ihr Doppeltes. Dies wiederhole ich, so dass eine Folge von Zahlen entsteht. Zum Beispiel entsteht aus der Zahl 251 die Folge 251 $\to$ 1102 $\to$ 2201 $\to$ 1102 $\to$ 2201 $\to$ usw. Welches ist die größte Anzahl *verschiedener* Zahlen in einer solchen Folge?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Zunächst listen wir die Zahlenfolgen für jede Ziffer auf und notieren jeweils die Anzahl der verschiedenen Zahlen in der Folge:

0	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	...		**1**
1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	...		**2**
2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	...		**2**
3	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	...		**2**
4	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	...		**3**
5	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	20	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	20	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	...		**3**
6	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	...		**2**
7	$\longrightarrow$	14	$\longrightarrow$	22	$\longrightarrow$	11	$\longrightarrow$	22	$\longrightarrow$	11	$\longrightarrow$	...		**4**
8	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	...		**4**
9	$\longrightarrow$	18	$\longrightarrow$	24	$\longrightarrow$	12	$\longrightarrow$	21	$\longrightarrow$	12	$\longrightarrow$	...		**5**

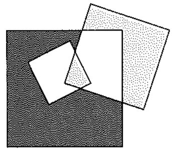
In dieser Liste sehen wir, dass die Folge für jede einstellige Zahl periodisch wird. Spätestens ab der 6. Zahl kommen in jeder der Folgen nur noch 2 verschiedene Zahlen vor, die sich abwechseln. Für eine mehrstellige Startzahl gilt dasselbe wie für jede einzelne Ziffer: An jeder Stelle der 6. Zahl in der Folge steht die gleiche Ziffer wie in der 4. Zahl in der Folge, also ist die 6. Zahl gleich der 4. Zahl. Die 7. Zahl ist dann gleich der 5. Zahl, die 8. Zahl gleich der 6. Zahl, usw. Für die Fragestellung genügt es folglich, die einstelligen Startzahlen zu betrachten. Und wie wir gesehen haben, können höchstens die ersten 5 Zahlen in der Folge verschieden sein.

28. Im Bruch $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot A \cdot R}{M \cdot A \cdot I}$ sollen die Buchstaben in den Produkten in Zähler und Nenner durch die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9$ ersetzt werden; gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen. Welchen *kleinsten ganzzahligen* Wert kann der Bruch haben?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 7

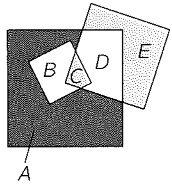
Lösung: Zuerst kürzen wir das A und erhalten $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot R}{M \cdot I}$. Da der Wert des Bruchs möglichst klein werden soll, versuchen wir den Nenner so groß wie möglich zu machen, d. h., wir ersetzen M und I durch 8 und 9: $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot R}{8 \cdot 9}$. Nun müssen wir im Zähler für die Buchstaben möglichst kleine Zahlen finden, so dass sich die 8 und die 9 im Nenner kürzen lassen. Weil 8 und 9 nur durch 2 und 3 teilbar sind, betrachten wir neben der 1 nur solche einstellige Zahlen, die ebenfalls nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten: 2, 3, 4 und 6. Der Zähler wird am kleinsten, wenn das doppelt auftretende R gleich 1 ist. Dann ist der Bruch gleich $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1}{8 \cdot 9} = 2$.

Wenn wir die Buchstaben durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ ersetzen, ist kein kleinerer Wert möglich, wie wir gesehen haben. Würden wir statt einer dieser Ziffern die 5 verwenden, dann kann diese nur im Zähler stehen, da sonst keine ganze Zahl entsteht. Der Wert des Bruchs wäre dann aber mindestens 5. Für 7 gilt das analog. Also ist (**B**) die Lösung.



29. In einem Quadrat mit Seitenlänge 7 cm liegt ein Quadrat mit Seitenlänge 3 cm. Ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm schneidet beide Quadrate (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Um wie viel ist die schwarze Fläche größer als die Summe der beiden grauen Flächen?

(**A**) um 0 cm^2 (**B**) um 3 cm^2 (**C**) um 9 cm^2 (**D**) um 11 cm^2 (**E**) um 15 cm^2



Lösung: Wir bezeichnen die Flächenteile wie im Bild mit A bis E. Gesucht ist $A-(C+E)=A-C-E$. Bekannt sind die Flächeninhalte der 3 Quadrate:

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 49 \\ B+C &= 9 \\ C+D+E &= 25 \end{aligned}$$

Wir stellen die gesuchte Größe $A-C-E$ als Kombination der Quadratflächen dar:

$$\begin{aligned} A-C-E &= (A+B+C+D)-(B+C)-(C+D+E) \\ &= 49-9-25 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Wir erkennen insbesondere, dass der Flächeninhalt nicht von der konkreten Lage der Quadrate abhängt. Wir könnten also auch eine ganz bestimmte, zum Rechnen günstige Lage wählen.

30. In Bens neuem Computerspiel ist eine knifflige Aufgabe zu lösen. Alle 16 Quadrate eines 4×4-Gitters sind zunächst weiß gefärbt. Wenn Ben auf ein Quadrat klickt, wird es entweder rot oder blau. Es gibt genau 2 rote Quadrate, und diese berühren sich an einer Seite. Die beiden roten Quadrate muss Ben aufdecken, und zwar mit so wenig Klicks wie möglich. Wie viele Klicks reichen sicher aus?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

	o		o
o		o	
	o		o
o		o	

o		o	
	o		o
o		o	
	o		o

Lösung: Zuerst überlegen wir, welche möglichen Positionen es für die beiden benachbarten roten Quadrate gibt. Sie können senkrecht liegen und sich dabei über die erste und zweite, die zweite und dritte oder die dritte und vierte Zeile des 4×4-Gitters erstrecken. Das sind 12 Möglichkeiten. Für die waagerechte Lage gibt es ebenso 12, also insgesamt 24 mögliche Positionen. Die Eckfelder des Gitters gehören dabei jeweils zu 2 Positionen, die übrigen Randfelder zu jeweils 3 und die inneren vier Felder zu jeweils 4 möglichen Positionen. Um mit Sicherheit eines der roten Quadrate aufzudecken, müssen wir im schlechtesten Fall jede dieser 24 Positionen einmal markieren. Dazu brauchen wir in jeder Zeile mindestens 2 Klicks, also insgesamt mindestens 8 Klicks. Allerdings genügen 8 Klicks auch schon, wenn wir, wie im Bild oben dargestellt, die Felder schachbrettartig anklicken.

Dieses Muster ist außerdem das einzig mögliche, um mit 8 Klicks alle 24 Möglichkeiten für die 2 Quadrate zu markieren. Für die erste Zeile gibt es nämlich nur 6 Möglichkeiten für 2 Klicks:

	o		o

o		o	

	o	o	

o			o

o	o		

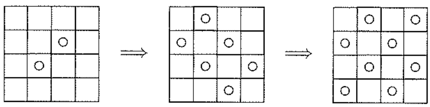
		o	o

Die letzten drei Varianten scheiden sofort aus, da noch ein Doppelquadrat frei ist. Würden wir die dritte Möglichkeit wählen, wäre die Zeile darunter vom vierten Typ. Also bleiben nur die ersten beiden Varianten, woraus sich sogleich das komplette Muster ergibt.

Als nächstes stellen wir fest, dass es unabhängig davon, welche konkrete Strategie Ben zur Lösung der Aufgabe wählt, stets eine Position für das Doppelquadrat gibt, für das er auch wirklich 8 Klicks benötigt, um das erste rote Quadrat zu finden. Denn angenommen, es reichen stets weniger Klicks aus, dann betrachten wir eine Position, für die k Klicks mit $k < 8$ ausreichen. Dann ist irgendwo im Gitter eine Lücke, in die ein anderes Doppelquadrat passt. Wählen wir diese Position, dann sind nach unserer Strategie die ersten k Klicks dieselben, da die Bedingungen ja identisch sind. Allerdings finden wir im k-ten Klick *kein* rotes Quadrat. Wir brauchen also mindestens $k + 1$ Klicks. So finden wir schrittweise eine Position des Doppelquadrats, bei dem wir mit einer gewählten Strategie zum Finden des ersten roten Quadrats 8 Klicks benötigen. Und dann ist das Gitter, wie wir gesehen haben, schachbrettartig markiert.

Über die Lage des zweiten roten Quadrats liefert dieses Muster allerdings keine Auskunft. Je nachdem, wo dieses sich befindet, brauchen wir 2, 3 oder 4 weitere Klicks. Die Antwortmöglichkeiten (**A**) und (**E**) scheiden jetzt bereits aus.

Wir geben nun eine Strategie an, die mit 2 weiteren, also 10 Klicks auskommt, d. h., wir beschreiben eine bestimmte Reihenfolge der Klicks im Schachbrettmuster.



Zuerst klicken wir auf die inneren beiden markierten Quadrate. Decken wir ein rotes Quadrat auf, brauchen wir im ungünstigsten Fall weitere 4, also insgesamt höchstens 6 Klicks. Decken wir kein rotes Quadrat auf, dann klicken wir nacheinander auf *die* vier Randquadrate, die keine Ecken sind. Decken wir hier ein rotes Quadrat auf, brauchen wir zu den 6 Klicks im ungünstigsten Fall weitere 3, also insgesamt höchstens 9 Klicks. Ist auch hier kein rotes Quadrat dabei, müssen wir noch die beiden Ecken markieren. Hier finden wir nun *mit Sicherheit* ein rotes Quadrat und brauchen zu den 8 Klicks im ungünstigsten Fall weitere 2, also insgesamt 10 Klicks. (**B**) ist die Lösung.

Lösungen der Känguru-Knobeleien

Seite 4, KAENGURU-Hölzchenspiel: Mit Streichhölzern gelegt, sehen die Wörter wie folgt aus:

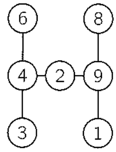
Um PRIMZAHL zu erzeugen, müssen 10 Hölzchen umgelegt und 6 Hölzchen weggenommen werden.
Um SECHSECK zu erzeugen, müssen 11 Hölzchen umgelegt und 6 Hölzchen weggenommen werden.

Seite 5, KAENGURU-Lesevielfalt: Es gibt nur zweimal den Anfangsbuchstaben K. Beginnend beim K links oben gibt es 19 Lesemöglichkeiten, beginnend beim K rechts oben 7. Insgesamt sind das 26 Möglichkeiten

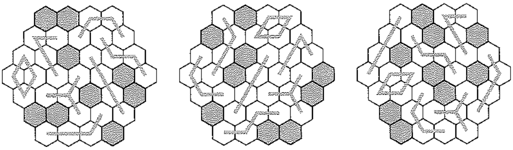
Seite 7, KAENGURU-Kryptogramm I: An den Hunderterziffern können wir ablesen: U = 0 oder U = 9. U = 0 entfällt, denn sonst wäre bei den Einerziffern N = L. Also muss U = 9 sein. Zwei mögliche Lösungen sind rechts zu sehen.

$$\begin{array}{r} 1\,5\,3\,8 \\ +\,2\,9\,6\,9 \\ \hline 4\,5\,0\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,3\,6\,1 \\ +\,4\,9\,8\,9 \\ \hline 7\,3\,5\,0 \end{array}$$

Seite 9, KAENGURU-Multiplikation: Die Zahlen 0, 5 und 7 können nicht verwendet werden. Bei jeder Belegung mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8 und 9 muss die 2 in der Mitte stehen. Eine Möglichkeit ist rechts abgebildet.



Seite 11, Wabenfeldfüllungen, Fünf Damen: Hier sind die Lösungen der sechs Kopfnüsse:



♛		4	♛	
	4			♛
4		♛	4	
	♛			

		♛	5	♛
		♛		♛
			♛	3
	1			

♛			5	♛
	2	♛		♛
2				
		2	♛	

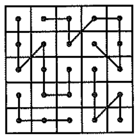
Seite 13, KAENGURU-Summen: Ingesamt gibt es 11 verschiedene Möglichkeiten für die Summanden: $1+1+1+1+1+1+1+13$, $1+1+1+1+1+1+3+11$, $1+1+1+1+1+1+5+9$, $1+1+1+1+1+1+7+7$, $1+1+1+1+1+3+3+9$, $1+1+1+1+1+3+5+7$, $1+1+1+1+1+5+5+5$, $1+1+1+1+3+3+3+7$, $1+1+1+1+3+3+5+5$, $1+1+1+3+3+3+3+5$, $1+1+3+3+3+3+3+3$

Seite 15, KAENGURU-Kryptogramm II: Zwei mögliche Lösungen sind diese:

$$\begin{array}{r} 3759 \\ +\,4262 \\ \hline 8021 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1379 \\ +\,2686 \\ \hline 4065 \end{array}$$

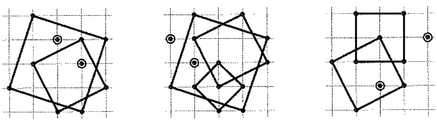
Seite 18, KAENGURU-Quadratknobelei: Die Punktsysteme haben insgesamt $6+8+5+8+4=31$ Punkte, Teil 1 mit den 6 Punkten wird also nicht benutzt. Wie sich die anderen Teile einpassen lassen, ist rechts zu sehen.

Seite 19, KAENGURU-Rechen-Quadrat: Die Lösung ist rechts zu sehen.



4	·	1	−	3	=	1
·		·		+		
2	·	3	−	5	=	1
−		+		−		
2	·	4	−	6	=	2
=		=		=		
6		7		2		

Seite 21, Verborgene Quadrate: Für jede der drei Aufgaben sind hier die gesuchten Quadrate sowie die zwei Punkte, die zu keinem Quadrat gehören, dargestellt:



Seite 21, Kreuzende Zahlen: Die Lösungen der beiden Aufgaben sind:

4	2	3	1	5
1		2		3
5	1	4	3	2
2		5		1
3	5	1	2	4

1	3	2	1	2	3	2		
2						3		
1		3	1	2	3	1	2	1
2		2		3		2		3
3	1	3	2	1	3	1		1
2		1		3		2		3
1	3	2	1	2	1	3		2
		1		3				3
		3	2	1	2	3	2	1

Seite 25, KAENGURU-Kryptogramm III: Es muss $S=1$ sein, und wie im KAENGURU-Kryptogramm I ist $U=9$. Zwei mögliche Lösungen sind rechts zu sehen.

$$\begin{array}{r} 5042 \\ +\,7969 \\ \hline 13011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6432 \\ +\,8979 \\ \hline 15411 \end{array}$$

Seite 27, KAENGURU-Produkt: Im Produkt ist ein Faktor 5. Die übrigen Faktoren ergeben eine ungerade Zahl. Da jede ungerade Zahl multipiziert mit 5 wieder auf 5 endet, ist 5 die gesuchte Endziffer.

Seite 29, KAENGURU-Rösselsprung: Die Abbildung zeigt einen möglichen Weg des Springers mit 136 Zügen.

♘											39							
	10		14		26	21	16		40	37	32		56		50		62	
	1	6	9		15		27	36	31			38	49	46	55		51	
11	8	13		25	22	17	20	41	28	33	30	57	44		48	63	54	61
	5	2	7		19		23		35		43		47		45	52	65	
	12		4		24		18		42	29	34		58		64		60	53
	3								99						59	66		
	134	125	120	129		107		101		87	98	85	80		68		78	
124	119	128	133			102		108		100	93	88	97		79		67	
135	126		118	121	130	109	106	103	92	89	86	81	84		72	69	74	77
	123	132	127	116		104		110	113	94	83	90		96	75		71	
	136	117	122	131		115	112	105		91		95	82		70	73	76	
								114	111									

Seite 30, KAENGURU-Streichholzdreiecke: In der Figur gibt es 9 kleine Dreiecke, 3 Dreiecke, deren Seiten 2 Hölzchen lang sind, und ein Dreieck, dessen Seiten 3 Hölzchen lang ist. Das sind $9+3+1=13$ Dreiecke. Je nachdem, welches Hölzchen wir entfernen, verschwinden 2, 3 oder 4 dieser Dreiecke.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	D	D	A	E	B	E	E	B
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	B	A	D	A	C	D	C	B
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	E	D	B	D	D	E	B	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

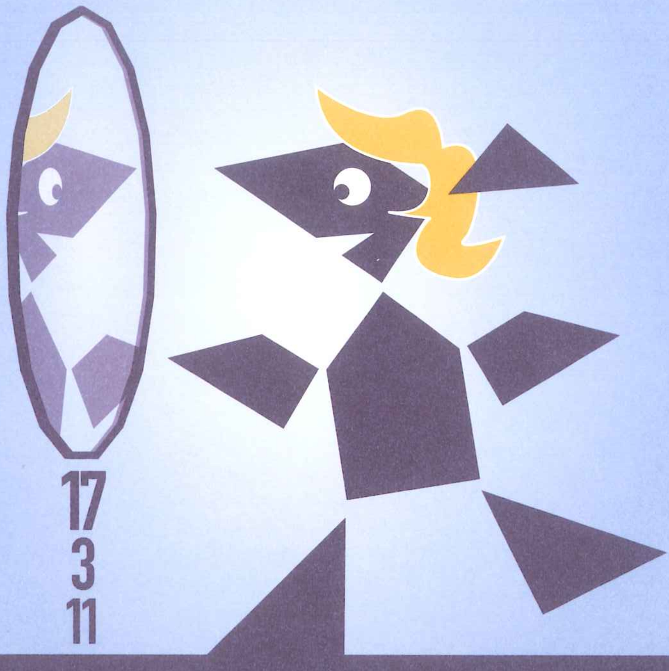
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	B	A	A	E	E	B	C	C
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	D	B	C	D	B	E	C	B
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	B	E	D	A	D	E	D	A

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	A	A	C	C	E	B	B	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	C	D	D	E	B	A	D	C	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	E	B	B	A	D	B	B	E	B

www.mathe-kaenguru.de

2011 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2011!

