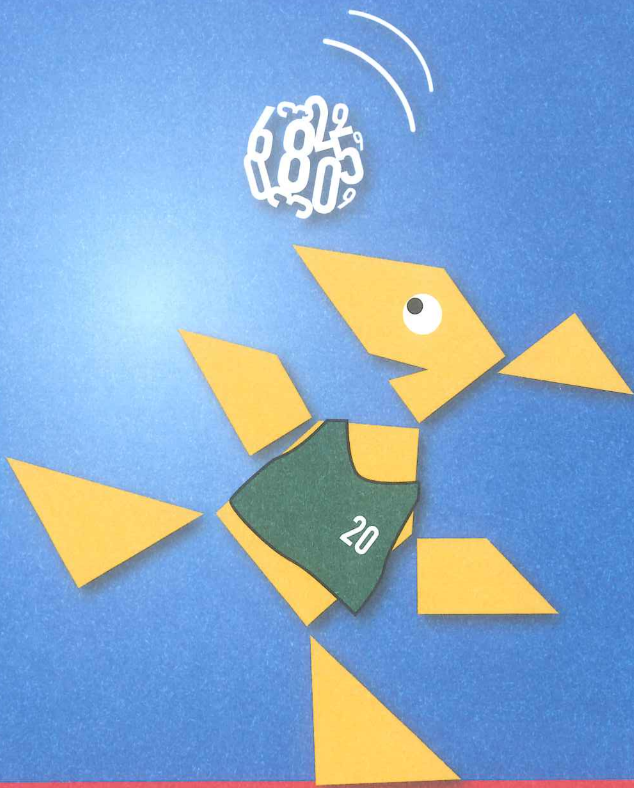
2010 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2010!

Der Anteil der Volksschulen in der Schweiz, die am internationalen Känguru-Wettbewerb teilnahmen, war in diesem Jahr noch etwas grösser als im letzten. Insgesamt waren es knapp 16 000 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die im März, zusammen mit weltweit über 6 Millionen Jugendlichen, die Aufgaben angepackt haben. Gemäss Beschluss am Jahrestreffen der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" vom Oktober 2009 in Minsk wurde in der Kategorie 3./4. Schuljahr der Umfang von 21 auf 24 verändert, um die Auswahl an Aufgaben etwas zu vergrössern, beim 5./6. Schuljahr dagegen von 30 auf 24 reduziert, um den Aufgabenumfang der Altersstufe entsprechend deutlich zu reduzieren.

In der Schweiz wurde das Anmeldeprozedere erstmals über die Internetseite www.mathe-kaenguru.ch online durchgeführt. Die Lokalverantwortlichen der teilnehmenden Schulen konnten sich mit einem Passwort einloggen und ihre Anmeldezahlen und Sonderbestellungen dort direkt erfassen. Dadurch konnte der Aufwand für die organisierende DMK (Deuschschweizerische Mathematikkommission) vermindert und somit auch die Fehlerwahrscheinlichkeit reduziert werden.

Dass die Aufgabenstellungen sich ein wenig von denen aus den Schullehrbüchern unterscheiden, ist für den Känguru-Wettbewerb typisch. Mathematik steckt in mehr Fragestellungen als oft vermutet, mathematische Methoden finden in unterschiedlichsten Bereichen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht und nicht nur in den Naturwissenschaften und der Vorlaufforschung für Hochtechnologien. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, Trendvoraussagen – all dies wird besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt und spielt im täglichen Leben, wohin man schaut, eine Rolle. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre ist zur Unterstützung einer nachträglichen Beschäftigung mit den verschiedenen mathematischen Problemen gedacht. Für eine ganze Reihe von Aufgaben wurde nicht nur eine Lösungsmöglichkeit angegeben, sondern anhand der Darstellung verschiedener Wege gezeigt, dass es hilfreich ist, unterschiedliche Methoden zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen zu beherrschen.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, K. Battaglia, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, R. Schelldorfer, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet.
Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk

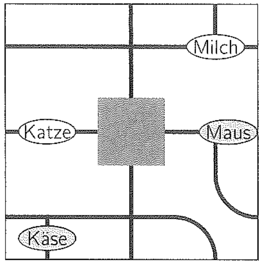
Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

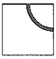
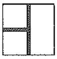
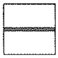
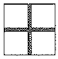
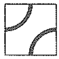
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

ISBN 978-3-9812144-3-7

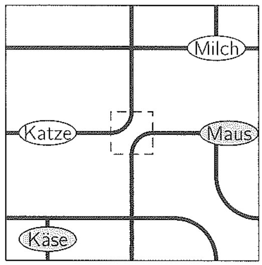
Klassenstufen 3 und 4



1. Welches Puzzleteil muss auf das graue Feld in der Mitte gelegt werden, damit die Wege so verbunden sind, dass die Katze nicht die Maus kriegt, aber die Maus an den Käse und die Katze an die Milch kommt?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Katze wie Maus müssen auf eigenen Wegen das Feld überqueren, was bei (**A**) und bei (**B**) nicht der Fall ist. Außerdem dürfen sich die Wege der beiden nicht treffen. Somit entfallen auch (**C**) und (**D**). Nur mit dem Puzzleteil (**E**) kommt die Maus zum Käse und die Katze zur Milch, ohne dass sich die beiden treffen. Damit sind beide erst einmal zufrieden.



2. Wenn $\heartsuit + 8 = \heartsuit + \heartsuit + \heartsuit$ gilt, welche Zahl verbirgt sich dann unter dem Herz?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

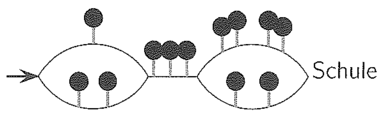
Lösung: Wir überlegen uns, dass sich an der Gleichheit nichts ändert, wenn wir auf beiden Seiten ein Herzchen wegnehmen. Dann sind also zwei Herzchen so viel wie eine 8, das heißt, einem Herzchen entspricht 4. Und setzen wir das ein, erhalten wir auch $4+8=4+4+4$. (**C**) ist richtig. Eine andere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, besteht darin, die als Lösungen vorgeschlagenen Zahlen einzusetzen, um zu erkennen, bei welcher es passt.

3. Wie viel ist $20 : 10 + 20 \cdot 10 - 201 + 0$?

(**A**) 2010 (**B**) 20 (**C**) 10 (**D**) 1 (**E**) 0

Lösung: Wir rechnen: $20 : 10 = 2$, $20 \cdot 10 = 200$, also $20 : 10 + 20 \cdot 10 = 2 + 200 = 202$ und nun noch $202 - 201 + 0 = 1 + 0 = 1$. (**D**) ist richtig.

4. Idas Schulweg führt an zwei Teichen vorbei. Mal geht sie links, mal rechts herum, wie sie gerade Lust hat. Jedesmal zählt sie die Bäume am Weg. Bei welcher der folgenden Zahlen hat sie sich verzählt?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Ida kann vier verschiedene Wege gehen. Geht sie an beiden Teichen links vorbei, so zählt sie $1+3+4 = 8$ Bäume. Wenn sie am ersten links, am zweiten Teich jedoch rechts vorbeigeht, dann sind es $1 + 3 + 2 = 6$ Bäume, an denen sie vorbeikommt. Führt Idas Schulweg am ersten Teich rechts und am zweiten Teich links vorbei, so zählt sie $2 + 3 + 4 = 9$ Bäume. Geht sie beide Male rechts am Teich vorbei, so zählt sie $2 + 3 + 2 = 7$ Bäume. Auf keinem der Wege kommt sie an 10 Bäumen vorbei.

KAENGURU-Lesevielfalt

K	A	E	N	G
A	E	N	G	U
E	N	G	U	R
N	G	U	R	U

Wie viele verschiedene Lesemöglichkeiten gibt es für das Wort KAENGURU *in dem abgebildeten Buchstabengitter? Dabei darf nur von links nach rechts oder von oben nach unten gelesen werden.*

5. Welche Zahl ist um 201 kleiner als 2010?

(**A**) 1809 (**B**) 1909 (**C**) 1899 (**D**) 1999 (**E**) 1989

Lösung: Die Aufgabe lässt sich natürlich lösen, indem sorgfältig schriftlich subtrahiert wird: $2010 - 201 = 1809$. – Eine andere Lösungsmöglichkeit nutzt die Regel des Känguru-Wettbewerbs aus, dass genau eine der angegebenen Lösungsmöglichkeiten zutrifft. Wer das in seine Überlegungen mit einbezieht, kann das richtige Kreuz auch nach einer geeigneten Schätzung setzen. Die gesuchte Zahl soll um etwa 200 kleiner sein als eine Zahl, die nur wenig größer als 2000 ist. Folglich muss die gesuchte Zahl sich um nur wenig von 1800 unterscheiden. Und dass dafür nur eine der 5 Zahlen in Frage kommt, ist sofort zu sehen.

6. Freitags kommt Elsas Mutter früher von der Arbeit nach Haus. Pünktlich um 15:50 Uhr startet sie dann für Elsa und ihre Freunde eine Märchenlesezeit. Die dauert immer eine halbe Stunde. Am letzten Freitag flog exakt nach der Hälfte der Zeit ein Maikäfer ins Zimmer. Das war genau um

(**A**) 16:00 Uhr (**B**) 16:05 Uhr (**C**) 16:10 Uhr (**D**) 16:15 Uhr (**E**) 16:20 Uhr

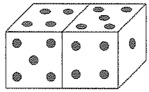
Lösung: Die Märchenlesezeit dauert eine halbe Stunde, d. h. 30 Minuten. Dann kam der Maikäfer also nach genau einer Viertelstunde, d. h. nach 15 Minuten. Und 15 Minuten nach 15:50 Uhr ist es 16:05 Uhr.

7. Beim Sportunterricht waren wir heute 24 Kinder, und zwar zwei Mädchen mehr als Jungen. Wie viele Jungen waren beim Sport?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 14 (**E**) 15

Lösung: Denken wir uns zwei Mädchen weniger beim Sportunterricht, so sind es 22 Kinder, und zwar genauso viele Mädchen wie Jungen. Folglich sind es $22 : 2 = 11$ Jungen – und $11 + 2 = 13$ Mädchen.

8. Ein Spielwürfel hat auf seinen Seiten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkte. Die beiden Würfel auf dem Bild sind mit ihren 6-Punkt-Seiten zusammengeklebt. Wie viele Punkte sind auf allen anderen Seiten zusammen?



(**A**) 15 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

Lösung: Auf jeder der beiden zusammengeklebten Seiten befinden sich 6 Punkte. Diese werden nicht mitgezählt. Daher liefert jeder Würfel $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Punkte für die gesuchte Punktezahl. Das sind insgesamt $2 \cdot 15 = 30$ Punkte.

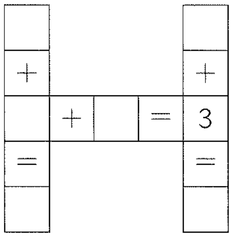
9. Die Bremer Stadtmusikanten, Esel, Hund, Katze und Hahn, nähern sich dem Räuberhaus auf schmalem Pfad, einer hinter dem anderen. Der Esel läuft zwischen Hahn und Katze, der Hund trottet direkt hinter der Katze. In welcher Reihenfolge von vorn nach hinten laufen die Tiere?

(**A**) Hahn, Esel, Hund, Katze (**B**) Hund, Hahn, Esel, Katze (**C**) Esel, Katze, Hund, Hahn
(**D**) Hahn, Esel, Katze, Hund (**E**) Katze, Esel, Hund, Hahn

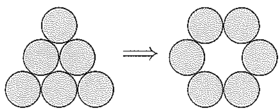
Lösung: Aus der Information, dass der Hund *direkt hinter* der Katze trottet, können wir folgern, dass nur die Lösungsvarianten (**C**) und (**D**) in Frage kommen. Und der Esel läuft nur bei (**D**) zwischen Hahn und Katze, bei (**C**) nicht. Also ist die Reihenfolge Hahn, Esel, Katze, Hund richtig.

KAENGURU-Rechen-H

In die leeren Felder sind die Zahlen von 1 bis 7 so einzutragen, dass alle Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Jede Zahl soll dabei genau einmal vorkommen. Die 3 ist bereits an der richtigen Stelle eingetragen.

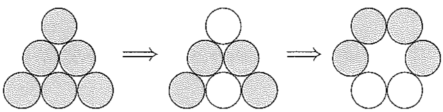


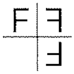
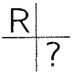
10. Sechs Münzen sind zu einem Dreieck gelegt. Wie viele davon müssen mindestens verschoben werden, um einen Kreis zu erhalten?



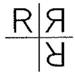
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Der Münzenkreis lässt sich durch das Verschieben von zwei Münzen aus dem Münzendreieck erzeugen, wie die Zeichnung zeigt. Dass eine Münze nicht ausreicht, erkennen wir daran, dass unabhängig davon, welche Münze wir entfernen, von den anderen fünf Münzen stets noch eine nicht zu einem Münzenkreis gehört, also noch entfernt werden muss.



11. Das F ist zweimal gespiegelt worden, zuerst nach rechts, dann nach unten:  Wir machen mit dem R dasselbe:  Was gehört an die Stelle des Fragezeichens?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Spiegelung des R zeigt die Zeichnung:  Also ist (**A**) die Lösung.

12. Gunda zählt auf dem Spielplatz ihre Schritte vom Klettergerüst bis zur Wippe. Es sind 11. Kay braucht für dieselbe Strecke 14 Schritte, David 12, Olga 10 und Hans 13. Wer von den fünf Kindern hat die längsten Schritte gemacht?

(**A**) Kay (**B**) David (**C**) Olga (**D**) Hans (**E**) Gunda

Lösung: Für dieselbe Strecke braucht jemand, der längere Schritte macht, nicht so viele Schritte wie jemand, der kürzere macht. Olga hat nur 10 Schritte für die Entfernung Klettergerüst – Wippe gebraucht, weniger als alle anderen Kinder. Also hat Olga die längsten Schritte gemacht.

13. Wenn die Summe in beiden Reihen gleich groß ist, welche Zahl gehört dann an die Stelle des ★?

1	2	3	4	55
11	12	13	14	★

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Jede der 4 Zahlen in der unteren Reihe ist um genau 10 größer als die über ihr stehende Zahl. Damit ist die Summe der 4 Zahlen in der unteren Reihe um 40 größer als die Summe der vier ersten Zahlen in der oberen Reihe. Die Zahl, die ich zu den 4 Zahlen der unteren Reihe addieren muss, muss also um 40 kleiner sein als 55, damit beide Summen gleich sind. Folglich gehört $55 - 40 = 15$ an die Stelle des Sterns.
Wer einfach addiert und vergleicht, bekommt natürlich dasselbe heraus: $1 + 2 + 3 + 4 + 55 = 65$, also muss ich $65 - (11 + 12 + 13 + 14) = 15$ für das Sternchen schreiben.

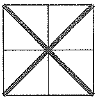
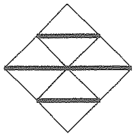
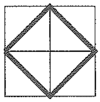
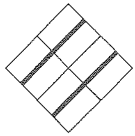
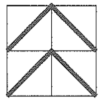
KAENGURU-Wortsuche

(1)	K			
(2)		A		
(3)			E	
(4)				N
(5)				G
(6)			U	
(7)		R		
(8)	U			

Wer findet möglichst viele Begriffe mit 4 Buchstaben, die an der jeweiligen Stelle den in der abgebildeten Figur angegebenen Buchstaben enthalten?
In der Zeile (1) sind zum Beispiel möglichst viele Begriffe zu finden, die mit K *beginnen (z. B.* KALB, KERN *oder* KIND*). Und in der Zeile (6) sind Begriffe gesucht, die an dritter Stelle ein* U *haben (z. B.* HAUS, NEUN *oder* PLUS*).*

Tipp: Das geht auch als Wettbewerb. Wer findet in einer gegebenen Zeit die meisten Begriffe?

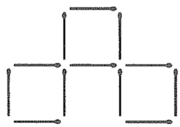
14. Frederic hat mit seinem Vater Fliesen ausgesucht (siehe rechtes Bild). Nun macht er Vorschläge, wie sich 4 solche Fliesen dekorativ zusammenfügen lassen. Welcher Vorschlag ist sicher falsch?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Frederic hat sich bei seinem Vorschlag (**D**) geirrt, indem er die dunkle Linie, statt sie diagonal von Ecke zu Ecke zu zeichnen, parallel zur Fliesenseite gezeichnet hat.

KAENGURU-Streichholzquadrate

Genau 5 Streichhölzer sind so umzulegen, dass alle Streichhölzer zusammen genau zwei Quadrate bilden.

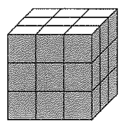


15. Timo hat sich von seiner Schwester Jana einen blau-rot-grün-schwarz-weiß gestreiften Fan-Schal seiner Schulmannschaft gewünscht. Den ersten Streifen strickt Jana mit blauer Wolle, dann folgt rot. Nach dem 13. Streifen macht sie eine Pause. Mit welcher Farbe muss sie weiterstricken?

(**A**) blau (**B**) rot (**C**) grün (**D**) schwarz (**E**) weiß

Lösung: Wie Jana die Streifen in dem Fan-Schal strickt, kann einfach ausgezählt werden. Sie strickt blau-rot-grün-schwarz-weiß und wieder blau-rot-grün-schwarz-weiß und weiter blau-rot-grün, und dann folgt die Pause. Der 14. Streifen ist schwarz, ebenso wie der 4. Streifen und der 9. Streifen. – Hier können wir eine Gesetzmäßigkeit entdecken: Alle Streifen, die beim Abzählen zu einer durch 5 teilbaren Zahl gehören, sind weiß. Alle Streifen, die beim Abzählen zu einer Zahl gehören, die beim Dividieren durch 5 den Rest 1 lässt, sind blau. Alle, bei denen der Rest 2 ist, sind rot. Beim Rest 3 beim Dividieren durch 5 sind die Streifen grün. Und wenn der Rest 4 ist wie bei 14, sind sie schwarz.

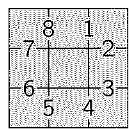
16. Hanna hat für ein Spiel $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ gleich große Holzwürfel zu einem größeren Würfel zusammengesetzt (siehe Bild). Sie beginnt, die Oberfläche dieses Würfels mit grüner Farbe zu streichen. Als sie 5 Seiten fertig hat, ist die Farbe alle. Wie viele der kleinen Würfel haben nun schon drei grüne Seiten?

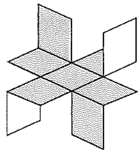


(**A**) 4 (**B**) 8 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Unter den kleinen Würfeln, die zur Oberfläche des großen Würfels gehören, lassen sich drei Sorten unterscheiden: Es können eine, zwei oder drei ihrer Seitenflächen zur Oberfläche des großen Würfels gehören. Diejenigen, von denen drei Seitenflächen zur Oberfläche gehören, bilden die Ecken des großen Würfels. Und von diesen insgesamt acht Ecken sind bei Hannas Streichaktion genau vier an drei Seiten gestrichen worden. (**A**) ist richtig.

17. Josef will ein Windrad bauen. Er hat ein quadratisches Stück Karton mit roter Oberseite und weißer Unterseite. Er unterteilt die rote Seite in 9 Quadrate, schneidet einige ein und faltet dann hoch bzw. runter (siehe Bild). Entlang welcher Linien musste Josef schneiden?





(**A**) 1, 2, 3, 4 (**B**) 3, 4, 7, 8 (**C**) 1, 3, 5, 7 (**D**) 1, 2, 5, 6 (**E**) 2, 4, 6, 8

Lösung: Vom Rand des Kartons aus gesehen muss an jeder Kante die jeweils rechts liegende Linie bis zum ersten Linienkreuz eingeschnitten werden. Das sind die Linien 2, 4, 6 und 8.

18. Hundertfüßler Herbert hat 102 Füße. Zum Sommer hat er sich 17 Paar Sandalen gekauft – für mehr hat das Geld nicht gereicht. Leider sind nun 14 Füße noch immer ohne Schuhe. An wie vielen seiner Füße trug Herbert schon vor dem Sandalenkauf Schuhe?

(**A**) an 27 (**B**) an 44 (**C**) an 54 (**D**) an 66 (**E**) an 71

Lösung: Wenn Herbert *nach* dem Kauf von 17 Paar Sandalen noch immer 14 Füße ohne Schuhe hat, dann hatte er *vor* dem Kauf $14 + 2 \cdot 17 = 14 + 34 = 48$ schuhlose Füße. Folglich waren die übrigen $102 - 48 = 54$ Füße bereits vor dem Sommer mit Schuhen ausgestattet.

19. Als meine Schwester vor zwei Jahren ihren 15. Geburtstag feierte, waren unsere beiden Kater Bommel und Stepke zusammen auch gerade 15 Jahre alt. Jetzt ist Bommel 13. In wie vielen Jahren wird Stepke 9 Jahre alt sein?

(**A**) in einem Jahr (**B**) in 2 Jahren (**C**) in 3 Jahren
(**D**) in 4 Jahren (**E**) in 5 Jahren

Lösung: Da Kater Bommel jetzt 13 Jahre alt ist, war er vor 2 Jahren 11. Folglich war Kater Stepke vor 2 Jahren $15 - 11 = 4$. Er ist jetzt also $4 + 2 = 6$ Jahre alt. Dann müssen noch $9 - 6 = 3$ Jahre vergehen, bis er 9 Jahre alt ist.

Um die Ecke gedacht

Wer schafft es, mit 6 Streichhölzern 4 gleichseitige Dreiecke zu legen?

20. „Mal sehen, wer von euch gut kombinieren kann", sagt unsere Mathelehrerin, und heftet ein langes Zahlenschema an die Tafel (siehe Bild). „Nur eine der Doppelreihen passt in das Schema", sagt sie. Welche?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(**A**)

	43			
		48		

(**B**)

		58		
	52			

(**C**)

			69	
	72			

(**D**)

	81			
	86			

(**E**)

	90			
			94	

Lösung: Wir sehen uns das Schema, das die Mathelehrerin an die Tafel geheftet hat, genau an. Die Zahlen wachsen von links nach rechts und sie wachsen von oben nach unten. Dann kann (**B**) nicht Lösung sein, denn die 58 befindet sich hier in einer Zeile oberhalb der kleineren 52. Weiter erkennen wir, dass alle Zahlen in der ersten Spalte entweder auf eine 1 oder auf eine 6 enden. Alle

Zahlen in der zweiten Spalte enden entweder auf eine 2 oder auf eine 7. Schon können wir drei weitere Lösungsvorschläge ausschließen, denn bei (**A**) endet die in der 2. Spalte stehende Zahl 43 auf 3, bei (**D**) sind sowohl 81 als auch 86 falsch angesiedelt. Bei (**E**) schließlich ist die 90 verkehrt eingetragen.

Damit muss (**C**) die Lösung sein. Und tatsächlich passt sowohl die 69 in die 4. Spalte als auch die 72 in die 2. Spalte, eine Zeile unterhalb jener mit der 69.

66	67	68	**69**	70
71	**72**	73	74	75

21. Ingo und Tom wohnen im selben Hochhaus, Ingo 12 Stockwerke höher als Tom. Wenn Tom Ingo besucht, läuft er die Treppen hoch und macht nach der Hälfte des Wegs, das ist im 8. Stock, eine Pause. In welchem Stockwerk wohnt Ingo?

(**A**) im 12. (**B**) im 14. (**C**) im 16. (**D**) im 20. (**E**) im 22.

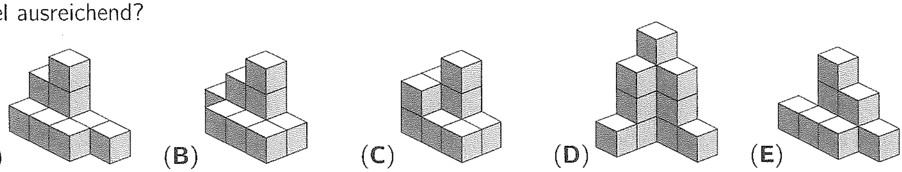
Lösung: Der sportliche Tom läuft 12 Stockwerke hoch. Er macht nach der Hälfte eine Pause, also nachdem er $12 : 2 = 6$ Etagen hochgelaufen ist. Da er dann im 8. Stock ist und noch 6 Etagen zu laufen hat, wohnt Ingo in der Etage $8 + 6 = 14$. .

KAENGURU-Rechen-Quadrat

In die leeren Felder sind voneinander verschiedene Zahlen so einzutragen, dass alle Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

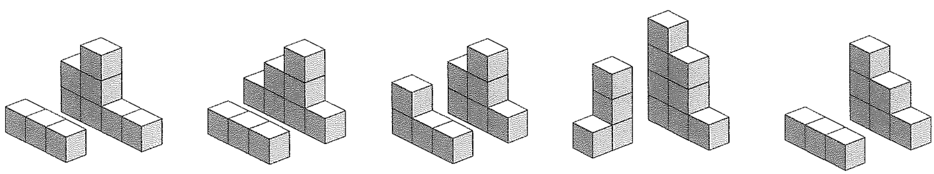
8	−		=	
:				+
=				=
	+		=	

22. Die folgenden Körper sind aus gleich großen Würfeln gebaut. Für welchen der Körper sind 9 Würfel ausreichend?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Wir schieben die Bauwerke ein wenig auseinander und können dann gut zählen:



Beim Bauwerk (**E**) reichen die 9 Bausteine aus, bei allen anderen brauchen wir mehr als 9 Würfel.

23. Zur Hochzeit der ältesten Tochter hat Familie Holde viele Freunde und Verwandte aus nah und fern eingeladen. Die drei Schwestern der Braut zählen aufgeregt die Gäste. „Es sind 111!" „Nein, 99!" „Ich habe 102 gezählt." So rufen sie der Mutter zu. Die Mutter lacht: „Ihr habt euch in eurer Aufregung alle drei verzählt, und zwar eine um 4, eine um 5 und eine um 8, mal zu viel, mal zu wenig." Mit diesem Hinweis lässt sich die Anzahl der Gäste errechnen. Es sind

(**A**) 104 (**B**) 105 (**C**) 106 (**D**) 107 (**E**) 108

Lösung: Da die größte Zahl, um die sich eines der Kinder verzählt hat, 8 ist, suchen wir eine Zahl, die größer als 99 und kleiner als 111 ist. Da die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen 12 ist, muss sich die 12 aus zwei der drei Zahlen, um die sich die Mädchen verzählt haben, kombinieren lassen. Dafür passen nur 8 und 4. Wir probieren zuerst $111 - 8 = 103$. Das passt nicht, denn $103 - 4 = 99$ ist zwar in Ordnung, aber wegen $103 - 5 = 98$ und $103 + 5 = 108$ könnte niemand 102 gerufen haben.
Dann muss $111 - 4 = 107$ die richtige Zahl sein. Und wirklich hat diejenige, die 111 gezählt hat, sich um 4 vertan, diejenige, die 99 gezählt hat, lag um 8 daneben, und die dritte, die 102 gezählt hat, hat sich um 5 geirrt.
Übrigens lässt sich die Aufgabe auch schnell lösen, indem alle Zahlen zwischen 99 und 111 – unter Einbeziehung der vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten von 104 bis 108 – auf ihre Eignung geprüft werden.

24. Susi und jedes Kind, das am selben Tisch wie Susi sitzt, zählen jedes für sich Tages- und Monatszahl des eigenen Geburtsdatums zusammen. Alle bekommen sie dasselbe Ergebnis 35 heraus, obwohl keine zwei der Kinder am selben Tag Geburtstag haben. Wie viele Kinder sitzen höchstens am Tisch?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Die Kinder haben die Tages - und Monatszahl ihres Geburtstages aufgeschrieben. Da die Summe 35 sein soll, also mehr, als ein Monat Tage hat, suchen wir zuerst im Dezember, dem Monat mit der größten Monatszahl, einen Tag, für den die Summe 35 zustande kommt. Einen solchen Tag gibt es. Da $35 - 12 = 23$ ist, ist das erste mögliche Datum der 23.12. Die anderen möglichen Geburtsdaten sind in der Tabelle rechts zusammengestellt.
Es sind höchstens 8 Kinder am Tisch.
Wer mit dem ersten Monat des Jahres beginnt, stellt fest, dass es im Januar noch kein Tagesdatum gibt, das um das Monatsdatum 1 vergrößert 35 ergibt. Das trifft ebenso für Februar (wegen $35 - 2 = 33$), den März (wegen $35 - 3 = 32$) und den April (wegen $35 - 4 = 31$) mit seinen nur 30 Tagen zu. In den anderen Monaten gibt es je genau ein Datum mit der gewünschten Eigenschaft, also insgesamt 8.

Monat	Tag	Geburtstag
12	23	23. Dezember
11	24	24. November
10	25	25. Oktober
9	26	26. September
8	27	27. August
7	28	28. Juli
6	29	29. Juni
5	30	30. Mai

Logische Farbkreiseleien

Finde die richtige Anordnung der farbigen Kreise, so dass alle Bedingungen erfüllt sind. Es gibt stets nur eine Möglichkeit.
Diese Rätsel stammen aus dem Buch „Logic Links – Level A“ (Mindware 2003).

●●●●● 2 gelbe, 2 rote und 1 blauer Kreis

1. Die Kreise, die am weitesten auseinander sind, haben dieselbe Farbe.
2. Die roten Kreise berühren sich.
3. Der blaue Kreis befindet sich direkt rechts neben einem gelben Kreis.

◯◯◯◯◯

●●●●●● 2 weiße, 2 gelbe und 2 rote Kreise

1. Jeder gelbe Kreis berührt zwei verschiedene Farben.
2. Das rechte Ende der Reihe ist weiß.
3. Die linke Hälfte der Reihe ist identisch mit der rechten Hälfte der Reihe.

◯◯◯◯◯◯

●●●●●●● 2 grüne, 2 violette, 2 schwarze und 1 roter Kreis

1. Die Kreise an den Enden berühren nur violette Kreise.
2. Die schwarzen Kreise und der rote Kreis berühren sich nicht.
3. Die Reihe ist symmetrisch: Spiegeln am mittleren Kreis liefert genau dieselbe Reihe.

◯◯◯◯◯◯◯

●●●●●●●● 2 grüne, 2 violette, 2 weiße und 2 rote Kreise

1. Kreise gleicher Farbe berühren sich nicht.
2. Jeder rote Kreis berührt nur violette Kreise.
3. Das rechte Ende der Reihe ist weiß.

