2009 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2009!

In diesem Jahr wurden bei uns in der Schweiz erstmals auch Volksschulen aktiv auf den internationalen Känguru-Wettbewerb aufmerksam gemacht, an dem ja weltweit über 5 Millionen Jugendliche teilnehmen. Durch Vermittlung von René Schelldorfer (Pädagogische Hochschule Zürich) konnten so fast 3000 zusätzliche junge Leute gewonnen werden, womit – zusammen mit den „Stammgästen" – die Grenze von 14 000 Teilnehmenden überschritten worden ist.

Dass die Aufgabenstellungen sich ein wenig von denen aus den Schullehrbüchern unterscheiden, mag für manchen Teilnehmenden neu gewesen sein. Aber Mathematik steckt in mehr Fragestellungen als oft vermutet, mathematische Methoden finden in unterschiedlichsten Bereichen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht und nicht nur in den Naturwissenschaften und der Vorlaufforschung für Hochtechnologien. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, Trendvoraussagen – all dies wird besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt und spielt im täglichen Leben, wohin man schaut, eine Rolle. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall in Deutschland und in der Schweiz an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre ist zur Unterstützung einer nachträglichen Beschäftigung mit den verschiedenen mathematischen Problemen gedacht. Für eine ganze Reihe von Aufgaben wurde nicht nur eine Lösungsmöglichkeit angegeben, sondern anhand der Darstellung verschiedener Wege gezeigt, dass es hilfreich ist, unterschiedliche Methoden zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen zu beherrschen.

Beim Känguru-Wettbewerb konnten für die Aufgaben 1 bis 10 jeweils 3, für die Aufgaben 11 bis 20 jeweils 4 und für die Aufgaben 21 bis 30 jeweils 5 Punkte erreicht werden; bei einer falschen Antwort wurde ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen; falls keine Antwort gegeben wurde, gab es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekam 30 Punkte als Grundpunktzahl; auf diese Weise kann es eine negative Gesamtpunktzahl nicht geben. Die Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet.
Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin
www.mathe-kaenguru.de

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Lussi Druck AG, Offsetdruck, 6370 Stans

ISBN 978-3-9812144-1-3

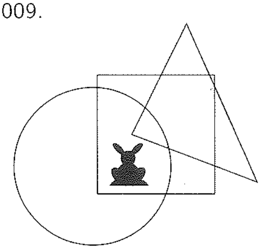
Klassenstufen 3 und 4

1. $200 \cdot 9 + 200 + 9 =$

(**A**) 418 (**B**) 1909 (**C**) 2009 (**D**) 4018 (**E**) 20009

Lösung: Wir rechnen: $200 \cdot 9 + 200 + 9 = 1800 + 200 + 9 = 2009$.

2. Wo sitzt das Kaninchen?



(**A**) Im Kreis und im Dreieck, aber nicht im Quadrat.
(**B**) Im Kreis und im Quadrat, aber nicht im Dreieck.
(**C**) Im Dreieck und im Quadrat, aber nicht im Kreis.
(**D**) Im Kreis, aber weder im Quadrat noch im Dreieck.
(**E**) Im Quadrat, aber weder im Kreis noch im Dreieck.

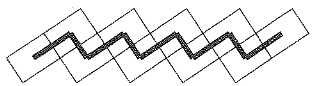
Lösung: Das Kaninchen ist sowohl im Inneren des Kreises als auch im Inneren des Quadrats. Es ist außerhalb vom Dreieck, also trifft (**B**) zu.

3. Gestern habe ich im Garten 16 sonnenreife Äpfel gepflückt. Die Hälfte gab ich meiner Mutter für den Sonntagskuchen. Dann hab ich drei gegessen, und mein Vater aß den Rest. Wie viele Äpfel hat mein Vater gegessen?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Wenn die Mutter von den 16 Äpfeln die Hälfte bekommen hat, so ist die andere Hälfte für den Vater und für mich übrig. Das sind $16 : 2 = 8$ Äpfel. Nehme ich davon drei Äpfel für mich, so bleiben für den Vater $8 - 3 = 5$.

4. Von den Platten für die Terrasse hat sich Anton zehn genommen und einen Pfad gelegt (siehe Bild). Jede Platte ist 30 cm lang und 20 cm breit. Mit Kreide hat Anton ganz sauber und gerade die Mittelpunkte der Platten verbunden. Wie lang ist diese Zickzacklinie?



(**A**) 230 cm (**B**) 300 cm (**C**) 330 cm (**D**) 400 cm (**E**) 460 cm

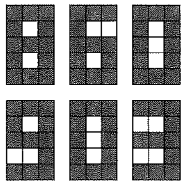
Lösung: Der Kreidestrich verläuft über alle 10 Platten. Auf der 2. bis 9. Platte ist er jeweils die halbe Länge plus die halbe Breite der Platte lang, also insgesamt $8 \cdot (15\,\text{cm} + 10\,\text{cm}) = 200\,\text{cm}$. Auf der ersten und letzten Platte ist jeweils nur die halbe Länge der Platte mit Kreide markiert, das sind $2 \cdot 15\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Insgesamt ist der dicke Kreidestrich also $200\,\text{cm} + 30\,\text{cm} = 230\,\text{cm}$ lang. – Eine andere Möglichkeit, die Länge auszurechnen, besteht darin, den Kreidestrich in kurze und lange Abschnitte zu unterteilen; es gibt 5 lange und 4 kurze. Die langen Abschnitte sind so lang wie eine Platte und sind daher 30 cm lang. Die kurzen Abschnitte sind so lang wie die Breite der Platten, 20 cm. Insgesamt ergibt das eine Länge von $5 \cdot 30\,\text{cm} + 4 \cdot 20\,\text{cm} = 230\,\text{cm}$.

5. Harry würfelt gleichzeitig mit vier Würfeln und zählt insgesamt 23 Augen. Wie viele Sechsen sind dabei?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Die maximale Augenzahl, die Harry mit vier Würfeln erzielen kann, sind $4 \cdot 6 = 24$ Augen. Er hat nur ein Auge weniger gewürfelt, was sich nur mit drei Sechsen und einer Fünf erreichen lässt.

6. Im Stadion sitzt Ines direkt neben einer großen Anzeige. Darauf sind die Zuschauerzahlen zu sehen. Sie werden mit quadratischen Klapptafeln gebildet, die eine graue und eine weiße Seite haben. Ines liest die Zahl 860 und stellt fest, dass durch Umklappen einer Tafel aus der 8 eine 9 werden könnte. Wie viele Tafeln müssten insgesamt umgeklappt werden, damit aus der 860 die 903 wird?