Der Känguru-Mathematikwettbewerb hat heuer am 17. März 2011 stattgefunden. Wieder haben sich in der Schweiz mehr als 16 000 Schülerinnen und Schüler an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben versucht. Sie kamen aus über 200 Schulen.

In diesem Jahr war herauszufinden, welches Ergebnis Nataschas Quatsch-Taschenrechner anzeigt, wie viele Melonen Gerda ernten konnte und welcher Hindernisläufer sich an der Anmeldung noch nicht registriert hat. Der Anwohner der Bogenallee musste entdeckt und „Sockenmathematik" betrieben werden. Wohin wir blicken, überall treffen wir auf Fragen und Probleme, manchmal grosse, oft auch nur kleine, zu deren Formulierung und Lösung Mathematik gebraucht wird. Mathematik umgibt uns in unterschiedlicher Gewandung ständig. Logisches Denken, Strukturieren, das Bilden von Begriffen, Definieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, Trendvoraussagen – all dies wird im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt, auf dass es im täglichen Leben zur Hand ist.

Das Interessante, Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von denen anderer Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass hier Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den etwa 50 Teilnehmerländern des Wettbewerbs einfliessen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre ist zur Unterstützung einer nachträglichen Beschäftigung mit den verschiedenen mathematischen Problemen gedacht. Für eine ganze Reihe von Aufgaben wurde nicht nur eine Lösungsmöglichkeit angegeben, sondern anhand der Darstellung verschiedener gezeigt, dass es hilfreich ist, unterschiedliche Methoden zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen zu beherrschen.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, L. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk

Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

978-3-9812144-4-4

Klassenstufen 7 und 8

1. Bea hilft Lea beim Streichen der langen Wand im Flur. Lea möchte senkrechte Streifen, abwechselnd rote und gelbe, je 50 cm breit. Der erste und der letzte Streifen sollen rot sein. Bea misst die Wand und stellt fest: „Das werden insgesamt 6 rote Streifen, das geht genau auf." Wie lang ist die Wand?

(**A**) 4,50 m (**B**) 5,50 m (**C**) 6,50 m (**D**) 7,50 m (**E**) 8,50 m

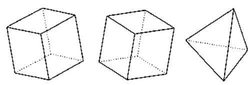
Lösung: Da der erste und der letzte Streifen rot sein sollen, kommen zu den 6 roten Streifen noch 5 gelbe Streifen dazu. Die Wand ist also genauso lang wie $6 + 5 = 11$ Streifen breit sind. Das sind $11 \cdot 50\,\text{cm} = 550\,\text{cm} = 5{,}50\,\text{m}$.

2. Welcher der folgenden Werte ist am größten?

(**A**) 2011^1 (**B**) 1^{2011} (**C**) $1 \cdot 2011$ (**D**) $1 + 2011$ (**E**) $\frac{1}{2011}$

Lösung: Da $\frac{1}{2011}$ als einzige der fünf Zahlen kleiner als 1 ist, ist (**E**) sicher nicht die Lösung. Es ist $2011^1 = 2011$, $1^{2011} = 1$, $1 \cdot 2011 = 2011$ und $1 + 2011 = 2012$. Also ist (**D**) die Lösung.

3. Für ein Spiel malt Emre sämtliche Seitenflächen zweier Würfel und eines Tetraeders farbig an. Wie viele Seitenflächen sind nun insgesamt farbig?



(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 22 (**E**) 24

Lösung: Ein Würfel hat 6 Seitenflächen, ein Tetraeder hat 4 Seitenflächen. Insgesamt sind also $2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 16$ Seitenflächen farbig.

4. Natascha hat einen Quatsch-Taschenrechner: Wenn sie multiplizieren will, dividiert er, und wenn sie addieren will, subtrahiert er. Rasch gibt Natascha $(12 \cdot 3) + (4 \cdot 2)$ ein. Welches Ergebnis zeigt Nataschas Taschenrechner an?

(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 12 (**D**) 28 (**E**) 38

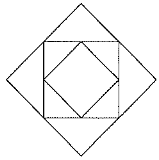
Lösung: Wir ersetzen in der Rechnung „$\cdot$" durch „:" und „+" durch „−". Der Quatsch-Taschenrechner rechnet also $(12 : 3) - (4 : 2) = 4 - 2 = 2$.

5. Beim Blick auf ihre Digitaluhr muss Silvie schmunzeln: „20:11, das ist ja genau die Jahreszahl!" Wann erscheint das nächste Mal eine Uhrzeit, in der wir die vier Ziffern 0, 1, 1, 2 in irgendeiner Reihenfolge vorfinden?

(**A**) in 40 Minuten (**B**) in 45 Minuten (**C**) in 50 Minuten (**D**) in 55 Minuten (**E**) in 60 Minuten

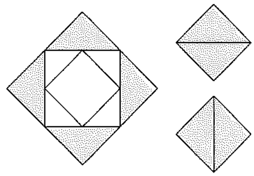
Lösung: Nach 20:11 gibt es mit derselben Stundenzahl keine weitere Uhrzeit mit diesen vier Ziffern. Wir versuchen es in der nächsten Stunde mit der Stundenzahl 21. Es bleiben 0 und 1 für die Minuten, und damit ist klar, dass die Uhrzeit 21:01 die gesuchte Uhrzeit ist. Von 20:11 bis dahin vergehen 50 Minuten.

6. Die Ecken des kleinsten Quadrats halbieren die Seiten des mittleren Quadrats, und die Ecken des mittleren Quadrats halbieren die Seiten des größten Quadrats. Der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats beträgt $6\,\text{cm}^2$. Um wie viel unterscheidet sich der Flächeninhalt des größten Quadrats von dem des mittleren Quadrats?



(**A**) um $6\,\text{cm}^2$ (**B**) um $9\,\text{cm}^2$ (**C**) um $12\,\text{cm}^2$ (**D**) um $15\,\text{cm}^2$ (**E**) um $18\,\text{cm}^2$

Lösung: Der gesuchte Flächeninhalt ist die Summe der Flächeninhalte der vier grauen Dreiecke (siehe Bild). Da die längste Seite eines solchen Dreiecks genauso lang ist wie die Diagonale des kleinsten Quadrats, lassen sich zwei dieser Dreiecke zu einem Quadrat zusammensetzen, das denselben Flächeninhalt wie das kleinste Quadrat hat. Damit ist der Flächeninhalt der grauen Fläche $2 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$.



7. $\dfrac{2011 \cdot 20{,}11}{2{,}011 \cdot 201{,}1} =$

(**A**) 0,01 (**B**) 0,1 (**C**) 1 (**D**) 10 (**E**) 100

Lösung: Wir rechnen:

$$\frac{2011 \cdot 20{,}11}{2{,}011 \cdot 201{,}1} = \frac{2{,}011 \cdot 1000 \cdot 2{,}011 \cdot 10}{2{,}011 \cdot 2{,}011 \cdot 100} = \frac{\cancel{2{,}011} \cdot 1000 \cdot \cancel{2{,}011} \cdot 10}{\cancel{2{,}011} \cdot \cancel{2{,}011} \cdot 100} = \frac{1000 \cdot 10}{100} = 100\,.$$

8. Rike stellt Paolo ein Rätsel: „Ich addiere die kleinste dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8 und die größte dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8. Was ist mein Ergebnis?“

(**A**) 707 (**B**) 907 (**C**) 916 (**D**) 1000 (**E**) 1001

Lösung: Die kleinste dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8 ist 107, die größte dreistellige Zahl mit Ziffernsumme 8 ist 800. Somit ist die gesuchte Summe gleich $107 + 800 = 907$.

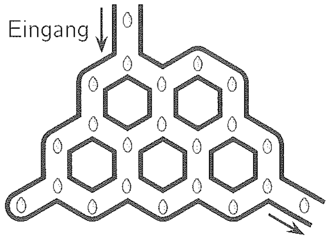
9. Ich möchte die Zahl 96 als Summe von mindestens 2 *aufeinanderfolgenden* natürlichen Zahlen schreiben. Wie viele Zahlen brauche ich dafür?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Summe *zweier* aufeinanderfolgender Zahlen ist stets ungerade, also müssen es mindestens 3 Summanden sein. Wenn sich 96 als eine Summe von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen schreiben lässt, dann muss die mittlere dieser 3 Zahlen $96 : 3 = 32$ sein. Es gilt $96 = 31 + 32 + 33$ und (**B**) ist die Lösung.

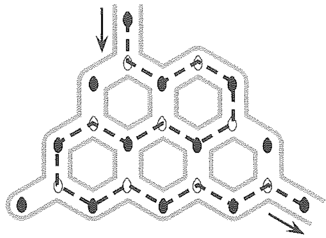
Der Vollständigkeit halber überlegen wir uns noch, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt, die Zahl 96 als Summe von *aufeinanderfolgenden* natürlichen Zahlen zu schreiben. Ist nämlich die Anzahl der Summanden ungerade, muss 96 wie bei 3 Summanden durch diese Anzahl teilbar sein. Aber $96 = 2^5 \cdot 3$ hat keine weiteren ungeraden Teiler. Bei einer geraden Anzahl von Summanden liegt der Durchschnitt der Summanden genau in der Mitte zwischen zwei natürlichen Zahlen. Dann ist aber der Durchschnitt der mit 2 multiplizierten Summanden eine natürliche Zahl, und wie vorher müsste die Anzahl der Summanden ein Teiler von $2 \cdot 96 = 2^6 \cdot 3$ sein, aber kein Teiler von 96. Das können nur $2^6 = 64$ oder $2^6 \cdot 3 = 192$ sein. Das wären jedoch zu viele Summanden, einige müssten dann negativ sein.

10. Um das legendäre Schlaraffenland zu erreichen, muss Hamster Fridolin durch ein unterirdisches Labyrinth laufen. In den Tunneln locken 22 knackige Kürbiskerne (siehe Bild). Fridolin stopft sich die Backen voll. Er darf aber keine Strecke und keine Kreuzung mehr als einmal betreten. Wie viele der Kürbiskerne kann Fridolin höchstens sammeln?



(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: Im Bild rechts ist ein möglichst langer Weg eingezeichnet, der kein Wegstück und keine Kreuzung mehrfach benutzt. Auf ihm liegen 19 knackige Kürbiskerne.



Um zu sehen, dass Hannibal nicht mehr als 19 Kürbiskerne sammeln kann, markieren wir die Kürbiskerne wie im Bild abwechselnd schwarz und weiß. Nun ist schnell klar, dass Hannibal schwarze und weiße Kürbiskerne abwechselnd sammelt. Insgesamt gibt es 13 schwarze, aber nur 9 weiße. Also kann Hannibal höchstens die 9 weißen und 10 schwarze sammeln, also insgesamt 19. Drei schwarze Kürbiskerne bleiben übrig.

11. Was ist am größten?

(**A**) $\frac{2}{3}$ von 4 (**B**) $\frac{3}{4}$ von 5 (**C**) $\frac{4}{5}$ von 6 (**D**) $\frac{5}{6}$ von 7 (**E**) $\frac{6}{7}$ von 8

Lösung: Zu vergleichen sind $\frac{2}{3}\cdot 4$, $\frac{3}{4}\cdot 5$, $\frac{4}{5}\cdot 6$, $\frac{5}{6}\cdot 7$ und $\frac{6}{7}\cdot 8$. Da in diesen Produkten beide Faktoren von (**A**) nach (**E**) wachsen, ist (**E**) die größte der fünf Zahlen.

Alternativ könnten wir rechnen: $\frac{n-1}{n}\cdot(n+1) = \frac{(n-1)(n+1)}{n} = \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2}{n} - \frac{1}{n} = n - \frac{1}{n}$. Die Zahl $n - \frac{1}{n}$ liegt zwischen $n-1$ und n. Also liegen die Zahlen in den Lösungsvorschlägen immer zwischen dem Zähler und dem Nenner des ersten Faktors, und folglich ist für das größte n der Wert am größten.

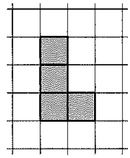
12. Beim Sportfest kontrolliert Moritz die 9 Hindernisläufer, die die Startnummern von 1 bis 9 tragen. Die ersten 8 Läufer erscheinen paarweise bei Moritz, der aus Spaß jeweils die Summe beider Nummern notiert: 17, 13, 7, 5. Immerhin ist jetzt klar: der letzte Läufer trägt die Nummer

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Die Summe der Startnummern aller 9 Teilnehmer ist $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Die Summe der Startnummern der 8 Teilnehmer, die Moritz kontrolliert, ist $17+13+7+5 = 42$. Folglich muss der letzte Läufer die Startnummer $45-42 = 3$ tragen.

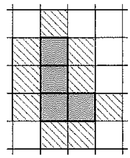
Die Lösung lässt sich auch ermitteln, indem wir für die Zahlen, die Moritz notiert hat, passende Summanden suchen. So kann 17 nur $8+9$ und 13 nur $6+7$ sein. Es bleiben 1, 2, 3, 4 und 5. Durch systematisches Probieren finden wir schnell $7 = 5+2$ und $5 = 1+4$ als einzige Möglichkeit. Die fehlende Startnummer ist die Nummer 3.

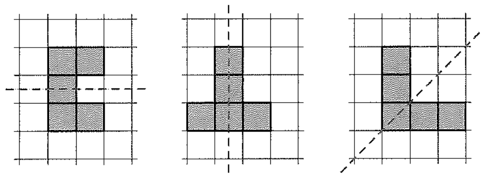
13. Auf kariertem Papier habe ich vier Quadrate grau ausgemalt. Nun möchte ich noch ein fünftes Quadrat grau ausmalen, so dass die entstehende graue Figur eine Symmetrieachse besitzt. Wie viele Möglichkeiten habe ich dafür?



(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

Lösung: Da die Figur aus vier Quadraten keine Symmetrieachse besitzt, muss das noch zu färbende Quadrat an ein bereits grau ausgemaltes Quadrat angrenzen. Die möglichen Quadrate sind im Bild rechts schraffiert. Von diesen möglichen Figuren haben nur die folgenden 3 eine Symmetrieachse:





14. In Gerdas Gewächshaus reifen köstliche Melonen. In den letzten 3 Wochen konnte Gerda schon 12 Melonen ernten. In der 2. Woche erntete sie mehr Melonen als in der 1. Woche. Und in der 3. Woche erntete sie mehr Melonen als in der 2. Woche, allerdings waren das nicht so viele wie in den ersten beiden Wochen zusammen. Wie viele Melonen hat Gerda in der 3. Woche geerntet?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Gerda kann in der 3. Woche nicht $12 : 2 = 6$ oder mehr Melonen geerntet haben, da das dann genauso viele oder mehr Melonen wären als in den ersten beiden Wochen zusammen. Also waren es in der 3. Woche höchstens 5 Melonen. Angenommen, es waren in der 3. Woche weniger als 5 Melonen. Dann wären es in der 3. Woche höchstens 4 Melonen, in der 2. Woche höchstens 3 und in der 1. Woche höchstens 2, also ingesamt höchstens $2 + 3 + 4 = 9$ Melonen. Nun ist klar, dass es in der 3. Woche 5 Melonen gewesen sein müssen. Und in den beiden Wochen zuvor hatte Gerda 3 bzw. 4 Melonen.

15. Von einer sechsstelligen, durch 12 teilbaren Zahl sind nur die ersten fünf Ziffern bekannt: 25762. Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Wir bezeichnen die fehlende letzte Ziffer der sechsstelligen Zahl mit x und dividieren schriftlich (siehe Rechnung). Damit die sechsstellige Zahl ohne Rest durch 12 teilbar ist, muss die dreistellige Zahl $10x$ durch 12 teilbar sein. Die gesuchte Ziffer x kann nur die 8 sein.

$$
\begin{array}{l}
25762x : 12 = 2146 \\
\underline{24} \\
\;\,17 \\
\;\,\underline{12} \\
\;\;\;56 \\
\;\;\;\underline{48} \\
\;\;\;\;\;82 \\
\;\;\;\;\;\underline{72} \\
\;\;\;\;\;10x
\end{array}
$$

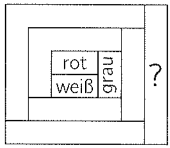
Für die Lösung dieser Aufgabe können wir auch Teilbarkeitsregeln verwenden: Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist. Für die Teilbarkeit durch 3 muss die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar sein. Dann kann die letzte Ziffer nur 2, 5 oder 8 sein. Für die Teilbarkeit durch 4 müssen die letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden: Hier gibt es nur die Möglichkeiten 20, 24 und 28.
Damit ist die 8 die einzige Ziffer, für die die Zahl sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist.

16. Haukes Hockey-Mannschaft hat beim ersten Sommer-Turnier alles gegeben. Von den drei Vorrunden-Spielen hat die Mannschaft ein Spiel gewonnen, ein Spiel verloren, und ein Spiel ging unentschieden aus. Haukes Mannschaft hat insgesamt drei Tore geschossen. Leider gab es auch genau ein Gegentor. Wie war das Ergebnis des gewonnenen Spiels?

(**A**) 2 : 0 (**B**) 3 : 0 (**C**) 1 : 0 (**D**) 2 : 1 (**E**) 3 : 1

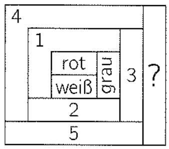
Lösung: Das eine Gegentor muss in dem verlorenen Spiel gefallen sein, das also 0 : 1 endete. Das Spiel, das unentschieden ausgegangen ist, kann nur 0 : 0 geendet haben, da die Mannschaft keine weiteren Gegentore kassierte. Das gewonnene Spiel kann damit nur 3 : 0 ausgegangen sein.