◯◯◯◯◯◯◯◯

●●●●● 2 rote, 2 grüne und 1 gelber Kreis

1. Kein roter Kreis berührt den gelben Kreis.
2. Die roten Kreise berühren sich nicht.
3. Der gelbe Kreis ist an keinem der beiden Enden.

◯◯◯◯◯

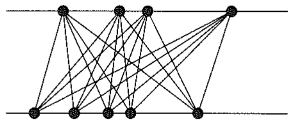
Klassenstufen 5 und 6

1. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

(**A**) $2+0+1+0$ (**B**) $201+0$ (**C**) $20 \cdot 10$ (**D**) $20+10$ (**E**) $2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0$

Lösung: Wer mag, kann die fünf kleinen Rechnungen ausführen. Es ergibt sich in der Reihenfolge 3, 201, 200, 30 und 0. Die größte Zahl findet sich bei (**B**). – Zur Lösung gelangen wir aber auch mit etwas weniger Rechnerei, indem wir die fünf Werte kurz vergleichen. Die Möglichkeiten (**A**), (**D**) und (**E**) können wir sofort ausschließen und nur (**B**) und (**C**) müssen genauer unter die Lupe genommen werden.

2. Chris hat alle oberen mit allen unteren Punkten verbunden. Wie viele Verbindungsstrecken musste er dazu zeichnen?



(**A**) 20 (**B**) 24 (**C**) 28 (**D**) 27 (**E**) 30

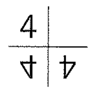
Lösung: Jeden der 4 oberen Punkte verbindet Chris mit jedem der 5 unteren Punkte. Dann hat er $4 \cdot 5 = 20$ Verbindungsstrecken zu zeichnen. – Natürlich ist es hier auch möglich, die Strecken zu zählen. Allerdings ist das mühselig und wenig elegant.

3. Wenn ♣ + ♣ + 6 = ♣ + ♣ + ♣ + ♣ gilt, welche Zahl verbirgt sich dann unter dem Kleeblatt?

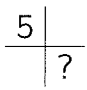
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Gleichheit ♣ + ♣ + 6 = ♣ + ♣ + ♣ + ♣ bleibt erhalten, wenn auf beiden Seiten ♣ + ♣ subtrahiert wird. Dann bleibt 6 = ♣ + ♣ übrig, also ist ♣ = 3.

4. Die Zahl 4 ist zweimal gespiegelt worden, zuerst nach unten und dann nach rechts:



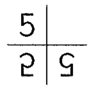
Mit der Zahl 5 machen wir dasselbe:



Was gehört dann an die Stelle des Fragezeichens?

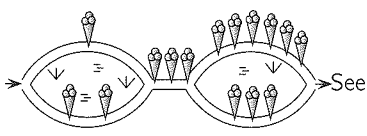
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Spiegelung der 5 zeigt die Zeichnung:



Die Lösung ist (**E**).

5. „Ferienzeit ist Eiszeit!“ jubeln vier Freunde, bevor sie zum 15 km entfernten Badesee radeln. Der Weg dorthin gabelt sich zweimal an sumpfigen Wiesen. „Lasst uns den Weg mit den meisten Eisdielen finden!“ lautet die Devise. Jeder der vier wählt eine der vier möglichen Strecken und zählt beim Radeln die Eisdielen am Wegesrand. Welche Zahl kann *keiner* erhalten?



(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Wir zählen die Eisdielen an den vier möglichen Wegen zum See: Der erste Weg, an dem wir zählen, führt zweimal links an den sumpfigen Wiesen vorbei. An diesem Weg befinden sich $1 + 3 + 6 = 10$ Eisdielen. Am zweiten Weg, der zuerst links, dann rechts an den Wiesen vorbeiführt, befinden sich $1+3+3 = 7$ Eisdielen. Am dritten Weg, der erst rechts, dann links der Wiesen verläuft, sind es $2 + 3 + 6 = 11$ Eisdielen. Der vierte mögliche Weg, bei dem beide Male rechts an den Wiesen vorbeigeradelt wird, führt an $2+3+3 = 8$ Eisdielen vorbei. Keiner der Wege führt an genau 9 Eisdielen vorüber.

6. Nina und Leo haben mit ihren Eltern hoch in einer alten Eiche ein Baumhaus gebaut. Eine Strickleiter mit 21 Sprossen führt nach oben. Als Nina runterklettern will, ruft Leo: „Pass auf, Nina, die 6. Sprosse von unten ist schmutzig!" Bei der wievielten Sprosse von oben soll Nina aufpassen?

(**A**) bei der 16. (**B**) bei der 15. (**C**) bei der 14. (**D**) bei der 13. (**E**) bei der 12.

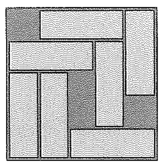
Lösung: Was für Nina die 1. Sprosse von oben ist, ist für ihren Bruder Leo die 21. Sprosse von unten, die 2. Sprosse von oben ist die 20. Sprosse von unten usw. Die Zahlenangaben summieren sich stets zu 22. Die 6. Sprosse von unten ist wegen $22 - 6 = 16$ die 16. Sprosse von oben.

7. Eine Fliege hat 6 Beine, eine Spinne sogar 8. Zusammen haben 2 Fliegen und 3 Spinnen genau so viele Beine wie 10 Hühner und

(**A**) 2 Katzen (**B**) 3 Katzen (**C**) 4 Katzen (**D**) 5 Katzen (**E**) 6 Katzen

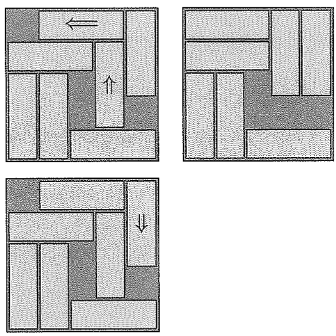
Lösung: Wir rechnen aus, wie viele Beine 2 Fliegen und 3 Spinnen zusammen haben. Es sind $2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 12 + 24 = 36$. Da 10 Hühner $10 \cdot 2 = 20$ Beine haben, bleiben für die Katzen $36 - 20 = 16$ Beine übrig. Und so viele Beine haben $16 : 4 = 4$ Katzen.

8. In ihre $5\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm}$ große Bausteinbox hat Milena bereits sieben längliche, $3\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ große Bausteine eingeordnet. Wie viele dieser Bausteine muss sie mindestens verschieben, um noch einen weiteren, ebenso großen Baustein unterzubringen?

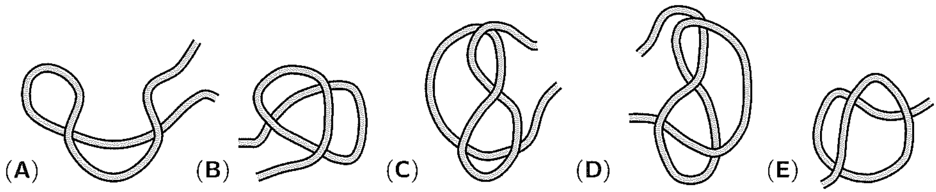


(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

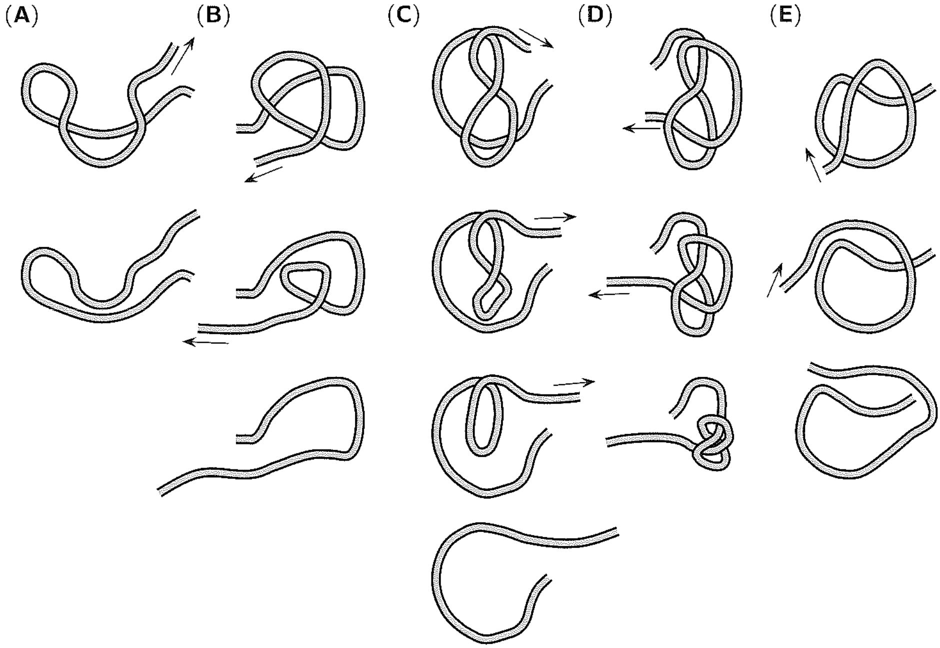
Lösung: In der Zeichnung oben links ist dargestellt, dass und welche zwei Bausteine verschoben werden müssen, damit ein zusätzlicher in die Box passt. Dass das Verschieben nur eines Bausteines nicht genügt, sehen wir, indem wir die beiden Verschiebungen betrachten, die zu Beginn überhaupt möglich sind. Außer der bereits oben links abgebildeten Verschiebung wäre die darunter abgebildete noch möglich. Wir erkennen, dass keine der beiden allein genügend Raum schafft, um einen weiteren Baustein unterzubringen.



9. Vor mir liegen fünf Schnüre. Von jeder Schnur nehme ich die beiden Enden in die Hände und ziehe sie auseinander. Bei welcher Schnur entsteht ein Knoten?



Lösung: Wir schauen uns der Reihe nach an, wie wir die Schlaufen in den einzelnen Schnüren auseinanderziehen können:

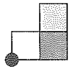


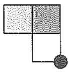
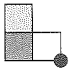
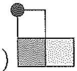
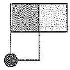
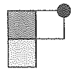
Wir sehen, dass nur bei der Schnur in (**D**) ein Knoten entsteht, wenn wir an den Enden ziehen. Bei den anderen erhalten wir unverknotete Schnüre.

10. Tarek hat sich eine Zahl ausgedacht, hat sie durch 7 dividiert, dann 7 addiert und das Ergebnis mit 7 multipliziert. Herausbekommen hat er 777. Welche Zahl hat sich Tarek ausgedacht?

(**A**) 111 (**B**) 7 (**C**) 722 (**D**) 567 (**E**) 728

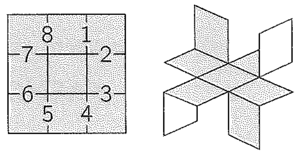
Lösung: Um herauszufinden, welche Zahl Tarek sich ausgedacht hat, rechnen wir rückwärts. Tarek hat 777 erhalten, nachdem er eine Zahl mit 7 multipliziert hat. Folglich ist diese Zahl $777 : 7 = 111$. Die 111 entstand, nachdem er 7 addiert hatte. Die Zahl vor dieser Addition ist demzufolge $111 - 7 = 104$. Und die 104 ihrerseits ist das Ergebnis einer Division durch 7. Die Zahl, die Tarek durch 7 dividiert hat, ist also $104 \cdot 7 = 728$. Die Lösung ist (**E**).

11. Vor mir auf dem Tisch liegt diese Figur:  Ich lasse sie auf dem Tisch eine halbe Umdrehung um den dicken schwarzen Punkt machen. Was sehe ich dann?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Egal, ob der kleine Haken links- oder rechtsherum gedreht wird, er geht nach einer halben Drehung in (**E**) über. – Um die Lösung zu finden, genügt es, einfach das Aufgabenblatt um 180° zu drehen.

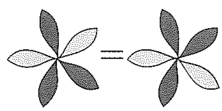
12. Josef will ein Windrad bauen. Er hat ein quadratisches Stück Bastelpappe mit blauer Oberseite und weißer Unterseite. Er unterteilt die blaue Seite in 3 × 3 Quadrate, schneidet einige ein und faltet dann hoch bzw. runter (s. Bild). Entlang welcher Linien musste Josef schneiden?



(**A**) 1, 3, 5 und 7 (**B**) 1, 4, 5 und 8 (**C**) 2, 3, 5 und 6 (**D**) 2, 4, 6 und 8 (**E**) 3, 4, 6 und 7

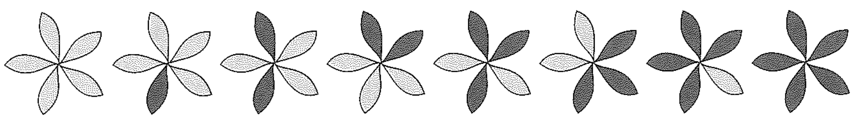
Lösung: Vom Rand des Kartons aus gesehen muss Josef an jeder Kante die jeweils rechts liegende Linie bis zum ersten Linienkreuz einschneiden. Das sind die Linien 2, 4, 6 und 8.

13. Für eine Wandzeitung zum Frühling basteln Carolin und Alex fünfblättrige Blumen mit hellroten und dunkelroten Blütenblättern. Damit die Wandzeitung besonders schön wird, möchten die beiden alle möglichen fünfblättrigen Blumen mit den Blütenblättern basteln. Blumen, die durch Drehen aus anderen Blumen entstehen, gelten als gleich (s. Beispiel rechts). Wie viele *verschiedene* Blumen können Carolin und Alex basteln?

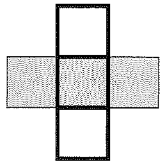


(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wir überlegen uns zuerst, welche Möglichkeiten es für die Blüten hinsichtlich der Anzahl der beiden Sorten von Blütenblättern gibt. Die 5 Blütenblätter können sein: 5 helle und keine dunklen; 4 helle und 1 dunkles; 3 helle und 2 dunkle; 2 helle und 3 dunkle; 1 helles und 4 dunkle; kein helles und 5 dunkle. Das sind insgesamt 6 Varianten. Im Fall, dass wir kein oder ein Blütenblatt von der einen und fünf oder vier von der anderen Farbe haben, gibt es jeweils nur eine Möglichkeit. Das ist bei den beiden Varianten, wo wir von einer Sorte 2, von der anderen 3 haben, anders. Da gibt es je zwei Möglichkeiten: in einem Fall sind die zwei Blütenblätter der Sorte, von der es nur 2 Blätter gibt, benachbart, im anderen sind sie nicht benachbart. Es kommen also noch zwei Möglichkeiten zu den bereits gezählten hinzu, so dass Carolin und Alex insgesamt 8 verschiedene Blüten an die Wandzeitung heften können. Die folgende Zeichnung zeigt noch einmal alle Möglichkeiten:



14. Die Zahlen 1, 4, 7, 10 und 13 schreibt Janko in die 5 Felder der rechts gezeichneten Figur. Er teilt die Zahlen so auf, dass die Summe der Zahlen in den grauen Feldern gleich der Summe der Zahlen in den dick umrandeten Feldern ist. Wie groß kann diese Summe höchstens sein?



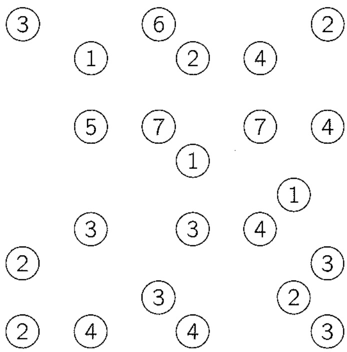
(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

Lösung: Schauen wir uns die 5 Zahlen genauer an, so stellen wir fest, dass wir auf drei verschiedene Weisen Paare mit gleicher Summe bilden können. Diese Paare sind $(4, 13)$ und $(7, 10)$ wegen $4 + 13 = 7 + 10 = 17$, $(1, 13)$ und $(4, 10)$ wegen $1 + 13 = 4 + 10 = 14$ sowie $(1, 10)$ und $(4, 7)$ wegen $1 + 10 = 4 + 7 = 11$. Die jeweils fünfte Zahl – 1 bzw. 7 bzw. 13 – gehört ins Zentrum des Kreuzes. Die möglichen Summen der drei Zahlen einer Reihe sind folglich: $1+17 = 18$, $7+14 = 21$ und $11 + 13 = 24$. Davon ist 24 – mit der 13 im Zentrum des Kreuzes – die größte Zahl.

KAENGURU-Inseln und KAENGURU-Brücken

Bei diesem Rätsel sollen die runden Inseln durch Brücken verbunden werden. Dabei ist zu beachten:

- *Die Brücken dürfen nur waagerecht oder senkrecht verlaufen.*
- *Zwischen zwei Inseln dürfen höchstens zwei Brücken sein.*
- *Keine Brücke darf über andere Brücken oder Inseln hinweggehen.*
- *Von einer Insel aus müssen genau so viele Brücken wegführen, wie die Zahlen in den Inseln angeben.*

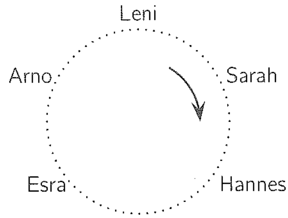


15. Um das letzte Stück von Lenis Geburtstagstorte zu vergeben, stellen sich Leni, Sarah, Hannes, Esra und Arno in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn im Kreis auf und zählen im Uhrzeigersinn ab: KÄN-GU-RU-RAUS-BIST-DU. Es wird silbenweise abgezählt. Wer das „DU" abbekommt, scheidet aus. Das im Uhrzeigersinn folgende Kind beginnt das Abzählen erneut, bis ein weiteres ausscheidet, usw., bis nur noch ein Kind übrig ist. Geburtstagskind Leni darf wählen, bei wem das Abzählen beginnt. Wen muss sie wählen, damit ihr Freund Arno das Tortenstück bekommt?

(**A**) sich selbst (**B**) Sarah (**C**) Hannes (**D**) Esra (**E**) Arno

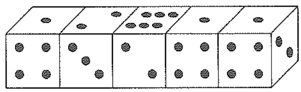
Lösung: Am schnellsten lässt sich diese Aufgabe lösen, wenn wir uns überlegen, dass es ausreicht, einmal mit einem der Kinder, das wir uns merken, das Abzählen zu beginnen und bis zum Ende zu bringen. Ist das zuletzt übrigbleibende Kind gerade Arno, dann war die Wahl des Kindes, bei dem das Abzählen zu beginnen ist, richtig. Anderenfalls muss Leni *das* Kind wählen, das um so viele Plätze vom ursprünglichen Beginner entfernt sitzt, wie Arno von dem Übriggebliebenen entfernt ist. Wir machen das jetzt vor und beginnen das Abzählen gleich einmal mit Leni. Dazu schreiben wir uns die fünf Kinder in der Reihenfolge, in der abgezählt wird, auf und lassen dann jeweils beim nächsten Abzählen das ausgeschiedene Kind (fettgedruckt) weg:

KÄN	GU	RU	RAUS	BIST	DU
Leni	Sarah	Hannes	Esra	Arno	**Leni**
Sarah	Hannes	Esra	Arno	Sarah	**Hannes**
Esra	Arno	Sarah	Esra	Arno	**Sarah**
Esra	Arno	Esra	Arno	Esra	**Arno**



Wenn also Leni mit dem Abzählen beginnt, bleibt Esra übrig. Da Arno in der Reihenfolge *unmittelbar* nach Esra steht, muss Leni vorschlagen, dass das Abzählen mit dem Kind beginnt, das *unmittelbar* nach ihr dran ist. Das ist Sarah.

16. „Bevor wir heute ein neues Würfelspiel lernen", sagt der Großvater zu seinen Enkeln, „müsst ihr erst ein Rätsel lösen." Dazu hat er fünf völlig gleiche Würfel in eine Reihe gelegt (s. Bild). „Ihr wisst, dass bei Spielwürfeln die Summe der Punkte auf gegenüberliegenden Seiten stets 7 ist. Wie groß ist also die Summe der Punkte auf den 8 Seiten, mit denen sich die 5 Würfel berühren?"



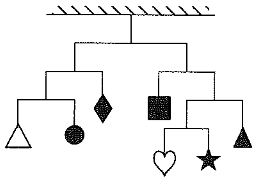
(A) 26 **(B)** 27 **(C)** 28 **(D)** 30 **(E)** 31

Lösung: Von den drei mittleren Würfeln in der Reihe fallen jeweils 7 Punkte an, denn in allen drei Fällen werden die Punkte von zwei einander gegenüberliegenden Seiten gezählt. Die beiden äußeren Würfel sind – wie die anderen auch – zueinander identisch. Die beiden liegen auch noch gleich ausgerichtet, so dass hier noch einmal 7 Punkte, nämlich 5 Punkte vom rechts außen liegenden und 2 Punkte vom links außen liegenden Würfel hinzukommen. Das sind dann insgesamt $4 \cdot 7 = 28$ Punkte.

Mathe in Begriffen

In der folgenden Liste sind anstelle der Pünktchen mathematische Begriffe oder Zahlwörter so einzusetzen, dass dann sinnvolle Wörter entstehen:

1. N<u>ACHT</u>	10. AB.........
2. Z.........	11. AN.........
3. ....G	12. GE.........
4. AR.........	13. ....ERRAT
5. ....ST	14. ....ATUR
6. ....AM	15. RÜBE.........
7. F.........TE	16. ....SASSA
8. H.........ER	17. ....GEBIRGE
9. S.........ELE	18. ....ERMEISTER



17. Das Windspiel, das ich gebaut habe, befindet sich im Gleichgewicht. Die aufgehängten Figuren wiegen zusammen 112 Gramm. Wie viel Gramm (g) wiegt der Stern?

(**A**) 7 g (**B**) 10 g (**C**) 12 g (**D**) 13 g (**E**) 15 g

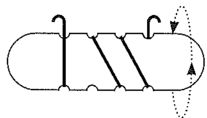
Lösung: Da die einzelnen Arme des Windspiels im Gleichgewicht sind, wiegt die linke Seite – weißes Dreieck, Kreis und Raute – ebensoviel wie die rechte Seite – Quadrat, Herz, Stern und schwarzes Dreieck. Das sind auf jeder Seite $112\,\text{g} : 2 = 56\,\text{g}$. Nun untersuchen wir die rechte Seite: Am obersten rechten Balken wiegt das Quadrat auf der linken Seite ebensoviel wie Herz, Stern und schwarzes Dreieck auf der rechten Seite. Das sind jeweils $56\,\text{g} : 2 = 28\,\text{g}$. Die Untersuchung setzen wir fort. Herz und Stern zusammen wiegen ebensoviel wie das schwarze Dreieck, nämlich $28\,\text{g} : 2 = 14\,\text{g}$. Und letztlich sind Herz und Stern gleich schwer. Ein jedes wiegt $14\,\text{g} : 2 = 7\,\text{g}$.

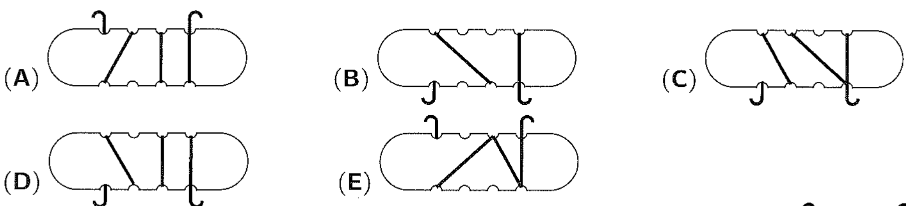
18. In der Pizzeria bei uns um die Ecke gehören zu jeder Pizza Mozzarella und Tomaten. Von den drei Beilagen Sardellen, Schinken und Champignons muss dann – je nach Geschmack – eine oder zwei dazugenommen werden. Jede Pizza gibt es in den Größen klein, normal oder riesig. Wie viele verschiedene Pizzen hat die Pizzeria im Angebot?

(**A**) 12 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 24

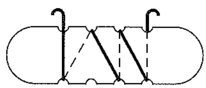
Lösung: Wir überlegen uns, wie viele verschiedene Beläge für eine Pizza möglich sind. Mit nur einer Beilage gibt es die drei Möglichkeiten Sardellen, Schinken und Champignons. Hinzu kommen Mischungen aus je zwei Beilagen. Und davon gibt es noch einmal 3, nämlich Sardellen–Schinken, Sardellen–Champignons und Schinken–Champignons. Es kann also aus insgesamt 6 verschiedenen Belägen ausgewählt werden. Zu jedem der 6 Beläge gibt es drei Größen. Insgesamt sind also $6 \cdot 3 = 18$ verschiedene Pizzen im Angebot.

19. Ich wickle einen Faden auf eine Spule. Dann drehe ich die Spule, wie die Pfeile anzeigen, auf die Rückseite. Wie kann diese Rückseite aussehen?

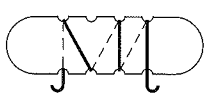




Lösung: Wenn wir die Spule in Pfeilrichtung drehen, dann zeigen die beiden Enden nach unten. Also entfallen die Möglichkeiten (**A**) und (**E**). In unserer Spule werden auf der Vorderseite alle vier oberen Kerben vom Faden passiert. Also müssen nach dem Umdrehen *alle vier unteren* Kerben vom Faden passiert werden. Das ist nur bei Antwort (**D**) der Fall. Der Fadenverlauf vorn und hinten ist in den beiden Bildern rechts dargestellt.

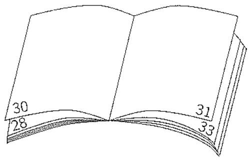


Vorderseite



Rückseite

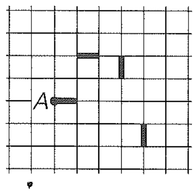
20. Nick und Johanna aus der 9. Klasse sind in diesem Monat für die Schulzeitung verantwortlich. Für die nummerierten 60 Seiten müssen sie 15 große Papierblätter in der Mitte zusammenheften. Plötzlich stellt Johanna fest, dass sie nur 14 Blätter hat. Seite 7 fehlt ihr. Welche Seiten fehlen dann noch?



(A) 8, 9 und 10 **(B)** 8, 42 und 43 **(C)** 6, 48 und 49
(D) 6, 52 und 53 **(E)** 8, 53 und 54

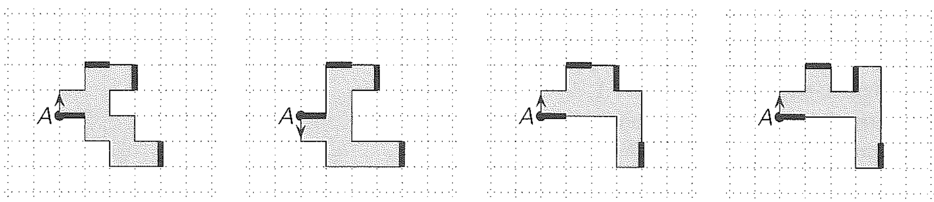
Lösung: Zuerst überlegen wir uns, dass die Zeitung so nummeriert ist, dass stets ungerade Zahlen auf rechten Seiten und gerade Zahlen auf linken Seiten verwendet werden. Und unsere zweite Überlegung ist, dass die Summe der Seitenzahlen auf jedem der großen Papierblätter – auf der Vorderseite sowie auf der Rückseite – gleich ist. Sie ist stets so groß wie $30+31$, also gleich 61. Dies liegt daran, dass die Seitenzahlen von der Doppelseite 30/31 in der Mitte ausgehend in der einen Richtung aufwärts, in der anderen abwärts gezählt werden. Wenn Johanna also die Seite 7 fehlt, die ja eine rechte Seite ist, so auch die Seite 8 auf der Rückseite. Und außerdem fehlen die Seiten $61-7=54$ und $61-8=53$. Die Seiten 7, 8, 53 und 54 gehören zum selben Papierblatt. Wem dies zu kompliziert ist, der kann auch die Papierblätter Schritt für Schritt in Gedanken durchblättern.

21. Ameise Amanda läuft auf den Linien eines Stücks Karopapier. Sie beginnt und endet im Punkt A und betritt mit Ausnahme von A keinen Punkt der Linien mehr als einmal. Zu ihrem Weg gehören alle dick eingezeichneten Strecken. Amanda läuft so, dass die Fläche, die ihr Weg umschließt, so klein wie möglich ist. Aus wie vielen Karos besteht diese kleinstmögliche Fläche?



(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 13

Lösung: Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele für die vielen verschiedenen Möglichkeiten, die Amanda hat, einen Weg mit nur 8 Kästchen zu umlaufen. Antwort **(A)** ist also richtig.



Mit einer umfangreichen Fallunterscheidung und entsprechender Argumentation kann gezeigt werden, dass es keinen Weg für Amanda gibt, auf dem sie nur 7 Kästchen umläuft. Zur Lösung der Aufgabe war dies von den Teilnehmern am Wettbewerb jedoch nicht gefordert. Es genügte, einen der vielen Wege zu finden, bei dem Amanda 8 Kästchen umläuft.

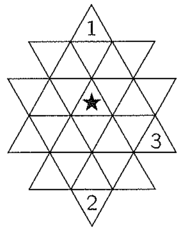
22. K, L und M sind drei verschiedene Ziffern. Es gilt $KKL \cdot L = ML5L$. Wie groß ist $K+L+M$?

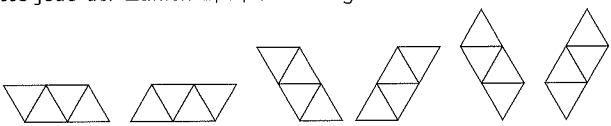
(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 20

Lösung: Da das Produkt der Endziffer L von KKL mit L, also $L \cdot L$, auf die Endziffer L von $ML5L$ endet, kommen für L nur die Werte 0, 1, 5 und 6 in Frage. Darunter scheiden 0 und 1 sofort aus, weil L einer der Faktoren ist und sich das Produkt $ML5L$ von 0 und vom anderen Faktor

KKL unterscheidet. Angenommen es ist $L = 5$. Dann wäre $L \cdot L = 25$. Damit im Produkt die 5 an der Zehnerstelle entsteht, muss zu dem Übertrag 2 eine 3 addiert werden. Da das Produkt, das bei der Multiplikation $K \cdot 5$ entsteht, jedoch nur auf 0 oder auf 5 enden kann, ist $L = 5$ nicht möglich. Also kommt nur noch $L = 6$ in Frage. Wir setzen dies ein und rechnen: $6 \cdot 6 = 36$. Der Übertrag 3 muss nun, wenn wir ihn zum Einer des Produkts $K \cdot 6$ addieren, 5 ergeben. Also muss der Einer des Produkts $K \cdot 6$ gleich 2 sein. Es enden nur die Produkte $2 \cdot 6 = 12$ und $7 \cdot 6 = 42$ auf 2. Wir probieren es mit $K = 2$. Dies eingesetzt, führt zu $KKL \cdot L = 226 \cdot 6 = 1356$, was nicht möglich ist, da die Hunderterziffer des Produktes 6 sein muss. Es bleibt nur noch die Möglichkeit $KKL \cdot L = 776 \cdot 6 = 4656$. Das ist die Lösung der Multiplikationsaufgabe. Für unsere Känguru-Aufgabe muss nun noch $K + L + M$ gebildet werden, das ist $7 + 6 + 4 = 17$.