(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Um aus der 8 eine 9 zu erhalten, muss eine graue Tafel umgeklappt werden, um aus der 6 eine 0 zu bekommen, müssen eine weiße und eine graue Tafel umgeklappt werden, und um schließlich aus der 0 eine 3 zu erhalten, müssen zwei graue und eine weiße Tafel umgeklappt werden. Insgesamt sind es $1 + (1 + 1) + (2 + 1) = 6$ Tafeln.

7. Letzten Samstag durften wir noch einen Film sehen, der um 18:15 Uhr begann. Es gab zwei Werbepausen, die eine 5 Minuten, die andere 8 Minuten lang. Deshalb war der Film nicht nach der echten Filmlänge von 89 Minuten zu Ende, sondern später. Das war um

(**A**) 19:13 Uhr (**B**) 19:27 Uhr (**C**) 19:57 Uhr (**D**) 20:03 Uhr (**E**) 20:13 Uhr

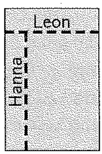
Lösung: Die Zeit vom Beginn bis zum Ende des Films setzt sich aus der Lauflänge des Films und den beiden Werbepausen zusammen, beträgt also $89 + 5 + 8 = 102$ Minuten. Da eine Stunde 60 Minuten dauert, sind 102 Minuten eine Stunde plus 42 Minuten. Der Film ist also um eine Stunde und 42 Minuten nach 18:15 Uhr zu Ende, das heißt um 19:57 Uhr.

8. Bei einem Regenguss ist vor der Haustür eine große Schlammpfütze entstanden. Ilona und Tino wollen gerade ins Haus gehen, als sie beide mit je einem Bein hinein geraten: Ilona mit dem linken, Tino mit dem rechten. Bis zu den Hausschuhen macht Ilona 12 und Tino 8 Schritte. Wie viele Schlammtapsen hinterlassen die beiden?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 20

Lösung: Von den 12 Schritten, die Ilona macht, ist jeder zweite mit dem linken Bein, d. h., die Hälfte ihrer Schritte sind Schlammtapsen. Bei Tino ist es ebenso, die Hälfte seiner Schritte, die mit dem rechten Bein, sind Schlammtapsen. Insgesamt hinterlassen die beiden Kinder $6 + 4 = 10$ Schlammtapsen.

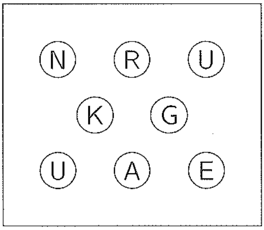
9. Eva hat eine Tafel Schokolade, die aus lauter gleich großen Stücken besteht. Zuerst bricht sie für Leon einen Streifen aus 5 Stücken ab, dann für Hanna einen aus 7 Stücken (siehe Bild). Wie viele Stücke der Tafel hat Eva dann noch übrig?



(**A**) 28 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 35 (**E**) 40

Lösung: Der Streifen, den Leon bekommt, besteht aus 5 Stücken, die Schokoladentafel hat also 5 Stücke in der Breite. Nach dem Abbrechen dieses einen Streifens ist der Streifen, den Hanna bekommt, 7 Stückchen lang. Die komplette Tafel war demzufolge 8 Stückchen lang. Damit ergibt sich, dass die komplette Tafel aus $5 \cdot 8 = 40$ Stückchen bestand. Davon sind nach der Vergabe von $5 + 7 = 12$ Stücken noch $40 - 12 = 28$ übrig. – Man kann die Anzahl der Reststücke auch direkt ausrechnen. Der Teil der Tafel, den Eva übrig behält, ist so lang wie Hannas Streifen, also 7 Stücke. Die Breite des Restes ist ein Stückchen kürzer als Leons Streifen, also 4 Stücke. Die Resttafel hat also $7 \cdot 4 = 28$ Stücke.

KAENGURU-Linienzug



Verbinde die im abgebildeten Rechteck befindlichen Buchstaben in der Reihenfolge des Wortes KAENGURU durch einen Linienzug miteinander, aber so, dass sich keine Linien schneiden.

10. Ein schwarzes und ein weißes Schaf brachten zusammen 6 kg Wolle bei der Schur. Das weiße Schaf ist ein bisschen größer und lieferte darum 1 kg Wolle mehr als das schwarze Schaf. Wie viel Wolle lieferte das weiße Schaf?

(**A**) 5 kg (**B**) 4,5 kg (**C**) 4,25 kg (**D**) 4 kg (**E**) 3,5 kg

Lösung: Ziehen wir von den 6 kg Wolle, die beide Schafe zusammen auf die Waage gebracht haben, das 1 kg ab, dass das weiße Schaf mehr gegeben hat als das schwarze, so bleiben 5 kg Wolle übrig. Diese Wolle haben die beiden Schafe zu gleichen Teilen gegeben, also jedes 2,5 kg. Das weiße Schaf hat somit $2,5\,\text{kg} + 1\,\text{kg} = 3,5\,\text{kg}$ gegeben.

11. Das Produkt zweier Zahlen ist 48 und die Summe dieser beiden Zahlen ist 16. Um welche zwei Zahlen handelt es sich?

(**A**) 6 und 10 (**B**) 16 und 3 (**C**) 24 und 2 (**D**) 12 und 4 (**E**) 8 und 6

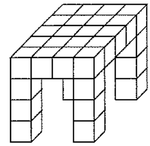
Lösung: Wir zerlegen 48 in zwei Faktoren und gehen dabei ganz systematisch vor, indem wir den ersten Faktor wachsen lassen: $48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$. Im nächsten Schritt wäre der erste Faktor größer als der zweite, und damit wäre die entsprechende Zerlegung bereits vorhanden. Da die Summe 16 sein soll, fallen die ersten drei Zerlegungen sofort weg, da einer der Faktoren größer als 16 bzw. gleich 16 ist. Für die nächsten beiden Faktoren gilt $4 + 12 = 16$, also sind 4 und 12 die gesuchten Zahlen. – Eine andere Herangehensweise ist folgende: Unter den Zahlenpaaren ist nur bei (**A**) und (**D**) die Summe der beiden Zahlen 16. Da jedoch $6 \cdot 10 = 60$ ist, kann (**A**) ausgeschlossen werden, während sich (**D**) wegen $12 \cdot 4 = 48$ als Lösung herausstellt.

12. Lorenz hat vor kurzem begonnen, Postkarten mit Tierfotos zu sammeln. 25 Katzen- und 19 Hundefotos hat er schon. Vom Taschengeld will er jede Woche 3 Hundefotos und 2 Katzenfotos dazu kaufen. Dies will er so lange tun, bis er gleich viele Postkarten von beiden Tierarten hat. Nach wie vielen Wochen ist das der Fall?