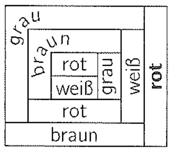
17. Aus roten, braunen, grauen und weißen Stoffresten näht die Großmutter eine Decke (siehe Bild). Dabei sorgt sie dafür, dass je zwei Streifen, die sich berühren, verschiedene Farben haben. Welche Farbe hat der Streifen mit dem Fragezeichen?



(**A**) rot (**B**) braun (**C**) weiß (**D**) grau (**E**) grau oder braun

Lösung: Da es nur 4 mögliche Farben für die Streifen gibt, ist die Farbe eines Streifens eindeutig bestimmt, wenn er an drei Streifen verschiedener Farben angrenzt. So ist die Farbe des Streifens 1, der an rot, weiß und grau grenzt, braun. Streifen 2 grenzt nun an braun, weiß und grau, ist demzufolge rot. Nacheinander finden wir die übrigen Farben, wie sie rechts zu sehen sind. Die gesuchte Farbe ist rot.





KAENGURU-Produkt

Auf welche Ziffer endet die Zahl $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2007 \cdot 2009 \cdot 2011$*?*

18. Von den acht Zahlen 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12, 16 sind zwei Zahlen zu streichen. Dabei soll der Durchschnitt der verbleibenden sechs Zahlen gleich dem Durchschnitt der ursprünglichen acht Zahlen sein. Welche zwei Zahlen müssen gestrichen werden?

(**A**) 5 und 17 (**B**) 9 und 16 (**C**) 10 und 12 (**D**) 10 und 14 (**E**) 9 und 13

Lösung: Der Durchschnitt aller 8 Zahlen ist $\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8} = \frac{96}{8} = 12$. Die beiden zu streichenden Zahlen müssen ebenfalls den Durchschnitt 12, also die Summe 24 haben. Folglich sind die gesuchten Zahlen 10 und 14.

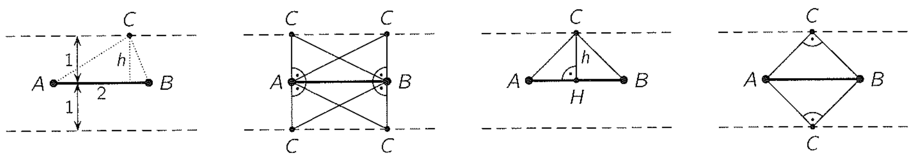
19. Auf ein Blatt Papier ist eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge 2 cm gezeichnet. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, einen Punkt C so zu zeichnen, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und einen Flächeninhalt von 1 cm^2 besitzt?

(**A**) zwei (**B**) vier (**C**) sechs (**D**) acht (**E**) zehn

Lösung: Damit das Dreieck ABC den Flächeninhalt $A = 1\,\text{cm}^2$ hat, muss C im Abstand von 1 cm zur Grundlinie $\overline{AB}$ liegen, also auf einer der im ersten Bild gezeichneten Parallelen. Der Abstand von C zu $\overline{AB}$ ist dann gleich der Höhe h, so dass $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\,\text{cm}\cdot 1\,\text{cm} = 1\,\text{cm}^2$ ist.

Nun überlegen wir uns, an welchem der drei Punkte A, B und C sich der rechte Winkel des Dreiecks ABC befinden kann. Zunächst kann der rechte Winkel an einem der beiden gegebenen Punkte A oder B sein. Dafür gibt es offenbar 4 Möglichkeiten (siehe zweites Bild).
Nun überlegen wir, ob sich der rechte Winkel auch bei C befinden kann. Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist mit Basis $\overline{AB}$. Der Winkel bei C hat dann seinen größtmöglichen Wert. Wir zeigen, dass der Winkel in diesem Fall 90° groß ist, und folglich nur diese und die an $\overline{AB}$ gespiegelte Lage als weitere mögliche Positionen für C hinzukommen. In diesem Fall zerlegt nämlich die Höhe h das Dreieck ABC in zwei ebenfalls gleichschenklige Dreiecke, da $\overline{AH} = \overline{HB} = 1\,\text{cm} = h$. Die beiden spitzen Winkel dieser kleinen Dreiecke sind jeweils 45°. Also ist $\measuredangle ACB = 90°$.

Insgesamt gibt es 6 Möglichkeiten für die Lage von C.

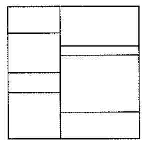


20. Die Zahl a ist größer als 0, aber kleiner als 1. Die Zahl b ist größer als 1. Welcher der folgenden Ausdrücke hat den größten Wert?

(**A**) $a \cdot b$ (**B**) $a + b$ (**C**) $a : b$ (**D**) b (**E**) $\frac{1}{a} + b$

Lösung: Es ist $b > 1$, also $a : b < a < a \cdot b$. Weiter ist $a < 1$, also $a \cdot b < b < a + b$. Wegen $a < 1$ ist $\frac{1}{a} > 1$, also $a + b < \frac{1}{a} + b$. Also ist (**E**) die Lösung.

21. Ich zerlege ein Quadrat in 8 Rechtecke (siehe Bild). Addiere ich die Umfänge dieser 8 Rechtecke, erhalte ich 120 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats?



(**A**) $36\,\text{cm}^2$ (**B**) $64\,\text{cm}^2$ (**C**) $100\,\text{cm}^2$ (**D**) $144\,\text{cm}^2$ (**E**) $256\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir bezeichnen die Seitenlänge des Quadrats mit a. Wenn wir nun die Umfänge der Rechtecke addieren, zählen wir jede Rechtecksseite *im Inneren* des Quadrats zweimal. Die Summe der Umfänge aller Rechtecke zu bilden heißt also: Die senkrechten Seiten des Quadrats je einmal und die mittlere senkrechte Linie zweimal zu zählen; das sind $4a$. Von den waagerechten Linien zählen wir die waagerechten Seiten des Quadrats je einmal; das sind weitere $2a$. Die inneren waagerechten Strecken zählen wir je zweimal; das sind noch einmal $6a$. Die genaue Lage der waagerechten Strecken ist nicht von Bedeutung, wichtig ist nur, dass es genauso viele (nämlich 3) waagerechte Linien links von der senkrechten inneren Strecke wie rechts davon gibt. Also ist die Summe der Umfänge $120\,\text{cm} = 4a + 2a + 6a = 12a$, d. h. $a = 10\,\text{cm}$. Der Flächeninhalt des Quadrats ist folglich $a^2 = 100\,\text{cm}^2$.

22. Um die Leistung seiner Hühner zu prüfen, führt Bauer Franz eine Eier-Statistik. Diese Woche war ein Viertel der Hühner faul und legte kein einziges Ei. Seine fleißigsten Hühner hingegen legten ein jedes 7 Eier, und genauso viele Hühner legten je 6 Eier. Die restlichen Hühner legten je 5 Eier. Insgesamt legten die Hühner diese Woche 99 Eier. Wie viele Hühner hat Bauer Franz?

(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 20 (**E**) 24

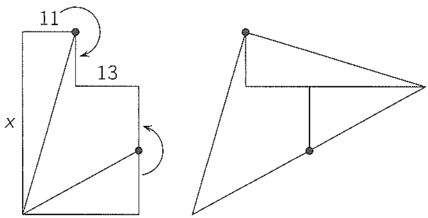
Lösung: Wir bezeichnen mit x die Anzahl der Hühner, die 7 Eier gelegt haben, mit y die Anzahl der Hühner, die 6 Eier gelegt haben, und mit z die Anzahl der Hühner, die 5 Eier gelegt haben. Nach Voraussetzung gilt $7x + 6y + 5z = 99$, und da $x = y$ ist, folgt $13x + 5z = 99$.

Eine Möglichkeit, die ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung zu finden, besteht darin, schrittweise für x die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ einzusetzen und zu überprüfen, ob der Rest zu 99 durch 5 teilbar ist:

x	$13x$	$99 - 13x$	
0	0	99	nicht durch 5 teilbar
1	13	86	nicht durch 5 teilbar
2	26	73	nicht durch 5 teilbar
3	39	60	$60 = 5 \cdot 12$, also $z = 12$
4	52	47	nicht durch 5 teilbar
5	65	34	nicht durch 5 teilbar
6	78	21	nicht durch 5 teilbar
7	91	8	nicht durch 5 teilbar

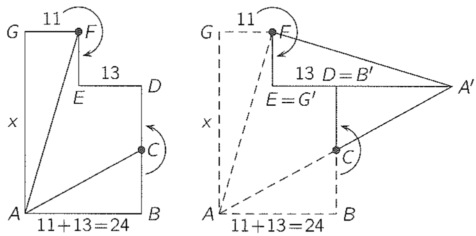
Die einzige Lösung der Gleichung mit positivem, ganzzahligem x und z ist also $x = 3, z = 12$. Die Anzahl der legewilligen Hühner ist somit $x+y+z = 3+3+12 = 18$. Das sind aber nur 3/4 aller Hühner, da noch die faulen Hühner fehlen. Die Gesamtzahl aller Hühner ist somit $18 \cdot 4 : 3 = 24$.

23. Von der abgebildeten Figur (linkes Bild) werden zwei Dreiecke abgeschnitten und um die dick markierten Punkte gedreht, so dass ein Dreieck entsteht (rechtes Bild). Wie lang ist die Seite x?

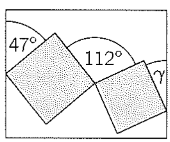


(**A**) 36 (**B**) 37 (**C**) 38 (**D**) 39 (**E**) 40

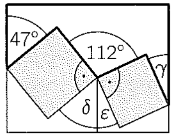
Lösung: Wir bezeichnen die Punkte der gegebenen Figur wie im Bild. Bei der Drehung gehen A in A', B in B' und G in G' über. Dabei gilt $x = \overline{A'G'} = \overline{A'B'} + \overline{DE} = \overline{AB} + \overline{DE}$. Nach Voraussetzung ist $\overline{DE} = 13$. Weiter ist $\overline{AB} = 11 + 13 = 24$. Also ist $24 + 13 = 37$ die gesuchte Länge der Seite x.



24. In einem Rechteck sind zwei Quadrate enthalten, die sich gegenseitig und das Rechteck mit je einem Eckpunkt berühren (siehe Bild). Wie groß ist der Winkel γ?



(**A**) 18° (**B**) 21° (**C**) 24° (**D**) 28° (**E**) 47°



Lösung: Wir geben zwei unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten an. Zuerst berechnen wir γ, indem wir eine Parallele zu den senkrechten Rechtecksseiten durch den Scheitel des 112°-Winkels zeichnen und dort die Winkel δ und ε eintragen (siehe Bild). Die Schenkel des 47°-Winkels und die von δ sind paarweise parallel, also ist $\delta = 47°$. Dasselbe gilt für ε und γ, also $\varepsilon = \gamma$. Für den Vollwinkel am Berührungspunkt der beiden Quadrate gilt somit $360° = 112° + 90° + \gamma + 47° + 90° = 339° + \gamma$. Also ist $\gamma = 360° - 339° = 21°$.

Im zweiten Lösungsweg berechnen wir γ aus der Innenwinkelsumme des dick umrandeten Siebenecks. Die Innenwinkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2)\cdot 180°$, also die des Siebenecks $5\cdot 180° = 900°$. Wir rechnen $900° = 2\cdot 90° + 2\cdot 270° + 47° + 112° + \gamma$. Daraus erhalten wir ebenfalls $\gamma = 21°$.

25. Vor 7 Jahren war Kurts Alter durch 8 teilbar, und in 8 Jahren wird sein Alter durch 7 teilbar sein. Das Alter seines Bruders Walter war vor 8 Jahren durch 7 teilbar, und in 7 Jahren wird sein Alter durch 8 teilbar sein. Keiner der beiden ist älter als 100. Welche Aussage ist richtig?

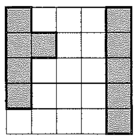
(**A**) Walter ist zwei Jahre älter als Kurt.
(**B**) Walter ist ein Jahr älter als Kurt.
(**C**) Walter und Kurt sind gleich alt.
(**D**) Walter ist ein Jahr jünger als Kurt.
(**E**) Walter ist zwei Jahre jünger als Kurt.

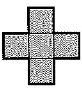
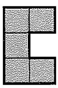
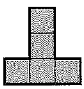
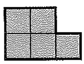
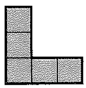
Lösung: Kurts Alter war vor 7 Jahren eine durch 8 teilbare Zahl, also (da Kurts gegenwärtiges Alter geringer als 100 Jahre ist) eine der Zahlen $8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88$. Addieren wir $15 = 7+8$ zu Kurts Alter vor 7 Jahren, dann erhalten wir Kurts Alter in 8 Jahren, also eine der Zahlen $23, 31, 39, 47, 55, 63, 71, 79, 87, 95, 103$. Die einzige durch 7 teilbare Zahl in dieser Folge ist 63. Kurt ist also $63 - 8 = 55$ Jahre alt.

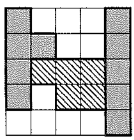
Mit Walters Alter verfahren wir genauso: Vor 8 Jahren war sein Alter eine der Zahlen $7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91$ und in 7 Jahren folglich eine der Zahlen $22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106$. Von diesen ist die einzige durch 8 teilbar Zahl die 64. Walter ist folglich $64 - 7 = 57$ Jahre alt.

Walter ist somit 2 Jahre älter als Kurt, wie in Antwortmöglichkeit (**A**) angegeben ist.

26. Auf ein 5×5-Feld hat Lina 2 Spielsteine gelegt (siehe Bild). Nun will sie einen der folgenden 5 Spielsteine so dazulegen, dass für *keinen* der 4 übrigen mehr Platz ist. Die Spielsteine dürfen beliebig gedreht und gewendet werden, müssen aber in das Raster auf dem Spielfeld passen. Welcher Spielstein ist der gesuchte?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 



Lösung: Legen wir den kompakten Stein (**D**) in die Mitte des Feldes (Bild rechts), dann bleiben zwei Gebiete aus 5 Quadraten übrig. Keiner dieser 2 Bereiche hat die Form eines der anderen 4 Steine. (**D**) ist der gesuchte Spielstein.

Durch systematisches Probieren lässt sich unschwer herausfinden, dass mit keinem der anderen 4 Steine die Bedingung der Aufgabe erfüllt werden kann.

Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 26 gestellt.

27. Ich denke mir eine natürliche Zahl und ersetze jede gerade Ziffer durch ihre Hälfte und jede ungerade Ziffer durch ihr Doppeltes. Dies wiederhole ich, so dass eine Folge von Zahlen entsteht. Zum Beispiel entsteht aus der Zahl 251 die Folge 251 → 1102 → 2201 → 1102 → 2201 → usw. Welches ist die größte Anzahl *verschiedener* Zahlen in einer solchen Folge?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 11

Lösung: Zunächst listen wir die Zahlenfolgen für jede Ziffer auf und notieren jeweils die Anzahl der verschiedenen Zahlen in der Folge:

0	⟶	0	⟶	0	⟶	0	⟶	0	⟶	0	⟶	...		**1**
1	⟶	2	⟶	1	⟶	2	⟶	1	⟶	2	⟶	...		**2**
2	⟶	1	⟶	2	⟶	1	⟶	2	⟶	1	⟶	...		**2**
3	⟶	6	⟶	3	⟶	6	⟶	3	⟶	6	⟶	...		**2**
4	⟶	2	⟶	1	⟶	2	⟶	1	⟶	2	⟶	...		**3**
5	⟶	10	⟶	20	⟶	10	⟶	20	⟶	10	⟶	...		**3**
6	⟶	3	⟶	6	⟶	3	⟶	6	⟶	3	⟶	...		**2**
7	⟶	14	⟶	22	⟶	11	⟶	22	⟶	11	⟶	...		**4**
8	⟶	4	⟶	2	⟶	1	⟶	2	⟶	1	⟶	...		**4**
9	⟶	18	⟶	24	⟶	12	⟶	21	⟶	12	⟶	...		**5**

In dieser Liste sehen wir, dass die Folge für jede einstellige Zahl periodisch wird. Spätestens ab der 6. Zahl kommen in jeder der Folgen nur noch 2 verschiedene Zahlen vor, die sich abwechseln. Für eine mehrstellige Startzahl gilt dasselbe wie für jede einzelne Ziffer: An jeder Stelle der 6. Zahl in der Folge steht die gleiche Ziffer wie in der 4. Zahl in der Folge, also ist die 6. Zahl gleich der 4. Zahl. Die 7. Zahl ist dann gleich der 5. Zahl, die 8. Zahl gleich der 6. Zahl, usw. Für die Fragestellung genügt es folglich, die einstelligen Startzahlen zu betrachten. Und wie wir gesehen haben, können höchstens die ersten 5 Zahlen in der Folge verschieden sein.

KAENGURU-Kryptogramm I

Im rechts stehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe entsteht.
Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.
Es gibt mehrere Lösungen.
Wer findet mindestens zwei verschiedene Lösungen?

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\ A\ E\ N} \\ +\ \mathrm{G\ U\ R\ U} \\ \hline \mathrm{S\ P\ A\ S\ S} \end{array}$$

28. Im Bruch $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot A \cdot R}{M \cdot A \cdot I}$ sollen die Buchstaben in den Produkten in Zähler und Nenner durch die Zahlen 1, 2, 3, …, 9 ersetzt werden; gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen. Welchen *kleinsten ganzzahligen* Wert kann der Bruch haben?