23. Jessica hat sich etwas Kniffliges ausgedacht. Sie will in alle kleinen Dreiecke des Dreiecksgitters (s. Bild rechts) eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 eintragen. Dabei soll in jedem der folgenden aus 4 Dreiecken bestehenden Ausschnitte jede der Zahlen 1, 2, 3 und 4 genau einmal auftauchen:

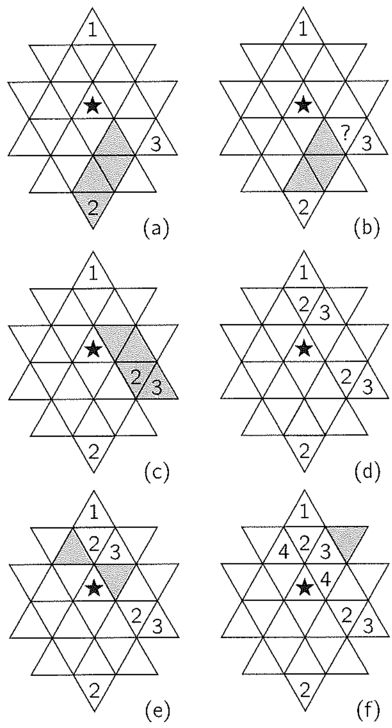




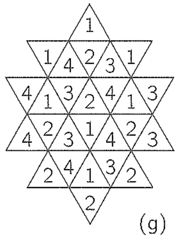
Welche Zahl muss den Stern ersetzen?

(**A**) 1, 2 oder 3 (**B**) nur 1 (**C**) nur 2 (**D**) nur 3 (**E**) nur 4

Lösung: Unter dem grau gezeichneten 4er-Teil in Bild (a) sind alle 4 Zahlen verborgen, unter dem 3er-Teil im Bild (b) rechts daneben sind es also die Zahlen 1, 3 und 4.
Da das Feld mit dem Fragezeichen zusammen mit dem grauen 3er-Teil wieder eines der 4er-Teile bildet, in dem laut Aufgabenstellung die Zahlen 1, 2, 3 und 4 jede genau einmal vorkommen, muss in dem mit dem Fragezeichen gekennzeichneten Dreieck wieder eine 2 stehen. Mit derselben Begründung finden wir, wenn wir wie in Bild (c) von einem neuen 4er-Teil ausgehen, für die 3 einen weiteren Platz. Und ebenso für eine weitere 2. Damit haben wir bereits 3 zusätzliche Zahlen im Dreieckspuzzle eintragen können (Bild (d)).
In den beiden Dreiecken, die in Bild (e) grau gefärbt sind, kann keine 1 stehen, und da 2 und 3 schon entsprechend vorhanden sind, muss dort beide Male eine 4 erscheinen. Damit ist jedoch klar, dass in dem in Bild (f) grau gefärbten Dreieck eine 1 erscheinen muss. Und damit kommt für das Feld mit dem Stern nur noch die 2 in Frage.



Das komplett ausgefülltes Dreieckspuzzle ist auf dem letzten Bild zu sehen.



(g)

24. Beim Unterwasserkönig Chudo-Judo dienen 6-, 7- und 8-armige Kraken. Die 7-armigen Kraken sind boshaft und lügen stets. Die anderen sind treue Diener und sprechen stets die Wahrheit. Warwara, die Tochter von Chudo-Judo, belauscht eines Nachts ein Gespräch von 4 Kraken, ohne sie zu sehen. Sie sprechen über ihre Arme. Der blaue Krake behauptet: „Wir vier haben zusammen 28 Arme." Der grüne sagt: „Wir haben zusammen 27 Arme." „Es sind 26", sagt der gelbe. Und der rote spricht: „Es sind nur 25!" Falls einer der 4 Kraken die Wahrheit sagt, welche Farbe hat er dann?

(**A**) blau (**B**) grün (**C**) gelb (**D**) rot (**E**) alle 4 Kraken lügen

Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass *höchstens einer* der Kraken die Wahrheit sprechen kann, da vier unterschiedliche Angaben zur Anzahl der Arme gemacht werden, wovon ja nur eine zutreffen kann.
Nehmen wir also an, dass *alle vier* Kraken lügen. Da nur die 7-armigen Kraken lügnerisch sind, muss es also genau vier 7-armige Kraken geben. Dann hätten die vier Kraken zusammen $4 \cdot 7 = 28$ Arme. 28 Arme – das ist die Aussage, die der blaue Krake macht – wäre folglich eine wahre Aussage. Und das ist ein Widerspruch dazu, dass der blaue Krake – wie alle anderen – lügt.
Nun wissen wir: Da höchstens ein Krake die Wahrheit sagt und – wie eben gezeigt – nicht alle lügen können, ist nur noch die folgende Situation möglich: Genau ein Krake sagt die Wahrheit, genau drei Kraken lügen. Jene drei Kraken, die lügen, haben zusammen $3 \cdot 7 = 21$ Arme. Der Krake, der die Wahrheit sagt, hat entweder 6 oder 8 Arme. Er muss demzufolge entweder von $21 + 6 = 27$ oder von $21 + 8 = 29$ Armen berichten. Es gibt keinen, der von 29 Armen berichtet, jedoch spricht der grüne Krake von 27 Armen, also hat der die Wahrheit sprechende Krake die Farbe grün.

KAENGURU-Rechen-Kamm

In die leeren Felder sind die Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, dass alle Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Jede Zahl soll dabei genau einmal vorkommen. Die 7 ist bereits an der richtigen Stelle eingetragen.

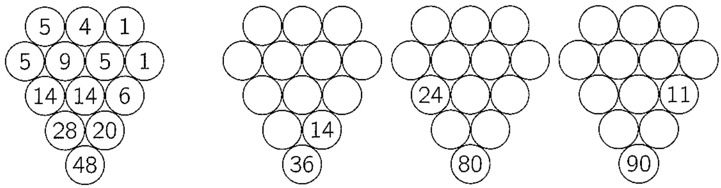
7	+		=	
				:
	:		=	
				=
	−		=	

Kopfnüsse

Im Jahre 2007 erschien für die Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Belarus „Das große Buch der Kopfnüsse“ von W. A. Portugalow, eine wunderschöne Sammlung von interessanten, kniffligen Knobeleien. Hier einige Kostproben:

Weintraubenarithmetik

Für jeden Kreis ist eine natürliche Zahl gesucht. In dem Kreis in der Mitte unter zwei benachbarten Kreisen soll dabei stets die Summe der Zahlen aus diesen beiden Kreisen stehen. Alle Zahlen in der ersten Zeile einer Traube sollen voneinander verschieden sein. Im linken Bild ist ein Beispiel zu sehen. – In den drei Aufgaben sind zwei Zahlen schon eingetragen. Was muss in die anderen Kreise geschrieben werden?



Schwarz-weiße Logik

Wir suchen eine Zahl mit lauter verschiedenen Ziffern. Die Zahlen in den Zeilen stimmen mit der gesuchten Zahl in so vielen Ziffern überein, wie Punkte in der jeweiligen Zeile sind. Ein schwarzer Punkt besagt, dass die übereinstimmende Ziffer an der richtigen Stelle steht, ein weißer, dass die übereinstimmende Ziffer *nicht* an der richtigen Stelle steht.

Im rechten Bild ist ein Rätsel für die Zahl 204: Da in jeder Zeile ein schwarzer Punkt ist, finden wir in jeder Zeile eine der gesuchten Ziffern bereits an ihrem Platz – außerdem gibt es in der ersten Zeile eine Ziffer, die zur gesuchten Zahl gehört und nicht an ihrem Platz steht.

2	4	1	●○
5	7	4	●
6	0	3	●
			●●●

$\Rightarrow$ 2 0 4

Da wir insgesamt nur 3 Ziffern suchen, muss es bei den 4 Punkten mindestens zwei geben, zu denen dieselbe Ziffer gehört. Da unter den 9 Vergleichsziffern genau eine ist, die zweimal auftritt, die 4, gehört die 4 zu den gesuchten Ziffern. Da sie in der 2. Zeile mit einem schwarzen Punkt auftritt, ist sicher, dass die 4 die Einerziffer der gesuchten Zahl ist. Folglich ist die 2 aus der 1. Zeile am richtigen Platz, d. h. an der Hunderterstelle. Die 0 schließlich ist die Zehnerziffer. – Wer kann die folgenden Aufgaben lösen?

1	6	9	●
2	8	0	○
3	5	7	●
5	2	4	○○
			●●●

3	6	8	9	●○
4	5	0	6	○○
5	8	7	9	●
7	0	1	3	●○
				●●●●

2	6	7	4	0	●
3	5	9	7	2	●●○○
7	3	1	6	4	○○
9	0	2	5	3	●○○○
					●●●●●

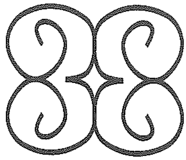
Klassenstufen 7 und 8

1. Wie viel ist $12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89$?

(**A**) 303 (**B**) 389 (**C**) 396 (**D**) 404 (**E**) 438

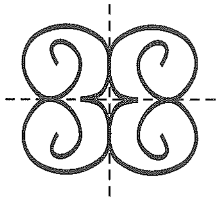
Lösung: Wer entdeckt, dass sich die Summanden geeignet umordnen lassen, ist schnell fertig: $12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 = (12 + 89) + (23 + 78) + (34 + 67) + (45 + 56) = 101 + 101 + 101 + 101 = 4 \cdot 101 = 404$.
Diese Methode funktioniert, weil aufeinanderfolgende Summanden stets dieselbe Differenz haben. Diese Differenz ist hier 11. So ist z. B. $12 + 89 = (12 + 11) + (89 - 11) = 23 + 78$.
Wenn wir die Addition der Reihe nach ausführen, erhalten wir natürlich dasselbe Ergebnis. Wer nach der Addition der Einer bemerkt, dass die Summe auf 4 endet, stellt nach einem Blick auf die Lösungsmöglichkeiten und ohne weiter zu rechnen fest, dass nur 404 die Lösung sein kann.

2. Bäckermeister Otto Spiegel ist Erfinder der berühmten Doppelschweinsohren. Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein solches Doppelschweinsohr?



(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) unendlich viele

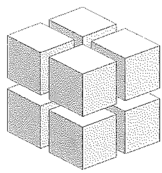
Lösung: Das Bild zeigt die beiden Symmetrieachsen des Doppelschweinsohrs. An ihnen kann man das Gebäck spiegeln, ohne dass sich am Aussehen etwas ändert.



3. Spielzeugkängurus werden für den Versand erst einzeln in kleine würfelförmige Schachteln und diese dann in größere, ebenfalls würfelförmige Schachteln verpackt. Auf den Boden einer großen Schachtel passen genau vier kleine. Wie viele verpackte Kängurus passen insgesamt in eine große Schachtel?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

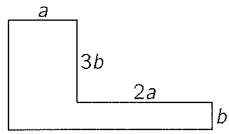
Lösung: Der Boden der großen Schachtel ist quadratisch. Also müssen die 4 kleinen Schachteln im Quadrat angeordnet werden: 2 mal 2 Stück. Die Seitenlänge des Bodenquadrats ist aber auch gleich der Höhe der großen Schachtel. Daher muss es 2 Schichten kleiner Schachteln geben. Insgesamt passen somit $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verpackte Kängurus in eine große Schachtel.



4. Jörg ist stolzer Besitzer von 20 prächtigen Rassekaninchen. Heute sollte jedes Kaninchen eine Möhre bekommen. Leider waren die Möhren auf dem Markt fast ausverkauft. Jörg bekam nur 8 Stück, allerdings recht große. Er bricht einige Möhren einzeln in Stücke, um für jedes Kaninchen genau ein Stück zu haben. Wie oft muss er die Möhren insgesamt brechen?

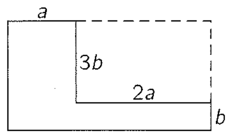
(**A**) 8-mal (**B**) 9-mal (**C**) 12-mal (**D**) 14-mal (**E**) 20-mal

Lösung: Wenn Jörg von den 8 Möhren eine Möhre in zwei Teile bricht, hat er 7 ganze Möhren und zwei Teile, also insgesamt 9 Stücke. Das ist genau ein Stück Möhre mehr als vor dem Zerteilen. Bricht er ein weiteres Mal, so erhält er wieder ein Stück mehr, usw. Da 20 Stücke gerade 12 Stücke mehr als zu Beginn sind, muss er genau 12-mal zerteilen. – Wir erkennen, dass es völlig gleich ist, *auf welche Weise* Jörg die Möhren bricht. Ob er nun eine einzige genau 12-mal bricht, oder mehrere insgesamt 12-mal, in jedem Fall erhält er 20 Möhrenstücke.



5. Der Umfang der rechts abgebildeten Figur ist gleich

(**A**) $3a + 4b$ (**B**) $3a + 8b$ (**C**) $6a + 4b$ (**D**) $6a + 6b$ (**E**) $6a + 8b$



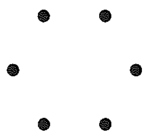
Lösung: Die linke senkrechte Kante der Figur ist genauso lang wie die beiden anderen senkrechten Kanten zusammen. Ebenso ist die waagerechte Kante unten genauso so lang wie die beiden anderen waagerechten Kanten zusammen (siehe Bild). Der Umfang der Figur ist gleich der Summe aller Kanten, also gleich $2\cdot(3b+b)+2\cdot(a+2a) = 6a+8b$. Dieser Umfang ist ebenso groß wie der des großen vervollständigten Rechtecks.

6. Für das Aneinanderschweißen dreier Rohrabschnitte zu einem langen Rohr werden 18 Minuten benötigt. Wie viel Zeit muss dann – gleiche Arbeitsgeschwindigkeit vorausgesetzt – für das Aneinanderschweißen von sechs Rohrabschnitten zu einem Rohr geplant werden?

(**A**) 27 Minuten (**B**) 30 Minuten (**C**) 36 Minuten (**D**) 42 Minuten (**E**) 45 Minuten

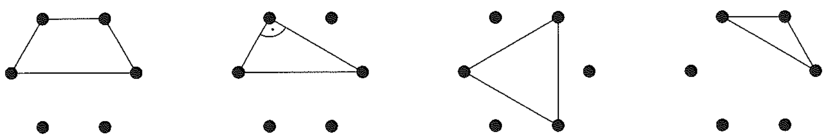
Lösung: Um drei Rohrabschnitte zu einem Rohr zusammenzuschweißen, müssen zwei Schweißnähte gemacht werden. Für diese braucht man 18 Minuten, also $18 : 2 = 9$ Minuten für eine Schweißnaht. Um sechs Rohrabschnitte zu einem Rohr zusammenzuschweißen, sind fünf Schweißnähte nötig. Für diese benötigt man $5 \cdot 9$ Minuten $= 45$ Minuten.

7. Elly zeichnet die 6 Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks und verbindet einige davon zu einer geometrischen Figur. Diese Figur ist *gewiss kein*

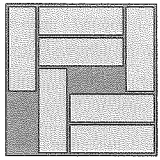


(**A**) Trapez (**B**) rechtwinkliges Dreieck (**C**) Quadrat
(**D**) spitzwinkliges Dreieck (**E**) stumpfwinkliges Dreieck

Lösung: Die Bilder zeigen der Reihe nach ein Trapez, ein rechtwinkliges Dreieck, ein spitzwinkliges Dreieck und ein stumpfwinkliges Dreieck:



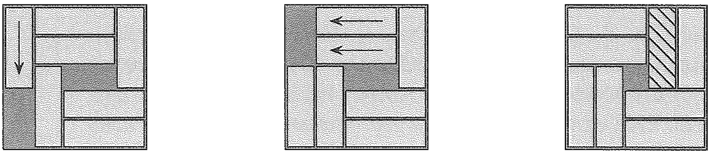
Angenommen es gäbe ein Quadrat. Dazu müssen von den 6 Eckpunkten des Sechsecks genau 2 weggelassen werden. Folglich würden unter den 4 Eckpunkten des Quadrats zwei benachbarte Sechseckseckpunkte sein. Zwei benachbarte Sechseckseckpunkte bilden jedoch mit keinen der übrigen Eckpunkte des Sechsecks ein Quadrat. Ein Quadrat lässt sich also nicht finden.



8. In einer 5 cm × 5 cm großen Box befinden sich sieben längliche, 3 cm × 1 cm große Stäbe. Wie viele Stäbe muss man mindestens verschieben, um noch für einen achten, ebenso großen Stab Platz zu schaffen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) das geht nicht

Lösung: In der gegebenen Situation passt kein weiterer Stab, die beiden Lücken haben jede nur das Maß 2 cm × 1 cm. Nun lässt sich zunächst nur der linke Stab verschieben (linkes Bild). Im nächsten Schritt verschieben wir die beiden oberen Stäbe nach links. Dadurch entsteht eine hinreichend große Lücke, und ein weiterer Stab (im Bild schraffiert) passt in das entstandene Loch. Es müssen also mindestens drei Stäbe verschoben werden.



9. Es gibt $60 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 7$

(**A**) Sekunden in einer Woche. (**B**) Minuten in 7 Wochen. (**C**) Sekunden in einer Stunde.
(**D**) Stunden in 60 Tagen. (**E**) Sekunden in 7 Stunden.

Lösung: Es gibt 60 Sekunden in einer Minute, 60 Minuten in einer Stunde, 24 Stunden pro Tag und 7 Tage in einer Woche. Das Produkt dieser vier Zahlen $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 7$ ist gleich dem in der Aufgabe gegebenen Produkt, nur die mittleren Faktoren sind vertauscht. Antwort (**A**) ist richtig.

10. Ziehe ich die Summe der ersten 100 ungeraden positiven ganzen Zahlen $1 + 3 + \ldots + 199$ von der Summe der ersten 100 geraden positiven ganzen Zahlen $2 + 4 + \ldots + 200$ ab, erhalte ich als Ergebnis

(**A**) 0 (**B**) 20 (**C**) 50 (**D**) 100 (**E**) 200

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe genügt geschicktes Rechnen. Statt erst die Summe der ersten 100 geraden Zahlen zu bilden und anschließend die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen abzuziehen, können wir auch von der ersten geraden Zahl 2 die erste ungerade Zahl 1 abziehen, dann von der 4 die 3, dann von der 6 die 5, usw., und anschließend alles zusammenaddieren:

$$(2 + 4 + \ldots + 200) - (1 + 3 + \ldots + 199) = (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \ldots + (200 - 199)$$

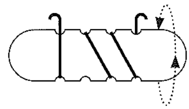
Die einzelnen Differenzen sind alle gleich 1. Da es 100 Summanden sind, ist das gesuchte Ergebnis $100 \cdot 1 = 100$.

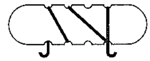
11. Die Großmutter hat ein großes Blech Streuselkuchen für ihre Enkel gebacken. Als sie den Kuchen aufschneiden will, fällt ihr auf, dass sie gar nicht weiß, ob 3, 5 oder alle 6 Enkel kommen. Sie überlegt, wie sie den Kuchen teilen muss, damit sie jedem Kind gleich viele Stücke geben kann – egal ob 3, 5 oder 6 Kinder kommen. Sie möchte, wenn die Kinder da sind, nicht noch einmal zum Messer greifen. Welches ist die kleinste Anzahl von Stücken, in die sie teilen muss?

(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 24 (**E**) 30

Lösung: Da die Großmutter nicht noch einmal schneiden will, wenn die Enkel da sind, müssen die Kuchenstücke gleichmäßig auf 3, 5 und 6 Enkel aufgeteilt werden können. Das heißt, die Anzahl der Kuchenstücke muss durch 3, 5 und 6 teilbar sein. Von den fünf Lösungsvarianten ist nur 30 durch 3, 5 und 6 teilbar. Es ist die *kleinste* mögliche Anzahl von Kuchenstücken, da 30 gerade das *kleinste gemeinsame Vielfache* der Zahlen 3, 5 und 6 ist.

12. Ich wickle einen Faden auf eine Spule. Dann drehe ich die Spule, wie die Pfeile anzeigen, auf die Rückseite. Wie kann diese Rückseite aussehen?



(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Lösung: Wenn ich die Spule in Pfeilrichtung drehe, zeigen die beiden Enden nach unten. Also entfallen die Möglichkeiten (**C**) und (**E**). In unserer Spule werden auf der Vorderseite alle vier oberen Kerben vom Faden passiert. Also müssen nach dem Umdrehen *alle vier unteren* Kerben vom Faden passiert werden. Das ist nur bei Antwort (**A**) der Fall. Der Fadenverlauf vorn und hinten ist in den beiden Bildern rechts dargestellt.

Vorderseite

Rückseite

13. Meine Mutter schwört auf selbst gemixte Kräutertees. Ihre neueste Erfindung enthält Augentrost, Fenchel und Kamille im Verhältnis 2 : 3 : 5. Heute will sie gleich eine größere Menge mixen. Vom Fenchel hat sie eine 125-g-Tüte, Kamille hat sie selbst genügend gepflückt und getrocknet. Ich soll Augentrost einkaufen. Wieviel wird für die Mischung benötigt, wenn die 125 g Fenchel verbraucht werden sollen?

(**A**) etwa 75 g (**B**) etwa 85 g (**C**) etwa 95 g (**D**) etwa 105 g (**E**) etwa 115 g

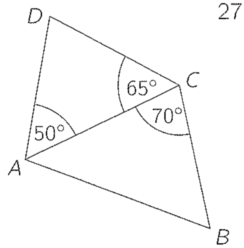
Lösung: Die Kamille brauchen wir nach Aufgabenstellung nicht zu beachten, wichtig sind nur Fenchel und Augentrost. Dabei kommen laut Rezept auf 2 Teile Augentrost genau 3 Teile Fenchel. Also ist das gesuchte Gewicht an Augentrost $(125\,\text{g} : 3)\cdot 2 = (125\,\text{g}\cdot 2) : 3 = 250\,\text{g} : 3 = 83,\ldots\ \text{g}$. Die schriftliche Division können wir an dieser Stelle abbrechen, da ja nur ein gerundeter Wert gesucht ist. Es werden also rund 85 g.

14. Björn rechnet die Summe der ersten drei von sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen aus. Sie ist 33. „Dann kann ich die Summe der *letzten drei* dieser sieben Zahlen sagen", teilt Janina mit. Diese Summe ist

(**A**) 39 (**B**) 37 (**C**) 42 (**D**) 48 (**E**) 45

Lösung: Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich dem 3-fachen der mittleren dieser 3 Zahlen. Also ist die mittlere Zahl gleich $33 : 3 = 11$. Die ersten drei der sieben Zahlen sind also 10, 11 und 12. Es folgen 13, 14, 15 und 16, und die gesuchte Summe der letzten drei dieser Zahlen ist $14 + 15 + 16 = 3 \cdot 15 = 45$.

Es gibt auch eine Lösung, bei der Janina die 7 Zahlen nicht genau ausrechnet: Die fünfte der 7 aufeinanderfolgenden Zahlen ist um 4 größer als die erste, die sechste ist um 4 größer als die zweite, und die siebte ist um 4 größer als die dritte. Folglich ist die Summe der letzten drei dieser 7 Zahlen um $3 \cdot 4 = 12$ größer als die Summe der ersten drei, also gleich $33 + 12 = 45$.



15. Im Viereck $ABCD$ sind AD und BC gleich lang. Einige Winkel sind eingezeichnet (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der Innenwinkel bei B?

(**A**) 50° (**B**) 52° (**C**) 55° (**D**) 60° (**E**) 72°

Lösung: Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist, beträgt der Innenwinkel bei D gerade $180° - 65° - 50° = 65°$. Das Dreieck ADC ist folglich gleichschenklig mit Basis CD, also $\overline{AD} = \overline{AC}$, woraus nach Aufgabenstellung $\overline{AC} = \overline{BC}$ folgt. Damit ist auch das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis AB. Die Winkel bei A und B sind daher gleich groß, und der gesuchte Winkel bei B ist gleich $(180° - 70°) : 2 = 55°$.

16. Es ist $a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4 = e - 5$. Welche der Zahlen a, b, c, d, e ist die größte?

(**A**) a (**B**) b (**C**) c (**D**) d (**E**) e

Lösung: Die größte der fünf Zahlen ist dadurch gekennzeichnet, dass man von ihr das meiste abziehen muss, um auf die immer gleiche Zahl in der Gleichheit zu kommen. Folglich muss e die größte der fünf Zahlen sein.

Große Produkte

Stell dir vor, du multiplizierst alle geraden Zahlen von 2 bis 2010. Auf welche Ziffer endet dieses riesige Produkt?

17. Bei der Tombola im Gartenverein sind drei Sorten Lose in der Trommel: weiße Lose für interessante Gartenbücher, hellblaue Lose für Blumensamen und gelbe Lose für selbstgemachte Konfitüren. Nieten gibt es keine. 50 Lose sind in der Trommel, darunter 11-mal so viele weiße wie hellblaue. Es sind weniger gelbe als weiße, aber mehr gelbe als hellblaue. Wie viele gelbe Lose sind in der Trommel?

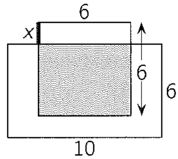
(**A**) 14 (**B**) 16 (**C**) 20 (**D**) 23 (**E**) 26

Lösung: Da von 50 Losen 11-mal so viele weiße wie hellblaue Lose in der Trommel sind, gibt es nur vier Varianten: 1 hellblaues und 11 weiße Lose, 2 hellblaue und 22 weiße Lose, 3 hellblaue und 33 weiße Lose, 4 hellblaue und 44 weiße Lose. Die übrigen der 50 Lose sind gelb. Wir stellen eine Tabelle für diese 4 Fälle auf:

hellblau	weiß	gelb
1	11	38
2	22	26
3	33	14
4	44	2

Da weniger gelbe als weiße, aber mehr gelbe als hellblaue Lose in der Trommel sind, kommt nur die dritte Variante in Frage. Also sind es 14 gelbe Lose.

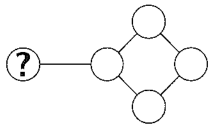
18. Gegeben sind ein Quadrat mit Seitenlänge 6 und ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 und 10. Die graue Fläche ist halb so groß wie die Rechtecksfläche. Wie lang ist x? (*Abb.* *nicht maßstabsgerecht*)



(**A**) 1 (**B**) 1,25 (**C**) 1,5 (**D**) 2 (**E**) 2,5

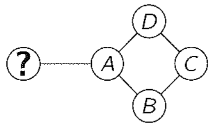
Lösung: Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $6 \cdot 10 = 60$ und der des Quadrats $6 \cdot 6 = 36$. Die graue Fläche ist halb so groß wie die Rechtecksfläche, also $60 : 2 = 30$. Damit hat der rechteckige weiße Teil des Quadrats einen Flächeninhalt von $36 - 30 = 6$. Dieser Flächeninhalt ist gleich dem Produkt der Seitenlängen 6 und x. Folglich ist x gleich 1.

19. In die 5 Kreise sind die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 so einzutragen, dass keine aufeinanderfolgenden Zahlen miteinander verbunden sind. Welche Zahl gehört an die Stelle des Fragezeichens?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

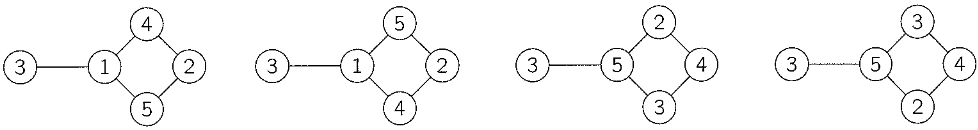
Lösung: Wir benennen die Zahlen in den Kreisen mit A bis D (siehe Bild rechts). Die Zahl A ist mit drei weiteren Kreisen verbunden. In diesen drei Kreisen kann weder Vorgänger noch Nachfolger von A stehen – dafür bleibt nur der Kreis mit der Zahl C. Folglich kann A unter den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ nur *entweder* einen Vorgänger *oder* einen Nachfolger besitzen. Also ist A gleich 1 oder 5.



1. Fall: A ist gleich 1: In diesem Fall ist C gleich 2. Die 3 als Nachfolger der Zahl 2 kann weder B noch D sein, muss also an die Stelle des Fragezeichens.

2. Fall: A ist gleich 5: In diesem Fall ist C gleich 4. Auch hier kann die 3 als Vorgänger der Zahl 4 weder B noch D sein, muss also an die Stelle des Fragezeichens.

An die Stelle des Fragezeichens gehört in jedem Fall die 3. In den beiden beschriebenen Fällen findet man schnell insgesamt 4 Möglichkeiten, die fünf Zahlen aufzuteilen:



20. Wie viele natürliche Zahlen haben die Ziffernsumme 11 und als Produkt der Ziffern 2?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 13 (**D**) 22 (**E**) 25

Lösung: Wenn das Produkt der Ziffern einer Zahl gleich 2 ist, muss – weil 2 eine Primzahl ist – eine Ziffer gleich 2 sein, und alle anderen müssen gleich 1 sein. Die Ziffernsumme 11 kann nur entstehen, wenn neben der 2 noch neun Einsen als Ziffern vorkommen. Die gesuchten Zahlen sind also 10-stellig, eine Ziffer ist 2 und die anderen neun Ziffern sind gleich 1. Da die Ziffer 2 an jeder der 10 Stellen stehen kann, gibt es genau 10 Zahlen mit der angegebenen Eigenschaft: 2111111111, 1211111111, 1121111111, 1112111111, 1111211111, 1111121111, 1111112111, 1111111211, 1111111121, 1111111112.