(**A**) 6 (**B**) 5 (**C**) 4 (**D**) 3 (**E**) 2

Lösung: Lorenz hat $25 - 19 = 6$ Katzenfotos mehr als Hundefotos. Da er pro Woche jeweils ein Hundefoto mehr als Katzenfotos kauft, schwindet der Katzenfotoüberhang in jeder Woche um 1. Also dauert es 6 Wochen, bis er gleich viele Fotos von beiden Tierarten hat. Er hat nach 6 Wochen $25 + 6 \cdot 2 = 37$ Katzenfotos und $19 + 6 \cdot 3 = 37$ Hundefotos.

13. Tanja hat aus kleinen Würfeln einen Tisch zusammengeklebt. Wie viele Würfel hat sie benutzt?



(**A**) 24 (**B**) 26 (**C**) 28 (**D**) 32 (**E**) 36

Lösung: Der Tisch besteht aus der Tischplatte und den vier Beinen. Für die Platte hat Tanja $4 \cdot 5 = 20$ Würfel zusammengeklebt. Für die Beine brauchte sie $4 \cdot 3 = 12$ Würfel. Insgesamt hat sie $20 + 12 = 32$ Würfel benutzt.

14. Julius hat am Sonntag viel vor. Er möchte Rad fahren, schwimmen, lesen und natürlich etwas essen. Morgens will er zuerst Rad fahren, das ist sicher. Ihm ist auch klar, dass er direkt nach dem Essen nicht schwimmen gehen wird. Wie viele Möglichkeiten hat Julius, die vier Tätigkeiten auf seinen Sonntag zu verteilen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

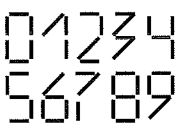
Lösung: Wir kürzen Julius' Vorhaben mit Buchstaben ab: R für Rad fahren, S für schwimmen, L für lesen und E für essen. Berücksichtigen wir die Einschränkungen, die Julius sich auferlegt, so finden wir die folgenden vier Möglichkeiten: RSLE, RSEL, RLSE, RELS. Nur so ist gewährleistet, dass Julius den Tag mit einer Radtour beginnt und in keinem Fall das Schwimmen unmittelbar auf das Essen folgt.

15. Der zerstreute Dieter hat von den Zahlen 65 und 47 statt der Summe die Differenz gebildet. Um wie viel unterscheidet sich die Differenz von der Summe?

(**A**) um 18 (**B**) um 44 (**C**) um 94 (**D**) um 112 (**E**) um 130

Lösung: Dieter hat $65 - 47 = 18$ gerechnet, statt $65 + 47 = 112$ zu rechnen. Die Summe, die er bilden wollte, unterscheidet sich von der Differenz, die er ausgerechnet hat, um $112 - 18 = 94$. Das ist das Doppelte der Zahl 47, die zu subtrahieren war, denn $(65 + 47) - (65 - 47) = 2 \cdot 47$.

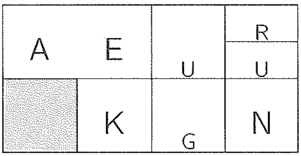
16. Aus Streichhölzern habe ich alle 10 Ziffern gelegt und dabei bemerkt, dass nicht für alle Ziffern dieselbe Anzahl Hölzer gebraucht wird. Nun frage ich mich, welches die größte Anzahl Hölzer ist, die für eine zweistellige Zahl benötigt wird. Es sind



(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

Lösung: Die Ziffern sind aus unterschiedlich vielen Streichhölzern zusammengelegt: Die 1 und die 7 aus nur 3 Hölzern, die 2, 3 und 4 aus 4 Hölzern, die 5, 6 und 9 aus 5 Hölzern, die 0 aus 6 und die 8 aus 7 Hölzern. Da wir eine zweistellige Zahl mit möglichst vielen Hölzern suchen, verwenden wir dazu Ziffern, die aus möglichst vielen Hölzern gebildet werden. Da die 8 die einzige Ziffer mit maximaler Hölzchenzahl ist, ist 88 *die* zweistellige Zahl, bei der wir die meisten Streichhölzer finden, nämlich $2 \cdot 7 = 14$.

KAENGURU-Schiebespiel



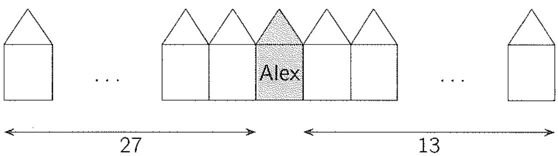
Die abgebildeten 7 Spielsteine mit den entsprechenden Aufschriften sollen so innerhalb des rechteckigen Rahmens horizontal bzw. vertikal gegeneinander verschoben werden, dass man am Schluss „KAEN" (oben) und „GURU" (unten) lesen kann.

17. Tobias schreibt gern Geschichten. In seiner neuesten Geschichte gibt es einen Geist, der um 6:15 Uhr verschwindet und ab diesem Moment alle Uhren rückwärts laufen lässt. Um ihn zu besiegen, muss der Held der Geschichte herausfinden, welche Zeit die verzauberten Uhren zeigen, wenn der Geist um 19:30 Uhr (normale Zeit) zurückkehrt. Sie zeigen dann

(**A**) 17:00 (**B**) 17:45 (**C**) 18:30 (**D**) 19:00 (**E**) 19:15

Lösung: Von 6:15 Uhr bis 19:30 Uhr vergehen 13 Stunden und 15 Minuten. So lange läuft die Uhr rückwärts. Lassen wir sie in unserer Vorstellung zuerst die 15 Minuten rückwärts laufen, so ist danach 6:00 Uhr auf der Uhr zu erkennen. Nun geht es noch 13 Stunden rückwärts. Nach 6 Stunden ist es 0:00 Uhr, Mitternacht, also 24:00 Uhr. Von da an ist es nach 7 Stunden zurück wegen $24 - 7 = 17$ genau 17:00 Uhr.

18. Alex lädt Lotte zu sich zum Lernen ein. „Die Straße, in der ich wohne, beginnt am Park. Wenn du von dort kommst, ist es das 28. Haus auf der linken Straßenseite. Kommst du aber vom anderen Ende, dann ist es das 14. Haus auf der rechten Seite", erklärt Alex.