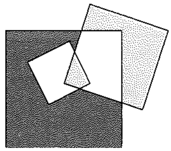
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** 7

Lösung: Zuerst kürzen wir das A und erhalten $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot R}{M \cdot I}$. Da der Wert des Bruchs möglichst klein werden soll, versuchen wir den Nenner so groß wie möglich zu machen, d. h., wir ersetzen M und I durch 8 und 9: $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot R}{8 \cdot 9}$. Nun müssen wir im Zähler für die Buchstaben möglichst kleine Zahlen finden, so dass sich die 8 und die 9 im Nenner kürzen lassen. Weil 8 und 9 nur durch 2 und 3 teilbar sind, betrachten wir neben der 1 nur solche einstellige Zahlen, die ebenfalls nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten: 2, 3, 4 und 6. Der Zähler wird am kleinsten, wenn das doppelt auftretende R gleich 1 ist. Dann ist der Bruch gleich $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1}{8 \cdot 9} = 2$.

Wenn wir die Buchstaben durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ ersetzen, ist kein kleinerer Wert möglich, wie wir gesehen haben. Würden wir statt einer dieser Ziffern die 5 verwenden, dann kann diese nur im Zähler stehen, da sonst keine ganze Zahl entsteht. Der Wert des Bruchs wäre dann aber mindestens 5. Für 7 gilt das analog. Also ist (**B**) die Lösung.

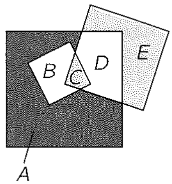
Zu dieser Aufgabe ist die Aufgabe 24 in Klassenstufe 11–13 inhaltlich identisch.

29. In einem Quadrat mit Seitenlänge 7 cm liegt ein Quadrat mit Seitenlänge 3 cm. Ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm schneidet beide Quadrate (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Um wie viel ist die schwarze Fläche größer als die Summe der beiden grauen Flächen?



(**A**) um 0 cm^2 (**B**) um 3 cm^2 (**C**) um 9 cm^2 (**D**) um 11 cm^2 (**E**) um 15 cm^2

Lösung: Wir bezeichnen die Flächenteile wie im Bild mit A bis E. Gesucht ist $A-(C+E) = A-C-E$. Bekannt sind die Flächeninhalte der 3 Quadrate:



$$A+B+C+D = 49$$
$$B+C = 9$$
$$C+D+E = 25$$

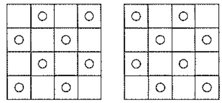
Wir stellen die gesuchte Größe $A-C-E$ als Kombination der Quadratflächen dar:

$$\begin{aligned} A-C-E &= (A+B+C+D)-(B+C)-(C+D+E) \\ &= 49-9-25 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Wir erkennen insbesondere, dass der Flächeninhalt nicht von der konkreten Lage der Quadrate abhängt. Wir könnten also auch eine ganz bestimmte, zum Rechnen günstige Lage wählen.

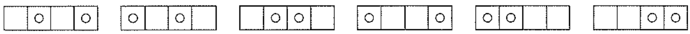
30. In Bens neuem Computerspiel ist eine knifflige Aufgabe zu lösen. Alle 16 Quadrate eines 4×4-Gitters sind zunächst weiß gefärbt. Wenn Ben auf ein Quadrat klickt, wird es entweder rot oder blau. Es gibt genau 2 rote Quadrate, und diese berühren sich an einer Seite. Die beiden roten Quadrate muss Ben aufdecken, und zwar mit so wenig Klicks wie möglich. Wie viele Klicks reichen sicher aus?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13



Lösung: Zuerst überlegen wir, welche möglichen Positionen es für die beiden benachbarten roten Quadrate gibt. Sie können senkrecht liegen und sich dabei über die erste und zweite, die zweite und dritte oder die dritte und vierte Zeile des 4×4-Gitters erstrecken. Das sind 12 Möglichkeiten. Für die waagerechte Lage gibt es ebenso 12, also insgesamt 24 mögliche Positionen. Die Eckfelder des Gitters gehören dabei jeweils zu 2 Positionen, die übrigen Randfelder zu jeweils 3 und die inneren vier Felder zu jeweils 4 möglichen Positionen. Um mit Sicherheit eines der roten Quadrate aufzudecken, müssen wir im schlechtesten Fall jede dieser 24 Positionen einmal markieren. Dazu brauchen wir in jeder Zeile mindestens 2 Klicks, also insgesamt mindestens 8 Klicks. Allerdings genügen 8 Klicks auch schon, wenn wir, wie im Bild oben dargestellt, die Felder schachbrettartig anklicken.

Dieses Muster ist außerdem das einzig mögliche, um mit 8 Klicks alle 24 Möglichkeiten für die 2 Quadrate zu markieren. Für die erste Zeile gibt es nämlich nur 6 Möglichkeiten für 2 Klicks:

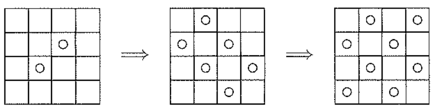


Die letzten drei Varianten scheiden sofort aus, da noch ein Doppelquadrat frei ist. Würden wir die dritte Möglichkeit wählen, wäre die Zeile darunter vom vierten Typ. Also bleiben nur die ersten beiden Varianten, woraus sich sogleich das komplette Muster ergibt.

Als nächstes stellen wir fest, dass es unabhängig davon, welche konkrete Strategie Ben zur Lösung der Aufgabe wählt, stets eine Position für das Doppelquadrat gibt, für das er auch wirklich 8 Klicks benötigt, um das erste rote Quadrat zu finden. Denn angenommen, es reichen stets weniger Klicks aus, dann betrachten wir eine Position, für die k Klicks mit $k < 8$ ausreichen. Dann ist irgendwo im Gitter eine Lücke, in die ein anderes Doppelquadrat passt. Wählen wir diese Position, dann sind nach unserer Strategie die ersten k Klicks dieselben, da die Bedingungen ja identisch sind. Allerdings finden wir im k-ten Klick *kein* rotes Quadrat. Wir brauchen also mindestens $k + 1$ Klicks. So finden wir schrittweise eine Position des Doppelquadrats, bei dem wir mit einer gewählten Strategie zum Finden des ersten roten Quadrats 8 Klicks benötigen. Und dann ist das Gitter, wie wir gesehen haben, schachbrettartig markiert.

Über die Lage des zweiten roten Quadrats liefert dieses Muster allerdings keine Auskunft. Je nachdem, wo dieses sich befindet, brauchen wir 2, 3 oder 4 weitere Klicks. Die Antwortmöglichkeiten (**A**) und (**E**) scheiden jetzt bereits aus.

Wir geben nun eine Strategie an, die mit 2 weiteren, also 10 Klicks auskommt, d. h., wir beschreiben eine bestimmte Reihenfolge der Klicks im Schachbrettmuster.



Zuerst klicken wir auf die inneren beiden markierten Quadrate. Decken wir ein rotes Quadrat auf, brauchen wir im ungünstigsten Fall weitere 4, also insgesamt höchstens 6 Klicks. Decken wir kein rotes Quadrat auf, dann klicken wir nacheinander auf *die* vier Randquadrate, die keine Ecken sind. Decken wir hier ein rotes Quadrat auf, brauchen wir zu den 6 Klicks im ungünstigsten Fall weitere 3, also insgesamt höchstens 9 Klicks. Ist auch hier kein rotes Quadrat dabei, müssen wir noch die beiden Ecken markieren. Hier finden wir nun *mit Sicherheit* ein rotes Quadrat und brauchen zu den 8 Klicks im ungünstigsten Fall weitere 2, also insgesamt 10 Klicks. (**B**) ist die Lösung.

Klassenstufen 9 und 10

1. Der Zebrastreifen vor der Grundschule beginnt auf beiden Seiten der Fahrbahn mit einem weißen Streifen. Jeder der 8 weißen Streifen ist 50 cm breit, ebenso wie die Lücken dazwischen. Wie breit ist die Straße beim Zebrastreifen?

(**A**) 4,50 m (**B**) 5,50 m (**C**) 6,50 m (**D**) 7,50 m (**E**) 8,50 m

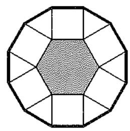
Lösung: Da der Zebrastreifen auf beiden Seiten der Straße mit einem weißen Streifen beginnt, kommen zu den 8 weißen Streifen 7 Lücken dazu. Die Straße ist $(8+7)\cdot 50\,\text{cm} = 7{,}50\,\text{m}$ breit.

2. Wenn $R = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5$, $S = 2^2 + 3^2 + 4^2$ und $T = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4$, dann gilt

(**A**) $T < S < R$ (**B**) $S < R < T$ (**C**) $R < S = T$ (**D**) $R < S < T$ (**E**) $R = S < T$

Lösung: Im ersten Summanden von R ist ein Faktor größer als im ersten Summanden von S und der andere Faktor ist gleich. Das gilt für alle drei Summanden, also $R > S$. Die Summanden in S sind auch jeweils größer als die in T, also $S > T$. Damit ergibt sich $R > S > T$ bzw. $T < S < R$.

3. An das regelmäßige graue Sechseck mit Seitenlänge 1 werden nach außen abwechselnd Quadrate und gleichseitige Dreiecke gesetzt. Welchen Umfang hat die so entstehende Figur?



(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 15

Lösung: Da es sich um 6 Quadrate und ebensoviele gleichseitige Dreiecke handelt, die alle dieselbe Seitenlänge haben, ergibt sich als Umfang des entstandenen regelmäßigen Zwölfecks 12. Dass tatsächlich bei dem Ansetzen der Quadrate und gleichseitigen Dreiecke ein regelmäßiges Zwölfeck entsteht, lässt sich durch Betrachtung der auftretenden Winkel beweisen.

4. Reni liebt Spielereien mit Buchstaben. LAGEPLAN wollte sie in ein 4×2-Kästchenpapier schreiben. Dabei sollten aufeinander folgende Buchstaben des Wortes in Kästchen stehen, die zumindest eine gemeinsame Ecke haben. Bei welcher der 4×2-Tafeln ist ihr das *nicht* gelungen?

(**A**)

A	E	P	L
G	L	N	A

(**B**)

A	L	P	E
N	L	A	G

(**C**)

L	G	A	L
N	A	E	P

(**D**)

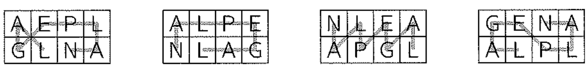
N	L	E	A
A	P	G	L

(**E**)

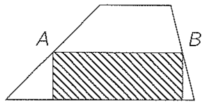
G	E	N	A
A	L	P	L

Lösung: Bei Tafel (**C**) hat Reni sich geirrt. Da das Wort auf N endet, müsste das A rechts neben dem N vorher geschrieben worden sein, und davor das L über dem N. Nun müsste aber der Buchstabe P zu diesem L benachbart sein, was nicht der Fall ist.

Die anderen Buchstabenschlangen sind möglich, wie wir hier zeigen:



5. Der schraffierte rechteckige Teil des Trapezes hat einen Flächeninhalt von $13\,\text{cm}^2$. Die Eckpunkte A und B sind jeweils die Mittelpunkte der Trapezseiten. Welchen Flächeninhalt hat dann das gesamte Trapez?



(A) $15\,\text{cm}^2$ **(B)** $18\,\text{cm}^2$ **(C)** $21\,\text{cm}^2$ **(D)** $24\,\text{cm}^2$ **(E)** $26\,\text{cm}^2$

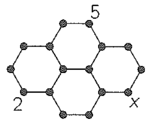
Lösung: Wenn h die Höhe des Trapezes bezeichnet, dann ist der gesuchte Flächeninhalt $h \cdot \overline{AB}$, denn die Strecke $\overline{AB}$ ist genau die Mittellinie des Trapezes. Der Flächeninhalt des schraffierten Rechtecks ist $\frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{AB}$, also halb so groß wie der des Trapezes. Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $2 \cdot 13\,\text{cm}^2 = 26\,\text{cm}^2$.

6. Bei Spielwürfeln summieren sich die Punkte auf einander gegenüberliegenden Seiten zu 7. Ich staple 3 Spielwürfel so übereinander, dass die Summe der Punkte auf den Seitenflächen, die direkt aufeinander liegen, jeweils 5 ist. Der unterste Würfel liegt mit der 6 auf dem Tisch. Wie viele Punkte sind auf der nach oben weisenden Seite des obersten Würfels zu sehen?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Lösung: Bei Spielwürfeln liegen jeweils die Zahlen 1 und 6, 2 und 5 bzw. 3 und 4 einander gegenüber. Wenn der unterste Würfel mit der 6 auf dem Tisch liegt, zeigt er mit der 1 nach oben. Darauf liegt vom mittleren Würfel die 4, weil $5 - 1 = 4$. Der mittlere Würfel zeigt dann mit der 3 nach oben, der oberste Würfel liegt mit der 2 nach unten und zeigt somit mit der 5 nach oben.

7. An alle Eckpunkte der Figur sind Zahlen so zu schreiben, dass die Summe der beiden Zahlen an jeder Sechseckseite stets dieselbe ist. Dann ist $x =$



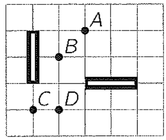
(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 10 **(D)** 20 **(E)** 24

Lösung: Da auf jeder Sechseckseite die Summe der beiden Zahlen gleich ist, stehen auf den beiden zur 5 benachbarten Ecken dieselben Zahlen. Und gehen wir von diesen jeweils einen Schritt weiter, so trifft dasselbe erneut zu, was bedeutet, dass wieder jeweils eine 5 zu schreiben ist. Dieselbe Überlegung ist auch aus Richtung der Ecke mit der 2 richtig. Wir finden also abwechselnd 5 und 2 an den Sechsecksecken. Folglich ist $x = 5$.

8. Franz spielt mit seinen kleinen Schwestern Jette und Jule ein Brettspiel, bei dem gewürfelt wird, wie weit man ziehen darf. Gleich zu Beginn führt Franz vor Jette. Jule liegt knapp hinter Jette. Zum Vergnügen der Kleinen vertauscht sich mehrmals die Reihenfolge. Jette zählt die Wechsel der Reihenfolge: 4-mal zwischen ihr und Franz, 3-mal zwischen Jule und Franz und 3-mal zwischen ihr und Jule. Wie ist die Reihenfolge am Spielende?

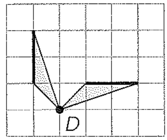
(A) Franz vor Jette vor Jule **(B)** Jette vor Jule vor Franz **(C)** Franz vor Jule vor Jette
(D) Jule vor Jette vor Franz **(E)** Jule vor Franz vor Jette

Lösung: Zu Beginn ist Franz vor Jette vor Jule. Wenn Jette und Franz 4-mal die Reihenfolge wechseln, also eine *gerade* Anzahl von Wechseln stattfindet, ändert sich die Reihenfolge zwischen den beiden im Vergleich zum Beginn nicht. Hingegen findet zwischen Franz und Jule bzw. zwischen Jette und Jule jeweils eine *ungerade* Anzahl von Wechseln statt. In beiden Fällen ändert sich also die Reihenfolge im Vergleich zum Beginn. Jule kommt daher vor Franz und Jette als Erste ins Ziel. Weil Franz vor Jette bleibt, ist die gesuchte Reihenfolge die unter **(E)**: Jule vor Franz vor Jette.



9. In einer optischen Versuchsanordnung muss dafür gesorgt werden, dass ein beidseitiger Spiegel an zwei unterschiedlichen Stellen zur Verfügung steht (s. Bild mit Blick von oben). Er soll durch eine Drehung von der einen in die andere Stellung gebracht werden. Welcher der Punkte A, B, C bzw. D kann Drehzentrum sein?

(**A**) nur A (**B**) nur A und C (**C**) nur D (**D**) nur A und D (**E**) A, B und D



Lösung: Wenn ein Punkt Drehzentrum ist, dann muss er zu jedem der beiden Endpunkte des Spiegels in beiden möglichen Positionen den gleichen Abstand haben. Das ist nur für die Punkte A und D erfüllt. Die Dreiecke, die aus dem Punkt A bzw. D und den Endpunkten des Spiegels in den jeweiligen Positionen gebildet werden sind jeweils kongruent (*sss*), gehen also durch Drehung um den Punkt A bzw. D auseinander hervor (siehe Bild für den Punkt D). Die Punkte A und D sind folglich beide mögliche Drehzentren.

10. Ein rechteckiges Mosaik mit einer Gesamtfläche von $360\,\text{cm}^2$ besteht aus quadratischen Teilen, die alle dasselbe Maß haben. Das Mosaik ist 12 cm hoch und 5 Quadrat-Teile breit. Welche Seitenlänge hat ein einzelnes Quadrat-Teil?

(**A**) 4 cm (**B**) 5 cm (**C**) 6 cm (**D**) 8 cm (**E**) 9 cm

Lösung: Da das rechteckige Mosaik 12 cm hoch ist, ist es $360\,\text{cm}^2 : 12\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$ breit. Da das Mosaik 5 Quadrat-Teile breit ist, beträgt die Seitenlänge jedes einzelnen Quadrat-Teils $30\,\text{cm} : 5 = 6\,\text{cm}$.

KAENGURU-Kryptogramm II

Im rechts stehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe entsteht.
Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.
Es gibt mehrere Lösungen.
Wer findet mindestens zwei verschiedene Lösungen?

$$\begin{array}{r} \text{K A E N} \\ +\ \text{G U R U} \\ \hline \text{F I G U R} \end{array}$$

11. Die 3×3-Tafel ist mit Zahlen so zu füllen, dass in *jedem* 2×2-Teilquadrat die Summe der 4 Zahlen 10 ist. Dann ist die Summe der zu ergänzenden 4 Zahlen

1		0
	2	
4		3

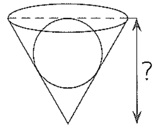
(**A**) 12 (**B**) 11 (**C**) 10 (**D**) 9 (**E**) nicht eindeutig bestimmt

Lösung: Wir bezeichnen die fehlenden Zahlen mit a, b, c, d und summieren die Zahlen in den beiden dick umrandeten 2×2-Teilquadraten:
$(1+2+a+b)+(2+3+c+d) = 10+10$, also $a+b+c+d = 20-8 = 12$.