21. Moritz führt über alles Statistik. Als zu Beginn des Schuljahres ein neues Mädchen in die Klasse kam, stellte Moritz sofort fest, dass der Mädchenanteil in der Klasse von 50 % auf 52 % gestiegen ist. Wie viele Jungen sind in der Klasse?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 14 (**E**) 15

Lösung: Es gibt in diesem Schuljahr 52 % Mädchen und 48 % Jungen in der Klasse. Da es vor diesem Schuljahr genau gleich viele Mädchen wie Jungen waren, entspricht das neue Mädchen, also ein Kind, gerade $52\,\% - 48\,\% = 4\,\%$. Folglich sind $48\,\% : 4\,\% = 12$ Jungen in der Klasse.

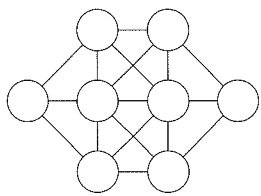
22. Bei der Stadtmeisterschaft im Eiskunstlauf erwartet Robin nach seiner Kür gespannt die Bewertung der 12 Preisrichter. Er bekommt ausnahmslos die Noten 4 und 5. Da ruft Aljona aus dem Publikum: „Hey, die Summe aller Noten ist ja durch 11 teilbar!" Wie oft erhielt Robin die Note 5?

(**A**) 4-mal (**B**) 5-mal (**C**) 6-mal (**D**) 7-mal (**E**) 9-mal

Lösung: Hätte Robin ausschließlich Note 4 erhalten, wäre die Summe aller Noten $12 \cdot 4 = 48$. Das ist die kleinste mögliche Summe. Hätte er genau einmal Note 5 erhalten, wäre die Summe gleich 49, bei zwei Fünfen wäre sie gleich 50, usw. Hätte er ausschließlich Note 5 erhalten, wäre die Summe aller Noten gleich $12 \cdot 5 = 60$. Dies ist die größte mögliche Summe. Jede Zahl zwischen 48 und 60 kann als Summe aller Noten vorkommen. Da die Zahl 55 die einzige Zahl zwischen 48 und 60 ist, die durch 11 teilbar ist, muss das die Summe von Robins Noten sein. Robin hat somit $55 - 48 = 7$-mal die Note 5 erhalten.

KAENGURU-Zahlenknobelei

Die Zahlen von 1 bis 8 sind so in die Kreise einzutragen, dass keine aufeinanderfolgenden Zahlen miteinander verbunden sind.

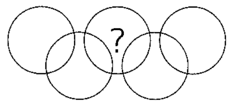


23. Das Schloss im Zauberwald wird von sieben sprechenden Bäumen bewacht. Von einer Fee erfuhr der Prinz: „Einige der Bäume lügen immer, die anderen lügen nie. Wer die Prinzessin befreien will, muss herausfinden, wie viele Lügenbäume es sind." „Oh, wie leicht", frohlockte der Prinz und fragte die Bäume direkt: „Wie viele von euch lügen?" Der erste Baum sprach „Einer", der zweite „Zwei", der dritte „Drei", der vierte „Vier", der fünfte „Fünf", der sechste „Sechs" und der siebte „Sieben". Der Prinz war kurz verwirrt, fand jedoch die richtige Antwort. Wie viele Lügenbäume waren es?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 6 (**E**) 7

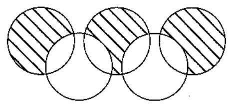
Lösung: Da nur *eine* Zahl zwischen 0 und 7 die Anzahl der Lügenbäume angeben kann, müssen mindestens 6 der Bäume lügen, da jeder Baum eine andere Zahl sagt. Würden alle 7 Bäume lügen, hätte der siebte Baum die Wahrheit gesagt. Also kann es nur 6 Lügenbäume geben, Lösung (**D**). Der sechste Baum hat als einziger nicht gelogen.

24. Die 5 Kreise begrenzen 9 Gebiete. In jedes dieser Gebiete soll eine der Zahlen von 1 bis 9 geschrieben werden, wobei jede Zahl nur genau einmal verwendet werden darf. In jedem Kreis soll die Summe der Zahlen 11 betragen. Welche Zahl muss in das Gebiet mit dem Fragezeichen geschrieben werden?



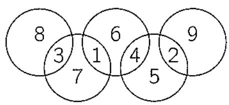
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

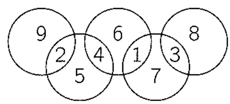
Lösung: Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 ist gleich 45. Diese Summe finden wir, wenn wir die Zahlen in den schraffierten Gebieten und die Zahlen in den unteren Kreisen zusammenrechnen. Da in jedem Kreis die Summe 11 steht, ist die Summe der Zahlen in den schraffierten Gebieten gleich $45 - 2 \cdot 11 = 23$. Die einzige Möglichkeit, die Zahl 23 als Summe von 3 Zahlen zwischen 1 und 9 darzustellen, ist $23 = 9 + 8 + 6$. Daher müssen 9, 8 und 6 in den schraffierten Gebieten stehen.



1. Fall: Im Gebiet mit dem Fragezeichen steht die 9. Dann müsste in den beiden übrigen Gebieten in diesem Kreis jeweils eine 1 stehen. Das ist aber nicht möglich.
2. Fall: Im Gebiet mit dem Fragezeichen steht die 8. Dann sind 1 und 2 im selben Kreis. Die 9 müsste in einem der äußeren Kreise sein – zusammen mit der 2, die aber im mittleren Kreis steht.
3. Fall: Im Gebiet mit dem Fragezeichen steht die 6. Das ist die letzte verbleibende Möglichkeit, Lösung (**B**) ist richtig.

Füllen wir systematisch die Gebiete: Im Kreis mit der 6 fehlen noch 5, also 2 und 3 oder 1 und 4. Da die 2 in einem der äußeren Kreise bei der 9 stehen muss, bleiben nur 1 und 4 für den mittleren Kreis. In den äußeren Kreisen stehen 9 und 2 bzw. 8 und 3. Die Zahlen 5 und 7 lassen sich eindeutig in die unteren Kreise schreiben. Wir erhalten zwei mögliche (zueinander gespiegelte) Lösungen:





25. Donnerstags ist hinter dem Rathaus Tauschmarkt, bei dem vor allem Frisches über die Tische geht. Die heutigen Tauschregeln für Geflügel sind der Tafel rechts zu entnehmen. Wie viele Hennen muss Frau Gacker mitbringen, wenn sie im Tausch eine Gans, einen Truthahn und einen Hahn dafür bekommen will?

Fairer Tausch!!!		
1 Truthahn	$\Longleftrightarrow$	5 Hähne
1 Gans + 2 Hennen	$\Longleftrightarrow$	3 Hähne
4 Hennen	$\Longleftrightarrow$	1 Gans

(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 16 (**D**) 15 (**E**) 12

Lösung: Um einen Truthahn zu ertauschen, benötigt Frau Gacker 5 Hähne. Da sie einen Hahn mit nach Hause nehmen will, muss sie jedoch 6 Hähne ertauschen. Für 6 Hähne muss sie 2 Gänse und 4 Hennen liefern. Nach der dritten Tauschregel ertauscht sie gleich 3 Gänse, denn eine möchte sie mit nach Hause nehmen. Für 3 Gänse benötigt sie 12 Hennen. Zusammen mit den 4 Hennen aus dem Tausch für den Hahn, den sie mit nach Hause nehmen will, macht das 16 Hennen. Der Tausch sieht insgesamt wie folgt aus:

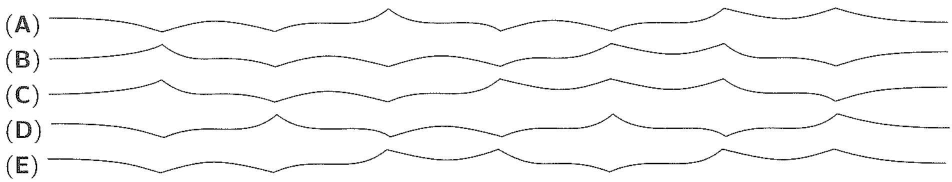
$$\begin{aligned}
\text{16 Hennen} &\Longleftrightarrow \text{12 Hennen} + \text{4 Hennen} \Longleftrightarrow \text{3 Gänse} + \text{4 Hennen}\\
&\Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{2 Gänse} + \text{4 Hennen} \Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{6 Hähne}\\
&\Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{1 Hahn} + \text{5 Hähne} \Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{1 Hahn} + \text{1 Truthahn}
\end{aligned}$$

26. Die sechs Ziffern zweier dreistelliger Zahlen sind allesamt voneinander verschieden. Was ist der kleinstmögliche Wert für die Differenz der beiden Zahlen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Seien abc und def zwei dreistellige Zahlen, deren Ziffern a, b, c, d, e, f allesamt verschieden sind. Wir wählen $def > abc$. Damit die Differenz $def - abc$ möglichst klein wird, versuchen wir möglichst nah an einem Hundertersprung zu liegen. Das heißt, dass $d = a + 1$ ist und dass die kleinere Zahl abc knapp unter $d00$, die größere Zahl def knapp über $d00$ liegen muss. Ein voller Hunderter ist nicht möglich, da Einer- und Zehnerstelle beide gleich 0 wären. Die Zahl def soll nun knapp über einem vollen Hunderter liegen, abc knapp darunter. Für ef ist 01 regelgerecht. Für bc ist 99 nicht möglich, aber 98. Der gesuchte Wert ist also mindestens 3. Wir suchen für a und d zwei aufeinanderfolgende Ziffern, die ungleich 0, 1, 8 und 9 sind. Es gibt genau fünf Möglichkeiten: 2 und 3, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6, 6 und 7. Bei den zugehörigen Zahlenpaaren (298,301), (398,401), (498,501), (598,601) und (698,701) wird die kleinstmögliche Differenz 3 angenommen.

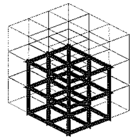
27. Ein rechteckiges Stück Papier wird dreimal nacheinander jeweils auf die Hälfte gefaltet. Alle Faltkanten sind zueinander parallel. Bei jeder Faltung kann nach oben oder unten gefaltet werden. Vollständig entfaltet kann das Papier vier der folgenden Seitenansichten bieten. Welche ist ausgeschlossen?



Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe nimmt man am besten einen Streifen Papier und faltet die vier möglichen Fälle. Für das erste Falten gibt es nur eine Möglichkeit; es wird einfach halb zusammengefaltet. Für die folgenden beiden Faltungen gibt es jeweils die Möglichkeit, nach oben oder nach unten zu falten. Die Variante (**D**) erhält man dabei nicht.
Bei den verschiedenen Faltmöglichkeiten ist zu erkennen, dass der erste, dritte, fünfte und siebte Falz (die beim dritten Faltvorgang entstehen) abwechselnd nach oben und unten zeigen. Der zweite und sechste Falz (die beim zweiten Faltvorgang entstehen) zeigen ebenso in unterschiedliche Richtungen. Der vierte, also der mittlere Falz (der beim ersten Faltvorgang entsteht), kann unabhängig von den anderen sowohl nach oben als auch nach unten zeigen.

28. In einer großen Truhe sammeln wir alles, was sich zum Bauen eignet. Dort sind auch kleine einfarbige Holzwürfelchen in verschiedenen Farben. Ich will aus 27 von diesen Würfeln einen großen Würfel zusammenbauen. Wie viele Farben sind nötig, wenn alle kleinen Würfel, die sich an mindestens einer Ecke berühren, verschiedenfarbig sein sollen?

(**A**) 15 (**B**) 12 (**C**) 9 (**D**) 8 (**E**) 6



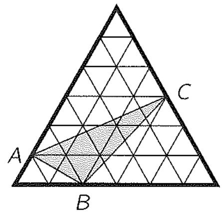
Lösung: Ein Würfel aus 27 kleinen Würfeln hat die Abmessungen $3 \times 3 \times 3$, denn $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. Das Bild zeigt einen solchen Würfel. In ihm sind 8 kleine Würfel markiert, die sich alle an mindestens einer Ecke (genau in der Mitte) berühren. Wir brauchen also *mindestens 8 verschiedene Farben*.
Wir versuchen nun, eine Färbung mit 8 verschiedenen Farben zu finden, die wir der Einfachheit halber mit $1, 2, 3, \ldots, 8$ bezeichnen. Wir färben zuerst die untere Ebene mit den 4 Farben 1 bis 4, so dass Würfel, die sich an mindestens einer Ecke berühren, verschiedenfarbig sind (Bild links). Die mittlere Ebene färben wir nach demselben Muster, aber mit den Farben 5 bis 8 (Bild Mitte). Für die obere Ebene nutzen wir dieselbe Färbung wie in der unteren Ebene (Bild rechts).

1	2	1
3	4	3
1	2	1

5	6	5
7	8	7
5	6	5

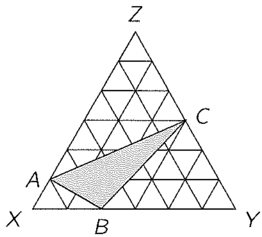
1	2	1
3	4	3
1	2	1

29. Das dick umrandete gleichseitige Dreieck besteht aus 36 gleichseitigen Dreiecken, von denen jedes den Flächeninhalt $1\,\text{cm}^2$ hat. Welchen Flächeninhalt hat $\triangle ABC$?

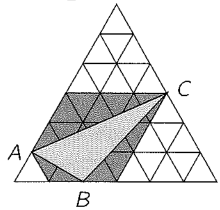


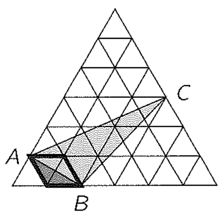
(**A**) $7\,\text{cm}^2$ (**B**) $9\,\text{cm}^2$ (**C**) $10\,\text{cm}^2$ (**D**) $12\,\text{cm}^2$ (**E**) $13\,\text{cm}^2$

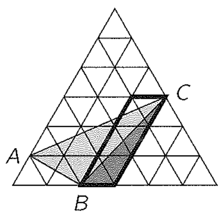
Lösung: Wir bestimmen den Inhalt des grauen Dreiecks, indem wir die Flächeninhalte der 3 weißen Dreiecke XBA, BYC und ACZ ermitteln und vom Flächeninhalt des großen Dreiecks XYZ abziehen. Die Flächeninhalte der weißen Dreiecke können mit Hilfe der Flächeninhaltsformel für Dreiecke berechnet werden, nachdem man sich die Maße der Höhen und Grundseiten überlegt hat. Wir wollen hier zwei andere Lösungswege beschreiben.

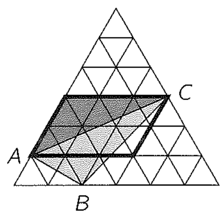


Das Dreieck XYZ besitzt eine Fläche von $36\,\text{cm}^2$, da es aus 36 kleinen Dreiecken der Fläche $1\,\text{cm}^2$ zusammengesetzt ist. Von den weißen Dreiecken nehmen wir von den Ecken X, Y, Z ausgehend so viele Reihen kleiner Dreiecke weg, bis wir an das graue Dreieck stoßen. Das sind insgesamt 19 kleine Dreiecke, wie im nebenstehenden Bild schnell abgezählt werden kann. Nun bleibt, die Flächeninhalte der dunkelgrauen Flächen zu ermitteln. Diese Flächen sind halbe Parallelogramme, die aus 2, 6 bzw. 12 kleinen Dreiecken bestehen, wie in den folgenden Bildern zu sehen ist:



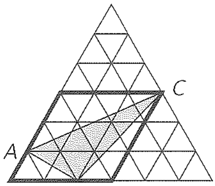






Die Flächeninhalte der dunkelgrauen Dreiecke sind somit zusammen $\frac{1}{2} \cdot (2+6+12)\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$.
Der Flächeninhalt des grauen Dreiecks $\triangle ABC$ ist folglich $(36 - 19 - 10)\,\text{cm}^2 = 7\,\text{cm}^2$.

Eine interessante Lösungsmöglichkeit ist, unter Ausnutzung, dass beim Känguru-Wettbewerb nur einer der Lösungsvorschläge richtig ist, den Flächeninhalt des grauen Dreiecks zu *schätzen*. Im Bild rechts sehen wir leicht, dass das graue Dreieck weniger als die Hälfte des dick umrandeten Parallelogramms ausmacht. Das Parallelogramm besitzt einen Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$, folglich muss der Flächeninhalt des grauen Dreiecks weniger als $9\,\text{cm}^2$ betragen. Damit bleibt nur Lösung (**A**).



30. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und x ist kleiner als das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und y. Welchen der folgenden Werte kann $\frac{x}{y}$ *nicht* annehmen?

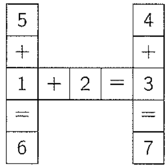
(**A**) $\frac{7}{8}$ (**B**) $\frac{8}{7}$ (**C**) $\frac{2}{3}$ (**D**) $\frac{6}{7}$ (**E**) $\frac{7}{6}$

Lösung: Wir versuchen, für (**A**) bis (**E**) Möglichkeiten für $\frac{x}{y}$ aufzuspüren. Dabei werden wir das „kleinste gemeinsame Vielfache" der Einfachheit halber stets mit „kgV" abkürzen.
Schauen wir uns zuerst die Zähler und Nenner der auftretenden Brüche genauer an: Außer der 7 sind alle vorkommenden Zahlen Teiler der 24. Bei der Berechnung des kgV mit 24 „verschwinden" sie in der 24, das kgV mit 24 ist einfach 24. Das kgV von 7 und 24 ist hingegen recht groß, es ist gleich $24 \cdot 7 = 168$.
Wir sehen nun sofort, dass die Brüche in (**B**) und (**D**) bereits in der angegebenen Form als $\frac{x}{y}$ taugen: die Zähler sind jeweils Teiler von 24, das kgV von Nenner und 24 ist jeweils 168.
Wenn jedoch – wie in (**A**), (**C**) und (**E**) – der Nenner ein Teiler von 24 ist, wird das kgV mit 24 ungewollt klein. Da Zähler und Nenner der gegebenen Brüche teilerfremd sind, kann $\frac{x}{y}$ nur durch Erweitern der betreffenden Brüche entstehen. Damit das kgV der Zähler mit 24 möglichst klein und das der Nenner möglichst groß wird, erweitern wir mit dem Nenner selbst. Dadurch tritt der Nenner wieder als zusätzlicher Faktor in Erscheinung und vergrößert somit das kgV von Nenner und 24. Was dabei mit den Zählern geschieht, müssen wir untersuchen.
Bei (**A**) entsteht beim Erweitern mit 8 der Bruch $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 8} = \frac{56}{64}$. Das kgV von Zähler mit 24 bleibt $24 \cdot 7 = 168$, das kgV von Nenner und 24 ist nun jedoch auf $24 \cdot 8 = 192$ angewachsen. Mit $x = 56$ und $y = 64$ haben wir für $\frac{7}{8}$ also eine gewünschte Darstellung als $\frac{x}{y}$ gefunden.
Bei (**C**) entsteht beim Erweitern mit 3 der Bruch $\frac{6}{9}$. Die Bedingung für $\frac{x}{y}$ ist hier ebenfalls erfüllt. Mit $x = 6$ und $y = 9$ ist $\frac{x}{y}$ eine gewünschte Darstellung von $\frac{2}{3}$.
Für die Antwortmöglichkeit (**E**) erhalten wir durch Erweitern mit dem Nenner $\frac{42}{26}$. Die Bedingung für $\frac{x}{y}$ ist nicht erfüllt. Beim Erweitern mit einer beliebigen weiteren Zahl ändert sich daran nichts, denn Zähler und Nenner werden mit dem gleichen Faktor multipliziert. Also ist (**E**) die Lösung.

Lösungen der Känguru-Knobeleien

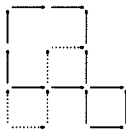
Seite 4, KAENGURU-Lesevielfalt: Es sind insgesamt 35 Lesemöglichkeiten.

Seite 5, KAENGURU-Rechen-H: Die eindeutige Lösung zeigt das Bild rechts.



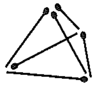
Seite 6, KAENGURU-Wortsuche: Wir geben für jeden Fall 10 Begriffe an:

1. KALT, KAHN, KALB, KALK, KEKS, KERN, KIES, KIND, KOHL, KURS
2. BAND, DARM, GANS, HAND, MARS, NASE, RAUM, WALD, YARD, ZAHL
3. BLEI, DREI, EFEU, ESEL, IGEL, ODER, OFEN, TIER, VIER, ZWEI
4. BAHN, BEIN, HUHN, KERN, KRAN, NEUN, SOHN, URAN, ZEHN, ZINN
5. BERG, DING, FANG, GONG, RANG, RING, SIEG, SONG, STEG, TEIG
6. AMUR, BAUM, ETUI, HAUS, MAUL, MAUS, NEUN, PLUS, SPUR, ZEUG
7. ARZT, BREI, BROM, DREI, ERDE, GRAD, GRAS, IRAK, URAL, URAN
8. UFER, ULME, UNKE, UNZE, URAN, URAT, URAL, URIN, URNE, UTAH

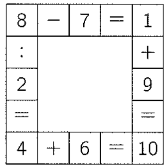


Seite 7, KAENGURU-Streichholzquadrate: Rechts ist die Anordnung der Streichhölzer zu 2 Quadraten zu sehen. Die gestrichelten Steichhölzer wurden umgelegt.

Seite 8, Um die Ecke gedacht: Mit 6 Streichhölzern ein *ebenes* Dreieck zu legen, ist nicht möglich. Für des Rätsels Lösung muss *räumlich* gedacht werden, die Lösung zeigt das dritte Bild. Diesen Körper nennt man übrigens einen *Tetraeder*.



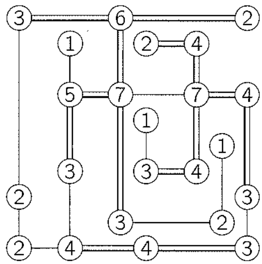
Seite 9, KAENGURU-Rechen-Quadrat: Dieses Rätsel hat mehrere Lösungen. Eine der vielen ist im Bild rechts zu sehen.



Seite 11, Logische Farbkreiseleien:
Die gesuchten Farbanordnungen sind:

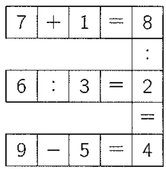
●●●●● gelb – blau – rot – rot – gelb
●●●●●● rot – gelb – weiß – rot – gelb – weiß
●●●●●●● schwarz – violett – grün – rot – grün – violett – schwarz
●●●●●●●● rot – violett – rot – violett – grün – weiß – grün – weiß
●●●●● rot – grün – gelb – grün – rot

Seite 16, KAENGURU-Inseln und KAENGURU-Brücken:
Die Lösung der Brückenbauerei ist im Bild rechts zu sehen.

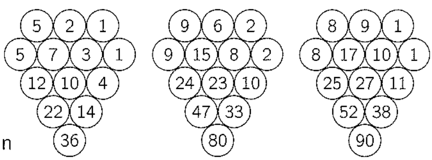


Seite 17, Mathe in Begriffen: In den Wörtern sind die gesuchten mathematischen Begriffe unterstrichen: 1. NACHT, 2. ZECKE, 3. ZWEIG, 4. ARREST, 5. DREIST, 6. EINSAM, 7. FLOTTE, 8. HELFER, 9. SPIELE, 10. ABBRUCH, 11. ANKREIS, 12. GEMENGE, 13. ELFERRAT, 14. LITERATUR, 15. RÜBEZAHL, 16. TAUSENDSASSA, 17. SIEBENGEBIRGE, 18. MALERMEISTER

Seite 21, KAENGURU-Rechen-Kamm: Rechts ist der richtig ausgefüllte Rechenkamm abgebildet.



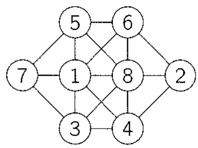
Seite 22, Weintraubenarithmetik: Die drei gesuchten Weintrauben sind rechts abgebildet.



Seite 22, Schwarz-weiße Logik: In den drei Rätseln waren die Zahlen 152, 1069 und 25913 gesucht.

Seite 27, Große Produkte: Diese Aufgabe wirkt schwieriger als sie ist. Unter den Faktoren befindet sich die 10, und wenn mit 10 multipliziert wird, dann endet das Produkt auf 0.

Seite 29, KAENGURU-Zahlenknobelei: Diese Aufgabe hat insgesamt genau 4 verschiedene Lösungen. Eine ist rechts zu sehen, die anderen ergeben sich durch horizontales oder vertikales Spiegeln der abgebildeten Lösung.



Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

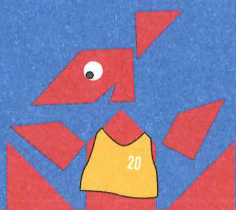
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	C	D	E	A	B	C	E
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	D	B	A	C	D	D	D	A
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	E	C	C	C	B	E	D	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

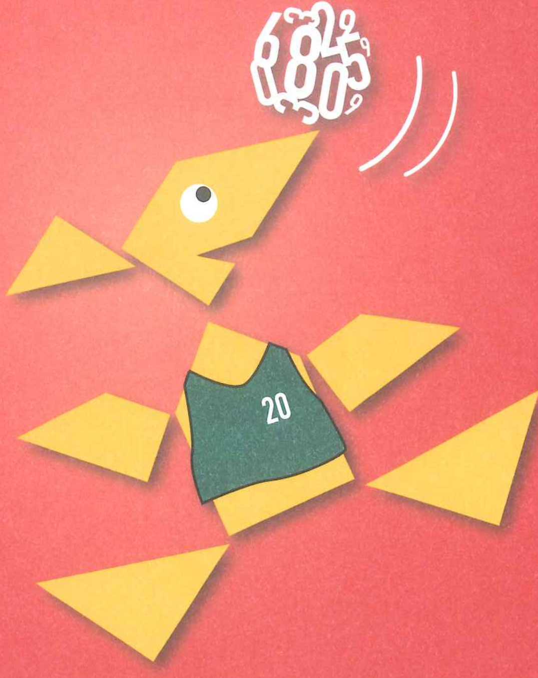
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	B	A	B	E	C	A	C	B
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	D	E	E	D	C	E	B	C
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	A	B	D	E	A	D	C	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	A	C	E	E	C	B	A	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	A	B	E	C	E	A	A	C	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	D	D	B	C	C	D	D	A	E


20

2010 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2010!

Der Anteil der Volksschulen in der Schweiz, die am internationalen Känguru-Wettbewerb teilnahmen, war in diesem Jahr noch etwas grösser als im letzten. Insgesamt waren es knapp 16 000 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die im März, zusammen mit weltweit über 6 Millionen Jugendlichen, die Aufgaben angepackt haben. Gemäss Beschluss am Jahrestreffen der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" vom Oktober 2009 in Minsk wurde in der Kategorie 3./4. Schuljahr der Umfang von 21 auf 24 verändert, um die Auswahl an Aufgaben etwas zu vergrössern, beim 5./6. Schuljahr dagegen von 30 auf 24 reduziert, um den Aufgabenumfang der Altersstufe entsprechend deutlich zu reduzieren.

In der Schweiz wurde das Anmeldeprozedere erstmals über die Internetseite www.mathe-kaenguru.ch online durchgeführt. Die Lokalverantwortlichen der teilnehmenden Schulen konnten sich mit einem Passwort einloggen und ihre Anmeldezahlen und Sonderbestellungen dort direkt erfassen. Dadurch konnte der Aufwand für die organisierende DMK (Deuschschweizerische Mathematikkommission) vermindert und somit auch die Fehlerwahrscheinlichkeit reduziert werden.

Dass die Aufgabenstellungen sich ein wenig von denen aus den Schullehrbüchern unterscheiden, ist für den Känguru-Wettbewerb typisch. Mathematik steckt in mehr Fragestellungen als oft vermutet, mathematische Methoden finden in unterschiedlichsten Bereichen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht und nicht nur in den Naturwissenschaften und der Vorlaufforschung für Hochtechnologien. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, Trendvoraussagen – all dies wird besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt und spielt im täglichen Leben, wohin man schaut, eine Rolle. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre ist zur Unterstützung einer nachträglichen Beschäftigung mit den verschiedenen mathematischen Problemen gedacht. Für eine ganze Reihe von Aufgaben wurde nicht nur eine Lösungsmöglichkeit angegeben, sondern anhand der Darstellung verschiedener Wege gezeigt, dass es hilfreich ist, unterschiedliche Methoden zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen zu beherrschen.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, R. Schelldorfer, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet.
Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk

Internetseite Känguru Schweiz: www.mathe-kaenguru.ch

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

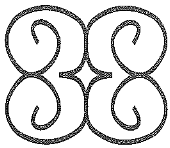
978-3-9812144-2-0

Klassenstufen 7 und 8

1. Wie viel ist $12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89$?

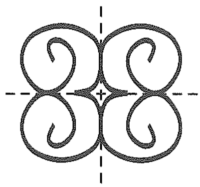
(**A**) 303 (**B**) 389 (**C**) 396 (**D**) 404 (**E**) 438

Lösung: Wer entdeckt, dass sich die Summanden geeignet umordnen lassen, ist schnell fertig: $12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 = (12 + 89) + (23 + 78) + (34 + 67) + (45 + 56) = 101 + 101 + 101 + 101 = 4 \cdot 101 = 404$.
Diese Methode funktioniert, weil aufeinanderfolgende Summanden stets dieselbe Differenz haben. Diese Differenz ist hier 11. So ist z. B. $12 + 89 = (12 + 11) + (89 - 11) = 23 + 78$.
Wenn wir die Addition der Reihe nach ausführen, erhalten wir natürlich dasselbe Ergebnis. Wer nach der Addition der Einer bemerkt, dass die Summe auf 4 endet, stellt nach einem Blick auf die Lösungsmöglichkeiten und ohne weiter zu rechnen fest, dass nur 404 die Lösung sein kann.



2. Bäckermeister Otto Spiegel ist Erfinder der berühmten Doppelschweinsohren. Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein solches Doppelschweinsohr?

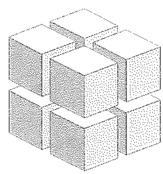
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) unendlich viele



Lösung: Das Bild zeigt die beiden Symmetrieachsen des Doppelschweinsohrs. An ihnen kann man das Gebäck spiegeln, ohne dass sich am Aussehen etwas ändert.