„Dann wohnst du ja ganz nah bei Paul", sagt Lotte, „Pauls Haus ist das mittlere auf deiner Straßenseite." Wie viele Häuser sind zwischen denen von Alex und Paul?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 14 (**E**) 21

Lösung: Auf Alex' Straßenseite gibt es $27+1+13=41$ Häuser. Wenn Paul genau im mittleren wohnt, dann ist es das 21. Haus vom einen wie vom anderen Ende der Straße, denn so sind je 20 Häuser links und rechts von Pauls Haus, und $20+20+1=41$. Da Alex im 28. Haus wohnt, befinden sich in Richtung Park noch 27 Häuser. Folglich sind zwischen dem Haus von Alex und dem Haus von Paul $27-21=6$ Häuser.

KAENGURU-Buchstabentausch

U U K E R N G A
K A E N G U R U

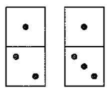
In der oberen Box sind die Buchstaben des Wortes KAENGURU schrecklich durcheinander geraten.
Wie oft müssen zwei Buchstaben mindestens gegeneinander getauscht werden, damit das Wort ordentlich dasteht?

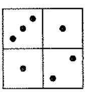
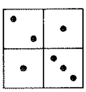
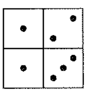
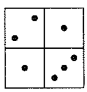
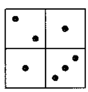
19. Um Einbrüche zu verhindern, ist ein Türschloss mit einem 6-Ziffern-Code gesichert. Auf einem Zettel stehen 5 teils verwischte 6-stellige Zahlen, unter denen der Code sein muss. Man weiß, dass bei dem Code die Summe der 1., 3. und 5. Ziffer gleich der Summe der 2., 4. und 6. Ziffer ist. Welche der folgenden Zahlen ist der Code (an die Stelle der Sternchen gehört je genau eine Ziffer)?

(**A**) $81\star\star61$ (**B**) $7\star727\star$ (**C**) $4\star4141$ (**D**) $12\star9\star8$ (**E**) $181\star2\star$

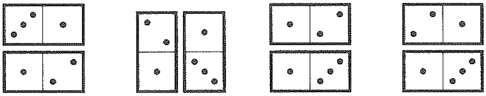
Lösung: Wir vergleichen in den einzelnen Lösungsvorschlägen, ob sich eine Belegung der Sternchen mit Ziffern finden lässt, bei der die Summe der Ziffern an geradzahligen Stellen gleich der Summe der Ziffern an ungeradzahligen Stellen ist. Im Fall (**A**) müssten die Sternchen so ersetzt werden, dass $1+\star+1=6+\star+8$ ist. Das geht sicher nicht, denn die Ziffer auf der linken Seite müsste größer als 10 sein, weil $6+\star+8-1-1=12+\star>10$ ist. Im Fall (**B**) müsste $\star+2+\star=7+7+7$ sein, was sicher nicht möglich ist, denn die Summe der beiden unbekannten Ziffern müsste $7+7+7-2=19$ sein. Im Fall (**C**) nun lässt sich der Wert der fehlenden Ziffer errechnen, weil nur *ein* Sternchen zu ersetzen ist: $4+4+4-1-1=10$. Das ist jedoch keine Ziffer, so dass auch (**C**) nicht die Lösung ist. Kommen wir zu Fall (**D**), so sehen wir, dass es genau eine Möglichkeit gibt, die Sternchen durch Ziffern zu ersetzen und dabei die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen, nämlich: 129998. Tatsächlich ist $1+9+9=19=2+9+8$. Für den Fall (**E**) schließlich finden wir keine Möglichkeit, die Sternchen durch Ziffern zu ersetzen, denn die Ziffer 8 allein ist schon größer als die drei auf ungeraden Plätzen stehenden Ziffern 1, 1 und 2 zusammen.

20. Welche der Dominofiguren (**A**) bis (**E**) kann *nicht* aus den beiden rechts abgebildeten Dominosteinen zusammengeschoben werden?

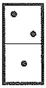


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

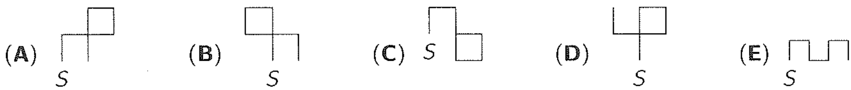
Lösung: Um deutlich zu machen, welche der Figuren möglich sind, umranden wir die beiden Dominosteine und machen so ihre Lage kenntlich:



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

Die Figur (**E**) lässt sich nicht zusammenschieben. Von den beiden zu verschiebenden Dominosteinen der Aufgabe kann der linke (mit einmal einem Punkt und einmal zwei Punkten) in der Figur (**E**) nur links liegen , indem er um 180° gedreht wird. Auf dem Stein rechts jedoch verlaufen die drei Punkte nicht von links oben nach rechts unten, sondern umgekehrt. Die Figur (**E**) lässt sich also nicht aus den beiden in der Aufgabe gegebenen Dominosteinen zusammenschieben, sie ist die gesuchte.

21. Nelly entwirft einen Tanz, Rita notiert Nellys Ideen. Nach dem ersten Schritt vorwärts ändert Nelly mit jedem weiteren Schritt die Richtung nach links oder rechts, und Rita schreibt für eine der Richtungsänderungen $+$, für die andere $-$.
Zwei Tage später hat Rita vergessen, wofür sie $+$ und wofür sie $-$ geschrieben hat. Von den unten skizzierten Tanzwegen, die jeweils bei S beginnen, kann nur einer zu Ritas Folge „$+ - - - ++$" gehören. Welcher?



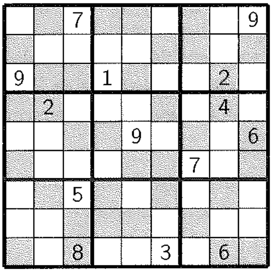
Lösung: Da in der zu untersuchenden Schrittfolge dreimal hintereinander dasselbe Zeichen auftritt, kommt gewiss nur eine Skizze mit drei aufeinanderfolgenden Wendungen nach links oder rechts in Frage. Skizzieren wir drei Wendungen in dieselbe Richtung, erhalten wir ein Quadrat. Die Variante (**E**) fällt also weg. Auch Variante (**C**) können wir ausschließen. Zu (**C**) gehört zwar ein Quadrat, aber dieses Quadrat befindet sich hier am Ende der Schrittfolge, während es in der *gesuchten* Schrittfolge die drei gleichgerichteten Wendungen mittendrin gibt.
Angenommen, dem „$+$" entspricht die Wendung nach rechts. Dann wäre die Skizze für (**A**) „$+ - + + + -$", also nicht die richtige. Auch eine Änderung derart, dass „$+$" für die Wendung nach links zu schreiben wäre, „$-$" für die nach rechts, führt nicht zur Lösung. Bei (**B**) erhielten wir „$- + + + - +$", was ebensowenig die Lösung ist wie die beim Vertauschen von links und rechts entstehende Skizze „$+ - - - + -$". Nun muss (**D**) die Lösung sein. Setzen wir wieder „$+$" mit der Wendung nach rechts gleich, so erhalten wir hier „$+ - - - ++$" und haben somit die Schrittfolge gefunden.