1	b	0
a	2	c
4	d	3

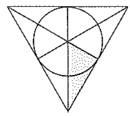
Wir können auch versuchen, die leeren Zellen mit Zahlen so zu füllen, dass die Bedingung erfüllt ist. Eine Möglichkeit ist im unteren Bild zu sehen.

1	5	0
2	2	3
4	2	3



12. Eine Kugel mit dem Radius 15 cm wird in ein kegelförmiges Loch gekullert und passt genau so in dieses Loch, wie es im Bild zu sehen ist. Die Seitenansicht des Loches ist ein gleichseitiges Dreieck. Wie tief ist das Loch (in cm)?

(**A**) 40 (**B**) $30\sqrt{2}$ (**C**) $25\sqrt{3}$ (**D**) 45 (**E**) 60



Lösung: Wenn die Seitenansicht des Lochs ein gleichseitiges Dreieck ist, dann ist die Seitenansicht der Kugel der Inkreis dieses Dreiecks. Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, die in diesem Fall gleichzeitig die Seitenhalbierenden sind. Die Tiefe des Lochs ist somit gleich der Länge der Seitenhalbierenden. Wer weiß, dass sich die Seitenhalbierenden in jedem Dreieck im Verhältnis 2 : 1 teilen, ist schnell fertig, denn dann ist in diesem Fall die Seitenhalbierende dreimal so lang wie der Inkreisradius, also $3 \cdot 15\,\text{cm} = 45\,\text{cm}$.

Die Länge der Seitenhalbierenden kann in diesem Fall aber auch wie folgt gefunden werden: Jedes der 6 Teildreiecke, in die die drei Seitenhalbierenden das gleichseitige Dreieck zerlegen (eines ist im Bild grau hervorgehoben), ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks – das ergibt sich aus den Winkelverhältnissen. Die längste Seite eines solchen Teildreiecks ist also doppelt so lang wie die kürzeste Seite, deren Länge gleich dem Inkreisradius ist. Die Länge der Seitenhalbierenden setzt sich also aus dem einfachen und dem doppelten Inkreisradius zusammen, beträgt also $3 \cdot 15\,\text{cm} = 45\,\text{cm}$.

13. Der berühmte Chemie- und Friedensnobelpreisträger Linus Pauling wurde an einem Donnerstag geboren, in einem Monat, der nur 4 Donnerstage hatte. Im darauffolgenden Monat gab es 5 Freitage, 5 Samstage und 5 Sonntage. Für den auf diesen folgenden Monat traf dann gewiss zu: Er hatte

(**A**) genau 4 Dienstage (**B**) genau 4 Mittwoche (**C**) 5 Donnerstage
(**D**) 5 Freitage (**E**) 5 Samstage

Lösung: Mit Sicherheit gibt es in jedem Monat jeden Tag 4-mal. Ein Monat mit 5 Freitagen, 5 Samstagen und 5 Sonntagen muss 31 Tage haben und mit einem Freitag beginnen. Der Monat davor endete auf einen Donnerstag und kann, weil es nur 4 Donnerstage gab, nur 28 Tage haben. Linus Pauling wurde also im Februar geboren. Der übernächste Monat April hatte 30 Tage und begann mit einem Montag. Montage und Dienstage gab es folglich je 5, alle anderen Tage genau 4-mal. Die einzige zutreffende Aussage ist (**B**).

14. Die Zahlen x und y sind beide größer als 1. Welcher der folgenden Brüche hat den größten Wert?

(**A**) $\frac{x}{y-1}$ (**B**) $\frac{x}{y+1}$ (**C**) $\frac{2x}{2y-1}$ (**D**) $\frac{2x}{2y+1}$ (**E**) $\frac{3x}{3y-1}$

Lösung: Bringen wir alle fünf Brüche auf denselben Zähler, indem wir (**A**) und (**B**) mit 6, (**C**) und (**D**) mit 3 bzw. (**E**) mit 2 erweitern, so erhalten wir:

(**A**) $\frac{6x}{6y-6}$ (**B**) $\frac{6x}{6y+6}$ (**C**) $\frac{6x}{6y-3}$ (**D**) $\frac{6x}{6y+3}$ (**E**) $\frac{6x}{6y-2}$

Bei gleichem Zähler ist der Bruch mit dem größten Nenner am kleinsten und der mit dem kleinsten Nenner am größten. Der gesuchte Bruch ist also (**A**).

15. Die größtmögliche Anzahl von aufeinanderfolgenden dreistelligen Zahlen, deren jede *mindestens eine* ungerade Ziffer enthält, ist

(**A**) 99 (**B**) 101 (**C**) 111 (**D**) 121 (**E**) 221

Lösung: Wir können 100 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen finden, deren Hunderterziffern ungerade sind, z. B. $100, 101, \dots, 199$ oder $300, 301, \dots, 399$. Die nächste Zahl besteht auf jeden Fall nur aus geraden Ziffern. Aber vor 300 (ebenso vor 500, 700 und 900) stehen noch weitere 11 Zahlen, die mindestens eine ungerade Ziffer enthalten: $289, 290, 291, \dots, 299$. Die größtmögliche Anzahl von aufeinanderfolgenden dreistelligen Zahlen, deren jede *mindestens eine* ungerade Ziffer enthält, ist also 111.

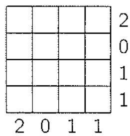
16. Ich habe zwei würfelförmige Gefäße. Die Kanten des größeren sind um 1 cm länger als die des kleineren. Als ich den vollen größeren Würfel in den kleinen entleere bis der voll ist, bleiben im großen 217 ml übrig. Daraus lässt sich das Volumen des kleinen Würfels errechnen. Es beträgt

(**A**) 243 ml (**B**) 512 ml (**C**) 125 ml (**D**) 1331 ml (**E**) 729 ml

Lösung: Weil sich das Volumen eines Würfels als dritte Potenz seiner Kantenlänge errechnet und $1\,\text{ml} = 1\,\text{cm}^3$ ist, suchen wir zwei aufeinanderfolgende Kubikzahlen, deren Differenz 217 ist. Wenn wir die kleinere der beiden mit x bezeichnen, dann gilt $(x+1)^3 - x^3 = 217$. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 217$. Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung $x^2 + x = 72$, die wir als $x(x+1) = 8 \cdot 9$ schreiben können. Daraus folgt $x = 8$, woraus sich als Volumen des kleinen Würfel $(8\,\text{cm})^3 = 512\,\text{cm}^3 = 512\,\text{ml}$ ergibt.

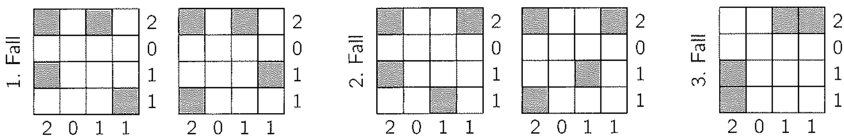
Die Lösung $x = 8$ erhalten wir natürlich auch, wenn wir für zum Lösen von $x^2 + x - 72 = 0$ die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen benutzen.

17. Vier Kästchen im 4×4-Gitter sollen lila gefärbt werden. Die Zahlen rechts bzw. unten geben an, wie viele Kästchen in einer Reihe bzw. Spalte lila sein sollen. Dafür gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Wie viele?



(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Um in der obersten Zeile 2 Kästchen lila zu färben, haben wir drei verschiedene Möglichkeiten (siehe Bild). In keinem der Fälle ist in der zweiten Zeile ein Kästchen zu färben. Für die Lage des einen lila Kästchens in der dritten Zeile gibt es in den ersten beiden Fällen jeweils 2 Möglichkeiten und im dritten Fall nur eine. Das zu färbende Kästchen in der vierten Zeile ist durch die ersten drei Zeilen jeweils eindeutig bestimmt. Insgesamt gibt es 5 verschiedene Möglichkeiten:

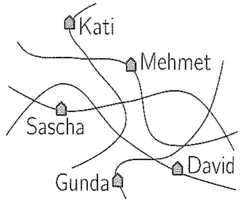


18. Wenn $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$ ist, dann ist $n =$

(**A**) 671 (**B**) 1005 (**C**) 1011 (**D**) 2010 (**E**) 2011

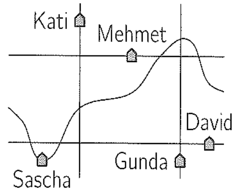
Lösung: Es gilt $3^{2011} = 9^n + 9^n + 9^n = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot (3^2)^n = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$, also $2n + 1 = 2011$ und damit $n = 1005$.

19. Im schaukelnden Autobus hat Kay eine Straßenskizze gekritzelt. Daraus geht zwar hervor, dass jeder seiner Freunde an genau einer Straße wohnt und dass die Straßen sich in genau 10 Punkten schneiden. Allerdings ist nicht sofort zu erkennen, dass genau vier der Straßen schnurgerade sind und welche die kurvenreiche Bogenallee ist. Wer wohnt an der Bogenallee?



(A) David **(B)** Gunda **(C)** Kati **(D)** Mehmet **(E)** Sascha

Lösung: Zwei schnurgerade Straßen kreuzen sich höchstens einmal. Also können die Straßen, in denen Sascha und David wohnen, nicht beide gerade sein, denn sie schneiden sich zweimal. Auch die Straßen, in denen Sascha und Mehmet wohnen, schneiden sich zweimal und können nicht beide gerade sein. Da aber nur eine der fünf Straßen nicht gerade ist, muss die Straße, in der Sascha wohnt, die gesuchte Bogenallee sein. Das rechte Bild zeigt, wie die Straßen in Wirklichkeit verlaufen könnten.



20. Alfons schrieb die 9 Zahlen von 1 bis 9 in irgendeiner Reihenfolge nebeneinander in eine Zeile. Dann schrieb er in die Zeile darunter immer zwischen zwei benachbarte Zahlen ihren Mittelwert und addierte all diese Mittelwerte, wobei er 41 erhielt. Wie groß hätte diese Summe bei anderer Anordnung der Zahlen *höchstens* sein können?

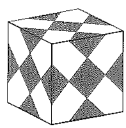
(A) 41,5 **(B)** 42 **(C)** 42,5 **(D)** 43 **(E)** 43,5

Lösung: Angenommen wir haben die Zahlen von 1 bis 9 in irgendeiner Reihenfolge und schreiben für die erste Zahl a_1, für die zweite Zahl a_2, usw. Die Summe, die Alfons aufschreibt, ist dann

$$\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_4+a_5}{2}+\frac{a_5+a_6}{2}+\frac{a_6+a_7}{2}+\frac{a_7+a_8}{2}+\frac{a_8+a_9}{2}$$
$$=\frac{a_1}{2}+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\frac{a_9}{2}$$

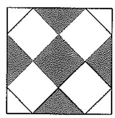
Wenn also Alfons die Mittelwerte addiert, dann trägt bis auf die erste und die letzte Zahl jede der 9 Zahlen zur Summe zweimal die Hälfte, also einmal die Zahl selbst bei. Die erste und die letzte Zahl gehen nur zur Hälfte in die Summe ein. Damit die Summe der Mittelwerte am größten wird, müssen erste und letzte Zahl kleinstmöglich, also gleich 1 bzw. 2 sein. Die größte Summe, die Alfons erhalten kann, ist somit $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+3+4+5+6+7+8+9=1\frac{1}{2}+42=43{,}5$.

21. Tanja hat einen weißen Würfel mit der Kantenlänge 10 cm mit schwarzen Quadraten beklebt (siehe Bild). Der Würfel sieht von allen Seiten gleich aus. Wie groß ist die gesamte schwarze Fläche?



(A) 225 cm² **(B)** 240 cm² **(C)** 245 cm² **(D)** 256 cm² **(E)** 275 cm²

Lösung: Die Oberfläche des gesamten Würfels beträgt $6\cdot 100\,\text{cm}^2=600\,\text{cm}^2$. Auf jeder Seitenfläche sind, wie rechts zu sehen ist, 1 ganzes und 4 halbe, also insgesamt 3 Quadrate schwarz. Die weiße Fläche setzt sich aus 4 ganzen und 4 Viertel-Quadraten, also 5 Quadraten gleicher Größe zusammen. Die schwarze Fläche verhält sich also zur weißen Fläche wie 3 : 5. Die gesamte schwarze Fläche beträgt also $600\cdot\frac{3}{3+5}=225\,\text{cm}^2$.



22. Theo hat die „coolen“ Zahlen erfunden. Eine Zahl ist „cool“, wenn sie lauter verschiedene Ziffern hat und ihre erste Ziffer die Summe der anderen Ziffern ist. Wie viele 5-stellige „coole“ Zahlen gibt es?

(**A**) 72 (**B**) 108 (**C**) 144 (**D**) 168 (**E**) 216

Lösung: Da die Ziffern einer „coolen“ Zahl alle verschieden sind, ist die erste Ziffer mindestens 6, denn die anderen vier Ziffern sind mindestens 0, 1, 2 und 3 und $0+1+2+3=6$. Ist die erste Ziffer 7, müssen die anderen vier Ziffern 0, 1, 2 und 4 sein. Für 8 als erste Ziffer gibt es wegen $8=0+1+2+5$ und $8=0+1+3+4$ zwei Möglichkeiten. Für die 9 als erste Ziffer sind es wegen $9=0+1+2+6$, $9=0+1+3+5$ oder $9=0+2+3+4$ drei Möglichkeiten. Für jeden dieser 7 Fälle gibt es für die zweite Ziffer 4 Möglichkeiten, für die dritte Ziffer noch 3, für die zweite Ziffer 2, und für die letzte nur noch eine Möglichkeit. Die erste Ziffer ist durch die anderen 4 eindeutig bestimmt. Es gibt also $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ mögliche Zahlen für jeden der 7 Fälle und somit $7\cdot 24=168$ „coole“ 5-stellige Zahlen.

23. Für wie viele verschiedene geordnete Paare natürlicher Zahlen (x, y) gilt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$?

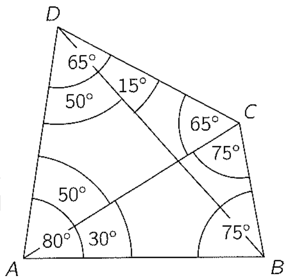
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Zuerst versuchen wir, eine Lösung mit $x=y$ zu finden. Wenn $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$ ist, also $\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$, muss $x=6$ sein. Sind x und y verschieden, so ist einer der beiden Brüche kleiner, der andere größer als $\frac{1}{6}$. Nehmen wir zuerst $x<y$ an. Dann ist $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ und folglich $\frac{1}{x}$ der größere der beiden Brüche. Also ist $\frac{1}{x}$ größer als $\frac{1}{6}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$. Damit kommen nur $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ für $\frac{1}{x}$ in Frage. Wir rechnen $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$, das ist eine Lösung. Hingegen liefert $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$ keine Lösung, denn der Bruch kann nicht gekürzt werden. So haben wir das Lösungspaar $(4;12)$ gefunden. Wenn $x>y$ ist, finden wir mit der gleichen Überlegung das Lösungspaar $(12;4)$. Insgesamt gibt es die 3 Lösungspaare $(6;6)$, $(4;12)$ und $(12;4)$.

24. Im Viereck $ABCD$, in dem sich die beiden Diagonalen im Inneren schneiden, ist $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\measuredangle BAD=80°$, $\measuredangle CBA=75°$ und $\measuredangle ADC=65°$. Wie groß ist $\measuredangle BDC$?

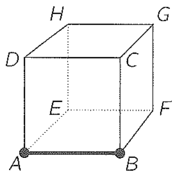
(**A**) 10° (**B**) 12° (**C**) 15° (**D**) 18° (**E**) 25°

Lösung: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit Basis $\overline{BC}$, folglich ist $\measuredangle ACB=\measuredangle CBA=75°$. Nun finden wir die Winkel $\measuredangle BAC=180°-2\cdot 75°=30°$ und $\measuredangle CAD=80°-30°=50°$. Im Dreieck ACD ist dann $\measuredangle DCA=180°-50°-65°=65°$. Also ist das Dreieck ACD gleichschenklig und ebenso wegen $\overline{AD}=\overline{AC}=\overline{AB}$ das Dreieck ABD. Dann folgt für den Basiswinkel $\measuredangle ADB=(180°-80°):2=50°$, und der gesuchte Winkel ist $\measuredangle BDC=65°-50°=15°$.



25. Auf wie viele Arten lassen sich aus der Menge aller Kanten eines Würfels vier Kanten auswählen, so dass keine zwei dieser vier Kanten einen gemeinsamen Punkt haben?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 18



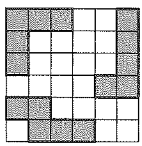
Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass alle 8 Ecken des Würfels zu den 4 Kanten gehören, da keine zwei einen gemeinsamen Punkt besitzen, der ja nur ein Eckpunkt sein kann. Wenn nun eine Kante zu einer solchen Auswahl gehört, muss innerhalb mindestens einer der beiden Seitenflächen, zu der diese Kante gehört, auch die gegenüberliegende, parallele Kante zur Auswahl gehören. Gehört beispielsweise $\overline{AB}$ zur Auswahl, gehört entweder $\overline{EF}$ oder $\overline{CD}$ oder beide ebenfalls zur Auswahl, denn wäre das nicht der Fall, müssten $\overline{FG}$ *und* $\overline{CG}$ zur Auswahl gehören, die jedoch den gemeinsamen Punkt G besitzen.