3. Spielzeugkängurus werden für den Versand erst einzeln in kleine würfelförmige Schachteln und diese dann in größere, ebenfalls würfelförmige Schachteln verpackt. Auf den Boden einer großen Schachtel passen genau vier kleine. Wie viele verpackte Kängurus passen insgesamt in eine große Schachtel?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

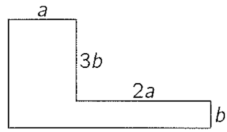


Lösung: Der Boden der großen Schachtel ist quadratisch. Also müssen die 4 kleinen Schachteln im Quadrat angeordnet werden: 2 mal 2 Stück. Die Seitenlänge des Bodenquadrats ist aber auch gleich der Höhe der großen Schachtel. Daher muss es 2 Schichten kleiner Schachteln geben. Insgesamt passen somit $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verpackte Kängurus in eine große Schachtel. – Für die Klassenstufen 11 bis 13 erschien in Aufgabe 5 ein ähnliches Problem.

4. Jörg ist stolzer Besitzer von 20 prächtigen Rassekaninchen. Heute sollte jedes Kaninchen eine Möhre bekommen. Leider waren die Möhren auf dem Markt fast ausverkauft. Jörg bekam nur 8 Stück, allerdings recht große. Er bricht einige Möhren einzeln in Stücke, um für jedes Kaninchen genau ein Stück zu haben. Wie oft muss er die Möhren insgesamt brechen?

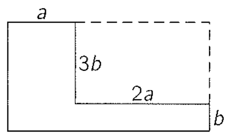
(**A**) 8-mal (**B**) 9-mal (**C**) 12-mal (**D**) 14-mal (**E**) 20-mal

Lösung: Wenn Jörg von den 8 Möhren eine Möhre in zwei Teile bricht, hat er 7 ganze Möhren und zwei Teile, also insgesamt 9 Stücke. Das ist genau ein Stück Möhre mehr als vor dem Zerteilen. Bricht er ein weiteres Mal, so erhält er wieder ein Stück mehr, usw. Da 20 Stücke gerade 12 Stücke mehr als zu Beginn sind, muss er genau 12-mal zerteilen. – Wir erkennen, dass es völlig gleich ist, *auf welche Weise* Jörg die Möhren bricht. Ob er nun eine einzige genau 12-mal bricht, oder mehrere insgesamt 12-mal, in jedem Fall erhält er 20 Möhrenstücke.



5. Der Umfang der rechts abgebildeten Figur ist gleich

(**A**) $3a+4b$ (**B**) $3a+8b$ (**C**) $6a+4b$ (**D**) $6a+6b$ (**E**) $6a+8b$



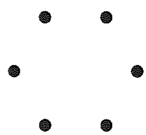
Lösung: Die linke senkrechte Kante der Figur ist genauso lang wie die beiden anderen senkrechten Kanten zusammen. Ebenso ist die waagerechte Kante unten genauso so lang wie die beiden anderen waagerechten Kanten zusammen (siehe Bild). Der Umfang der Figur ist gleich der Summe aller Kanten, also gleich $2\cdot(3b+b)+2\cdot(a+2a)=6a+8b$. Dieser Umfang ist ebenso groß wie der des großen vervollständigten Rechtecks.

6. Für das Aneinanderschweißen dreier Rohrabschnitte zu einem langen Rohr werden 18 Minuten benötigt. Wie viel Zeit muss dann – gleiche Arbeitsgeschwindigkeit vorausgesetzt – für das Aneinanderschweißen von sechs Rohrabschnitten zu einem Rohr geplant werden?

(**A**) 27 Minuten (**B**) 30 Minuten (**C**) 36 Minuten (**D**) 42 Minuten (**E**) 45 Minuten

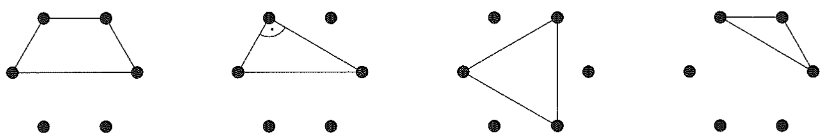
Lösung: Um drei Rohrabschnitte zu einem Rohr zusammenzuschweißen, müssen zwei Schweißnähte gemacht werden. Für diese braucht man 18 Minuten, also $18 : 2 = 9$ Minuten für eine Schweißnaht. Um sechs Rohrabschnitte zu einem Rohr zusammenzuschweißen, sind fünf Schweißnähte nötig. Für diese benötigt man $5 \cdot 9$ Minuten $= 45$ Minuten.

7. Elly zeichnet die 6 Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks und verbindet einige davon zu einer geometrischen Figur. Diese Figur ist *gewiss kein*

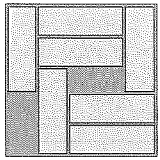


(**A**) Trapez (**B**) rechtwinkliges Dreieck (**C**) Quadrat
(**D**) spitzwinkliges Dreieck (**E**) stumpfwinkliges Dreieck

Lösung: Die Bilder zeigen der Reihe nach ein Trapez, ein rechtwinkliges Dreieck, ein spitzwinkliges Dreieck und ein stumpfwinkliges Dreieck:



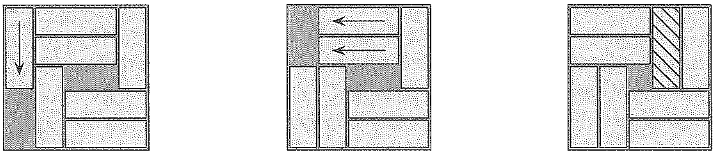
Angenommen es gäbe ein Quadrat. Dazu müssen von den 6 Eckpunkten des Sechsecks genau 2 weggelassen werden. Folglich würden unter den 4 Eckpunkten des Quadrats zwei benachbarte Sechseckseckpunkte sein. Zwei benachbarte Sechseckseckpunkte bilden jedoch mit keinen der übrigen Eckpunkte des Sechsecks ein Quadrat. Ein Quadrat lässt sich also nicht finden.



8. In einer 5 cm × 5 cm großen Box befinden sich sieben längliche, 3 cm × 1 cm große Stäbe. Wie viele Stäbe muss man mindestens verschieben, um noch für einen achten, ebenso großen Stab Platz zu schaffen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) das geht nicht

Lösung: In der gegebenen Situation passt kein weiterer Stab, die beiden Lücken haben jede nur das Maß 2 cm × 1 cm. Nun lässt sich zunächst nur der linke Stab verschieben (linkes Bild). Im nächsten Schritt verschieben wir die beiden oberen Stäbe nach links. Dadurch entsteht eine hinreichend große Lücke, und ein weiterer Stab (im Bild schraffiert) passt in das entstandene Loch. Es müssen also mindestens drei Stäbe verschoben werden.



9. Es gibt $60 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 7$

(**A**) Sekunden in einer Woche. (**B**) Minuten in 7 Wochen. (**C**) Sekunden in einer Stunde.
(**D**) Stunden in 60 Tagen. (**E**) Sekunden in 7 Stunden.

Lösung: Es gibt 60 Sekunden in einer Minute, 60 Minuten in einer Stunde, 24 Stunden pro Tag und 7 Tage in einer Woche. Das Produkt dieser vier Zahlen $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 7$ ist gleich dem in der Aufgabe gegebenen Produkt, nur die mittleren Faktoren sind vertauscht. Antwort (**A**) ist richtig.

10. Ziehe ich die Summe der ersten 100 ungeraden positiven ganzen Zahlen $1 + 3 + \ldots + 199$ von der Summe der ersten 100 geraden positiven ganzen Zahlen $2 + 4 + \ldots + 200$ ab, erhalte ich als Ergebnis

(**A**) 0 (**B**) 20 (**C**) 50 (**D**) 100 (**E**) 200

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe genügt geschicktes Rechnen. Statt erst die Summe der ersten 100 geraden Zahlen zu bilden und anschließend die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen abzuziehen, können wir auch von der ersten geraden Zahl 2 die erste ungerade Zahl 1 abziehen, dann von der 4 die 3, dann von der 6 die 5, usw., und anschließend alles zusammenaddieren:

$$(2 + 4 + \ldots + 200) - (1 + 3 + \ldots + 199) = (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \ldots + (200 - 199)$$

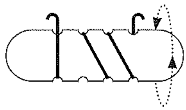
Die einzelnen Differenzen sind alle gleich 1. Da es 100 Summanden sind, ist das gesuchte Ergebnis $100 \cdot 1 = 100$.

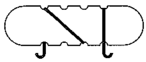
11. Die Großmutter hat ein großes Blech Streuselkuchen für ihre Enkel gebacken. Als sie den Kuchen aufschneiden will, fällt ihr auf, dass sie gar nicht weiß, ob 3, 5 oder alle 6 Enkel kommen. Sie überlegt, wie sie den Kuchen teilen muss, damit sie jedem Kind gleich viele Stücke geben kann – egal ob 3, 5 oder 6 Kinder kommen. Sie möchte, wenn die Kinder da sind, nicht noch einmal zum Messer greifen. Welches ist die kleinste Anzahl von Stücken, in die sie teilen muss?

(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 24 (**E**) 30

Lösung: Da die Großmutter nicht noch einmal schneiden will, wenn die Enkel da sind, müssen die Kuchenstücke gleichmäßig auf 3, 5 und 6 Enkel aufgeteilt werden können. Das heißt, die Anzahl der Kuchenstücke muss durch 3, 5 und 6 teilbar sein. Von den fünf Lösungsvarianten ist nur 30 durch 3, 5 und 6 teilbar. Es ist die *kleinste* mögliche Anzahl von Kuchenstücken, da 30 gerade das *kleinste gemeinsame Vielfache* der Zahlen 3, 5 und 6 ist.

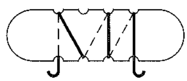
12. Ich wickle einen Faden auf eine Spule. Dann drehe ich die Spule, wie die Pfeile anzeigen, auf die Rückseite. Wie kann diese Rückseite aussehen?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wenn ich die Spule in Pfeilrichtung drehe, zeigen die beiden Enden nach unten. Also entfallen die Möglichkeiten (**C**) und (**E**). In unserer Spule werden auf der Vorderseite alle vier oberen Kerben vom Faden passiert. Also müssen nach dem Umdrehen *alle vier unteren* Kerben vom Faden passiert werden. Das ist nur bei Antwort (**A**) der Fall. Der Fadenverlauf vorn und hinten ist in den beiden Bildern rechts dargestellt.

Vorderseite



Rückseite

13. Meine Mutter schwört auf selbst gemixte Kräutertees. Ihre neueste Erfindung enthält Augentrost, Fenchel und Kamille im Verhältnis 2 : 3 : 5. Heute will sie gleich eine größere Menge mixen. Vom Fenchel hat sie eine 125-g-Tüte, Kamille hat sie selbst genügend gepflückt und getrocknet. Ich soll Augentrost einkaufen. Wieviel wird für die Mischung benötigt, wenn die 125 g Fenchel verbraucht werden sollen?

(**A**) etwa 75 g (**B**) etwa 85 g (**C**) etwa 95 g (**D**) etwa 105 g (**E**) etwa 115 g

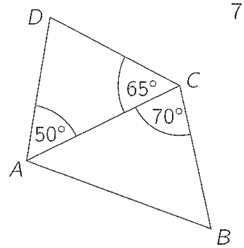
Lösung: Die Kamille brauchen wir nach Aufgabenstellung nicht zu beachten, wichtig sind nur Fenchel und Augentrost. Dabei kommen laut Rezept auf 2 Teile Augentrost genau 3 Teile Fenchel. Also ist das gesuchte Gewicht an Augentrost $(125\,\text{g} : 3) \cdot 2 = (125\,\text{g} \cdot 2) : 3 = 250\,\text{g} : 3 = 83,\ldots\,\text{g}$. Die schriftliche Division können wir an dieser Stelle abbrechen, da ja nur ein gerundeter Wert gesucht ist. Es werden also rund 85 g.

14. Björn rechnet die Summe der ersten drei von sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen aus. Sie ist 33. „Dann kann ich die Summe der *letzten drei* dieser sieben Zahlen sagen", teilt Janina mit. Diese Summe ist

(**A**) 39 (**B**) 37 (**C**) 42 (**D**) 48 (**E**) 45

Lösung: Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich dem 3-fachen der mittleren dieser 3 Zahlen. Also ist die mittlere Zahl gleich $33 : 3 = 11$. Die ersten drei der sieben Zahlen sind also 10, 11 und 12. Es folgen 13, 14, 15 und 16, und die gesuchte Summe der letzten drei dieser Zahlen ist $14 + 15 + 16 = 3 \cdot 15 = 45$.

Es gibt auch eine Lösung, bei der Janina die 7 Zahlen nicht genau ausrechnet: Die fünfte der 7 aufeinanderfolgenden Zahlen ist um 4 größer als die erste, die sechste ist um 4 größer als die zweite, und die siebte ist um 4 größer als die dritte. Folglich ist die Summe der letzten drei dieser 7 Zahlen um $3 \cdot 4 = 12$ größer als die Summe der ersten drei, also gleich $33 + 12 = 45$.



15. Im Viereck $ABCD$ sind AD und BC gleich lang. Einige Winkel sind eingezeichnet (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Wie groß ist der Innenwinkel bei B?

(A) 50° **(B)** 52° **(C)** 55° **(D)** 60° **(E)** 72°

Lösung: Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist, beträgt der Innenwinkel bei D gerade $180° - 65° - 50° = 65°$. Das Dreieck ADC ist folglich gleichschenklig mit Basis CD, also $\overline{AD} = \overline{AC}$, woraus nach Aufgabenstellung $\overline{AC} = \overline{BC}$ folgt. Damit ist auch das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis AB. Die Winkel bei A und B sind daher gleich groß, und der gesuchte Winkel bei B ist gleich $(180° - 70°) : 2 = 55°$.

16. Es ist $a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4 = e - 5$. Welche der Zahlen a, b, c, d, e ist die größte?

(A) a **(B)** b **(C)** c **(D)** d **(E)** e

Lösung: Die größte der fünf Zahlen ist dadurch gekennzeichnet, dass man von ihr das meiste abziehen muss, um auf die immer gleiche Zahl in der Gleichheit zu kommen. Folglich muss e die größte der fünf Zahlen sein.

KAENGURU-Chemie

Tragt die Symbole der folgenden 8 chemischen Elemente senkrecht in das Gitter ein, so dass in der unteren Zeile das KAENGURU *erscheint:*

Berkelium, Erbium, Kurtschatovium, Lutetium, Mangan, Silber, Tantal, Xenon

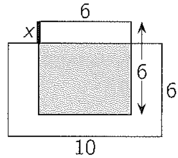
17. Bei der Tombola im Gartenverein sind drei Sorten Lose in der Trommel: weiße Lose für interessante Gartenbücher, hellblaue Lose für Blumensamen und gelbe Lose für selbstgemachte Konfitüren. Nieten gibt es keine. 50 Lose sind in der Trommel, darunter 11-mal so viele weiße wie hellblaue. Es sind weniger gelbe als weiße, aber mehr gelbe als hellblaue. Wie viele gelbe Lose sind in der Trommel?

(A) 14 **(B)** 16 **(C)** 20 **(D)** 23 **(E)** 26

Lösung: Da von 50 Losen 11-mal so viele weiße wie hellblaue Lose in der Trommel sind, gibt es nur vier Varianten: 1 hellblaues und 11 weiße Lose, 2 hellblaue und 22 weiße Lose, 3 hellblaue und 33 weiße Lose, 4 hellblaue und 44 weiße Lose. Die übrigen der 50 Lose sind gelb. Wir stellen eine Tabelle für diese 4 Fälle auf:

hellblau	weiß	gelb
1	11	38
2	22	26
3	33	14
4	44	2

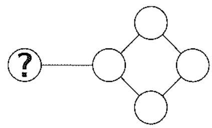
Da weniger gelbe als weiße, aber mehr gelbe als hellblaue Lose in der Trommel sind, kommt nur die dritte Variante in Frage. Also sind es 14 gelbe Lose.



18. Gegeben sind ein Quadrat mit Seitenlänge 6 und ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 und 10. Die graue Fläche ist halb so groß wie die Rechtecksfläche. Wie lang ist x? (*Abb.* *<u>nicht</u> maßstabsgerecht*)

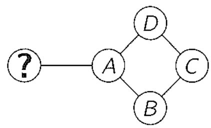
(**A**) 1 (**B**) 1,25 (**C**) 1,5 (**D**) 2 (**E**) 2,5

Lösung: Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $6 \cdot 10 = 60$ und der des Quadrats $6 \cdot 6 = 36$. Die graue Fläche ist halb so groß wie die Rechtecksfläche, also $60 : 2 = 30$. Damit hat der rechteckige weiße Teil des Quadrats einen Flächeninhalt von $36 - 30 = 6$. Dieser Flächeninhalt ist gleich dem Produkt der Seitenlängen 6 und x. Folglich ist x gleich 1.



19. In die 5 Kreise sind die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 so einzutragen, dass keine aufeinanderfolgenden Zahlen miteinander verbunden sind. Welche Zahl gehört an die Stelle des Fragezeichens?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

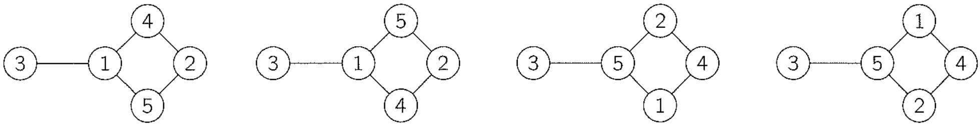


Lösung: Wir benennen die Zahlen in den Kreisen mit A bis D (siehe Bild rechts). Die Zahl A ist mit drei weiteren Kreisen verbunden. In diesen drei Kreisen kann weder Vorgänger noch Nachfolger von A stehen – dafür bleibt nur der Kreis mit der Zahl C. Folglich kann A unter den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ nur *entweder* einen Vorgänger *oder* einen Nachfolger besitzen. Also ist A gleich 1 oder 5.

1. Fall: A ist gleich 1: In diesem Fall ist C gleich 2. Die 3 als Nachfolger der Zahl 2 kann weder B noch D sein, muss also an die Stelle des Fragezeichens.

2. Fall: A ist gleich 5: In diesem Fall ist C gleich 4. Auch hier kann die 3 als Vorgänger der Zahl 4 weder B noch D sein, muss also an die Stelle des Fragezeichens.

An die Stelle des Fragezeichens gehört in jedem Fall die 3. In den beiden beschriebenen Fällen findet man schnell insgesamt 4 Möglichkeiten, die fünf Zahlen aufzuteilen:



20. Wie viele natürliche Zahlen haben die Ziffernsumme 11 und als Produkt der Ziffern 2 ?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 13 (**D**) 22 (**E**) 25

Lösung: Wenn das Produkt der Ziffern einer Zahl gleich 2 ist, muss – weil 2 eine Primzahl ist – eine Ziffer gleich 2 sein, und alle anderen müssen gleich 1 sein. Die Ziffernsumme 11 kann nur entstehen, wenn neben der 2 noch neun Einsen als Ziffern vorkommen. Die gesuchten Zahlen sind also 10-stellig, eine Ziffer ist 2 und die anderen neun Ziffern sind gleich 1. Da die Ziffer 2 an jeder der 10 Stellen stehen kann, gibt es genau 10 Zahlen mit der angegebenen Eigenschaft: 2111111111, 1211111111, 1121111111, 1112111111, 1111211111, 1111121111, 1111112111, 1111111211, 1111111121, 1111111112. – Diese Aufgabe stimmt inhaltlich mit Aufgabe 13 in Klassenstufe 9/10 überein.

21. Moritz führt über alles Statistik. Als zu Beginn des Schuljahres ein neues Mädchen in die Klasse kam, stellte Moritz sofort fest, dass der Mädchenanteil in der Klasse von 50 % auf 52 % gestiegen ist. Wie viele Jungen sind in der Klasse?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 14 (**E**) 15

Lösung: Es gibt in diesem Schuljahr 52 % Mädchen und 48 % Jungen in der Klasse. Da es vor diesem Schuljahr genau gleich viele Mädchen wie Jungen waren, entspricht das neue Mädchen, also ein Kind, gerade 52 % − 48 % = 4 %. Folglich sind 48 % : 4 % = 12 Jungen in der Klasse.

22. Bei der Stadtmeisterschaft im Eiskunstlauf erwartet Robin nach seiner Kür gespannt die Bewertung der 12 Preisrichter. Er bekommt ausnahmslos die Noten 4 und 5. Da ruft Aljona aus dem Publikum: „Hey, die Summe aller Noten ist ja durch 11 teilbar!“ Wie oft erhielt Robin die Note 5?

(**A**) 4-mal (**B**) 5-mal (**C**) 6-mal (**D**) 7-mal (**E**) 9-mal

Lösung: Hätte Robin ausschließlich Note 4 erhalten, wäre die Summe aller Noten $12 \cdot 4 = 48$. Das ist die kleinste mögliche Summe. Hätte er genau einmal Note 5 erhalten, wäre die Summe gleich 49, bei zwei Fünfen wäre sie gleich 50, usw. Hätte er ausschließlich Note 5 erhalten, wäre die Summe aller Noten gleich $12 \cdot 5 = 60$. Dies ist die größte mögliche Summe. Jede Zahl zwischen 48 und 60 kann als Summe aller Noten vorkommen. Da die Zahl 55 die einzige Zahl zwischen 48 und 60 ist, die durch 11 teilbar ist, muss das die Summe von Robins Noten sein. Robin hat somit $55 - 48 = 7$-mal die Note 5 erhalten.

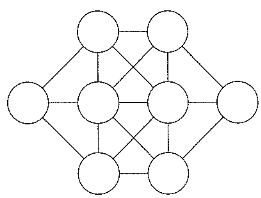
23. Das Schloss im Zauberwald wird von sieben sprechenden Bäumen bewacht. Von einer Fee erfuhr der Prinz: „Einige der Bäume lügen immer, die anderen lügen nie. Wer die Prinzessin befreien will, muss herausfinden, wie viele Lügenbäume es sind.“ „Oh, wie leicht“, frohlockte der Prinz und fragte die Bäume direkt: „Wie viele von euch lügen?“ Der erste Baum sprach „Einer“, der zweite „Zwei“, der dritte „Drei“, der vierte „Vier“, der fünfte „Fünf“, der sechste „Sechs“ und der siebte „Sieben“. Der Prinz war kurz verwirrt, fand jedoch die richtige Antwort. Wie viele Lügenbäume waren es?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 6 (**E**) 7

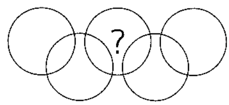
Lösung: Da nur *eine* Zahl zwischen 0 und 7 die Anzahl der Lügenbäume angeben kann, müssen mindestens 6 der Bäume lügen, da jeder Baum eine andere Zahl sagt. Würden alle 7 Bäume lügen, hätte der siebte Baum die Wahrheit gesagt. Also kann es nur 6 Lügenbäume geben, Lösung (**D**). Der sechste Baum hat als einziger nicht gelogen.

KAENGURU-Zahlenknobelei

Die Zahlen von 1 bis 8 sind so in die Kreise einzutragen, dass keine aufeinanderfolgenden Zahlen miteinander verbunden sind.

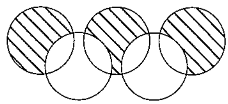


24. Die 5 Kreise begrenzen 9 Gebiete. In jedes dieser Gebiete soll eine der Zahlen von 1 bis 9 geschrieben werden, wobei jede Zahl nur genau einmal verwendet werden darf. In jedem Kreis soll die Summe der Zahlen 11 betragen. Welche Zahl muss in das Gebiet mit dem Fragezeichen geschrieben werden?



(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 ist gleich 45. Diese Summe finden wir, wenn wir die Zahlen in den schraffierten Gebieten und die Zahlen in den unteren Kreisen zusammenrechnen. Da in jedem Kreis die Summe 11 steht, ist die Summe der Zahlen in den schraffierten Gebieten $45 - 2 \cdot 11 = 23$. Die einzige Möglichkeit, die Zahl 23 als Summe von 3 Zahlen zwischen 1 und 9 darzustellen, ist $23 = 9 + 8 + 6$. Daher müssen 9, 8 und 6 in den schraffierten Gebieten stehen.

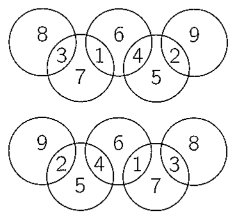


1. Fall: Im Gebiet mit dem Fragezeichen steht die 9. Dann müsste in den beiden übrigen Gebieten in diesem Kreis jeweils eine 1 stehen. Das ist aber nicht möglich.

2. Fall: Im Gebiet mit dem Fragezeichen steht die 8. Dann sind 1 und 2 im selben Kreis. Die 9 müsste in einem der äußeren Kreise sein – zusammen mit der 2, die aber im mittleren Kreis steht.

3. Fall: Im Gebiet mit dem Fragezeichen steht die 6. Das ist die letzte verbleibende Möglichkeit, Lösung (**B**) ist richtig.

Füllen wir systematisch die Gebiete: Im Kreis mit der 6 fehlen noch 5, also 2 und 3 oder 1 und 4. Da die 2 in einem der äußeren Kreise bei der 9 stehen muss, bleiben nur 1 und 4 für den mittleren Kreis. In den äußeren Kreisen stehen 9 und 2 bzw. 8 und 3. Die Zahlen 5 und 7 lassen sich eindeutig in die unteren Kreise schreiben. Wir erhalten die beiden rechts abgebildeten (zueinander gespiegelte) Lösungen.



25. Donnerstags ist hinter dem Rathaus Tauschmarkt, bei dem vor allem Frisches über die Tische geht. Die heutigen Tauschregeln für Geflügel sind der Tafel rechts zu entnehmen. Wie viele Hennen muss Frau Gacker mitbringen, wenn sie im Tausch eine Gans, einen Truthahn und einen Hahn dafür bekommen will?

Fairer Tausch!!!		
1 Truthahn	$\Longleftrightarrow$	5 Hähne
1 Gans + 2 Hennen	$\Longleftrightarrow$	3 Hähne
4 Hennen	$\Longleftrightarrow$	1 Gans

(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 16 (**D**) 15 (**E**) 12

Lösung: Um einen Truthahn zu ertauschen, benötigt Frau Gacker 5 Hähne. Da sie einen Hahn mit nach Hause nehmen will, muss sie jedoch 6 Hähne ertauschen. Für 6 Hähne muss sie 2 Gänse und 4 Hennen liefern. Nach der dritten Tauschregel ertauscht sie gleich 3 Gänse, denn eine möchte sie mit nach Hause nehmen. Für 3 Gänse benötigt sie 12 Hennen. Zusammen mit den 4 Hennen aus dem Tausch für den Hahn, den sie mit nach Hause nehmen will, macht das 16 Hennen. Der Tausch sieht insgesamt wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\text{16 Hennen} &\Longleftrightarrow \text{12 Hennen} + \text{4 Hennen} \Longleftrightarrow \text{3 Gänse} + \text{4 Hennen} \\
&\Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{2 Gänse} + \text{4 Hennen} \Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{6 Hähne} \\
&\Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{1 Hahn} + \text{5 Hähne} \Longleftrightarrow \text{1 Gans} + \text{1 Hahn} + \text{1 Truthahn}
\end{aligned}$$

Diese Aufgabe ist inhaltlich identisch zur Aufgabe 11 in Klassenstufe 11 bis 13.

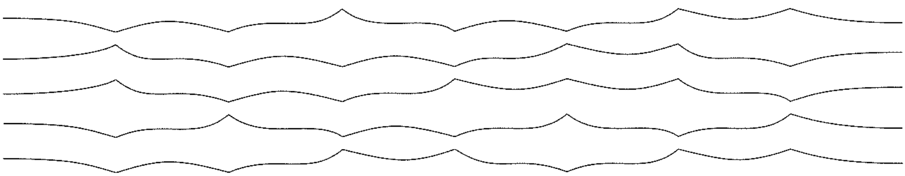
26. Die sechs Ziffern zweier dreistelliger Zahlen sind allesamt voneinander verschieden. Was ist der kleinstmögliche Wert für die Differenz der beiden Zahlen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Seien abc und def zwei dreistellige Zahlen, deren Ziffern a, b, c, d, e, f allesamt verschieden sind. Wir wählen $def > abc$. Damit die Differenz $def - abc$ möglichst klein wird, versuchen wir möglichst nah an einem Hundertersprung zu liegen. Das heißt, dass $d = a + 1$ ist und dass die kleinere Zahl abc knapp unter $d00$, die größere Zahl def knapp über $d00$ liegen muss. Ein voller Hunderter ist nicht möglich, da Einer- und Zehnerstelle beide gleich 0 wären. Die Zahl def soll nun knapp über einem vollen Hunderter liegen, abc knapp darunter. Für ef ist 01 regelgerecht. Für bc ist 99 nicht möglich, aber 98. Der gesuchte Wert ist also mindestens 3. Wir suchen für a und d zwei aufeinanderfolgende Ziffern, die ungleich 0, 1, 8 und 9 sind. Es gibt genau fünf Möglichkeiten: 2 und 3, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6, 6 und 7. Bei den zugehörigen Zahlenpaaren (298,301), (398,401), (498,501), (598,601) und (698,701) wird die kleinstmögliche Differenz 3 angenommen.

27. Ein rechteckiges Stück Papier wird dreimal nacheinander jeweils auf die Hälfte gefaltet. Alle Faltkanten sind zueinander parallel. Bei jeder Faltung kann nach oben oder unten gefaltet werden. Vollständig entfaltet kann das Papier vier der folgenden Seitenansichten bieten. Welche ist ausgeschlossen?

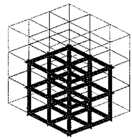
(**A**)
(**B**)
(**C**)
(**D**)
(**E**)



Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe nimmt man am besten einen Streifen Papier und faltet die vier möglichen Fälle. Für das erste Falten gibt es nur eine Möglichkeit; es wird einfach halb zusammengefaltet. Für die folgenden beiden Faltungen gibt es jeweils die Möglichkeit, nach oben oder nach unten zu falten. Die Variante (**D**) erhält man dabei nicht.
Bei den verschiedenen Faltmöglichkeiten ist zu erkennen, dass der erste, dritte, fünfte und siebte Falz (die beim dritten Faltvorgang entstehen) abwechselnd nach oben und unten zeigen. Der zweite und sechste Falz (die beim zweiten Faltvorgang entstehen) zeigen ebenso in unterschiedliche Richtungen. Der vierte, also der mittlere Falz (der beim ersten Faltvorgang entsteht), kann unabhängig von den anderen sowohl nach oben als auch nach unten zeigen. – Dieses Problem wurde auch in Klassenstufe 9/10 als Aufgabe 21 gestellt.