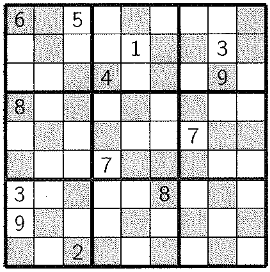
Aufgaben auf kariertem Papier – Teil 1

Im Jahre 2007 erschien für die Sieger des Känguru-Wettbewerbs in Weißrussland „Das große Buch der Kopfnüsse" von W. A. Portugalow, eine wunderschöne Sammlung von interessanten, kniffligen Knobeleien. Hier einige Beispiele:

Sudokus mit Hindernissen

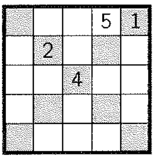
Im folgenden Sudoku sind nicht nur wie üblich die Zahlen von 1 bis 9 in jeder Zeile, jeder Spalte und in jedem der dick umrandeten 3×3-Felder genau einmal unterzubringen, sondern es dürfen darüberhinaus in die grauen Felder nur gerade Zahlen geschrieben werden.

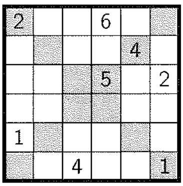


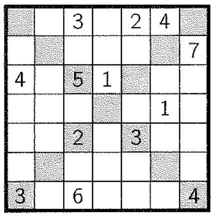


Lateinische Quadrate – zum Vervollständigen

In die drei folgenden Quadrate sind die Zahlen von 1 bis 5, 6 bzw. 7 so einzutragen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in den beiden grau gefärbten Diagonalen jede Zahl genau einmal auftritt.

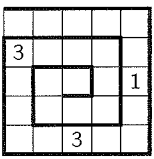


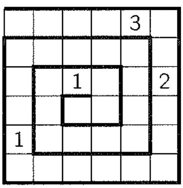


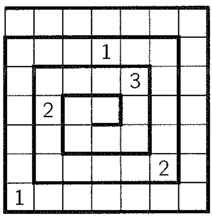


Magische Spirale

Die Zahlen 1, 2 und 3 sollen so in den folgenden Quadraten ergänzt werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede dieser Zahlen genau einmal auftritt. Das ist noch nicht schwer. Die Zahlen sollen jedoch so eingetragen sein, dass beim Gang durch die Spirale vom Eingang außen zur Mitte innen stets die Zahlen in der Reihenfolge $1 - 2 - 3 - 1 - 2 - 3 - \ldots$ erscheinen.







Klassenstufen 5 und 6

1. Bei welcher der folgenden Rechnungen ist das Ergebnis eine gerade Zahl?

(**A**) $2009 \cdot 2009$ (**B**) $200 \cdot 9$ (**C**) $9 - 0 + 0 - 2$ (**D**) $200 - 9$ (**E**) $200 + 9$

Lösung: Ein aufmerksamer Blick auf die Lösungsvorschläge macht klar, dass nur (**B**) die Lösung sein kann, denn dort handelt es sich um ein Produkt, dessen einer Faktor die gerade Zahl 200 ist.

2. Anstatt $25 \cdot 84$ zu rechnen, bilde ich zuerst $100 \cdot 84$. Was muss ich danach tun, um das Resultat von $25 \cdot 84$ zu erhalten?

(**A**) durch 4 teilen (**B**) mit 4 multiplizieren (**C**) 75 abziehen
(**D**) 75 addieren (**E**) durch 0,25 teilen

Lösung: Da $100 = 4 \cdot 25$ ist, ist $100 \cdot 84 = 4 \cdot 25 \cdot 84$. Also muss das Ergebnis der durchgeführten Multiplikation durch 4 geteilt werden. – Bei dieser Gelegenheit haben wir übrigens gleich eine gute Methode kennengelernt, mit 25 zu multiplizieren.

3. Wie viele Ziffern der Zahl 12323314 muss ich mindestens streichen, damit die verbleibende Zahl von links und von rechts gelesen gleich ist?

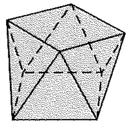
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Da die 4 nur einmal auftritt und ganz rechts steht, muss sie ganz gewiss gestrichen werden. Die beiden Einsen sind bereits am richtigen Platz, brauchen also nicht gestrichen zu werden. Streichen wir die beiden Zweien, so haben wir eine Zahl, die von links wie von rechts gelesen gleich ist, eine sogenannte *Palindromzahl*. Wir haben dazu drei Ziffern gestrichen. Es muss jetzt noch überlegt werden, ob nach dem Streichen der 4 das Streichen *einer* weiteren Ziffer bereits ausreicht. Dass dies nicht der Fall ist, lässt sich schnell bestätigen, indem die Ziffern – es sind ja nur fünf – durchprobiert werden.

4. Mein Bruder fährt für zwei Monate zum Praktikum, vom 1. Tag des ersten bis zum letzten Tag des zweiten Monats. Welche Zahl ist gewiss nicht die Anzahl seiner Tage am Praktikumsort?

(**A**) 62 (**B**) 61 (**C**) 60 (**D**) 59 (**E**) 58

Lösung: Wer sich im Kalender gut auskennt, hat bei dieser Aufgabe keine Mühe: Wir wissen, dass es Monate mit 28, 29 (im Schaltjahr), 30 und 31 Tagen gibt. Dezember und Januar mit jeweils 31 Tagen haben zusammen 62 Tage, also wäre (**A**) möglich. Juni und Juli haben zusammen 61 Tage, d. h., auch (**B**) kommt in Frage. Falls wir in einem Schaltjahr sind, haben Februar und März zusammen $29 + 31 = 60$ Tage, d. h., (**C**) ist möglich. Und für ein Nicht-Schaltjahr haben Februar und März zusammen 59 Tage, so dass auch (**D**) in Frage kommt. Nur 58 ist als Summe aller Tage zweier aufeinander folgender Monate nicht möglich, denn der einzige Monat mit der geringsten Tagezahl 28, der Februar, wird von zwei Monaten mit 31 Tagen eingeschlossen. Mit dieser zuletzt genannten Überlegung hätte die Aufgabe auch sofort gelöst werden können, da es bekanntlich bei Känguru-Aufgaben stets nur genau eine richtige Antwort gibt.