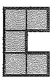
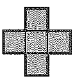
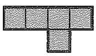
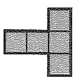
Wir erkennen nun leicht, dass jede Kanten-Auswahl aus zwei Paaren paralleler Kanten besteht. Die Paare gehören zu zwei einander gegenüberliegenden Seitenflächen. Jetzt können wir die gesuchte Anzahl wie folgt abzählen: Es gibt 3 Möglichkeiten, einander gegenüberliegende Seitenflächen auszuwählen, oben und unten, links und rechts, vorn und hinten. Und für jede der 2 Seitenflächen gibt es 2 mögliche Wahlen für zwei parallele Kanten. Also finden wir insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Kanten-Auswahlen. Jetzt haben wir jedoch diejenigen Möglichkeiten, bei denen alle vier Kanten zueinander parallel sind, doppelt gezählt. Das sind 3 Fälle. Also gibt es nur $12 - 3 = 9$ verschiedene Arten, vier Kanten wie in der Aufgabe beschrieben auszuwählen.

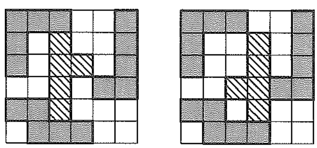
KAENGURU-Permutationen I

Die Wörter AUGENKUR und GRAUUNKE sind Beispiele für Permutationen, also unterschiedliche Anordnungen der acht Buchstaben des Wortes KAENGURU.
Wie viele verschiedene Permutationen des Wortes KAENGURU lassen sich bilden?

26. Gegeben sind acht Spielsteine. Zu den drei auf dem Brett liegenden Steinen soll einer der fünf zur Auswahl stehenden so hinzugelegt werden, dass für keinen der anderen vier Platz ist. Die Steine dürfen gedreht und gewendet werden, müssen aber in das Raster auf dem Brett passen. Welcher Stein muss gewählt werden?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 



Lösung: Für (**C**) gibt es 2 Möglichkeiten, den Stein so auf das Feld zu legen, dass keiner der anderen 4 Steine mehr dazupasst (siehe Bild).

Durch systematisches Probieren lässt sich unschwer herausfinden, dass mit keinem der anderen 4 Steine die Bedingung der Aufgabe erfüllt werden kann.

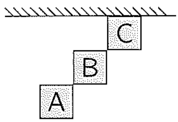
Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 26 gestellt.

27. Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ bezeichnen wir mit $\langle n \rangle$ die größte Primzahl, die nicht größer ist als n. Wie viele positive ganze Zahlen k erfüllen die Gleichung $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

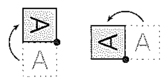
(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) mehr als drei

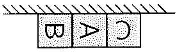
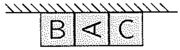
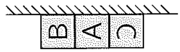
Lösung: Die drei Summanden in der Gleichung $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$ sind Primzahlen. Wären diese Primzahlen alle größer als 2, wären sie alle ungerade, was nicht möglich ist. Dann muss also eine der drei Zahlen gleich 2 sein. Notwendigerweise ist das $\langle k+1 \rangle$. Die größte Primzahl, die nicht größer, d. h. kleiner oder gleich $k+1$ ist, ist also 2. Damit folgt $k+1=2$, also $k=1$ als einzige Lösung. Die Gleichung $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$ lautet in diesem Fall $2+3=5$.

28. Drei große Kisten wurden geliefert und abgestellt (s. Bild rechts oben). Sie sollen ordentlich an die Wand gestellt werden. Da sie sehr schwer sind, können sie nur um einen der Eckpunkte um 90° gedreht, nicht aber getragen oder gekippt werden (s. Bild rechts unten). Wie könnten sie nachher an der Wand stehen?



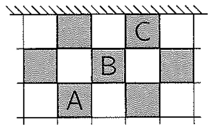
so: oder so:

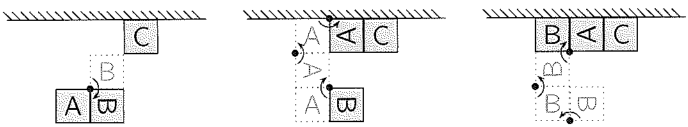


(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) Alle 4 Anordnungen sind möglich.

Lösung: Wir stellen uns vor, dass die Kisten auf einem Quadratraster stehen. Die Quadrate färben wir wie im Bild schachbrettartig abwechselnd schwarz und weiß. Beim Bewegen der Kisten ist die Buchstabenrichtung auf Quadraten gleicher Farbe stets gleich und auf Quadraten verschiedener Farbe stets verschieden: auf schwarzen Feldern stehen die Buchstaben immer aufrecht oder über Kopf, und auf weißen Feldern liegen die Buchstaben stets auf der Seite. In der Endposition befinden sich die Kisten B und C wie zu Beginn auf Quadraten gleicher Farbe, die Kiste A hingegen auf einem Quadrat der anderen Farbe. Die Buchstabenrichtung der Kisten B und C muss also gleich sein, die von Kiste A muss davon verschieden sein. Das ist nur bei Position (**B**) der Fall, die anderen Positionen sind nicht möglich. Hier ist eine Möglichkeit, wie die Kisten in die Position (**B**) bewegt werden können:





KAENGURU-Permutationen II

Von einer Permutation der Buchstaben des Wortes KAENGURU gelangt man zu einer anderen, indem man mehrmals jeweils benachbarte Buchstaben vertauscht. Wie oft mindestens müssen in den Begriffen AUGENKUR bzw. GRAUUNKE jeweils zwei benachbarte Buchstaben vertauscht werden, um das Wort KAENGURU zu erhalten?

29. Mein Urlaubstraumziel 2011 habe ich in eine Rechenknobelei verpackt: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, in $GARD - ASEE = 2011$ die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtige Gleichung entsteht? Gleiche Buchstaben sind für gleiche Ziffern, verschiedene für verschiedene zu setzen.

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass sich $R \neq D$ nur realisieren lässt, wenn $1 + E \geq 10$ ist, woraus $E = 9$ folgt. Dann folgt $D = 0$ und $R = 1$. Nun muss $S + 1 = A$ und $A + 2 = G$ bzw. $A + 3 = G$ (falls ein Übertrag entsteht) gelten. Da die Ziffern 0, 1 und 9 nicht mehr zur Verfügung stehen, gibt es die folgenden 4 Möglichkeiten für die Ziffern S, A und G:

$$\begin{array}{lcl}
S = 2,\ A = 3,\ G = 5 & \Longrightarrow & 5310 - 3299 = 2011 \\
S = 3,\ A = 4,\ G = 6 & \Longrightarrow & 6410 - 4399 = 2011 \\
S = 4,\ A = 5,\ G = 7 & \Longrightarrow & 7510 - 5499 = 2011 \\
S = 5,\ A = 6,\ G = 8 & \Longrightarrow & 8610 - 6599 = 2011
\end{array}$$

30. Gleich nach dem Beziehen ihrer Nester treffen sich die Störche Otto, Alfred und Ede auf dem Stadttor zum Klappern. „Mein Nest ist mehr als doppelt so weit von Alfreds Nest entfernt wie von Edes Nest", klappert Otto. „Mein Nest ist mehr als doppelt so weit von Edes Nest entfernt wie von Ottos Nest", klappert Alfred. „Mein Nest ist mehr als doppelt so weit von Alfreds Nest entfernt wie von Ottos Nest", klappert Ede. Wenn 2 Störche richtig geschätzt haben, dann hat mit Sicherheit

(**A**) auch der 3. Storch Recht. (**B**) Otto falsch geschätzt. (**C**) Alfred falsch geschätzt.

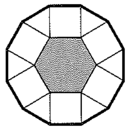
(**D**) Ede falsch geschätzt. (**E**) der 3. Storch falsch geschätzt. Welcher es ist, kann nicht bestimmt werden.

Lösung: Wir bezeichnen die Punkte, an denen sich Ottos, Alfreds und Edes Nester befinden, entsprechend mit O, A und E. Diese drei Punkte bilden ein Dreieck. Den drei Aussagen entsprechen die folgenden drei Ungleichungen:

$$\overline{AO} > 2 \cdot \overline{EO} \qquad \text{(Otto)}$$
$$\overline{AE} > 2 \cdot \overline{AO} \qquad \text{(Alfred)}$$
$$\overline{AE} > 2 \cdot \overline{EO} \qquad \text{(Ede)}$$

Wenn wir annehmen, dass alle drei Recht haben, so folgt durch Addieren der letzten beiden Ungleichungen $2 \cdot \overline{AE} > 2 \cdot \overline{AO} + 2 \cdot \overline{EO}$, also $\overline{AE} > \overline{AO} + \overline{EO}$, was im Widerspruch zur Dreiecksungleichung für das Dreieck OAE steht. Also hat Otto oder Alfred falsch geschätzt. Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt ähnlich $\overline{AO}+\overline{AE} > 2\cdot\overline{EO}+2\cdot\overline{AO}$, also $\overline{AE} > 2\cdot\overline{EO}+\overline{AO} > \overline{EO}+\overline{AO}$, ebenfalls ein Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Also hat Alfred oder Ede falsch geschätzt. Da 2 Störche richtig geschätzt haben, muss Alfred, der in beiden Fällen zu den Verdächtigen gehört, daneben liegen. Die erste und die letzte Ungleichung können auch wirklich erfüllt werden, wenn A genügend weit von E und O entfernt ist. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn $\overline{EO} = 100\,\text{m}$ beträgt und A von E und O jeweils $300\,\text{m}$ entfernt ist.

Klassenstufen 11 bis 13



1. An das graue regelmäßige Sechseck mit Seitenlänge 1 werden nach außen abwechselnd Quadrate und gleichseitige Dreiecke gesetzt. Welchen Umfang hat die so entstehende Figur?

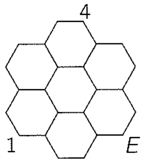
(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 18 (**E**) 21

Lösung: siehe Aufgabe 3 in Klassenstufe 9/10

2. Effi, Johanna und Caro starten zum Seifenkistenkurvenrennen. Zuerst führt Effi, gefolgt von Johanna und danach Caro. Bei der rasanten Fahrt um die Kurven tauschen Effi und Johanna insgesamt 5-mal die Reihenfolge. Mit Caro tauscht Effi die Reihenfolge nur 2-mal. Johanna und Caro tauschen die Reihenfolge 4-mal. Wie ist die Reihenfolge im Ziel?

(**A**) Caro vor Effi vor Johanna (**B**) Johanna vor Caro vor Effi (**C**) Effi vor Johanna vor Caro
(**D**) Caro vor Johanna vor Effi (**E**) Johanna vor Effi vor Caro

Lösung: Bei einer geradzahligen Anzahl von Tauschvorgängen zwischen zwei Startern ist die Reihenfolge am Ende offenbar dieselbe wie zu Beginn. Folglich unterscheidet sich die Reihenfolge am Ende gegenüber der Reihenfolge zu Beginn nur in der Reihenfolge von Effi und Johanna. Die Zielankunft ist: Johanna vor Effi vor Caro.



3. An alle Ecken der Sechsecke sollen Zahlen geschrieben werden, so dass die Summe der beiden Zahlen an jeder Sechseckseite stets dieselbe ist. Folglich ist $E =$

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 24

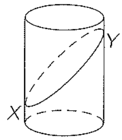
Lösung: Da auf jeder Sechsecksseite die Summe der beiden Zahlen gleich ist, stehen auf den beiden zur 4 benachbarten Ecken dieselben Zahlen. Und gehen wir von diesen jeweils einen Schritt weiter, so trifft dasselbe erneut zu, was bedeutet, dass wieder jeweils eine 4 zu schreiben ist. Dieselbe Überlegung ist auch aus Richtung der Ecke mit der 1 richtig. Wir finden also abwechselnd 4 und 1 auf den Seiten. Folglich ist $E = 4$.

4. Wie viele der ungeraden Zahlen, die größer 0 und kleiner als 54 sind, sind *nicht* durch 3 teilbar?

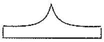
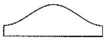
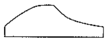
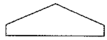
(**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 10 (**D**) 9 (**E**) 7

Lösung: Es sind $54 : 2 = 27$ Zahlen von 1 bis 53 ungerade. Von diesen 27 Zahlen ist genau ein Drittel durch 3 teilbar, die restlichen zwei Drittel nicht. Demzufolge sind 18 Zahlen zwischen 1 und 53 ungerade und *nicht* durch 3 teilbar.

Da es sich um eine überschaubare Anzahl von Zahlen handelt, besteht eine sinnvolle Lösungsstrategie auch darin, die gesuchten Zahlen aufzulisten: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53.



5. Ein Zylinder ist durch einen ebenen Schnitt, der durch die beiden Punkte X und Y auf dem Mantel verläuft, in zwei Teile geteilt worden. Wie könnte die abgewickelte Mantelfläche des unteren Zylinderteils aussehen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Um den Mantel abzuwickeln, wurde der Zylinder entlang der Senkrechten zur Grundfläche durch den Punkt X aufgeschnitten. Die Schnittkurve steigt von X aus zunächst sacht an und wird dann steiler. In der Nähe von Y ist die Schnittkurve wieder flacher. Die Schnittkurve ist ganz glatt, hat keine Ecken und besitzt eine Symmetrieachse. Das kann nur Bild (**C**) sein.

Für Interessierte geben wir hier einen Weg an, wie die Kurve ausgerechnet werden kann. Dazu stellen wir uns der Einfachheit halber vor, dass die Schnittebene den Zylinder im Winkel von 45° schneidet. Als Radius des Zylinders wählen wir 1, seine Höhe sei h ($h > 1$).

Zuerst finden wir eine geeignete Beschreibung des Zylinders, indem wir ihn uns als zusammengeklebtes Rechteck vorstellen. Die Abmessungen des Rechtecks sind demnach $2\pi \times h$. Die Koordinaten der Punkte eines Kreises können mit Hilfe der Winkelfunktionen Cosinus und Sinus beschrieben werden. Da ein Zylinder nichts anderes als eine unendliche Kopie desselben Kreises ist, sind die Punkte auf dem Zylinder von der Form $(\cos p, \sin p, q)$. Dabei reicht der Winkel p von $-\pi$ bis π, und die Höhe q liegt zwischen $-h/2$ und $h/2$. Wenn wir von der Seite schauen, sehen wir, dass die Ebene gerade aus den Punkten des Raumes (x, y, z) besteht, für die $z = x$ gilt, die y-Koordinate ist frei. Auf der Schnittlinie von Zylinder und Ebene liegen also diejenigen Punkte der Form $(\cos p, \sin p, q)$, für die $z = x$, also $q = \cos p$ gilt. Der Graph der Funktion $q = \cos p$ im Intervall $[-\pi; \pi]$ ist gerade die abgewickelte Schnittkurve.

6. Ich stelle mir alle 4-stelligen Zahlen, deren Ziffernsumme 4 ist, der Größe nach aufgeschrieben vor. Mit der kleinsten wird begonnen. An welcher Stelle finden wir die 1102?

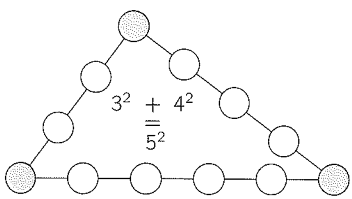
(**A**) an der 5. (**B**) an der 6. (**C**) an der 7. (**D**) an der 8. (**E**) an der 9.

Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass in der Gleichungskette $4 = 4+0+0+0 = 3+1+0+0 = 2+2+0+0 = 2+1+1+0 = 1+1+1+1$ alle möglichen Darstellungen der 4 als Summe von 4 Ziffern erfasst sind, sofern die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt. Damit ergeben sich die folgenden 4-stelligen Zahlen mit Ziffernsumme 4, der Größe nach aufgeschrieben: 1003; 1012; 1021; 1030; 1102; usw. Die 1102 steht also an 5. Stelle.

Magischer Pythagoras

In die Felder des rechtwinkligen Dreiecks sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 so eingetragen werden, dass die Zahlensumme auf jeder Dreiecksseite 30 beträgt.

Zusatz: Es gibt mehrere Möglichkeiten für solch eine Eintragung. Wie groß ist aber in jedem Fall die Summe der drei Eckzahlen?

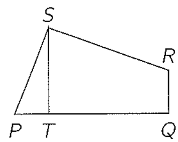


7. Addiere ich die Längen von drei der vier Seiten eines Rechtecks, so kann ich als Ergebnis 20 oder 22 erhalten. Welchen Umfang hat das Rechteck?

(**A**) 24 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 28 (**E**) 32

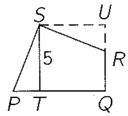
Lösung: Wir bezeichnen mit a die Länge der längeren, mit b die der kürzeren Seite des Rechtecks. Offenbar habe ich bei der größeren Summe die beiden längeren zur kürzeren addiert, also $2a + b$, bei der kleineren Summe die beiden kürzeren Seiten zur längeren, also $a + 2b$. Addiere ich die beiden Summen, so erhalte ich $3a + 3b = 20 + 22 = 42$. Folglich ist $a + b = 14$ und der Umfang $u = 2a + 2b = 2 \cdot 14 = 28$.

8. Im Viereck $PQRS$ ist $\overline{PS} = \overline{SR}$, $\measuredangle PSR = \measuredangle RQP = 90^\circ$ und $\overline{ST} = 5$. Die Strecke ST steht senkrecht auf PQ (*Skizze nicht maßstabgerecht*). Dann ist der Flächeninhalt von $PQRS$ gleich



(**A**) 20 (**B**) 22,5 (**C**) 25 (**D**) 27,5 (**E**) 30

Lösung: Wir vervollständigen das Viereck $TQRS$ zu einem Rechteck. Dann ist $\triangle SPT \cong \triangle SRU$, denn es ist $\measuredangle RSU = \measuredangle PST$, da $\measuredangle PSR = 90^\circ$ ist, und $\measuredangle STP = \measuredangle SUR = 90^\circ$ sowie $\overline{PS} = \overline{SR}$ nach Voraussetzung. Daraus folgt, dass $\overline{ST} = \overline{SU} = 5$ ist. Also ist das Rechteck $TQUS$ ein Quadrat und sein Flächeninhalt ist gleich 25. Dieser Flächeninhalt ist gleich dem gesuchten Flächeninhalt.