28. In einer großen Truhe sammeln wir alles, was sich zum Bauen eignet. Dort sind auch kleine einfarbige Holzwürfelchen in verschiedenen Farben. Ich will aus 27 von diesen Würfeln einen großen Würfel zusammenbauen. Wie viele Farben sind nötig, wenn alle kleinen Würfel, die sich an mindestens einer Ecke berühren, verschiedenfarbig sein sollen?

(**A**) 15 (**B**) 12 (**C**) 9 (**D**) 8 (**E**) 6



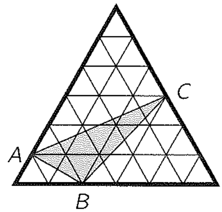
Lösung: Ein Würfel aus 27 kleinen Würfeln hat die Abmessungen $3 \times 3 \times 3$, denn $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. Das Bild zeigt einen solchen Würfel. In ihm sind 8 kleine Würfel markiert, die sich alle an mindestens einer Ecke (genau in der Mitte) berühren. Wir brauchen also *mindestens 8 verschiedene Farben*.
Wir versuchen nun, eine Färbung mit 8 verschiedenen Farben zu finden, die wir der Einfachheit halber mit $1, 2, 3, \ldots, 8$ bezeichnen. Wir färben zuerst die untere Ebene mit den 4 Farben 1 bis 4, so dass Würfel, die sich an mindestens einer Ecke berühren, verschiedenfarbig sind (Bild links). Die mittlere Ebene färben wir nach demselben Muster, aber mit den Farben 5 bis 8 (Bild Mitte). Für die obere Ebene nutzen wir dieselbe Färbung wie in der unteren Ebene (Bild rechts).

1	2	1
3	4	3
1	2	1

5	6	5
7	8	7
5	6	5

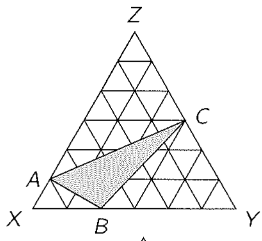
1	2	1
3	4	3
1	2	1

29. Das dick umrandete gleichseitige Dreieck besteht aus 36 gleichseitigen Dreiecken, von denen jedes den Flächeninhalt $1\,\text{cm}^2$ hat. Welchen Flächeninhalt hat $\triangle ABC$?

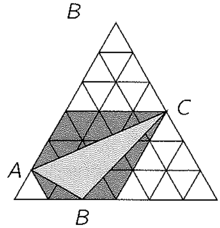


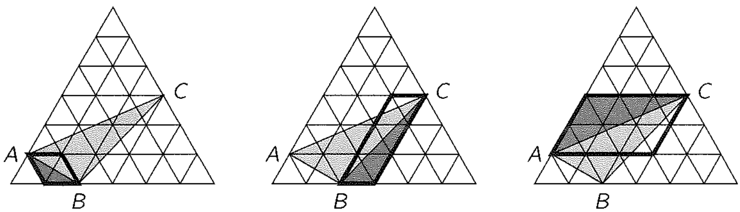
(**A**) $7\,\text{cm}^2$ (**B**) $9\,\text{cm}^2$ (**C**) $10\,\text{cm}^2$ (**D**) $12\,\text{cm}^2$ (**E**) $13\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir bestimmen den Inhalt des grauen Dreiecks, indem wir die Flächeninhalte der 3 weißen Dreiecke XBA, BYC und ACZ ermitteln und vom Flächeninhalt des großen Dreiecks XYZ abziehen. Die Flächeninhalte der weißen Dreiecke können mit Hilfe der Flächeninhaltsformel für Dreiecke berechnet werden, nachdem man sich die Maße der Höhen und Grundseiten überlegt hat. Dieser Weg wird in der ähnlichen Aufgabe 20 in Klassenstufe 9/10 erklärt. Wir wollen hier zwei andere Lösungswege beschreiben.



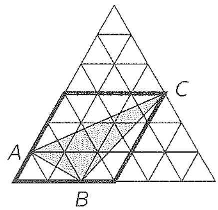
Das Dreieck XYZ besitzt eine Fläche von $36\,\text{cm}^2$, da es aus 36 kleinen Dreiecken der Fläche $1\,\text{cm}^2$ zusammengesetzt ist. Von den weißen Dreiecken nehmen wir von den Ecken X, Y, Z ausgehend so viele Reihen kleiner Dreiecke weg, bis wir an das graue Dreieck stoßen. Das sind insgesamt 19 kleine Dreiecke, wie im nebenstehenden Bild schnell abgezählt werden kann. Nun bleibt, die Flächeninhalte der dunkelgrauen Flächen zu ermitteln. Diese Flächen sind halbe Parallelogramme, die aus 2, 6 bzw. 12 kleinen Dreiecken bestehen, wie in den folgenden Bildern zu sehen ist:





Die Flächeninhalte der dunkelgrauen Dreiecke sind somit zusammen $\frac{1}{2} \cdot (2+6+12)\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$.
Der Flächeninhalt des grauen Dreiecks $\triangle ABC$ ist folglich $(36 - 19 - 10)\,\text{cm}^2 = 7\,\text{cm}^2$.

Eine interessante Lösungsmöglichkeit ist, unter Ausnutzung, dass beim Känguru-Wettbewerb nur einer der Lösungsvorschläge richtig ist, den Flächeninhalt des grauen Dreiecks zu *schätzen*. Im Bild rechts sehen wir leicht, dass das graue Dreieck weniger als die Hälfte des dick umrandeten Parallelogramms ausmacht. Das Parallelogramm besitzt einen Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$, folglich muss der Flächeninhalt des grauen Dreiecks weniger als $9\,\text{cm}^2$ betragen. Damit bleibt nur Lösung (**A**).



30. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und x ist kleiner als das kleinste gemeinsame Vielfache von 24 und y. Welchen der folgenden Werte kann $\frac{x}{y}$ *nicht* annehmen?

(**A**) $\frac{7}{8}$ (**B**) $\frac{8}{7}$ (**C**) $\frac{2}{3}$ (**D**) $\frac{6}{7}$ (**E**) $\frac{7}{6}$

Lösung: Wir versuchen, für (**A**) bis (**E**) Möglichkeiten für $\frac{x}{y}$ aufzuspüren. Dabei werden wir das „kleinste gemeinsame Vielfache" der Einfachheit halber stets mit „kgV" abkürzen.
Schauen wir uns zuerst die Zähler und Nenner der auftretenden Brüche genauer an: Außer der 7 sind alle vorkommenden Zahlen Teiler der 24. Bei der Berechnung des kgV mit 24 „verschwinden" sie in der 24, das kgV mit 24 ist einfach 24. Das kgV von 7 und 24 ist hingegen recht groß, es ist gleich $24 \cdot 7 = 168$.
Wir sehen nun sofort, dass die Brüche in (**B**) und (**D**) bereits in der angegebenen Form als $\frac{x}{y}$ taugen: die Zähler sind jeweils Teiler von 24, das kgV von Nenner und 24 ist jeweils 168.
Wenn jedoch – wie in (**A**), (**C**) und (**E**) – der Nenner ein Teiler von 24 ist, wird das kgV mit 24 ungewollt klein. Da Zähler und Nenner der gegebenen Brüche teilerfremd sind, kann $\frac{x}{y}$ nur durch Erweitern der betreffenden Brüche entstehen. Damit das kgV der Zähler mit 24 möglichst klein und das der Nenner möglichst groß wird, erweitern wir mit dem Nenner selbst. Dadurch tritt der Nenner wieder als zusätzlicher Faktor in Erscheinung und vergrößert somit das kgV von Nenner und 24. Was dabei mit den Zählern geschieht, müssen wir untersuchen.
Bei (**A**) entsteht beim Erweitern mit 8 der Bruch $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 8} = \frac{56}{64}$. Das kgV von Zähler mit 24 bleibt $24 \cdot 7 = 168$, das kgV von Nenner und 24 ist nun jedoch auf $24 \cdot 8 = 192$ angewachsen. Mit $x = 56$ und $y = 64$ haben wir für $\frac{7}{8}$ also eine gewünschte Darstellung als $\frac{x}{y}$ gefunden.
Bei (**C**) entsteht beim Erweitern mit 3 der Bruch $\frac{6}{9}$. Die Bedingung für $\frac{x}{y}$ ist hier ebenfalls erfüllt. Mit $x = 6$ und $y = 9$ ist $\frac{x}{y}$ eine gewünschte Darstellung von $\frac{2}{3}$.
Für die Antwortmöglichkeit (**E**) erhalten wir durch Erweitern mit dem Nenner $\frac{42}{26}$. Die Bedingung für $\frac{x}{y}$ ist nicht erfüllt. Beim Erweitern mit einer beliebigen weiteren Zahl ändert sich daran nichts, denn Zähler und Nenner werden mit dem gleichen Faktor multipliziert. Also ist (**E**) die Lösung.

Klassenstufen 9 und 10

1. Wenn die Summe der Zahlen in beiden Zeilen der Tabelle gleich ist, welche Zahl gehört dann an die Stelle des Sternchens?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	★

(**A**) 1010 (**B**) 1020 (**C**) 1910 (**D**) 1990 (**E**) 2020

Lösung: Da jede der in der unteren Zeile stehenden Zahlen stets um 10 größer ist als die direkt darüberstehende, ist die Summe um $10 \cdot 10 = 100$ größer als die Summe der ersten 10 Zahlen in der oberen Zeile. Folglich gehört an die Stelle des Sternchens $2010 - 100 = 1910$.

2. Welches der folgenden Resultate ist das Ergebnis der Division von 20102010 durch 2010 ?

(**A**) 11 (**B**) 101 (**C**) 1001 (**D**) 10001 (**E**) es ist keine ganze Zahl

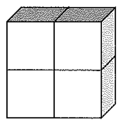
Lösung: Es ist $20102010 = 20100000 + 2010 = 2010 \cdot 10000 + 2010 \cdot 1 = 2010 \cdot 10001$. Also ist (**D**) richtig.

3. Bianca hat beim letzten Mathetest exakt 85 % der Punkte bekommen, Tibor, der genau einen Punkt mehr hatte, erzielte damit sogar 90 % der möglichen Punkte. Wie viele Punkte waren maximal bei diesem Test zu erreichen?

(**A**) 5 (**B**) 17 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 22

Lösung: Es machen $90\% - 85\% = 5\%$ der erreichbaren Punkte genau einen Punkt aus. Mit anderen Worten, $5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ der erreichbaren Punkte entsprechen einem Punkt, folglich waren 20 Punkte zu erreichen.

4. Jeder der vier Würfel, die zu dem nebenstehend abgebildeten Quader zusammengefügt sind, hat eine Oberfläche von 24 cm². Welche Oberfläche hat dieser Quader?



(**A**) $80\,\text{cm}^2$ (**B**) $64\,\text{cm}^2$ (**C**) $40\,\text{cm}^2$ (**D**) $32\,\text{cm}^2$ (**E**) $24\,\text{cm}^2$

Lösung: Nach dem Zusammenfügen der vier Würfel gehören von jedem dieser Würfel 4 seiner 6 Seitenflächen zur Oberfläche des Quaders, das sind zwei Drittel. Also ist der Oberflächeninhalt des Quaders $\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 24\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2$.

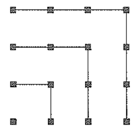
Natürlich lässt sich der gesuchte Flächeninhalt auch „auszählen": Eine Würfelseite hat einen Flächeninhalt von $4\,\text{cm}^2$, die Quaderoberfläche wird von 16 solcher Würfelseiten gebildet. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $16 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 64\,\text{cm}^2$.

5. Einen Strauß aus 12 Rosen – das hatte sich Rosa zum 12. Geburtstag gewünscht. Von jeder Rose hat sie ein Blütenblatt getrocknet, gepresst und in eine Mappe geklebt. Seither bekommt sie jedes Jahr einen „Lebensalterrosenstrauß" mit genau so vielen Rosen, wie ihr Alter angibt. Und jedes Jahr klebt sie von *jeder* Rose ein Blütenblatt in ihre Mappe. Nach dem diesjährigen Aufkleben sind es insgesamt schon 105 Rosenblätter. Wie alt ist sie geworden?

(**A**) 21 (**B**) 20 (**C**) 19 (**D**) 18 (**E**) 17

Lösung: In Rosas Blütenblättersammlung sind $12+13+\cdots=105$ Rosenblätter. Eine Möglichkeit herauszufinden, über wie viele Jahre sie gesammelt hat, besteht darin, die Differenzen $105-12$, $105-12-13$ usw. zu bilden, bis 0 entsteht. Da 17 die kleinste Zahl ist, die als Lösungsmöglichkeit vorkommt, lohnt es sich, mit ihr zu beginnen. Es ist $105-(12+\cdots+17)=105-87=18$. Folglich ist $105-(12+13+\cdots+18)=0$, d. h., (**D**) ist die Lösung.

6. Aus dem rechts stehenden Bild lässt sich ablesen, dass $1+3+5+7=4\cdot 4$ ist. Welchen Wert hat $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?



(**A**) $14\cdot 14$ (**B**) $9\cdot 9$ (**C**) $11\cdot 11$ (**D**) $16\cdot 16$ (**E**) $13\cdot 13$

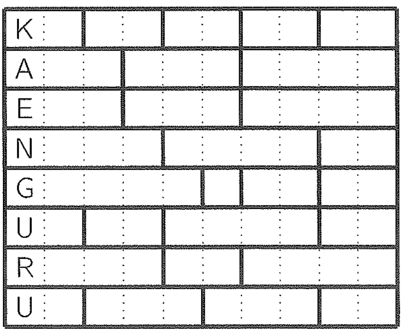
Lösung: Eine Möglichkeit zum Lösen dieser Aufgabe ist es, sich zu vergewissern, dass beim Addieren aufeinanderfolgender ungerader Zahlen, sofern mit 1 begonnen wird, stets Quadratzahlen entstehen, also $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$ usw. Der Vollständigkeit halber merken wir an, dass dies mit Hilfe der *Methode der vollständigen Induktion* bewiesen werden kann. Dann ist klar, dass $1+3+\cdots+17=9^2=9\cdot 9$ ist.
Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Addition $1+3+\cdots+17$ schnell durchzuführen, wobei man natürlich ebenfalls $81=9\cdot 9$ erhält.

7. Um aus $2\star 0\star 1\star 0=1$ eine korrekte Gleichung zu machen, sollen die Sternchen durch „+", „−" oder „·" ersetzt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Wir schreiben alle Möglichkeiten, als Ergebnis 1 zu erhalten, systematisch auf:
$2\cdot 0+1+0=2\cdot 0+1-0=2+0-1+0=2+0-1-0=2-0-1+0=2-0-1-0=1$.
Das sind 6 Möglichkeiten.

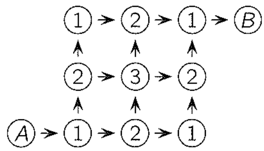
KAENGURU-Silbenrätsel



Die folgenden 29 Silben sind so an entsprechender Stelle in die Figur einzutragen, dass sich acht mathematische Begriffe (mit jeweils 10 Buchstaben) ergeben. Dabei ist der erste Buchstabe einer jeden Anfangssilbe bereits als KAENGURU *eingetragen:*

AUF – BE – BE – DI – E – EXT – GE – GRUND – HALT – IN – KANN –
KO – LE – MEN – NA – NE – NULL – OR – RAUM – REM – STEL –
SUNG – TE – TE – TER – UN – UN – WERT – ZIN

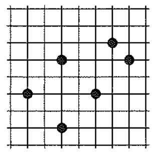
8. Ein Hindernislauf führt auf unterschiedlichen Wegen, stets in Pfeilrichtung, von A nach B (s. schematische Darstellung rechts). An den Hindernissen gibt es in Abhängigkeit von der Schwierigkeit einen, zwei oder drei Stempel auf den Laufpass. Wie viele Stempel sind maximal möglich?



(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

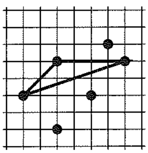
Lösung: Jeder in Pfeilrichtung verlaufende Weg von A nach B führt an genau 5 Stationen vorbei. Die Wege, die an der Station mit 3 Stempeln vorbeiführen, führen zu insgesamt 9 Stempeln, während die anderen Wege anstelle der Station mit 3 Stempeln eine Station mit nur einem Stempel enthalten. Dort ist die Stempelanzahl folglich 7. Also ist die maximale Stempelanzahl 9.

9. Auf kariertem Papier sind 6 Punkte markiert (s. Abb.). Wenn 3 oder 4 dieser Punkte verbunden werden, entstehen unterschiedliche geometrische Figuren. Welche der folgenden Figuren ist jedoch *nicht* möglich?

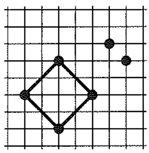


(**A**) stumpfwinkliges Dreieck
(**B**) Quadrat
(**C**) spitzwinkliges Dreieck
(**D**) Parallelogramm, das keine Raute (Rhombus) ist
(**E**) Rechteck, das kein Quadrat ist

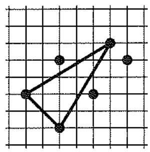
Lösung: Vier der Figuren lassen sich durch Verbinden geeigneter der 6 Punkte erzeugen, wie die Abbildungen belegen:



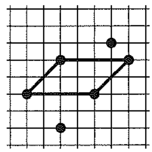
Stumpfwinkliges Dreieck



Quadrat



Spitzwinkliges Dreieck



Parallelogramm

Ein Rechteck, das kein Quadrat ist, können wir aus den gegebenen Punkten nicht erzeugen.

10. Wenn $a = \frac{2009}{2010}$, $b = \frac{2010}{2011}$ und $c = \frac{2011}{2012}$ ist, welche Relation ist dann richtig?

(**A**) $a < b < c$ (**B**) $a < c < b$ (**C**) $c < a < b$ (**D**) $c < b < a$ (**E**) $a = b = c$

Lösung: Für die erforderliche Abschätzung ist es sehr hilfreich, die Brüche in der folgenden Weise darzustellen: $a = \frac{2009}{2010} = \frac{2010-1}{2010} = 1 - \frac{1}{2010}$, $b = 1 - \frac{1}{2011}$ und $c = 1 - \frac{1}{2012}$. Und da $\frac{1}{2010} > \frac{1}{2011} > \frac{1}{2012}$ ist, finden wir, dass $a < b < c$ gilt.

Wem diese trickreiche Zerlegung jedoch nicht auffällt, der kann ebensogut auch durch direktes Rechnen zum Ergebnis kommen. Wir rechnen $b - a = \frac{2010}{2011} - \frac{2009}{2010} = \frac{2010 \cdot 2010 - 2009 \cdot 2011}{2010 \cdot 2011}$.

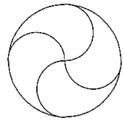
Um sofort zu erkennen, dass der Zähler dieses Bruches positiv ist, formen wir ein wenig um: $2010^2 - 2009 \cdot 2011 = 2010^2 - (2010-1) \cdot (2010+1) = 2010^2 - (2010^2 - 1) = 1$. Demzufolge ist $a < b$. Völlig analog finden wir $b < c$.

11. Als unsere Mathelehrerin neulich Geburtstag hatte, erzählte sie uns, dass das Produkt aus ihrem Alter und dem Alter ihres Vaters 2010 ist. Wie alt ist sie geworden?

(**A**) 28 (**B**) 30 (**C**) 35 (**D**) 36 (**E**) 40

Lösung: Wir zerlegen 2010 in Primfaktoren: Es ist $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Damit gibt es nur eine sinnvolle Konstellation: Die Lehrerin ist 30 Jahre alt, ihr Vater 67.

12. Ein Kreis mit dem Radius 4 ist durch Kreisbögen mit dem Radius 2 in vier kongruente Teile geteilt worden. Wie groß ist der Umfang eines solchen Viertels?



(**A**) 2π (**B**) 3π (**C**) 6π (**D**) 8π (**E**) 12π

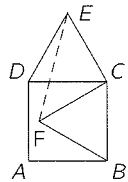
Lösung: Jedes der vier kongruenten Teile wird von einem Viertelbogen des Kreises mit dem Radius 4 sowie von zwei Halbbögen eines Kreises mit dem Radius 2 begrenzt. Der Umfang U ist folglich $U = \left(\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2\right) = 6\pi$.

13. Wie viele natürliche Zahlen besitzen die Ziffernsumme 22, während das Produkt der Ziffern 2 ist?

(**A**) 19 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 44

Lösung: Um als Produkt der Ziffern 2 zu erhalten, kommt nur in Frage, dass in der Zifferndarstellung genau eine 2 auftaucht, alle anderen Ziffern müssen 1 sein. Da die Ziffernsumme 22 sein soll, muss es sich um $22 - 2 = 20$ Einsen handeln. Die 2 kann an jeder Stelle der 21-stelligen Zahl aus 20 Einsen und einer 2 stehen, folglich gibt es genau 21 Möglichkeiten.

14. $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, BCF und CED sind gleichseitige Dreiecke. Wie lang ist $\overline{EF}$?



(**A**) 1 (**B**) $\sqrt{3}$ (**C**) $\sqrt{5} - 1$ (**D**) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (**E**) $\sqrt{2}$

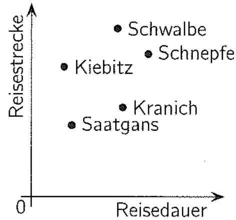
Lösung: Wir erhalten $\triangle DCE$ indem wir $\triangle BCF$ um 90° im Uhrzeigersinn um den Quadrateckpunkt C drehen. Folglich ist EF die Hypotenuse im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle EFC$ und hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Wer die Drehung um C nicht bemerkt, kann auch auf folgendem Wege zum Ziel kommen: Die Dreiecke $\triangle BCF$ und $\triangle DCE$ sind gleichseitig, folglich messen alle Innenwinkel 60°. Da $ABCD$ ein Quadrat ist, ist $\measuredangle DCB = 90°$. Daraus ergibt sich $\measuredangle DCF = 90° - 60° = 30°$, woraus folgt, dass $\measuredangle ECF = 60° + 30° = 90°$ ist. Da $\overline{EC} = \overline{FC}$ ist, ist $\triangle EFC$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, und für $\overline{EC}$ als Hypotenuse folgt $\overline{EF} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

15. Wenn in einem Monat drei Dienstage auf ein geradzahliges Tagesdatum fallen, dann fällt der 21. dieses Monats auf einen

(**A**) Mittwoch (**B**) Donnerstag (**C**) Freitag (**D**) Samstag (**E**) Sonntag

Lösung: Angenommen der 2. Tag des Monats ist ein Dienstag. Dann sind auch der 9., der 16., der 23. und der 30. dieses Monats Dienstage. Wir sehen sofort, dass es keine andere Möglichkeit für 3 Dienstage mit geradzahligem Tagesdatum in einem Monat geben kann. Da nun der 23. auf einen Dienstag fällt, ist der 21. ein Sonntag.

16. Um die Reise von Zugvögeln zu erforschen, werden einige Vögel mit Sendern versehen. Bei einer Untersuchung von Kranichen, Schwalben, Saatgänsen, Schnepfen und Kiebitzen wurde aus den Daten von fünf Vögeln ein Diagramm erstellt, aus dem sich Reisestrecke und Reisedauer der Schwärme ablesen lassen – und auch die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit. Welche Vogelart hatte die größte durchschnittliche Reisegeschwindigkeit?



(**A**) Kranich (**B**) Saatgans (**C**) Schwalbe (**D**) Schnepfe (**E**) Kiebitz

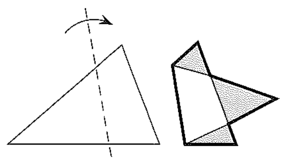
Lösung: Die durchschnittliche Geschwindigkeit erhalten wir als Quotient aus zurückgelegtem Weg und der dafür erforderlichen Zeit (gemessen in km/h oder m/s). Legen wir zu einem Punkt, der zu einer Vogelart gehört, durch den Koordinatenursprung eine Gerade, so ist der Anstieg dieser Gerade genau der Quotient aus Weg und Zeit. Es hat also die Vogelart die größte Durchschnittsgeschwindigkeit, für die die Gerade durch den Ursprung, verbunden mit dem jeweiligen Punkt der einzelnen Vogelart, am steilsten ist. Den steilsten Anstieg hat die Gerade des Kiebitzes, er war der schnellste Flieger auf dem Weg in den Süden, denn er hatte die größte durchschnittliche Reisegeschwindigkeit.

17. Eine Seitenlänge eines Dreiecks ist 13. Die anderen beiden Seitenlängen sind die natürlichen Zahlen x und y, von denen wir wissen, dass $x \cdot y = 105$ ist. Dann ist $x + y =$

(**A**) 22 (**B**) 26 (**C**) 38 (**D**) 56 (**E**) 106

Lösung: Da x und y natürliche Zahlen sind, muss jede von ihnen ein Teiler von 105 sein. Es ist $105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Da x, y und 13 Seitenlängen eines Dreiecks sind, muss die Dreiecksungleichung erfüllt sein, d. h., die Summe zweier Seitenlängen muss stets größer sein als die Länge der dritten Seite. Insbesondere muss die Summe der beiden kleinsten Zahlen größer als die dritte sein. Ganz sicher kann die kleinste Dreiecksseite nicht 1, 3 oder 5 sein, da $1 + 13 < 105$, $3 + 13 < 35$ und $5 + 13 < 21$ gilt. Mit der Wahl von 7 als kleinster Dreiecksseite haben wir die letzte verbliebene Möglichkeit. Und hier ist mit $7 + 13 > 15$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Die Summe der Längen der Dreiecksseiten ist $x + y = 7 + 15 = 22$.

18. Ein dreieckiges Stück Papier wurde einmal gefaltet (s. Abb.). Es entstand ein Siebeneck (dick umrandet), dessen Fläche zwei Drittel der ursprünglichen Dreiecksfläche beträgt. Die Summe der Flächeninhalte der drei grauen Dreiecke ist 1. Wie groß ist die Fläche des Ausgangsdreiecks?



(**A**) 2 (**B**) 2,5 (**C**) 3 (**D**) 4,5 (**E**) das lässt sich nicht berechnen

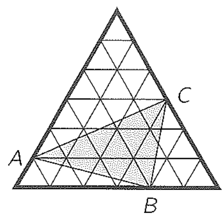
Lösung: Wir bezeichnen den Flächeninhalt der drei grauen Dreiecke mit G, den der weißen Vierecksfläche mit W und den gesuchten Flächeninhalt der Gesamtfläche des Ausgangsdreiecks mit A. Wir wissen, dass $G + W = \frac{2}{3}A$ und dass außerdem $G + 2W = A$ ist, denn der weiße Teil wird bei der Faltung überdeckt, muss also zweimal gezählt werden. Aus dem Gleichungssystem mit zwei Unbekannten errechnen wir, nachdem wir $G = 1$ eingesetzt haben, $W = \frac{2}{3}A - 1 = \frac{A-1}{2}$, woraus wir, nach A aufgelöst, $A = 3$ erhalten.

19. Während unsere Eltern noch an der Supermarktkasse stehen, warten wir draußen neben zwei Reihen säuberlich ineinandergeschobener Einkaufswagen. Meine kleine Schwester probiert ihr neues Bandmaß aus und misst 2,9 m für die kürzere Wagenschlange, zu der 10 Wagen gehören. In der längeren Schlange sind 20 Wagen, und meine Schwester misst 4,9 m. Wie lang ist ein Einkaufswagen?

(**A**) 0,8 m (**B**) 0,9 m (**C**) 1,0 m (**D**) 1,1 m (**E**) 1,2 m

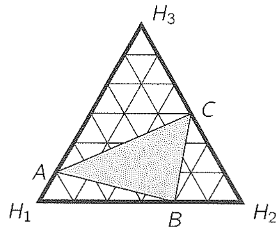
Lösung: Stellen wir uns die Einkaufswagenschlange – schön ordentlich ineinandergeschoben – vor, so steckt in der ersten Messung eine volle Wagenlänge vermehrt um 9 Stückchen, die jeweils vom folgenden Wagen herausragen. In der zweiten Schlange sind es 19 Stückchen, die zur vollen Wagenlänge hinzukommen. Bezeichnen wir die Wagenlänge mit w, die beim Ineinanderschieben verbleibende Rausraglänge mit s, so gilt $w + 9s = 2,9\,\text{m}$ und $w + 19s = 4,9\,\text{m}$. Daraus folgt, dass 10 Rausraglängen, die die zweite Schlange mehr enthält, $4,9\,\text{m} - 2,9\,\text{m} = 2\,\text{m}$ lang sind, eine also 0,2 m. Ein Einkaufswagen ist somit $w = 2,9\,\text{m} - 9 \cdot 0,2\,\text{m} = 1,1\,\text{m}$ lang.

20. Das dick umrandete gleichseitige Dreieck besteht aus 36 gleichseitigen Dreiecken, von denen jedes den Flächeninhalt $1\,\text{cm}^2$ hat. Welchen Flächeninhalt hat $\triangle ABC$?

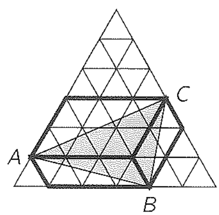


(**A**) $9\,\text{cm}^2$ (**B**) $10\,\text{cm}^2$ (**C**) $11\,\text{cm}^2$ (**D**) $12\,\text{cm}^2$ (**E**) $13\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir bezeichnen die Seitenlänge eines kleinen Dreiecks mit a, seine Höhe mit h. Die Eckpunkte des großen dickumrandeten Dreiecks seien mit H_1, H_2, H_3 bezeichnet. Der Flächeninhalt von $\triangle H_1H_2H_3$ ist dann $\frac{1}{2}\,6a \cdot 6h$. Um den Flächeninhalt des grauen Dreiecks zu errechnen, subtrahieren wir vom Flächeninhalt der Gesamtfläche die Flächeninhalte der Dreiecke H_1BA, BH_2C und H_3AC. Die Grundlinie von H_1BA ist $4a$ lang, die Höhe dieses Dreiecks beträgt h. Im Dreieck BH_2C ist die Grundlinie $2a$ lang, die Höhe beträgt $3h$, und im Dreieck H_3AC schließlich ist die Grundlinie $5a$ lang, die Höhe $3h$. Dann erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt der grauen Dreiecksfläche als $\frac{1}{2}(6a \cdot 6h - 4a \cdot 1h - 2a \cdot 3h - 5a \cdot 3h)$ $= \frac{1}{2}\,a \cdot h \cdot (36 - 4 - 6 - 15) = \frac{1}{2}\,a \cdot h \cdot 11$. Nach Aufgabenstellung gilt für den Flächeninhalt eines kleinen Dreiecks $\frac{1}{2}\,a \cdot h = 1\,\text{cm}^2$. Der gesuchte Flächeninhalt ist folglich $11\,\text{cm}^2$.