5. Die Oberfläche des abgebildeten Körpers besteht aus Quadraten und Dreiecken. Wie viele Flächen sind es insgesamt?

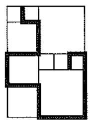
(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Zur Oberfäche des abgebildeten Körpers gehören zwei Quadrate, und jede Kante, die zu einem der Quadrate gehört, ist gleichzeitig Seite eines Dreiecks, das zur Oberfläche gehört. Umgekehrt besitzt auch jedes Dreieck, das zur Oberfläche gehört, genau eine gemeinsame Kante mit einem der Quadrate. Damit sind es $2 \cdot 4 = 8$ dreieckige Seitenflächen. Insgesamt sind es $2 + 8 = 10$ Seitenflächen.

6. Wie viele ganze Zahlen liegen zwischen 19,03 und 2,009?

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 17 (**E**) mehr als 17

Lösung: Zwischen den beiden Zahlen – die übrigens an das Datum des Kängurutags, 19.03.2009, erinnern sollen – liegen die ganzen Zahlen 3 bis 19. Nun können wir schnell auszählen, dass es 17 sind, oder wir rechnen $19 - 2 = 17$.

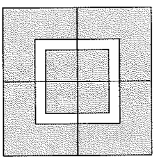


7. Die Quadrate in der Zeichnung haben drei verschiedene Größen. Die Seite des kleinsten Quadrats ist 20 cm lang. Wie lang ist die dick gezeichnete Linie?

(**A**) 400 cm (**B**) 420 cm (**C**) 440 cm (**D**) 640 cm (**E**) 1680 cm

Lösung: Der Zeichnung ist zu entnehmen, dass das mittelgroße Quadrat die doppelte und das große Quadrat die dreifache Seitenlänge des kleinen Quadrats hat. Wir finden, dass sich die dick gezeichnete Linie aus 5-mal der Länge des kleinen Quadrats, 5-mal der Länge des mittelgroßen Quadrats und 2-mal der Länge des großen Quadrats zusammensetzt. Insgesamt erhalten wir so $5 \cdot 20\,\text{cm} + 5 \cdot 40\,\text{cm} + 2 \cdot 60\,\text{cm} = 420\,\text{cm}$. – Wir hätten ebenso die Streckenabschnitte zählen können, die so lang wie die kleinste Quadratseite sind. Das sind 21, und $21 \cdot 20\,\text{cm} = 420\,\text{cm}$.

KAENGURU-Streckenzug



Für den geschlossenen weißen Streckenzug wurden vier quadratische Kärtchen  *geschickt zusammengeschoben.*
Wie viele solche Kärtchen sind für den nächstgrößeren geschlossenen Streckenzug erforderlich – und wie sieht dieser Streckenzug aus?

8. Über den kleinen, 40 m breiten Kanal, der durch unseren Ort führt, soll eine neue Brücke gebaut werden. Auf jeder Uferseite soll ein Viertel der Gesamtlänge der Brücke stehen. Wie lang wird die Brücke insgesamt?

(**A**) 50 m (**B**) 60 m (**C**) 72 m (**D**) 75 m (**E**) 80 m

Lösung: Wenn auf jeder Uferseite ein Viertel der Gesamtlänge der Brücke steht, so steht insgesamt die Hälfte = zwei Viertel auf dem Ufer. Die andere Hälfte ist über dem Fluss, also 40 m lang. Die gesamte Brücke hat demzufolge eine Länge von $2 \cdot 40\,\text{m} = 80\,\text{m}$.

9. Sonja hat eine weiße, eine rote und eine grüne Dose. In einer hat sie ihre Kaugummis, in einer ihre Schokolade, die dritte Dose ist leer. Als ihr großer Bruder sie um einen Kaugummi bittet, sagt sie keck: „Du darfst dir einen nehmen. Sie sind entweder in der weißen oder in der roten Dose, und die Schokolade ist weder in der weißen noch in der grünen Dose." Welche Farbe hat die Kaugummidose?

(**A**) weiß (**B**) rot (**C**) grün (**D**) rot oder grün (**E**) unbestimmt

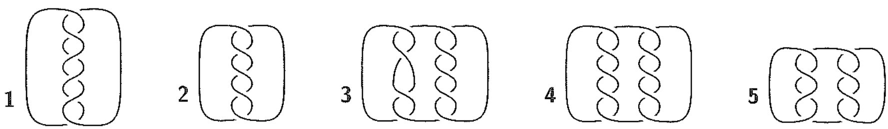
Lösung: Sonja teilt mit, dass die Schokolade weder in der weißen noch in der grünen Dose ist. Dann ist sie folglich in der roten Dose. Da die Kaugummis entweder in der weißen oder in der roten Dose sind, die rote Dose aber schon die Schokolade enthält, kann Sonjas Bruder die Kaugummis nur in der weißen Dose finden.

10. Jonathan sammelt Kuscheltiere, und zwar Hunde und Katzen. Als sein Onkel ihn fragt, wovon er mehr habe, antwortet er verschmitzt: „Die Zahl der Katzenpfoten ist doppelt so groß wie die Zahl der Hundeschnauzen." Da weiß sein Onkel, es sind

(**A**) doppelt so viele Katzen wie Hunde. (**B**) gleich viele Katzen wie Hunde.
(**C**) halb so viele Katzen wie Hunde. (**D**) viermal so viele Hunde wie Katzen.
(**E**) viermal so viele Katzen wie Hunde.

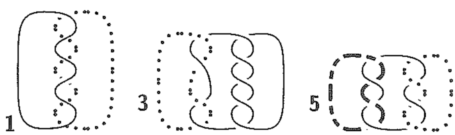
Lösung: Jede Katze hat, wie wir alle wissen, vier Pfoten, jeder Hund hat eine Schnauze. Eine Katze hat also viermal so viele Pfoten wie ein Hund Schnauzen hat. Da es nur doppelt – und nicht viermal – so viele Katzenpfoten wie Hundeschnauzen bei Jonathans Kuscheltieren gibt, sind es nur halb so viele Katzen wie Hunde.

11. Für welche der abgebildeten Schnurverknotungen ist mehr als eine Schnur erforderlich?

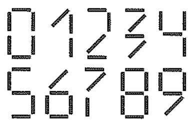


(**A**) **1**, **3**, **4** und **5** (**B**) **3**, **4** und **5** (**C**) **1**, **3** und **5** (**D**) für alle (**E**) für keine

Lösung: Fährt man mit den Augen oder mit einem Bleistift die Linien entlang, stellt man schnell fest, welche der Schnurverknotungen aus mehr als einer Schnur bestehen. Es sind dies 1, 3 und 5.
In der Abbildung ist deutlich hervorgehoben, dass die Verknotungen 1 und 3 jeweils in zwei, die Verknotung 5 in drei Schnüre zerfällt.