9. Wenn $2^x = 15$ und $15^y = 32$ ist, dann ist $x \cdot y =$

(**A**) 5 (**B**) $\log_2 47$ (**C**) 7 (**D**) $\sqrt{47}$ (**E**) $\log_2 15 + \log_{15} 32$

Lösung: Aus $2^x = 15$ und $15^y = 32$ finden wir durch Einsetzen $(2^x)^y = 2^{xy} = 32$. Da $32 = 2^5$ ist, folgt $x \cdot y = 5$.

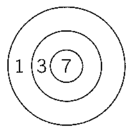
10. In $z = \star\star\star 5 \star 0$ steht jedes Sternchen für eine Ziffer. Es ist bekannt, dass z durch 27 teilbar ist und dass $\sqrt{z}$ eine natürliche Zahl ist. Dann ist $\sqrt{z} =$

(**A**) 580 (**B**) 290 (**C**) 370 (**D**) 420 (**E**) 450

Lösung: Da z auf 0 endet, muss $\sqrt{z}$ auch auf 0 enden und z demzufolge auf 00. Die 5 vor den beiden Nullen in z kann nur entstehen, wenn $\sqrt{z}$ auf 50 endet. Dann muss $\sqrt{z} = 450$ sein.

Eine Teilbarkeitsbetrachtung führt ebenso zum Ziel: Da die Quadratzahl z durch 27 teilbar ist, muss $\sqrt{z}$ durch 9 teilbar sein. Von den vorgeschlagenen Zahlen ist nur 450 durch 9 teilbar.

11. Die Ringe auf einer Zielscheibe sind mit 1, 3 und 7 bewertet (s. Abb.). Ein Schuss, der danebengeht, ist 0 Punkte wert. Wie viele verschiedene Gesamtpunktzahlen sind als Ergebnis bei drei Schüssen möglich?



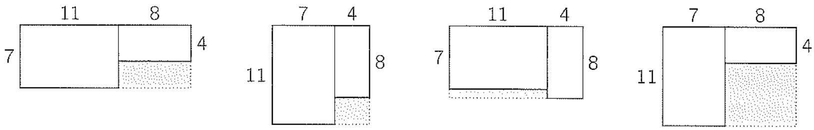
(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 17 (**D**) 19 (**E**) 22

Lösung: Wir stellen systematisch zusammen, welche Schießergebnisse bei 3 Schüssen möglich sind: 7 7 7 (= 21); 7 7 3 (= 17); 7 7 1 (= 15); 7 7 0 (= 14); 7 3 3 (= 13); 7 3 1 (= 11); 7 3 0 (= 10); 7 1 1 (= 9); 7 1 0 (= 8); 7 0 0 (= 7); 3 3 3 (= 9); 3 3 1 (= 7); 3 3 0 (= 6); 3 1 1 (= 5); 3 1 0 (= 4); 3 0 0 (= 3); 1 1 1 (= 3); 1 1 0 (= 2); 1 0 0 (= 1); 0 0 0 (= 0). Von diesen 20 Möglichkeiten erhalten wir 17 verschiedene Schießergebnisse, da die Ergebnisse 3, 7 und 9 doppelt auftreten.

12. Zu zwei Rechtecken mit den Maßen 7×11 bzw. 4×8 suche ich ein drittes Rechteck, so dass ich die drei Rechtecke zu einem großen Rechteck zusammenlegen kann. Welches der folgenden Maße kann das dritte Rechteck *nicht* haben?

(**A**) 1×11 (**B**) 3×4 (**C**) 3×8 (**D**) 7×8 (**E**) 4×7

Lösung: Es gibt 4 Möglichkeiten, wie die beiden gegebenen Rechtecke im großen Rechteck zusammenstoßen können: entweder stoßen die beiden kurzen Seiten aneinander oder die beiden langen Seiten oder eine lange und eine kurze Seite:



Die entsprechenden Maße des dritten (grau unterlegten) Rechtecks sind von links nach rechts: 3×8, 3×4, 1×11, 7×8. Das Maß 4×7 ist nicht möglich.

KAENGURU-Teilung

Das Rechteck ist in 8 deckungsgleiche Teile zu zerlegen. Dabei soll sich aus den in jedem Teil befindlichen Buchstaben jeweils ein mathematischer Begriff bilden lassen. Wie sieht die Zerlegung aus und wie lauten die 8 mathematischen Begriffe?

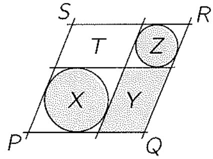
O	R	K	A	E	N	G	U	R	U	N	D
S	U	D	R	U	F	E	N	H	A	N	G
T	L	S	A	R	I	L	E	S	E	S	O
E	I	S	B	E	E	T	M	K	G	L	Z
T	E	L	E	T	T	E	N	S	R	A	D
H	T	S	C	H	I	C	H	I	N	B	E
E	G	G	E	K	G	Z	N	M	I	L	Z
N	E	K	A	E	N	G	U	R	U	C	H

13. Claire, unser Mathegenie, hat in diesem Jahr die Schultombola vorbereitet. Sie hat die Lose mit lauter verschiedenen natürlichen Zahlen beschriftet. Als ich sie frage, wie viele Lose es gibt, sagt sie, dass von den Zahlen, die sie auf die Lose geschrieben hat, genau 30 durch 6 teilbar seien, genau 20 durch 7 und genau 10 durch 42. Wie viele Lose sind demzufolge mindestens in der Tombola?

(**A**) 30 (**B**) 40 (**C**) 53 (**D**) 54 (**E**) 60

Lösung: Nach Claires Aussage gibt es genau 30 Lose mit Zahlen, die durch 6 teilbar sind, und genau 20 Lose mit Zahlen, die durch 7 teilbar sind. Unter diesen insgesamt 50 Losen sind solche – nämlich insgesamt genau 10 – auf denen Zahlen stehen, die durch 42, also durch 6 *und* 7 teilbar sind. Diese wurden bei den 50 Losen doppelt gezählt. Folglich reduziert sich die Anzahl der Lose um 10. Es bleiben 40 Loszettel als Minimum.

14. Drei Parallelen werden von drei anderen Parallelen so geschnitten, dass, wie im Bild, in zwei der entstehenden Parallelogramme Kreise einbeschrieben werden können. Die Flächeninhalte der grauen Flächen seien X, Y und Z, der des Parallelogramms $PQRS$ sei W, und der Flächeninhalt des weißen Parallelogramms sei T. Wenn ich aus den Werten X, Y, Z, W geeignet wählen kann, wie viele dieser Werte muss ich mindestens kennen, um T zu bestimmen?



(**A**) einen (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) vier (**E**) weitere Angaben sind nötig

Lösung: Da die Parallelogramme, in die Kreise einbeschrieben werden können, Rhomben (Rauten) sind, und da die Winkel des Parallelogramms mit dem Flächeninhalt T gleich denen mit dem Flächeninhalt Y sind, sind diese beiden Parallelogramme zueinander kongruent. Wir brauchen folglich nur den Flächeninhalt von Y zu kennen.

15. Micha will in die fünf leeren Felder des abgebildeten 3×3-Feldes ganze Zahlen derart hineinschreiben, dass in jedem 2×2-Teilquadrat die Summe der vier Zahlen 10 ist. Welche der folgenden Zahlen kann die Summe der zu ergänzenden fünf Zahlen sein?

	2	
1		3
	4	

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) keine dieser Zahlen

Lösung: Wir tragen in die leeren Felder Variablen ein und erhalten aus den Voraussetzungen: $a+c+1+2 = 10$, $b+c+1+4 = 10$, $c+d+3+4 = 10$ und $c+e+2+3 = 10$, woraus durch Addition $a+b+d+e+4c = 40-2\cdot(1+2+3+4) = 20$ folgt. Damit ist $a+b+c+d+e = 20-3c$. Die Summe der 5 einzutragenden Zahlen hängt also davon ab, welche Zahl wir für c wählen. Außerdem lässt die Zahl $20-3c$ bei Division durch 3 den Rest 2, was für keine der Zahlen 9, 10, 12 und 13 zutrifft. Damit ist Antwort (**E**) die richtige.

a	2	e
1	c	3
b	4	d

16. Ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat haben denselben Umfang. Dann verhält sich die Dreiecksfläche zur Quadratfläche wie

(**A**) 3 : 4 (**B**) 1 : 2 (**C**) $\sqrt{2} : 2$ (**D**) $2\sqrt{5} : 5$ (**E**) $4\sqrt{3} : 9$

Lösung: Wir setzen die Seitenlänge des Quadrats 1. Dann ist die Seitenlänge des Dreiecks $\frac{4}{3}$. Der Flächeninhalt des Quadrats ist 1. Den Flächeninhalt $A_\triangle$ des Dreiecks können wir z. B. mit der Flächenformel von Heron ausrechnen, denn wir kennen alle Seitenlängen und damit auch den halben Dreiecksumfang s. Es ist $A_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{2\left(2-\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$. Das ist auch das gesuchte Verhältnis, da der Flächeninhalt des Quadrats 1 ist.

Eine andere Möglichkeit, $A_\triangle$ zu bestimmen, besteht darin, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Höhe des gleichseitigen Dreiecks und anschließend den Flächeninhalt $A_\triangle$ mit der bekannten Formel als halbes Produkt von Grundseitenlänge und Höhe zu berechnen.

17. Bei einer Umfrage unter den Teilnehmern an der Regionalrunde der Mathematik-Olympiade stellt sich heraus: genau 6 der 48 Teilnehmer haben nur ein Geschwisterkind, das auch bei der Regionalrunde mitmacht, 9 der Teilnehmer sind mit 2 Geschwistern dabei und 4 mit sogar 3 Geschwistern. Die restlichen Teilnehmer haben keine Geschwister, die an der Regionalrunde teilnehmen. Aus wie vielen verschiedenen Familien sind die Teilnehmer bei dieser Regionalrunde?

(**A**) 19 (**B**) 25 (**C**) 31 (**D**) 36 (**E**) 48

Lösung: Die 6 Kinder, die mit nur einem Geschwisterkind bei der Regionalrunde dabei sind, stammen aus 3 Familien; die 9 Kinder, die mit zwei Geschwisterkindern dabei sind, stammen aus 3 Familien; und die 4 Kinder, die mit drei Geschwisterkindern dabei sind, müssen alle Geschwister sein, stammen also aus derselben Familie. Von den 48 Teilnehmern sind es $6 + 9 + 4 = 19$ Teilnehmer, die nicht allein aus ihren Familien kommen, die restlichen $48 - 19 = 29$ sind die einzigen aus ihren Familien. Folglich sind Teilnehmer aus $29 + 3 + 3 + 1 = 36$ Familien bei der Regionalrunde dabei.

18. Auch bei der Fluggesellschaft X gibt es eine Grenze, bis zu der das Gepäck ohne Aufpreis mitbefördert wird. Bei Übergepäck ist ein fester Betrag pro kg zu entrichten. Ein Ehepaar, das zusammen 60 kg Gepäck aufgibt, hat 30 € für Übergepäck zu bezahlen. Ein Einzelreisender würde für 60 kg Gepäck 105,00 € bezahlen. Bis zu welcher Grenze erfolgt die Beförderung von Gepäck ohne Aufpreis?

(**A**) 15 kg (**B**) 16 kg (**C**) 18 kg (**D**) 20 kg (**E**) 25 kg

Lösung: Es sei x das Freigepäckgewicht bei der Fluggesellschaft X. Dann hat das Ehepaar 30,00 € für $60 - 2x$ zu zahlen, der Einzelreisende hat 105,00 € für $60 - x$ zu zahlen. Übergepäckgewicht und die Kosten dafür sind proportional zueinander, es ist also $\frac{60 - 2x}{60 - x} = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$ bzw. $420 - 14x = 120 - 2x$, woraus wir $12x = 300$ bzw. $x = 25$ errechnen.

19. Ich betrachte die Menge aller 3-stelligen Zahlen, die als Ziffern nur 1, 2 oder 3 haben. Dann wähle ich aus dieser Menge eine Teilmenge so, dass je zwei Zahlen dieser Teilmenge mindestens eine Ziffer gemeinsam haben. Wie viele Zahlen kann eine solche Teilmenge *höchstens* enthalten?

(**A**) 4 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 24 (**E**) 36

Lösung: Zur Menge der dreistelligen Zahlen, die nur die 1, 2 oder 3 als Ziffer haben, gehören drei, in denen jeweils nur eine dieser Ziffern auftritt, nämlich 111, 222 und 333. Zur Menge gehören weiterhin die dreistelligen Zahlen, in denen jede der Ziffern auftritt. Dies sind die durch Vertauschen der 1, 2 und 3 entstehenden Zahlen, wovon es genau 6 gibt und die offensichtlich sämtlich zur gesuchten Teilmenge gehören. Ferner gibt es jene dreistelligen Zahlen, in denen genau 2 der 3 Ziffern auftreten. Davon gibt es zu jeder der 3 Kombinationen von 2 Ziffern (1 und 2, 2 und 3, 3 und 1) genau 6 – am Beispiel der Ziffern 1 und 2 machen wir dies klar: 112, 121, 211, 122, 212, 221. Auch diese insgesamt 18 Zahlen können zur gesuchten Teilmenge gehören, da je zwei in gewiss einer Ziffer übereinstimmen. Die zugehörige Teilmenge hätte dann $6 + 18 = 24$ Elemente, denn von den Zahlen 111, 222 bzw. 333 kann keine hinzukommen. Jede Teilmenge, die der Bedingung aus der Aufgabe genügt und z. B. 111 enthält, kann die 6 Zahlen, die aus den anderen beiden Ziffern, 2 und 3, gebildet werden, nicht enthalten, umfasst also weniger Elemente.

KAENGURU-Kryptogramm III

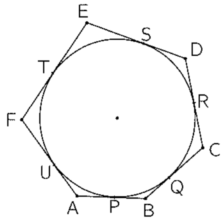
Lassen sich die Sternchen in der Multiplikationsaufgabe

$$\star\star\star \cdot \star = \star\star\star$$

durch die Ziffern von 1 bis 7 so ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal verwendet wird?

20. Die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FA}$ eines 6-Ecks sind sämtlich Tangenten desselben Kreises. Wenn $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CD} = 6$, $\overline{DE} = 7$ und $\overline{EF} = 8$ ist, wie lang ist dann $\overline{FA}$?

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 13

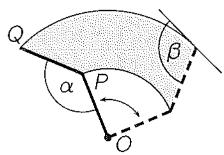


Lösung: Es seien P, Q, R, S, T, U die Berührungspunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ bzw. $\overline{FA}$ mit dem Kreis. Von jedem der Eckpunkte des Sechsecks gehen Tangenten an den Kreis, wobei die Strecken von diesem Eckpunkt bis zu den beiden Berührungspunkten jeweils gleich lang sind. So ist $\overline{AP} = \overline{AU}, \overline{BP} = \overline{BQ}, \overline{CQ} = \overline{CR}$, $\overline{DR} = \overline{DS}, \overline{ES} = \overline{ET}, \overline{FT} = \overline{FU}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}\overline{FA} &= \overline{AU} + \overline{FU} = \overline{AP} + \overline{FT}\\ &= (\overline{AB} - \overline{BP}) + (\overline{EF} - \overline{ET}) = \overline{AB} - \overline{BQ} + \overline{EF} - \overline{ES}\\ &= \overline{AB} - (\overline{BC} - \overline{CQ}) + \overline{EF} - (\overline{DE} - \overline{DS}) = \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CR} + \overline{EF} - \overline{DE} + \overline{DR}\\ &= \overline{AB} - \overline{BC} + (\overline{CR} + \overline{DR}) - \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EF}\,.\end{aligned}$$

Also ist $\overline{FA} = 4-5+6-7+8 = 6$ und (**B**) die Lösung. Wenn wir Anfang und Ende der Rechnung vergleichen, sehen wir: für *jedes* Tangentensechseck gilt $\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EF} - \overline{FA} = 0$.

21. Ein Scheibenwischer ist so konstruiert, dass die Länge des Wischers $\overline{PQ}$ und die des Verbindungstabs zum Motor $\overline{PO}$ gleich sind und dass zwischen ihnen der feste Winkel α ist. Der Wischer führt eine Drehbewegung um O bis zum Anschlag aus. Dort entsteht zwischen der Tangente an die Kurve, die das Wischerblattende beschreibt, und dem Wischerblatt der Winkel β. Es ist $\beta =$



(**A**) $\dfrac{3\pi - \alpha}{2}$ (**B**) $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ (**C**) $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$ (**D**) $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ (**E**) $\pi + \dfrac{\alpha}{2}$

Lösung: Wir stellen uns vor, dass die Punkte, in die Q bzw. P bei der Wischerbewegung übergehen, mit R bzw. S bezeichnet sind. Dann ist $\overline{OR}$ Radius des Kreises um O und steht damit auf der Tangente in R senkrecht. Der Winkel β ist also die Summe dieses rechten Winkels und $\angle ORS$. Das Dreieck OSR ist nach Voraussetzung gleichschenklig, und daher $\angle ORS = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. Daraus folgt, dass $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \pi - \frac{\alpha}{2}$ ist.

22. Gibt es eine natürliche Zahl a mit folgenden Eigenschaften: $a + 1$ ist durch 2 teilbar, $a + 2$ ist durch 3 teilbar, $a + 3$ ist durch 4 teilbar, $a + 4$ ist durch 5 teilbar, $a + 5$ ist *nicht* durch 6 teilbar?