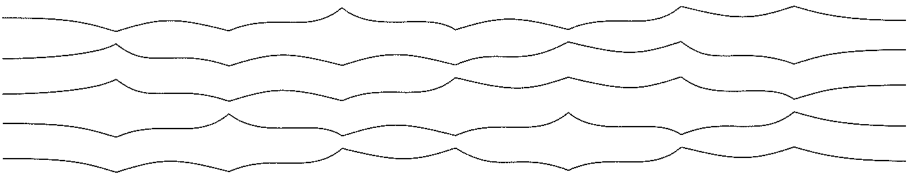


Eine zweite Lösungsmöglichkeit verwendet eine geschickte Flächenzerlegung. Im Bild rechts sind drei Parallelogramme dick umrandet, die jeweils aus einer weißen und einer grauen *Hälfte* bestehen, da die Seiten des Dreiecks ABC gleichzeitig Diagonalen der Parallelogramme sind. Die Parallelogramme bestehen aus 12 bzw. 6 bzw. 4, also insgesamt 22 kleinen Dreiecken. Das Dreieck ABC hat also einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot 22\,\text{cm}^2 = 11\,\text{cm}^2$.



21. Ein rechteckiges Stück Papier kann auf verschiedene Weise dreimal nacheinander nach oben oder nach unten jeweils auf die Hälfte gefaltet werden. Alle Faltkanten sind zueinander parallel. Vollständig entfaltet kann das Papier vier der folgenden Seitenansichten bieten. Eine ist ausgeschlossen. Welche?

(A)
(B)
(C)
(D)
(E)



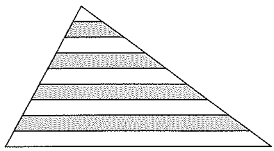
Lösung: s. Lösung von Aufgabe 27 in Klassenstufe 7/8

22. Wie viele dreistellige natürliche Zahlen haben die Eigenschaft, dass die mittlere Ziffer der Mittelwert (Durchschnitt bzw. arithmetisches Mittel) der beiden äußeren Ziffern ist?

(A) 15 **(B)** 28 **(C)** 36 **(D)** 45 **(E)** 49

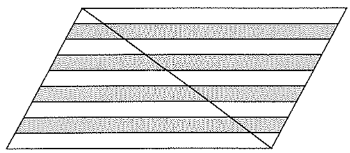
Lösung: Damit die mittlere Ziffer Mittelwert der beiden anderen sein kann, müssen Einer- und Hunderterziffer beide gerade oder beide ungerade sein. Sind beide gerade oder beide ungerade, dann ist der Mittelwert als mittlere Ziffer möglich. Zu jeder der 9 Ziffern, die die Hunderterstelle einnehmen können, also 1,2,...,9, gibt es genau 5 Einerziffern, so dass ein Mittelwert gebildet werden kann: Zur 1 beispielsweise können 1, 3, 5, 7 und 9, zur 2 können 0, 2, 4, 6 und 8 als Einerziffern dazugehören usw. Das sind insgesamt $9 \cdot 5 = 45$.

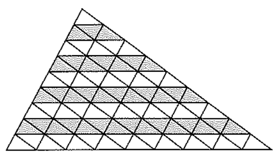
23. Parallel zur Grundlinie eines Dreiecks werden Linien gezeichnet, die die beiden anderen Seiten in 9 gleich große Teile teilen. Jeder zweite Streifen wird grau eingefärbt (s. Abb.). Welcher Anteil der Dreiecksfläche ist grau?



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{3}{7}$ **(E)** $\frac{4}{9}$

Lösung: Wir ergänzen das Dreieck durch Hinzufügen des um 180° gedrehten Dreiecks zu einem Parallelogramm. Am gesuchten *Verhältnis* ändert sich durch die Verdopplung der Fläche nichts. In dem Parallelogramm sind 4 graue und 5 weiße zueinander kongruente Streifen. Der Flächeninhalt der grauen Streifen beträgt $\frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}$ des Inhalts der Gesamtfläche.





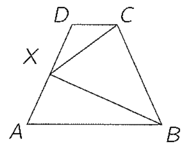
Eine andere Lösungsmöglichkeit ist die folgende: Wie in der Abbildung rechts zerlegen wir die Fläche in kleine Dreiecke, die zueinander und zu dem kleinen weißen in der Spitze des Ausgangsdreiecks befindlichen Dreieck kongruent sind. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks sei mit D bezeichnet. Der Flächeninhalt des obersten grauen Streifens ist dann $3D$, der des folgenden weißen Streifens $5D$, usw. Der Flächeninhalt des 9. Streifens ist $(2 \cdot 9 - 1) \cdot D = 17 \cdot D$. Für die gesamte Dreiecksfläche ergibt sich $(1 + 3 + 5 + \cdots + 17) \cdot D = 81\,D$ und für den grauen Anteil $(3 + 7 + 11 + 15)D = 36\,D$, woraus wir als Anteil $\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$ erhalten.

24. Der Mittelwert (Durchschnitt bzw. arithmetisches Mittel) von 100 gegebenen Zahlen sei 100. Wir nehmen 111 weitere Zahlen hinzu und finden als Mittelwert der 211 Zahlen 111. Dann gilt für den Mittelwert M_{111} dieser 111 Zahlen

(A) $M_{111} < 111$ **(B)** $M_{111} = 111$ **(C)** $111 < M_{111} < 222$
(D) $M_{111} = 222$ **(E)** $M_{111} > 222$

Lösung: Der Mittelwert der gegebenen 100 Zahlen ist 100. Also ist die Summe dieser 100 Zahlen $100 \cdot 100 = 10\,000$. Wir bezeichnen die Summe der hinzukommenden 111 Zahlen mit S. Der gesuchte Mittelwert ist $M_{111} = \frac{S}{111}$. Um S zu bestimmen, nutzen wir, dass für den Mittelwert der 211 Zahlen $\frac{10\,000 + S}{211} = 111$ gilt. Daraus finden wir $S = 111 \cdot 211 - 10000$. Nun können wir M_{111} bestimmen. Dass $M_{111} > 111$ ergibt sich daraus, dass unter den 211 Zahlen (mit dem Mittelwert 111) sich 100 befinden, die einen kleineren Mittelwert als 111, nämlich 100, haben. Folglich muss der Mittelwert M_{111} der hinzugekommenen Zahlen größer als 111 sein. Nun schätzen wir M_{111} noch nach oben ab. Wir brauchen nicht bis zum Ende auszurechnen, es genügt eine grobe Abschätzung: $M_{111} = \frac{111 \cdot 211 - 10\,000}{111} = 211 - \frac{10\,000}{111} < 211 < 222$. Folglich ist **(C)** richtig.

25. Das Trapez $ABCD$ ist gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{BC}$, X ist der Mittelpunkt der Seite AD. Wenn $\overline{AX} = 1$ und $\measuredangle BXC = 90°$ ist (*Abb. <u>nicht</u> maßstabsgerecht*), dann ist der Umfang des Trapezes



(A) 6 **(B)** $4\sqrt{2}$ **(C)** $3\sqrt{5}$ **(D)** 7 **(E)** nicht berechenbar

Lösung: Da $\triangle BCX$ rechtwinklig ist, liegt X auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{BC}$ mit dem Mittelpunkt im Mittelpunkt M der Trapezseite BC. Dann ist $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MX} = 1$. Da im Trapez die Länge der Mittellinie $\overline{MX}$ gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der beiden parallelen Trapezseiten ist, gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = 2 \cdot \overline{MX} = 2$. Damit finden wir für den Umfang des Trapezes $\overline{AB} + \overline{BM} + \overline{MC} + \overline{CD} + \overline{DX} + \overline{XA} = 6$.

26. Xerxes hat in seinem Raumschiff 6-, 7- und 8-armige Roboter. Dummerweise sind die 7-armigen Roboter fehlprogrammiert und alles, was sie sagen, ist gelogen. Die anderen Roboter sind in Ordnung, sie sprechen stets die Wahrheit. Einmal hört Xerxes ein Gespräch von 4 Robotern, ohne sie jedoch zu sehen. Sie sprechen über ihre Arme. Der erste Roboter behauptet: „Wir 4 haben zusammen 28 Arme." „Nein", sagt der zweite, „es sind 27.",„Stimmt nicht, 26", sagt der dritte. „Falsch, es sind 25", beendet der vierte das Gespräch. Wie viele Arme hat der 4. Roboter?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 6 oder 8 **(E)** Es ist unbestimmt.

Lösung: Da es zu ein und demselben Tatbestand – der Anzahl der Arme der anwesenden vier Roboter – vier verschiedene Aussagen gibt, kann höchstens eine davon wahr sein. Angenommen alle vier Roboter hätten gelogen. Dann hätten sie zusammen $4 \cdot 7 = 28$ Arme. Dies ist die Aussage des ersten Roboters, der damit die Wahrheit gesagt hätte, im Widerspruch zur Annahme, dass alle vier gelogen haben. Also hat genau ein Roboter die Wahrheit gesagt. Das kann nur einer mit 6 oder 8 Armen sein. Die Summe der Arme ist folglich entweder $3 \cdot 7 + 6 = 27$ oder $3 \cdot 7 + 8 = 29$. Der vierte Roboter spricht weder von 27 noch von 29 Armen, folglich ist er gewiss ein 7-armiger Roboter.

27. An jede Ecke eines Fünfecks stellen wir uns eine natürliche Zahl geschrieben vor. Keine dieser Zahlen hat mit einer Zahl einer benachbarten Ecke einen gemeinsamen Teiler > 1, aber jede der Zahlen hat mit jeder nicht-benachbarten Zahl stets einen gemeinsamen Teiler > 1. So etwas ist auf vielfältige Weise möglich. Welche der folgenden Zahlen kommt für *keine* solche Belegung in Frage?

(**A**) 18 (**B**) 31 (**C**) 91 (**D**) 99 (**E**) 119

Lösung: Wir bemerken, dass keine der 5 Zahlen eine Primzahl sein kann, da jede Zahl mit den beiden nicht benachbarten Zahlen jeweils einen gemeinsamen Teiler > 1 hat, und diese beiden Teiler verschieden sein müssen, da benachbarte Zahlen keine gemeinsamen Teiler > 1 besitzen. Es ist $18 = 2 \cdot 9$, $91 = 7 \cdot 13$, $99 = 9 \cdot 11$ und $119 = 7 \cdot 17$. Diese Zahlen haben sämtlich mindestens 2 verschiedene Primteiler, jede von ihnen könnte an einer Ecke eines solchen Fünfecks vorkommen. Die Zahl 31 ist eine Primzahl, sie ist nicht möglich.

28. Wenn die 9 Winkel dreier stumpfwinkliger Dreiecke sämtlich voneinander verschieden sind, wie viele Paare lassen sich unter diesen 9 Winkeln maximal finden, deren Winkelsumme gleich 90° ist?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

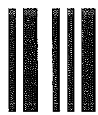
Lösung: Wir bezeichnen die Winkel beim ersten Dreieck $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, beim zweiten $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und beim dritten $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Dabei seinen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die stumpfen Winkel. Angenommen $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$. Da alle Winkel voneinander verschieden sind, gibt es keinen unter den verbliebenen, mit denen sich α_1 oder α_2 zu 90° kombinieren ließe. Und da $\alpha_1 + \beta_1 < 90^\circ$ wie auch $\alpha_2 + \beta_2 < 90^\circ$, muss $\beta_1 + \beta_2$ ebenfalls kleiner als 90° sein. Folglich muss für eine Kombination zu 90° ein Winkel des dritten Dreiecks mit β_1 und/oder β_2 kombiniert werden. Angenommen es ist $\beta_1 + \alpha_3 = 90^\circ$. Dann folgt aus der analogen Argumentation wie eben, dass $\beta_2 + \beta_3 < 90^\circ$ sein muss. Damit gibt es höchstens zwei Paare, die sich zu 90° kombinieren lassen. Dass es tatsächlich drei stumpfwinklige Dreiecke gibt, bei denen sich zwei Kombinationen zu 90° finden, belegen wir mit einem Beispiel. Es seien die Winkel des ersten Dreiecks $(30^\circ, 50^\circ, 100^\circ)$, die des zweiten $(60^\circ, 10^\circ, 110^\circ)$ und die des dritten $(40^\circ, 20^\circ, 120^\circ)$. Dann finden wir $30^\circ + 60^\circ = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$.

29. Für wie viele ganze Zahlen n $(1 \leq n \leq 100)$ ist n^n eine Quadratzahl?

(**A**) für 10 (**B**) für 50 (**C**) für 51 (**D**) für 54 (**E**) für 55

Lösung: Für alle 50 geraden Zahlen zwischen 1 und 100 folgern wir nach den Potenzgesetzen, dass n^n Quadratzahl ist, denn für $n = 2m$ gilt $n^n = (2m)^{(2m)} = \left((2m)^m\right)^2$. Darüber hinaus sind auch die Potenzen der ungeraden Quadratzahlen ihrerseits selbst wieder Quadratzahlen: 1^1, $9^9 = (3^2)^9 = (3^9)^2$, $25^{25} = (5^2)^{25} = (5^{25})^2$, $49^{49} = (7^2)^{49} = (7^{49})^2$, $81^{81} = (9^2)^{81} = (9^{81})^2$. Insgesamt sind das 55 Zahlen.

30. Die Strichcodes, die wir untersuchen wollen, bestehen abwechselnd aus schwarzen und weißen Strichen und beginnen und enden schwarz. Die Striche haben die Breite 1 oder 2, und die Gesamtbreite eines Codes soll 12 sein (s. Beispiel rechts). Wie viele verschiedene Codes sind möglich, wenn stets von links nach rechts gelesen wird?



(**A**) 72 (**B**) 84 (**C**) 116 (**D**) 125 (**E**) 128

Lösung: Da zu n schwarzen Strichen stets $n-1$ weiße gehören, ist die Anzahl der Striche stets ungerade. Die maximale Anzahl von Strichen im 12 Einheiten breiten Strichcode beträgt 11, die minimale Anzahl ist 7.

Fall 1: Es sind 11 Striche: 6 schwarze und 5 weiße. Genau ein Strich muss 2 Einheiten breit sein (wir wollen ihn „breiten Strich" nennen), die anderen sind 1 Einheit breit. Nun kann der breite Strich einer der weißen oder einer der schwarzen Striche sein. Es gibt 11 Möglichkeiten für den breiten Strich, und jede Möglichkeit liefert einen anderen Strichcode.

Fall 2: Es sind 9 Striche: 5 schwarze und 4 weiße. Damit die Gesamtbreite 12 beträgt, müssen $12-9=3$ Striche breit sein. Wie im Fall 1 brauchen wir auch hier keine Unterscheidung danach zu machen, wie viele schwarze und wie viele weiße Striche breit sind. Es genügt, die Anzahl der Möglichkeiten zu ermitteln, die es insgesamt für 3 breite Striche gibt, denn jede dieser Möglichkeiten liefert einen anderen Strichcode. Es gibt folglich genau so viele verschiedene Strichcodes wie es Möglichkeiten gibt, 3 Dinge aus 9 Dingen auszuwählen. Das ist $\binom{9}{3}=84$.
(Eine Erläuterung zur Bedeutung von $\binom{9}{3}$ folgt am Ende dieses Lösungstextes.)

Fall 3: Es sind 7 Striche: 4 schwarze und 3 weiße. Damit die Gesamtbreite 12 beträgt, müssen $12-7=5$ der Striche breit sein. Die Anzahl der verschiedenen Strichcodes ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, 5 Dinge aus 7 Dingen auszuwählen: $\binom{7}{5}=21$.

Mit diesen drei Fällen sind alle Möglichkeiten erfasst. Wir zählen insgesamt $11+84+21=116$ verschiedene Strichcodes.

Erläuterung: Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 aus 9 Dingen auszuwählen, beschreibt der sogenannte *Binomialkoeffizient* $\binom{9}{3}$ (gelesen „9 über 3"). Er berechnet sich so:
Für das erste der 3 Dinge gibt es 9 Möglichkeiten zur Auswahl, für das zweite gibt es 8 Möglichkeiten, und für das dritte gibt es 7 Möglichkeiten. Also gibt es zunächst $9\cdot 8\cdot 7$ Möglichkeiten, 3 Dinge auszuwählen. Allerdings haben wir dabei eine feste Ordnung beachtet (das „erste", usw.). Wählen wir die Dinge in einer anderen Reihenfolge aus, so erhalten wir dieselbe Auswahl. Da es für die Anordnung von 3 Dingen genau $3\cdot 2\cdot 1=3!$ Möglichkeiten gibt, haben wir in den $9\cdot 8\cdot 7$ Möglichkeiten jede mögliche Auswahl genau 3!-mal gezählt.
Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 aus 9 Dingen auszuwählen, ist also

$$\binom{9}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9!}{3!\cdot 6!}.$$

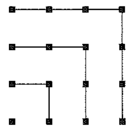
Allgemein gilt: Die Anzahl der Möglichkeiten, k aus n Dingen auszuwählen, ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Ein Beispiel, welches in Klassenstufe 11 bis 13 vorkam, ist:

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 5\cdot 3 = 165.$$

Klassenstufen 11 bis 13



1. Beim Blick auf das rechts stehende Bild lässt sich ablesen: $1+3+5+7=4\cdot 4$. Welchen Wert hat $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?

(**A**) $14\cdot 14$ (**B**) $9\cdot 9$ (**C**) $13\cdot 13$ (**D**) $10\cdot 10$ (**E**) $16\cdot 16$

Lösung: s. Lösung von Aufgabe 6 in Klassenstufe 9/10.

2. Wenn die Summe der Zahlen in beiden Zeilen der Tabelle gleich ist, welche Zahl gehört dann an die Stelle des Sterns?

1	2	3	4	5	12345
−1	−2	−3	−4	−5	★

(**A**) 12465 (**B**) 12321 (**C**) 12456 (**D**) 12375 (**E**) 12330

Lösung: Wer mag, kann die Zahlen schnell summieren und so zum Ergebnis kommen. Eleganter ist es natürlich zu bemerken, dass die gesuchte Zahl um das Doppelte der Summe der Zahlen von 1 bis 5 größer sein muss als 12345, also $12345+2\cdot 15=12375$.

3. „In meiner Mathe-AG sind alle Teilnehmer mindestens 17 Jahre alt", verkündet die AG-Leiterin. Da irrt sie sich aber. Folglich gilt gewiss, dass

(**A**) alle genau 17 Jahre alt sind.
(**B**) alle älter als 17 Jahre sind.
(**C**) keiner bereits 17 Jahre alt ist.
(**D**) es einen gibt, der jünger als 17 Jahre ist.
(**E**) es einen gibt, der 18 Jahre alt ist.

Lösung: Die Verneinung der Aussage „Alle sind mindestens 17 Jahre alt." lautet: *Es gibt einen*, für den das Kriterium, mindestens 17 Jahre alt zu sein, *nicht zutrifft*, also einen, der jünger ist. (**D**) ist richtig.

4. Wie viele Paare reeller Zahlen (a, b) sind Lösung der Gleichung $(a-3)^2+(b-2)^2=0$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 36 (**E**) 0

Lösung: Da Quadratzahlen stets ≥ 0 sind, muss jedes der beiden Quadrate gleich 0 sein, damit die Summe 0 entsteht. Das gilt nur, wenn $a=3$ und $b=2$ ist. Es gibt genau ein Lösungspaar.

5. Aufziehosterhasen werden für den Versand einzeln in kleine würfelförmige Schachteln verpackt. Diese kommen dann in größere, ebenfalls würfelförmige Schachteln. Auf den Boden einer großen Schachtel passen genau 16 kleine. Wie viele kleine Schachteln passen maximal in eine große Schachtel?

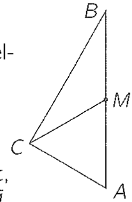
(**A**) 32 (**B**) 56 (**C**) 64 (**D**) 128 (**E**) 256

Lösung: Wenn sich auf dem Boden eines würfelförmigen Kartons 16 kleine Würfel befinden, so sind das in jeder der beiden Richtungen 4. Diese Anzahl muss dann auch für die Höhe zutreffen, wenn die große Schachtel gefüllt wird. Es sind insgesamt $4\cdot 4\cdot 4=4^3=64$ kleine Schachteln mit Aufziehosterhasen.

6. Wie viele 4-stellige, durch 5 teilbare natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffern alle ungerade sind?

(**A**) 900 (**B**) 625 (**C**) 250 (**D**) 125 (**E**) 95

Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass bei allen gesuchten vierstelligen Zahlen die letzte Ziffer 5 sein muss. Für die Tausender-, Hunderter- und Zehnerstelle hingegen kommt jede der Zahlen 1, 3, 5, 7 und 9 unabhängig voneinander als Ziffer in Frage. Da dies 5 Ziffern sind, die für die 3 möglichen Stellen in Frage kommen, handelt es sich um $5^3 = 125$ Zahlen.

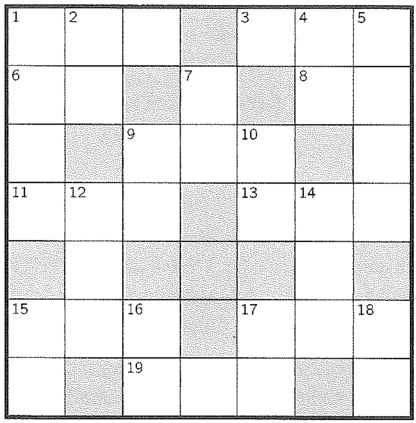


7. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. M sei der Mittelpunkt der Hypotenuse AB und $\measuredangle BAC = 60°$. Dann ist $\measuredangle BMC$ gleich

(**A**) 105° (**B**) 108° (**C**) 110° (**D**) 112° (**E**) 120°

Lösung: Da M Mittelpunkt der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist, befindet sich C auf dem Thaleskreis über AB mit Mittelpunkt M. Es ist $\overline{AM} = \overline{CM}$. Folglich ist das Dreieck $\triangle CAM$ gleichschenklig und, da einer seiner Winkel, nämlich $\measuredangle BAC = 60°$ ist, sogar gleichseitig. Der gesuchte Winkel $\measuredangle BMC$ ist als Außenwinkel dieses Dreiecks 120° groß.

Mathematisches Kreuzformelrätsel



In diesem Kreuzformelrätsel sind die Kästchen-Trennstriche stets als Multiplikationszeichen (mal) zu lesen. Bei der Eintragung der gesuchten Formeln sind Potenzen auszuschreiben (z. B. $r^2 = r \cdot r$), und die Reihenfolge von Faktoren ist in geeigneter Weise selbst zu wählen (z. B. $\pi r^2 = \pi \cdot r \cdot r = r \cdot \pi \cdot r = r \cdot r \cdot \pi$).

Waagerecht: **1** *Flächeninhalt eines Kreises (Radius r)* **3** *Umfang eines Kreises (Radius r)* **6** *Durchmesser einer Kugel (Radius r)* **8** *Verhältnis der Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders (Durchmesser d, Höhe h) zu seiner Höhe h* **9** *Mantelfläche eines Würfels (Kantenlänge a)* **11** *Mantelfläche eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas (Grundkante a, Höhe h)* **13** *Mantelfläche eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas (Grundkante a, Höhe h)* **15** *Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide (Grundkante a, Seitenflächenhöhe h_S)* **17** *Oberfläche eines Tetraeders (Kantenlänge a)* **19** *Volumen eines Quaders (Kantenlängen a, b, c).*

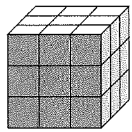
Senkrecht: **1** *Volumen eines geraden Kreiszylinders (Radius r, Höhe h)* **2** *Durchmesser eines Kreises (Radius r)* **4** *Umfang eines Kreises (Durchmesser d)* **5** *Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders (Radius r, Höhe h)* **7** *Flächeninhalt eines Rechtecks (Seitenlängen a, b)* **9** *Umfang eines Quadrats (Seitenlänge a)* **10** *Umfang eines regelmäßigen Sechsecks (Seitenlänge a)* **12** *Mantelfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide (Grundkante a, Seitenflächenhöhe h_S)* **14** *Volumen eines regelmäßigen vierseitigen Prismas (Grundkante a, Höhe h)* **15** *der Vollwinkel im Bogenmaß* **16** *Flächeninhalt eines Quadrats (Seitenlänge a)* **17** *Flächeninhalt eines Rechtecks (Länge a, Breite c)* **18** *Länge der Raumdiagonale eines Würfels (Kantenlänge a).*

8. Welches ist die letzte Ziffer der Zahl $17^3 \cdot 22^4 \cdot 33^4$?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Um die letzte Ziffer eines Produkts zu finden, genügt es, jeweils die letzten Ziffern der Faktoren miteinander zu multiplizieren. Es endet $7 \cdot 7$ auf 9 und $9 \cdot 7$ auf 3, also endet 17^3 auf 3. Es endet $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ auf 6, also endet auch 22^4 auf 6. Es endet $3 \cdot 3$ auf 9, und $(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)$ folglich auf 1, also endet 33^4 auf 1. Damit endet das Produkt $17^3 \cdot 22^4 \cdot 33^4$ auf die letzte Ziffer des Produkts $3 \cdot 6 \cdot 1$, also auf 8.

9. Ein Würfel (s. Abb.) besteht aus 27 kleinen Würfeln, von denen ein jeder eine Oberfläche von $24\,\text{cm}^2$ hat. Wie groß ist die Oberfläche des großen Würfels?



(**A**) $216\,\text{cm}^2$ (**B**) $182\,\text{cm}^2$ (**C**) $156\,\text{cm}^2$ (**D**) $144\,\text{cm}^2$ (**E**) $96\,\text{cm}^2$

Lösung: Der große Würfel hat die Abmessungen $3 \times 3 \times 3$. Die Kanten des großen Würfels sind also 3-mal so lang wie die der kleinen Würfel. Daraus folgt, dass die Oberfläche des großen Würfels 3^2-mal so groß ist wie die der kleinen Würfel (das Volumen wäre 3^3-mal so groß). Für den Oberflächeninhalt des großen Würfels erhalten wir also $3^2 \cdot 24\,\text{cm}^2 = 216\,\text{cm}^2$.
Zum selben Ziel gelangen wir, wenn wir den Flächeninhalt einer Seitenfläche eines kleinen Würfels ausrechnen und die Oberfläche des großen Würfels auszählen.

10. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Kanten eines Prismas angeben?

(**A**) 100 (**B**) 111 (**C**) 112 (**D**) 115 (**E**) 125

Lösung: Ein Prisma ist ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche zueinander kongruente und parallele Vielecke sind. Bei Vielecken ist die Seitenzahl gleich der Eckenzahl. Die Kanten, die nicht Seite der Grund- oder Deckfläche sind, verbinden die einander entsprechenden Ecken der beiden Vielecke. Es gibt also insgesamt genau dreimal so viele Kanten, wie die Grundfläche Ecken hat. Die Kantenzahl muss folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für 111 zu.

11. In jeder Frühstückspause findet auf dem Schulhof ein reger Tauschmarkt statt. Die Konditionen sind allen bekannt (s. Abb.). Zora will sich mit Gummibärchen einen Apfel, ein halbes Wurstbrot und eine Streuselschnecke ertauschen. Wie viele Gummibärchen muss sie dafür hergeben?

1 Streuselschnecke	$\Longleftrightarrow$	3 halbe Wurstbrote
1 Apfel + 9 Gummibärchen	$\Longleftrightarrow$	2 halbe Wurstbrote
16 Gummibärchen	$\Longleftrightarrow$	1 Apfel

(**A**) 55 (**B**) 66 (**C**) 77 (**D**) 88 (**E**) 99

Lösung: Für die Streuselschnecke braucht Zora 3 halbe Wurstbrote, d. h., da sie ja auch ein Wurstbrot behalten möchte, dass sie sich 4 halbe Wurstbrote ertauschen muss. Sie braucht dafür 2 mal einen Apfel plus 2 mal 9 Gummibärchen. Da sie jedoch auch einen Apfel möchte, muss sie sich insgesamt 3 Äpfel ertauschen. Diese kosten $3 \cdot 16 = 48$ Gummibärchen. Hinzu kommen die 2 mal 9 Gummibärchen zum Ertauschen der Wurstbrote. Insgesamt sind also $48 + 2 \cdot 9 = 66$ Gummibärchen vonnöten.

12. Irenes Bruder übt Addieren. Er hat sich 5 ganze Zahlen ausgesucht und sämtliche möglichen Summen aus 2 dieser 5 Zahlen gebildet: $-3, -1, 0, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 9$. „Welches deine 5 Zahlen sind, weiß ich zwar nicht, aber die Summe der 5 Zahlen kann ich ausrechnen", sagt Irene. Die Summe ist

(**A**) 0 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 12

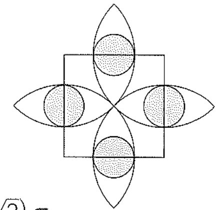
Lösung: Mit a, b, c, d, e bezeichnen wir die Zahlen, die sich Irenes Bruder zum Addieren ausgedacht hat. Dann ist $(a+b)+(a+c)+(a+d)+(a+e)+(b+c)+(b+d)+(b+e)+(c+d)+(c+e)+(d+e) = 4\cdot(a+b+c+d+e) = -3+(-1)+0+2+3+3+4+5+6+9 = 28$. Und für $a+b+c+d+e$ erhalten wir folglich $28 : 4 = 7$. – Übrigens hätte Irene die Zahlen, die sich ihr Bruder ausgesucht hat, auch eindeutig ermitteln können. Es sind $-2, -1, 1, 4$ und 5.

13. Die ganzen Zahlen x und y erfüllen die Gleichung $2x = 5y$. Nur eine der folgenden Zahlen kann unter dieser Bedingung $x+y$ sein. Welche?