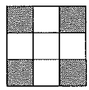
12. Aus Streichhölzern sind alle zehn Ziffern gelegt worden (siehe Bild). Flora nimmt sich 15 Streichhölzer und legt mit ihnen weitere Ziffern wie auf dem Bild. Dann bildet sie die Summe der Ziffern, die sie gelegt hat. Wie groß kann diese Summe höchstens sein?



(**A**) 5 (**B**) 17 (**C**) 19 (**D**) 27 (**E**) 35

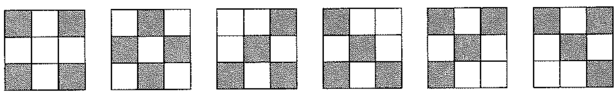
Lösung: Die Ziffern sind aus unterschiedlich vielen Streichhölzern zusammengelegt. Die 1 und die 7 bestehen aus 3 Hölzern, die 2, 3 und 4 aus 4 Hölzern, die 5, 6 und 9 aus 5 Hölzern, die 0 aus 6 und die 8 aus 7 Hölzern. In unserer Aufgabe geht es darum, mit 15 Hölzern eine Zahl mit möglichst großer Quersumme zu legen. Unter den Ziffern, für die dieselbe Hölzchenzahl erforderlich ist, brauchen wir also stets nur *die* Ziffer zu betrachten, die am größten ist. Von 1 und 7 ist dies die 7, von 2, 3 und 4 ist es die 4, von 5, 6 und 9 die 9. Die 8 können wir sofort aus der Betrachtung ausschließen, da sie mehr als doppelt so viele Hölzchen erfordert wie die 7, also durch zweimal die 7 – mit der Quersumme 14 – ersetzt werden könnte. Die 7 ist nun die einzige Ziffer, mit der sich eine 5-stellige Zahl legen lässt, 77777, deren Quersumme 35 ist. Diese Quersumme ist offenbar durch keine Kombination der Ziffern 4, 7 und 9 zu übertreffen.

13. Ein 3×3-Feld wurde an die Tafel gezeichnet. Wie viele Möglichkeiten gibt es, darin vier Zellen auszumalen, die keine gemeinsame Seite haben, das Beispiel rechts eingeschlossen?

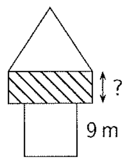


(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Neben der in der Zeichnung dargestellten Lösung gibt es eine weitere, bei der die Zelle in der Mitte des 3×3-Feldes frei ist. Des weiteren gibt es vier Möglichkeiten, bei denen das mittlere Feld grau ist. Bei diesen Möglichkeiten ist jeweils genau eines der Eckfelder frei, und da es vier Eckfelder sind, kommen genau vier Varianten zu den beiden mit dem leeren Mittelfeld hinzu. Also ist (**D**) richtig.



14. Ein Geometer will sich einen Turm für stille Sommerabende bauen. Nur seine Lieblingsfiguren soll man in dem Bauwerk finden – Quadrat, Rechteck und gleichseitiges Dreieck, alle mit demselben Umfang. Der Sockel ist in der Ansicht quadratisch, seine Höhe beträgt 9 m. Wie hoch hat er das schraffierte Turmfenster geplant?



(**A**) 4 m (**B**) 5 m (**C**) 6 m (**D**) 7 m (**E**) 8 m

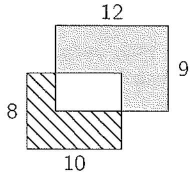
Lösung: Da der Umfang aller drei gewählten Figuren gleich ist, können wir Schritt für Schritt die Fensterhöhe errechnen. Der Umfang ist die vierfache Länge der Quadratseite, also 36 m. Folglich ist die Länge einer Dreiecksseite des gleichseitigen Dreiecks $36\,\text{m} : 3 = 12\,\text{m}$. Das rechteckige Fenster ist so lang wie eine Dreiecksseite, und da der Umfang gleich dem des Dreiecks ist, beträgt die Höhe die halbe Dreiecksseite, also beachtliche 6 m.

15. Ich habe 8 Karten mit den Zahlen von 1 bis 8. Ich gebe dir 5 davon und sage, dass die Summe der Zahlen auf deinen 5 Karten gleich der Zahlensumme auf meinen 3 Karten ist. Dann ist sicher,

(**A**) dass auf 4 deiner Karten gerade Zahlen sind. (**B**) dass du nicht die Karte mit der 1 hast.
(**C**) dass du die Karte mit der 2 hast. (**D**) dass du die Karte mit der 5 hast.
(**E**) dass auf genau 3 deiner Karten ungerade Zahlen sind.

Lösung: Da jeder dieselbe Summe auf seinen Karten hat, errechnen wir zuerst diese Summe. Sie ist die Hälfte der Summe aller 8 Zahlen, also $(1 + \cdots + 8) : 2 = 36 : 2 = 18$. Da die Summe eine gerade Zahl ist, muss unter den 5 Zahlen eine gerade Anzahl ungerader Zahlen sein. Damit fallen die Antwortmöglichkeiten (**A**) und (**E**) weg. Die Karte mit der 1 könnte bei den 5 Karten sein, denn es ist z. B. $1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18$. Also entfällt (**B**). Die Karte mit der 5 könnte bei den 3 Karten sein, denn $5 + 6 + 7 = 18$, womit auch (**D**) als Lösungsmöglichkeit entfällt. Nach den Regeln des Känguru-Wettbewerbs ist damit klar, dass (**C**) die Lösung sein muss. Das wollen wir nun aber auch noch mathematisch begründen. Angenommen die 2 würde zu den 3 Karten gehören, die ich habe. Auch mit diesen Karten muss als Summe 18 erzielt werden. Das ist allerdings unmöglich, denn selbst wenn ich die beiden Karten mit den größten hier vorhandenen Zahlen, 7 und 8, hätte, ergäbe sich als Summe der drei Zahlen nur $2+8+7 = 17$, und das ist zu klein. Folglich muss die Karte mit der 2 bei den fünf Karten sein.

16. Ein 8×10-Rechteck und ein 9×12-Rechteck bedecken einander teilweise. Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche, wenn der Flächeninhalt der gestreiften Fläche 37 ist?