(**A**) Nein, sie existiert nicht. (**B**) Ja, die kleinste ist 2-stellig. (**C**) Ja, die kleinste ist 4-stellig. (**D**) Ja, die kleinste ist 5-stellig. (**E**) Ja, die kleinste ist 7-stellig.

Lösung: Da $a + 1$ durch 2 teilbar sein soll, ist auch $a + 5 = a + 1 + 4$ durch 2 teilbar. Da $a + 2$ durch 3 teilbar ist, ist auch $a + 5 = a + 2 + 3$ durch 3 teilbar. Folglich ist $a + 5$ durch 6 teilbar, und damit bewiesen, dass es eine Zahl, wie sie in der Aufgabe beschrieben wird, nicht gibt.

23. Unter den positiven ganzen Zahlen x, die kleiner als 100 sind, suchen wir alle diejenigen, für die $x^2 - 81$ durch 100 teilbar ist und summieren sie. Diese Summe ist gleich

(**A**) 100 (**B**) 91 (**C**) 200 (**D**) 181 (**E**) 81

Lösung: Wenn $x^2 - 81$ durch 100 teilbar sein soll, so muss x^2 auf 81 enden. Damit ist die erste positive ganze Zahl, für die dies zutrifft, offenbar die 9. Weiterhin ist klar, dass x nur auf 1 oder auf 9 enden kann, dass folglich x die Gestalt $10a + 1$ oder $10a + 9$ haben muss, wobei a eine einstellige Zahl ist. Dann ist im ersten Fall $x^2 = (10a + 1)^2 = 100a^2 + 20a + 1$. Diese Zahl endet dann auf 81, wenn $a = 4$ oder wenn $a = 9$ ist. Dem entspricht $x = 41$ bzw. $x = 91$. Im zweiten Fall ist $x^2 = (10a + 9)^2 = 100a^2 + 180a + 81$, woraus sich neben der schon eingangs erwähnten Lösung, bei der $a = 0$ ist, noch die Lösung $a = 5$ ergibt. Dazu gehört dann 59. Die gesuchte Summe ist $9 + 59 + 41 + 91 = 200$.

24. Im rechts abgebildeten Bruch stehen in den Produkten in Zähler und Nenner verschiedene Buchstaben für verschiedene und gleiche Buchstaben für gleiche positive einstellige Zahlen. Welchen *kleinsten ganzzahligen* Wert kann der Bruch annehmen?

$$\frac{S \cdot I \cdot L \cdot I \cdot Z \cdot I \cdot U \cdot M}{Z \cdot I \cdot N \cdot K}$$

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 7

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass von den 9 möglichen einstelligen Zahlen 8 auszuwählen sind, da es 8 verschiedene Buchstaben sind. Nun überlegen wir uns, dass für Z, das im Zähler und Nenner je genau einmal auftritt, eine der Primzahlen, 5 oder 7, gewählt werden sollte – diese beiden Primzahlen haben kein Vielfaches, das kleiner als 9 ist, können also nur im Zähler erscheinen und würden, sofern sie nicht gekürzt werden können, stets dazu führen, dass der Wert des Bruches ein Vielfaches von ihnen ist. Die nächste Überlegung ist, dass nach dem Kürzen von I im Zähler I^2 verbleibt, was es nahelegt, $I = 1$ zu wählen. Es verbleiben 4 (verschiedene) Faktoren im Zähler, 2 im Nenner. Wir versuchen, eine solche Belegung zu finden, die ohne die Primzahlen 5 und 7 auskommt. Setzen wir N und K größtmöglich, um den Wert des Bruches klein zu halten, nämlich $N = 8$ und $K = 9$, so stellt die Wahl von $S = 2$, $L = 3$, $U = 4$ und $M = 6$ die Lösung dar. Dann ist der Wert des Bruches gleich 2.

Zu dieser Aufgabe ist die Aufgabe 28 in Klassenstufe 7/8 inhaltlich identisch.

25. Wir betrachten die arithmetischen Folgen $\{1, 20, 39, 58, \ldots\}$ und $\{35, 61, 87, 113\ldots\}$. Wie viele verschiedene arithmetische Folgen von positiven ganzen Zahlen gibt es, die diese beiden Folgen als Teilfolgen enthalten?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) vier (**E**) unendlich viele

Lösung: Wir bezeichnen $\mathcal{F} = \{1, 20, 39, 58, \ldots\}$ und $\mathcal{G} = \{35, 61, 87, 113\ldots\}$. Da die Differenz der arithmetischen Folge $\mathcal{F}$ gleich 19 ist, gehören zu $\mathcal{F}$ auch $58 + 19 = 77$, $77 + 19 = 96$ und $96 + 19 = 115$ dazu. Und da in der arithmetischen Folge $\mathcal{G}$ die Zahl 113 ist, kann die Differenz der Folge, in der $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Teilfolgen sind, nicht größer als 2 sein. Da nun aber in $\mathcal{F}$ gerade und ungerade Zahlen sind, muss die Differenz 1 sein. Und da $\mathcal{F}$ mit 1 beginnt, ist die einzige Folge, in der sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{G}$ gleichzeitig Teilfolgen sind, die Folge der positiven ganzen Zahlen $\{1, 2, 3, 4\ldots\}$. Also ist (**B**) richtig.

Allgemein gilt: Wenn eine arithmetische Folge zwei gegebene arithmetische Folgen enthält, dann teilt ihre Differenz den größten gemeinsamen Teiler der Differenzen der gegebenen Folgen. In unserem Fall ist dieser größte gemeinsame Teiler 1, also kann es sich nur um eine Folge mit der Differenz 1 handeln.

26. Ria und Yves überlegen, ob sie baden gehen sollen. Ein Wurf mit einer noch zu bestimmenden Anzahl von Würfeln soll die Entscheidung bringen. Wird keine 6 gewürfelt, wird gebadet und Ria muss als Erste ins Wasser. Ist genau eine 6 dabei, wird ebenfalls gebadet und Yves muss als Erster rein. Wird mehr als eine 6 gewürfelt, wird nicht gebadet. Mit wie vielen Würfeln müssen Ria und Yves würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, als Erster ins Wasser zu müssen, für beide gleich ist?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 17

Lösung: Sei n die gesuchte Anzahl von Würfeln. Für jeden einzelnen Würfel ist unabhängig von den anderen die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, gleich $\frac{1}{6}$ und die Wahrscheinlichkeit, keine 6 zu würfeln, beträgt $\frac{5}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, beim *gleichzeitigen* Werfen aller n Würfel keine 6 zu würfeln (das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ria als Erste ins Wasser muss), ist folglich $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Würfel eine 6 zeigt, während die anderen keine 6 zeigen, ist $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Da jeder der n Würfel die 6 zeigen könnte, ist die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Werfen der n Würfel genau eine 6 zu würfeln $n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ (das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Yves als Erster ins Wasser muss). Damit für beide die Wahrscheinlichkeit, als Erster ins Wasser zu müssen, gleich ist, muss also gelten:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{n}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

Damit ist klar, dass $n = 5$ die gesuchte Anzahl von Würfeln ist. Bei 5 Würfeln ist für beide die Chance, als Erster ins Wasser zu müssen, gleich, und zwar etwa 40 %.

27. Es sei z die kleinstmögliche Zahl der Form $a \cdot b \cdot c$, wobei die Bedingung $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ erfüllt ist. Dabei sind a, b und c natürliche Zahlen. Wie viele Teiler hat z, wobei 1 und z als Teiler eingeschlossen sind?

(A) 30 **(B)** 49 **(C)** 60 **(D)** 77 **(E)** 103

Lösung: Aus der Gleichungskette $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ können wir schließen: Wenn für eine Primzahl $p \neq 2$ gilt, dass $p|a$, so gilt $p^3|a$ (wegen $a^2 = 2b^3$) und wenn für eine Primzahl $p \neq 3$ gilt, dass $p|a$, so gilt $p^5|a$ (wegen $a^2 = 3c^5$). Demzufolge ist der kleinste Wert, den a annehmen kann, $a = 2^5 \cdot 3^3$. In diesem Fall gilt wegen $a^2 = 2b^3$, dass $2^{10} \cdot 3^6 = 2 \cdot b^3$, also $b = 2^3 \cdot 3^2$ sowie wegen $a^2 = 3 \cdot c^5$, dass $2^{10} \cdot 3^6 = 3 \cdot c^5$, also $c = 2^2 \cdot 3$ ist. Damit ist $z = a \cdot b \cdot c = (2^5 \cdot 3^3) \cdot (2^3 \cdot 3^2) \cdot (2^2 \cdot 3) = 2^{10} \cdot 3^6$. Die 2 tritt in der höchsten Potenz 10 auf, die 3 in der höchsten Potenz 6, d. h., es gibt die 11 Potenzen der 2: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots 2^{10}$, die mit jeder der 7 Potenzen der 3, nämlich $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^6$ zu einem Teiler von z kombiniert werden können. Die Anzahl der Teiler ist folglich $11 \cdot 7 = 77$.

28. Auf dem Wühltisch im Kaufhaus liegen am Abend rote und grüne Socken wild durcheinander. Als Spezialist in Sockenmathematik zähle ich sogleich alle Socken, und nach etwas Überlegen stellt sich heraus, dass die Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen Greifen zweier Socken zwei gleichfarbige zu erwischen, gleich 1/2 ist. Welche der folgenden Aussagen ist dann *mit Sicherheit* richtig?

(A) Die Anzahl der Socken ist durch 4 teilbar.
(B) Die Anzahl der Socken ist eine Primzahl.
(C) Es sind genauso viele rote wie grüne Socken.
(D) Die Anzahl der Socken ist mindestens 10.
(E) Die Anzahl der Socken ist eine Quadratzahl.

Lösung: Wir bezeichnen mit r bzw. g die Anzahl der roten bzw. grünen Socken. Wenn die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Socken zu erwischen, gleich $1/2$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Socken zu greifen, also gleich der Wahrscheinlichkeit, zwei ungleichfarbige Socken zu greifen. Wir berechnen beide Wahrscheinlichkeiten und stellen uns vor, dass wir zwei Socken nacheinander ziehen, ohne den erstgezogenen zurückzulegen. Zwei gleichfarbige Socken zu greifen, bedeutet, zwei rote *oder* zwei grüne zu greifen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

$$\frac{r}{r+g}\cdot\frac{r-1}{r+g-1}+\frac{g}{r+g}\cdot\frac{g-1}{r+g-1}=\frac{r(r-1)+g(g-1)}{(r+g)(r+g-1)}$$

Für zwei ungleichfarbige Socken gibt es 2 Möglichkeiten: erst rot, dann grün *oder* erst grün, dann rot. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

$$\frac{r}{r+g}\cdot\frac{g}{r+g-1}+\frac{g}{r+g}\cdot\frac{r}{r+g-1}=\frac{2rg}{(r+g)(r+g-1)}$$

Diese beiden Wahrscheinlichkeiten sollen gleich sein, und wenn wir mit dem gemeinsamen Nenner $(r+g)(r+g+1)$ multiplizieren, erhalten wir die Gleichung $r(r-1)+g(g-1)=2rg$. Da wir an der Summe $r+g$ interessiert sind, bringen wir $r+g$ auf eine Seite der Gleichung und erhalten $r+g=r^2+g^2-2rg=(r-g)^2$. Die Anzahl der Socken ist also eine Quadratzahl. Das ist eine *notwendige* Bedingung. Damit die Wahrscheinlichkeit wirklich $1/2$ ist, muss die Gesamtzahl der Socken auf dem Wühltisch darüber hinaus genau das Quadrat des Unterschieds zwischen der Anzahl roter und grüner Socken sein.

Die Situation in der Aufgabe tritt also zum Beispiel ein, wenn 1 rote und 3 grüne oder 15 rote und 10 grüne Socken auf dem Wühltisch liegen.

29. Wir stellen uns vor, dass in ein 4×3-Kästchenpapier 12 voneinander verschiedene positive ganze Zahlen geschrieben wurden. Dabei haben Zahlen in benachbarten Zellen, d. h. solchen, die eine gemeinsame Seite haben, einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Wir bezeichnen die größte dieser 12 Zahlen mit G. Wie groß muss G mindestens sein?

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 21

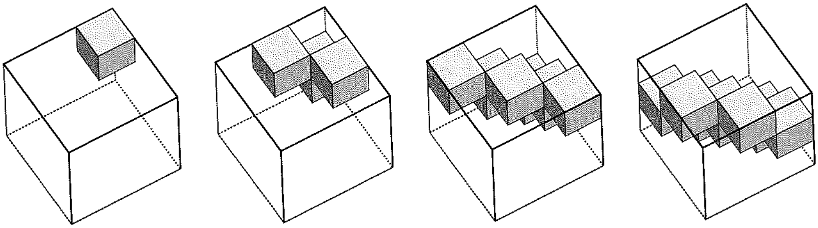
Lösung: Wir beginnen mit den kleinsten möglichen Zahlen, das sind $1, 2, 3, \ldots, 11, 12$. Die 1 entfällt, da sie mit keiner Zahl einen Teiler > 1 hat. Also brauchen wir noch mindestens die 13, die aber auch ungeeignet ist, da sie als Primzahl mit keiner kleineren Zahl einen gemeinsamen Teiler > 1 hat – ebenso wie die 11. Statt 11 und 13 wählen wir 14 und 15. Nun fällt noch auf, dass die 7 unter diesen Zahlen nur die 14 als möglichen Nachbarn haben kann. In dem Rechteck hat aber jede Zahl mindestens 2 Nachbarn. Also streichen wir die 7, hinzu kommt die 16. Mit den Zahlen $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16$ können wir das Rechteck füllen. Im Bild ist ein Beispiel zu sehen. Die größte Zahl muss also mindestens 16 sein.

4	2	10	5
14	8	6	15
16	12	9	3

30. Ein $3\times 3\times 3$-Würfel besteht aus 27 identischen kleinen Würfeln. Eine Ebene, die durch den Mittelpunkt des Würfels verläuft, schneidet den Würfel senkrecht zu einer der Raumdiagonalen des Würfels. Wie viele kleine Würfel schneidet diese Ebene?

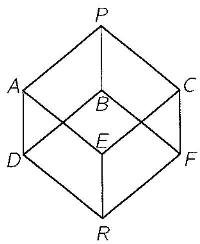
(**A**) 13 (**B**) 16 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 25

Lösung: Wir stellen uns vor, dass der Würfel auf der Spitze steht, so dass die Raumdiagonale ℓ senkrecht von oben nach unten verläuft. Wir schauen von der Seite und bewegen in Gedanken eine Ebene $\mathcal{E}$ senkrecht zu ℓ von oben nach unten. Zunächst wird ein kleiner Würfel von $\mathcal{E}$ geschnitten (Bild 1). Bewegen wir $\mathcal{E}$ weiter, werden 3 Würfel (Bild 2) und danach 6 Würfel geschnitten (Bild 3). In der mittleren Schicht sind 7 Würfel (Bild 4), dann nochmal 6, 3 und ein Würfel.



Wer ein gutes Vorstellungsvermögen besitzt, erkennt, dass nur die mittlere 7er-Schicht und die beiden angegrenzenden 6er-Schichten von der gegebenen Ebene $\mathcal{M}$ geschnitten werden. $\mathcal{M}$ schneidet insgesamt $6+7+6=19$ kleine Würfel.

Um das genau zu begründen, legen wir die Kantenlänge der kleinen Würfel mit 1 fest. Dann ist die Länge einer Raumdiagonalen eines kleinen Würfels $\sqrt{3}$ und die des großen Würfels $3\sqrt{3}$. Die gegebene Ebene $\mathcal{M}$ hat von den Endpunkten P und Q der Raumdiagonalen ℓ den Abstand $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. Der oberste Würfel wird offenbar nicht von $\mathcal{M}$ geschnitten, seine unterste Ecke hat von P den Abstand $\sqrt{3} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Um den Abstand der Ebene, in der die unteren Ecken der 3er-Schicht liegen, zu P zu ermitteln, betrachten wir das ebene Bild, welches von vorn und senkrecht zur Raumdiagonalen vom obersten Würfel zu sehen ist. Die vordere, obere Seitenfläche $AECP$ ist in der ebenen Projektion ein Rhombus, die untere hintere Seitenfläche $DRFB$ ist dazu kongruent. Die Ebene, in der die oberen Ecken der 3er-Schicht liegen, geht über in die Gerade durch A, B und C, die die Strecke $\overline{PE}$ halbiert (Diagonalen im Rhombus halbieren sich). Also ist $\overline{PB} = \overline{BE}$ und analog $\overline{BE} = \overline{ER}$. Die beiden Ebenen durch A, B, C bzw. D, E, F dritteln folglich die Raumdiagonale $\overline{PR}$ des Würfels. Der Abstand der Ebene, in der die oberen Ecken der 3er-Schicht liegen, zu P ist also $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Der Abstand der Ebene, in der die unteren Ecken der 3er-Schicht liegen, zu P ist damit $\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Die 3er-Schicht wird also von $\mathcal{M}$ nicht geschnitten. Die Ebene, in der die oberen Ecken der 6er-Schicht liegen, hat nun zu P den Abstand $2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$ und die Ebene durch die unteren Ecken dieser Schicht den Abstand $\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{3} > \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Die 6er-Schicht wird von $\mathcal{M}$ geschnitten. Die mittlere Schicht wird offensichtlich von $\mathcal{M}$ geschnitten.



Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	A	A	C	C	E	B	B	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	C	D	D	E	B	A	D	C	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	E	B	B	A	D	B	B	E	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	A	C	C	E	D	B	E	D	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	D	B	A	C	B	C	B	E	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	D	D	C	B	C	B	B	E	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	E	C	A	C	A	D	C	A	E
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	E	B	A	E	E	D	E	D	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	A	C	B	B	B	D	E	B	C

www.mathe-kaenguru.de