(**A**) 27 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 35 (**E**) 41

Lösung: Wir formen um: $y = \frac{2}{5}x$. Es soll $g = x+y = x+\frac{2}{5}x = \frac{7}{5}x$ eine ganze Zahl sein. Folglich ist $5g = 7x$. Die Zahl g muss durch 7 teilbar sein. Von den Zahlen, die als Lösungsmöglichkeiten vorgeschlagen sind, ist nur 35 durch 7 teilbar.

14. Um die Eckpunkte eines Quadrates der Seitenlänge 2 sind vier Halbkreise konstruiert, die sich im Mittelpunkt des Quadrats schneiden. Die vier kleineren grauen Kreise, deren Zentren in den Mittelpunkten der Quadratseiten liegen, berühren je zwei Halbkreise von innen (s. Abb.). Welchen Flächeninhalt haben diese vier grauen Kreise insgesamt?



(**A**) $2\sqrt{2}\pi$ (**B**) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ (**C**) π (**D**) $\frac{\pi}{4}$ (**E**) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$

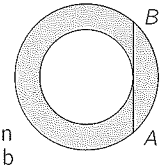
Lösung: Der Radius der großen Halbkreise hat die halbe Länge der Diagonale des Quadrats, also $\sqrt{2}$. Damit können wir nun die Länge des Durchmessers der kleinen Kreise ausrechnen, sie beträgt $2-2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}-2$, und der Radius hat die Länge $\sqrt{2}-1$. Die gesuchte Fläche ist die vierfache Kreisfläche des kleinen Kreises, also $4\cdot\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 4\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$.

15. Die drei Zahlen $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ und $\sqrt[6]{7}$ sind unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente einer geometrischen Folge. Dann ist das nächste Element in dieser Folge

(**A**) $\sqrt[9]{7}$ (**B**) $\sqrt[12]{7}$ (**C**) $\sqrt[5]{7}$ (**D**) $\sqrt[10]{7}$ (**E**) 1

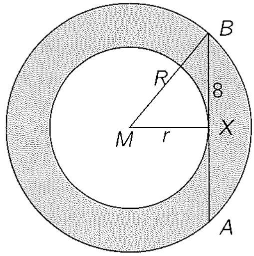
Lösung: Wir schreiben ein wenig um: Es sind $7^{\frac{1}{2}}, 7^{\frac{1}{3}}$ und $7^{\frac{1}{6}}$ aufeinander folgende Elemente einer geometrischen Folge. Der Quotient ist $\frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)} = 7^{-\frac{1}{6}}$. Daraus berechnen wir das auf $7^{\frac{1}{6}}$ folgende Element. Es ist $7^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{-\frac{1}{6}} = 1$.
Wer weiß, dass bei geometrischen Folgen jedes Folgenglied geometrisches Mittel seiner Nachbarn ist, findet auf folgende Weise schnell eine Lösung: Bezeichnen wir mit x das gesuchte Folgenglied, so gilt $\sqrt[6]{7} = \sqrt{\sqrt[3]{7}\cdot x} = \sqrt[6]{7}\cdot\sqrt{x}$. Also ist $x = 1$.

16. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt bilden einen Kreisring. Die Sehne $\overline{AB}$ im großen Kreis ist Tangente an den kleineren Kreis; sie ist 16 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat der Kreisring?



(**A**) $32\pi\,\text{cm}^2$ (**B**) $48\pi\,\text{cm}^2$ (**C**) $64\pi\,\text{cm}^2$ (**D**) $32\pi^2\,\text{cm}^2$ (**E**) das hängt von den Radien ab

Lösung: Das Dreieck mit den Ecken im Mittelpunkt M der beiden Kreise, im Berührungspunkt X der Tangente sowie im Punkt B ist rechtwinklig. Ist R der Radius des großen Kreises, r der Radius des kleinen Kreises, so gilt nach dem Satz des Pythagoras: $R^2 = r^2 + (8\,\mathrm{cm})^2$. Das lässt sich nun zu $R^2 - r^2 = 64\,\mathrm{cm}^2$ umformen. Der Flächeninhalt A_K des Kreisringes ist die Differenz der Flächeninhalte der beiden Kreisflächen, also gleich $A_K = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) = 64\pi\,\mathrm{cm}^2$.



17. Es sei N der größte Wert, den der Term $1{\star}2{\star}3{\star}4{\star}5{\star}6{\star}7{\star}8{\star}9{\star}10$ annehmen kann, wenn jedes Sternchen entweder durch „+" oder durch „·" ersetzt wird. Welches ist der kleinste Primfaktor von N?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) eine Primzahl größer als 7

Lösung: Offenbar ist $1+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$ der größte Wert, den der Term beim Ersetzen der Sternchen annehmen kann, also gleich N. Dieser Term lässt bei Division durch 2, 3, 5 und 7 je den Rest 1, ist folglich durch keine dieser Primzahlen teilbar, wohl aber durch eine andere, die dann natürlich größer als 7 sein muss. Übrigens ist $1+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 11\cdot329891$. Die Zahlen 11 und 329891 sind die Primfaktoren von N.

18. An jede Ecke eines Fünfecks stellen wir uns eine natürliche Zahl geschrieben vor. Keine dieser Zahlen hat mit einer benachbarten einen gemeinsamen Teiler > 1, aber jede der Zahlen hat mit jeder nicht-benachbarten Zahl stets einen gemeinsamen Teiler > 1. So etwas ist auf vielfältige Weise möglich. Welche der folgenden Zahlen kann *gewiss nicht* an einer der Ecken stehen?

(**A**) 87 (**B**) 111 (**C**) 121 (**D**) 127 (**E**) 133

Lösung: Wir bemerken zuerst, dass keine der 5 Zahlen eine Primzahl sein kann, da jede Zahl mit den beiden nicht-benachbarten Zahlen jeweils einen gemeinsamen Teiler > 1 hat. Weiterhin müssen diese beiden Teiler verschieden sein, da benachbarte Zahlen keine gemeinsamen Teiler > 1 besitzen. Schauen wir uns nun die zur Auswahl stehenden Zahlen an, so finden wir, $87 = 3\cdot29$, $111 = 3\cdot37$ und $133 = 7\cdot19$, womit die Zahlen 87, 111 und 133 einen Platz an einer der Ecken haben könnten. Die 127 ist eine Primzahl und kann an keiner Ecke stehen, aber auch die 121 kann an keiner Ecke stehen, denn wegen $121 = 11\cdot11$ hat sie keine zwei verschiedenen Teiler.

Bei dieser Aufgabe ist den Autoren der Version für Deutschland und die Schweiz ein Fehler unterlaufen, denn hier ist die Bedingung des Känguru-Wettbewerbs, dass von den 5 Antwortmöglichkeiten genau eine richtig ist, nicht erfüllt. Es sind (**C**) und (**D**) richtig.

19. Von einem Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen ist bekannt, dass eine der Seitenlängen 13 ist. Außerdem ist das Produkt der beiden anderen Seitenlängen 105. Welchen Umfang hat dieses Dreieck?

(**A**) 35 (**B**) 39 (**C**) 51 (**D**) 69 (**E**) 119

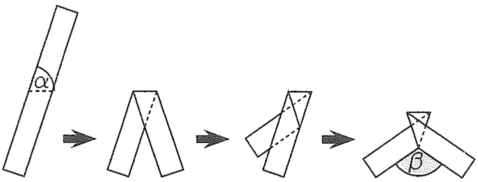
Lösung: s. Lösungstext für Aufgabe 17 in der Klassenstufe 9/10.

20. Am Pokerturnier „Viertel-Cup“ nahmen diesmal exakt 100 Spieler teil. Das Originelle ist, dass bei diesem Turnier jeder Platz vom Ersten bis zum Hundertsten ausgespielt wird und am Ende jeder für Essen und Getränke so viele Viertel-Euro bezahlt, wie seine Platzierung angibt: der Sieger zahlt also 0,25 €, der zweite 0,50 €, der dritte 0,75 €, usw. Als der Veranstalter die Einnahmen des Abends zählt, kommt er auf 1207 €. „Gemeinheit, da haben ja welche geschummelt“, murrt er. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Teilnehmern, die einen falschen Betrag gezahlt haben?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

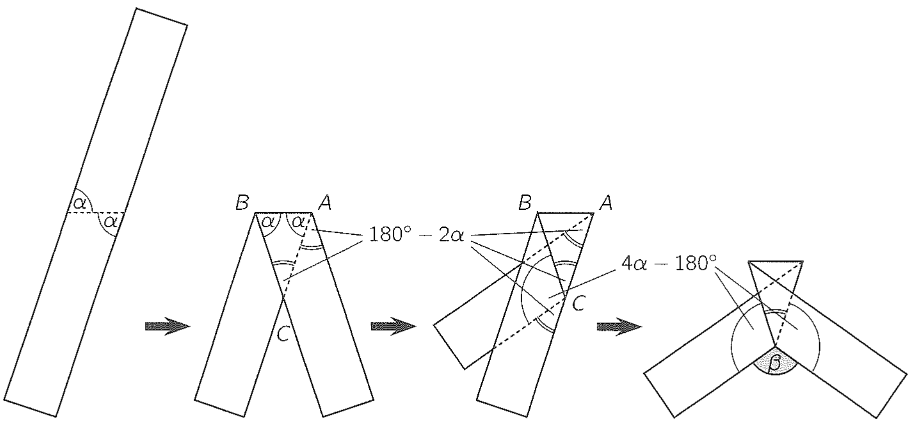
Lösung: Der Einfachheit halber multiplizieren wir alle Geldbeträge mit 4. Die Summe der – per Bezahlung von Essen und Getränken – von den Pokerspielern angegebenen Platzierungen ist dann $1207 \cdot 4 = 4828$. Es hätte jedoch die Zahl $1 + 2 + \ldots + 100 = 101 \cdot 50 = 5050$ sein müssen. Nehmen wir den Extremfall an, dass gerade *die* Spieler, die auf den allerletzten Rängen gelandet sind, so bezahlt haben, als wären sie die Erstplatzierten. Es hätten also der Spieler vom 100. Platz und der vom 99. Platz und eventuell weitere sich als Sieger ausgegeben. Damit würden entsprechend $99 + 98 + 97 + \ldots$ zu 5050 fehlen. Die minimale Zahl von Falschzahlern finden wir, wenn wir in der angezeigten Weise so lange addieren, bis $5050 - 4828 = 222$ übertroffen ist. Es ist $99 + 98 < 222$, jedoch $99 + 98 + 97 > 222$. Es waren also mindestens drei unehrliche Pokerspieler beim Poker-Viertel-Cup.

21. Ein Papierstreifen ist dreimal gefaltet worden (s. Abb.). Wie groß ist β, wenn $\alpha = 70°$ ist?



(**A**) 140° (**B**) 130° (**C**) 120° (**D**) 110° (**E**) 100°

Lösung: Wir tragen in jedem der vier Bilder die uns bekannten Winkel ein:



Im Bild 1 haben wir neben dem bekannten Winkel α seinen Wechselwinkel eingetragen.
Im Bild 2 sehen wir den Streifen nach dem 1. Falten. Der im Bild 1 eingezeichnete Wechselwinkel ist ebenso wie der gegebene Winkel Innenwinkel des von den Kanten des Streifens gebildeten Dreiecks ABC, das demnach gleichschenklig mit Basis AB ist. Der dritte Innenwinkel von $\triangle ABC$ misst $180° - 2\alpha$. Dies ist auch die Größe des Wechselwinkels zu diesem Winkel bei A.

Das Ergebnis des 2. Faltens ist in Bild 3 dargestellt. Gefaltet wird um $180° - 2\alpha$, und dieser Winkel tritt als Stufenwinkel auch bei C auf. Der dritte Winkel bei C ist der Ergänzungswinkel zu $180°$ und beträgt $180° - (2 \cdot (180° - 2\alpha) = 4\alpha - 180°$.
Beim 3. Falten entsteht schließlich der gesuchte Winkel β. Es ist $\beta = 360° - 2 \cdot (4\alpha - 180°) - (180° - 2\alpha) = 540° - 6\alpha = 120°$.

22. Ich mache ein Würfelexperiment. In jedem Versuch würfle ich mit einem Würfel dreimal nacheinander und notiere die drei Augenzahlen genau dann, wenn die Augenzahl des dritten Wurfs gleich der Summe der Augenzahlen des ersten und zweiten Wurfs ist. Wie groß ist bei diesen notierten Dreierfolgen die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei Würfen mindestens eine 2 ist?

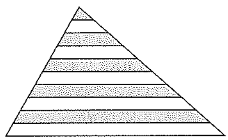
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{91}{216}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{8}{15}$ **(E)** $\frac{7}{12}$

Lösung: Wir überlegen uns zuerst, welche Augenzahlen als Summe zweier Augenzahlen überhaupt in Frage kommen und wie die entsprechende Summe entstehen kann. Wir führen in der folgenden kleinen Tabelle in der ersten Spalte die Punktzahl des dritten Wurfes auf und geben in den folgenden Spalten an, wie diese Augenzahl als Summe der Augenzahlen der davorliegenden zwei Würfe entstanden sein kann.

3. Wurf	mögliche Summen				
1	–				
2	$1+1$				
3	$1+2$	$2+1$			
4	$1+3$	$2+2$	$3+1$		
5	$1+4$	$2+3$	$3+2$	$4+1$	
6	$1+5$	$2+4$	$3+3$	$4+2$	$5+1$

Es gibt insgesamt 15 Fälle, in denen die Summe der Augenzahlen der beiden ersten Würfe gleich der Augenzahl beim dritten Wurf ist. In einem Fall erscheint eine 2 im dritten Wurf, in sieben Fällen erscheint mindestens eine 2 im ersten oder zweiten Wurf. Insgesamt sind das 8 Fälle. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine 2 anzutreffen, ist also $\frac{8}{15}$.

23. Parallel zur Grundlinie eines Dreiecks werden Linien gezeichnet, die die beiden anderen Seiten in 10 gleich große Teile teilen. Jeder zweite Streifen wird grau eingefärbt (s. Abb.). Wie viel Prozent der Dreiecksfläche ist grau?



(A) 41,75 % **(B)** 42,5 % **(C)** 45 % **(D)** 46 % **(E)** 47,5 %

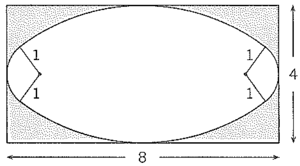
Lösung: Der Lösungsgedanke findet sich im 2. Lösungsweg der Aufgabe 23 in der Klassenstufe 9/10. In unserem Dreieck finden wir nach der analogen Zerlegung insgesamt $1+3+5+\ldots+19 = 100$ kongruente Teildreiecke, denn wir haben insgesamt 10 Streifen. Davon enthalten die grauen Streifen $1+5+9+13+17 = 45$ der kongruenten Teildreiecke. Folglich beträgt der Anteil der Fläche der 5 grauen Streifen an der Gesamtfläche 45 %.

24. Wie viele rechtwinklige Dreiecke gibt es, deren drei Eckpunkte gleichzeitig Eckpunkte eines gegebenen regelmäßigen 10-Ecks $A_1A_2A_3\ldots A_9A_{10}$ sind?

(A) 40 **(B)** 42 **(C)** 48 **(D)** 64 **(E)** 80

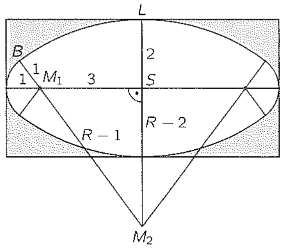
Lösung: Da wegen der Regelmäßigkeit des 10-Ecks alle Eckpunkte auf ein und demselben Kreis liegen, zeichnen sich die rechtwinkligen Dreiecke dadurch aus, dass ihre Hypotenusen Durchmesser dieses Kreises sind (Umkehrung des Satzes von Thales). Zu jedem Eckpunkt gibt es genau einen Durchmesser. Da der Endpunkt dieses Durchmessers ebenfalls ein Eckpunkt des 10-Ecks ist, gibt es genau 5 *verschiedene* Diagonalen, die gleichzeitig Durchmesser des Umkreises sind. Über jeder dieser 5 Diagonalen können zweimal 4 rechtwinklige Dreiecke mit Eckpunkten in den Eckpunkten des 10-Ecks gefunden werden. An einem Beispiel wollen wir dies veranschaulichen: Zur Diagonale A_1A_6 gehören die folgenden 8 rechtwinkligen Dreiecke $A_1A_2A_6$, $A_1A_3A_6$, $A_1A_4A_6$, $A_1A_5A_6$, $A_1A_7A_6$, $A_1A_8A_6$, $A_1A_9A_6$, $A_1A_{10}A_6$. Insgesamt sind es $5 \cdot 8 = 40$.

25. Karl möchte aus Gummi einen 4 cm breiten und 8 cm langen ovalen Stempel schneiden. Ein Muster des horizontal und vertikal symmetrischen Ovals hat er mit Hilfe von vier Kreisbögen erstellt (s. Abb.). In den vier Berührungspunkten stimmen die Tangenten der jeweils aneinanderstoßenden Bögen überein. Wie groß muss Karl den Radius der großen Kreisbögen wählen, wenn der kleine Radius 1 cm beträgt?



(**A**) 6 cm (**B**) 6,5 cm (**C**) 7 cm (**D**) 7,5 cm (**E**) 8 cm

Lösung: Der Einfachheit halber lassen wir die Dimensionen weg, alle Angaben sind in cm. Es sei M_1 der Mittelpunkt eines der kleinen, M_2 der eines der großen Kreise (s. Abb.). Die Gerade durch M_1 und M_2 enthält auch den Berührungspunkt B der gemeinsamen Tangente. $\overline{M_2B}$ ist also gleich dem Radius R des größeren Kreises. Es sei L der Lotfußpunkt von M_2 auf die gegenüberliegende längere Rechtecksseite. M_2L schneidet die Mittellinie des Rechtecks, die gleichzeitig die beiden Mittelpunkte der kleinen Kreise verbindet, im Punkt S. Das Dreieck M_1M_2S ist rechtwinklig. Für seine Seiten gilt nach dem Satz des Pythagoras: $\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1S}^2 + \overline{M_2S}^2$ bzw. nach Einsetzen $(R-1)^2 = 3^2 + (R-2)^2$, woraus $R = 6$ folgt.



26. Die reellwertige Funktion f erfüllt für alle $x > 0$ die Gleichung $2f(x) + 3f\left(\frac{100}{x}\right) = 5x$. Welchen Wert hat $f(1)$?

(**A**) 1 (**B**) 298 (**C**) 77 (**D**) 0 (**E**) 1011

Lösung: Durch das Einsetzen geeigneter Werte für x können wir genügend Information zusammentragen, um den gesuchten Funktionswert anzugeben. Setzen wir $x = 1$ und $x = 100$ ein, so erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem, aus dem wir die beiden Unbekannten $f(1)$ und $f(100)$ ausrechnen können:

$$\begin{aligned} 2f(1) + 3f(100) &= 5 \cdot 1 \\ 2f(100) + 3f(1) &= 5 \cdot 100 \end{aligned}$$

Durch Addieren beider Gleichungen und anschließendes Dividieren durch 5 finden wir die erste, durch Subtrahieren dieser Gleichungen die zweite der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(1) + f(100) &= 101 \\ f(1) - f(100) &= 495 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann durch Addition der beiden Gleichungen $2f(1) = 596$ bzw. $f(1) = 298$.

27. Ihre Augen leuchteten, als die Piraten Sparrow, Barbossa und Turner die Schatzkiste öffneten und den Berg Goldmünzen sahen. Nach alter Piratentradition nahm sich zuerst Sparrow eine Münze, dann Barbossa zwei, Turner drei, dann Sparrow vier, Barbossa fünf, usw. So wurden die Goldmünzen *ohne Rest* aufgeteilt. Zum Schluss hatte Barbossa 20 Münzen mehr als Turner, und Sparrow bekam

(**A**) 117 Münzen. (**B**) 126 Münzen. (**C**) 145 Münzen. (**D**) 187 Münzen. (**E**) 210 Münzen.

Lösung: Da es sich um nicht allzu große Zahlen handelt und das Rechnen schnell geht, ist ein durchaus vernünftiger Lösungsweg, die wachsenden Münzhaufen aufzuschreiben (s. Tabelle rechts).
Nachdem wir für Barbossa die 155 Münzen ausgerechnet haben, wissen wir, dass Sparrow 145 Goldmünzen sein Eigen nennen darf. Denn: Barbossa hat nun 20 Münzen mehr als Turner und die Differenz zwischen seinem und dem Anteil Turners wächst ständig weiter, es gibt also, wenn weiter verteilt werden würde, keinen weiteren Punkt, an dem er genau 20 Münzen mehr als Turner hat. – Grund dafür ist die Bedingung aus der Aufgabe, dass bei diesem Aufteilungsverfahren alle Münzen ohne Rest zugeordnet werden können.

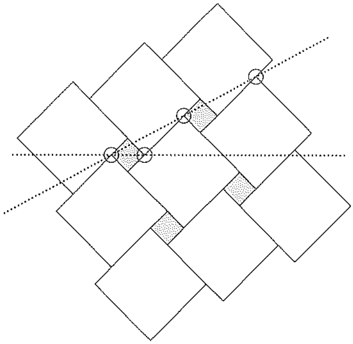
Sparrow	Barbossa	Turner
1	2	3
5	7	9
12	15	18
22	26	30
35	40	45
51	57	63
70	77	84
92	100	108
117	126	135
145	155	

KAENGURU-Schüttelrätsel

In die linke Figur wurden acht mathematische Begriffe waagerecht eingetragen, die jedoch ordentlich durchgeschüttelt wurden. Um welche Begriffe es sich handelt, das gilt es zu erraten, indem die Buchstaben in den einzelnen Wörtern wieder in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Die Anfangsbuchstaben dieser mathematischen Begriffe sind bereits als KAENGURU *vorgegeben.*

K	O	R	N	Z	U	N	G	E	⟶	K									
A	H	N	A	K	E	T	T	E	⟶	A									
E	P	I	L	I	D	L	O	S	⟶	E									
N	O	G	U	L	F	E	L	L	⟶	N									
G	I	C	H	L	U	N	G	E	⟶	G									
U	N	D	I	N	L	E	C	H	⟶	U									
R	E	V	O	L	L	K	U	R	⟶	R									
U	G	A	R	T	R	E	B	E	⟶	U									

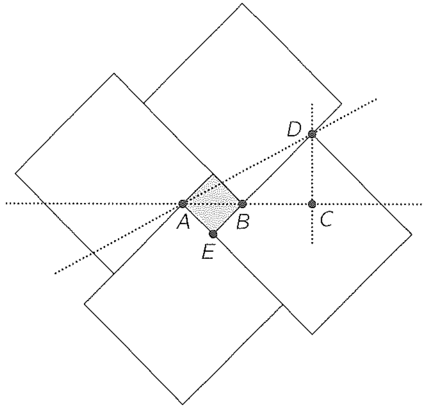
28. Der Fußboden der Burg, die wir für ein Geschichtsprojekt besuchen, wird gerade restauriert. Die Restauratorin zeigt uns historische Dokumente mit einem Bild. „Die kleinen Fliesen sind 9 cm × 9 cm", erklärt sie uns, „und der Fliesenverschiebungswinkel, der durch die markierten Punkte festgelegt wird, ist in den Aufzeichnungen mit 30° verzeichnet. Daraus kann man dann die Kantenlänge der großen Fliesen berechnen." Sie beträgt



(**A**) $9\cdot(2\cdot\sqrt{3})$ cm (**B**) $9\cdot(2+\sqrt{3})$ cm (**C**) $9\cdot 2$ cm

(**D**) $9\cdot(3\cdot\sqrt{2})$ cm (**E**) $9\cdot(3+\sqrt{2})$ cm

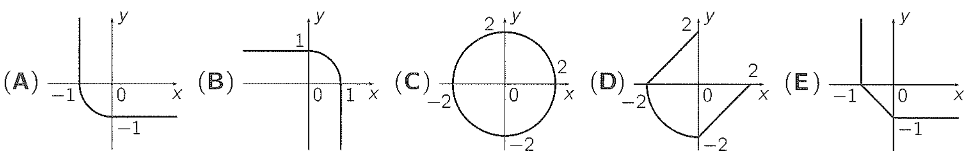
Lösung: Der Kürze halber lassen wir in der Lösung die Maßeinheit weg. Im abgebildeten Teil des Parketts sind die Punkte, die wir für die Darstellung der Lösung benötigen, bezeichnet. Dabei sei C der Lotfußpunkt von D auf die Gerade AB. Offenbar ist $\overline{ED} = 9+\overline{BD}$ die gesuchte Kantenlänge der großen Fliesen.



Wegen $\measuredangle CAD = 30°$ ist $\triangle ACD$ ein „halbes" gleichseitiges Dreieck mit CD als halber Seite und AC als Höhe. Weiterhin beträgt der Winkel, den AB als Diagonale mit den Fliesenkanten bildet, 45°, und dies trifft auch für den Scheitelwinkel $\measuredangle CBD$ zu. Folglich ist $\triangle BCD$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{BC} = \overline{CD}$. Damit erhalten wir für $\triangle ACD$: $(\overline{AB}+\overline{BC})^2 = (2\overline{BC})^2-\overline{BC}^2$ bzw. nach $\overline{BC}$ aufgelöst $\overline{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\overline{AB}$. Nun können wir $\overline{BD}$ berechnen: $\overline{BD} = \sqrt{2}\,\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\sqrt{2}\cdot 9$ bzw. nach Erweitern mit $\sqrt{3}+1$: $\overline{BD} = \left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 9$. Dabei haben wir benutzt, dass $\overline{AB}=$ als Diagonale der kleinen Fliese gleich $\sqrt{2}\cdot 9$ ist. Schließlich ist $\overline{ED} = 9+\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 9 = 9\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Wer sich gut in den trigonometrischen Additionstheoremen auskennt und bemerkt hat, dass $\measuredangle ADE = 15°$ ist, konnte wesentlich schneller zur Lösung gelangen. Wir betrachten das Dreieck AED. Es ist $\tan 15° = \frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{9}{\overline{ED}}$. Nun können wir unter Zuhilfename des Tafelwerks rechnen: Es gilt $\tan\frac{30°}{2} = \frac{\sin 30°}{1+\cos 30°} = \frac{1/2}{1+1/2\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, woraus $\overline{ED} = \frac{9}{\tan 15°} = 9\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$ folgt.

29. Welcher der Graphen gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 = 4$?



Lösung: Da genau einer der Graphen richtig ist, liegt es bei dieser Aufgabe nahe, die falschen auszuschließen. Dazu wählen wir einzelne Werte für x bzw. y. Setzen wir $x = 0$, so muss $|y - |y|| = 2$ gelten, was nur für $y = -1$ gilt. Damit sind nur die Lösungsmöglichkeiten (**A**) und (**E**) möglich. Wir können auf dieselbe Weise ausschließen, dass (**E**) Lösung sein kann. Falls nämlich (**E**) Lösung wäre, müsste an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ auch $y = -\frac{1}{2}$ gelten. Jedoch ist $\left(-\frac{1}{2} - \left|-\frac{1}{2}\right|\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \left|-\frac{1}{2}\right|\right)^2 = 2 \neq 4$. Also ist (**A**) die Lösung.

30. Die Strichcodes, die wir untersuchen wollen, bestehen abwechselnd aus schwarzen und weißen Strichen und beginnen und enden schwarz. Die Striche haben die Breite 1 oder 2, und die Gesamtbreite eines Codes soll 14 sein (s. Beispiel rechts). Wie viele verschiedene Codes sind möglich, wenn stets von links nach rechts gelesen wird?

(**A**) 116 (**B**) 132 (**C**) 116 (**D**) 294 (**E**) 305

Lösung: Da zu n schwarzen Strichen stets $n-1$ weiße gehören, ist die Anzahl der Striche stets ungerade. Die maximale Anzahl von Strichen im 14 Einheiten breiten Strichcode beträgt 13, die minimale Anzahl ist 7.

Fall 1: Es sind 13 Striche: 7 schwarze und 6 weiße. Genau ein Strich muss 2 Einheiten breit sein (wir wollen ihn „breiten Strich" nennen), die anderen sind 1 Einheit breit. Nun kann der breite Strich einer der weißen oder einer der schwarzen Striche sein. Es gibt 13 Möglichkeiten für den breiten Strich, und jede Möglichkeit liefert einen anderen Strichcode.

Fall 2: Es sind 11 Striche: 6 schwarze und 5 weiße. Damit die Gesamtbreite 14 beträgt, müssen $14 - 11 = 3$ Striche breit sein. Wie im Fall 1 brauchen wir auch hier keine Unterscheidung danach zu machen, wie viele schwarze und wie viele weiße Striche breit sind. Es genügt, die Anzahl der Möglichkeiten zu ermitteln, die es insgesamt für 3 breite Striche gibt, denn jede dieser Möglichkeiten liefert einen anderen Strichcode. Es gibt folglich genau so viele verschiedene Strichcodes wie es Möglichkeiten gibt, 3 Dinge aus 11 Dingen auszuwählen. Das ist $\binom{11}{3} = 165$
(Eine Erläuterung zur Bedeutung des Binomialkoeffizienten $\binom{11}{3}$ befindet sich am Ende des Lösungstextes von Aufgabe 30 in Klassenstufe 9/10.)

Fall 3: Es sind 9 Striche: 5 schwarze und 4 weiße. Damit die Gesamtbreite 14 beträgt, müssen $14 - 9 = 5$ der Striche breit sein. Die Anzahl der verschiedenen Strichcodes ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, 5 Dinge aus 9 Dingen auszuwählen: $\binom{9}{5} = 126$.

Fall 4: Es sind 7 Striche: 4 schwarze und 3 weiße. In diesem Fall müssen alle 7 Striche breit sein. Es gibt genau einen solchen Strichcode.

Mit diesen vier Fällen sind alle Möglichkeiten erfasst. Wir zählen insgesamt $13+165+126+1 = 305$ verschiedene Strichcodes.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

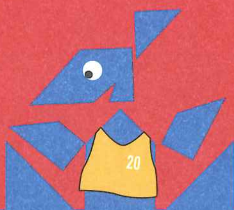
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	A	C	E	E	C	B	A	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	A	B	E	C	E	A	A	C	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	D	D	B	C	C	D	D	A	E

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	D	B	D	B	E	A	E	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	B	E	E	E	A	C	D	C
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	D	E	C	A	B	B	C	E	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	D	A	C	D	E	E	A	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	B	D	E	E	C	E	C/D	A	A
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	D	C	A	A	B	C	B	A	E


20