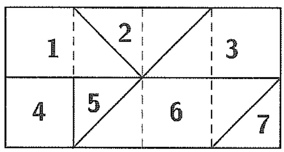


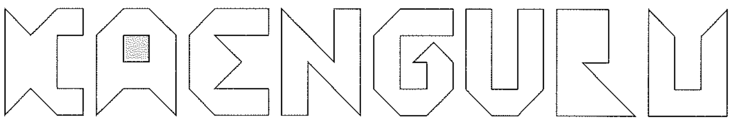
(**A**) 60 (**B**) 62 (**C**) 62,5 (**D**) 64 (**E**) 65

Lösung: Der Flächeninhalt des kompletten unteren Rechtecks ist $8 \cdot 10 = 80$. Der Teil des unteren Rechtecks, der vom oberen bedeckt ist (die weiße Fläche), hat demzufolge einen Flächeninhalt von $80 - 37 = 43$. Diese weiße Fläche ergibt zusammen mit der grauen Fläche die Fläche des oberen Rechtecks. Hieraus errechnen wir schließlich den Flächeninhalt der grauen Fläche. Er ist: $9 \cdot 12 - 43 = 108 - 43 = 65$.

KAENGURU-Legespiel

Zeichne auf ein Stück Karton ein Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist, und zerlege es entsprechend der Abbildung in die 7 Teilstücke! Schneide diese 7 Teile dann aus und versuche, mit diesen 7 Puzzleteilen jeden Buchstaben vom KAENGURU zusammenzulegen!





(Hinweis zum genauen Zeichnen: Figuren im unterlegten Quadratraster zeichnen, wobei das Rechteck 8 Rasterquadrate beansprucht.)

17. Unser Geld reicht auf dem Jahrmarkt entweder für 12-mal Riesenrad oder für 20-mal Flipper. Wenn wir 9-mal Riesenrad fahren, wie oft könnten wir dann höchstens vom Restgeld Flipper fahren?

(**A**) 2-mal (**B**) 4-mal (**C**) 5-mal (**D**) 6-mal (**E**) 8-mal

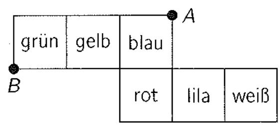
Lösung: Wenn wir statt 12-mal Riesenrad zu fahren, nur 9-mal Riesenrad fahren, so haben wir 3 von 12 Fahrten nicht gemacht. Da 3 ein Viertel von 12 ist, haben wir also ein Viertel des Geldes übrig. Mit einem Viertel des Geldes können wir uns ein Viertel der 20 Flipperfahrten leisten, die mit dem gesamten Geld möglich gewesen wären. Ein Viertel von 20 ist 5. Das Geld reicht dann noch, um 5-mal Flipper zu fahren.

18. Familie Gärtner hat zur Einfassung zweier Beete *dieselbe* Zahl von grauen und von braunen Steinen gekauft. Der Vater hat 45 graue und 35 braune Steine zu den Beeten gekarrt. Die restlichen Steine tragen Oskar und Adele. Sie laufen zu zweit hin und her, beide gleich oft, bis alle Steine weg sind. Jedes Mal trägt Oskar 4 graue und Adele 6 braune Steine. Wie viele Steine sind es insgesamt?

(**A**) 100 (**B**) 110 (**C**) 120 (**D**) 130 (**E**) 140

Lösung: Der Vater hat $45 - 35 = 10$ graue Steine mehr als braune zu den Beeten geschafft. Adele vermindert jedesmal, wenn sie zusammen mit Oskar Steine trägt, die Differenz zwischen grauen und braunen Steinen um $6 - 4 = 2$. Da $10 : 2 = 5$ ist, sind nach 5 Gängen gleich viele graue und braune Steine an den Beeten, insgesamt $45 + 35 + 5 \cdot (4 + 6) = 130$.

19. Wenn ich aus dem abgebildeten Würfelnetz einen Würfel falte, enthält eine der Würfelseiten die beiden Punkte A und B. Welche Farbe hat diese Seite?



(**A**) grün (**B**) blau (**C**) rot (**D**) lila (**E**) weiß

Lösung: Jeder Eckpunkt eines Würfels gehört zu den drei Seiten, die sich in dieser Ecke treffen. Der Eckpunkt A gehört beim zusammengefalteten Würfel zu den Seiten blau, lila und weiß und B zu grün, rot und lila. Zur lila Seite gehören beide Punkte.

20. Heute ist Donnerstag und Clara beginnt, ein 302 Seiten dickes spannendes Buch zu lesen. An den 5 Schultagen gestattet sie sich nur 6 Seiten pro Tag, am Samstag und Sonntag aber jeweils 25. Sie überlegt, wie viele Tage sie braucht, bis sie mit dem Buch fertig sein wird, und stellt fest: es sind

(**A**) 35 Tage (**B**) 32 Tage (**C**) 30 Tage (**D**) 27 Tage (**E**) 25 Tage

Lösung: Pro Woche liest Clara $5 \cdot 6 + 2 \cdot 25 = 80$ Seiten in ihrem Buch. Wegen $302 : 80 < 4$ liest Clara drei volle Wochen und hat dann noch $302 - 3 \cdot 80 = 62$ Seiten übrig. Nun liest sie am Donnerstag und Freitag je 6 Seiten – es bleiben $62 - 12 = 50$ Seiten, am Samstag und Sonntag je 25 Seiten – und ist fertig. Es dauert also insgesamt $3 \cdot 7 + 4 = 25$ Tage. – Sicher wird mancher erst einmal gucken, wie viel in der Restwoche, in der Clara ihr 320-Seiten-Buch zu lesen beginnt, noch gelesen werden kann, bevor ab Montag mit vollen Wochen gerechnet wird. Also stellt man fest, dass Clara an den ersten 4 Tagen, vom Donnerstag bis zum Sonntag, 62 Seiten liest, der Rest sind 240 Seiten – und die schafft sie in genau drei Wochen, was natürlich ebenfalls zur Lösung (**E**) führt.

21. Über eine Zahl wird gesagt: 1. *Sie ist durch 5 teilbar.* 2. *Sie ist durch 11 teilbar.* 3. *Sie ist durch 55 teilbar.* 4. *Sie ist kleiner als 10.* Wenn genau zwei der vier Aussagen richtig sind, dann ist diese Zahl gleich

(**A**) 0 (**B**) 5 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 55

Lösung: Nehmen wir an, die beiden ersten Aussagen sind richtig, die Zahl wäre also durch 5 und durch 11 teilbar. Dann ist sie allerdings auch durch $5 \cdot 11 = 55$ teilbar, d. h., es wären 3 Aussagen richtig, was der Bedingung, dass *genau* 2 richtig sind, widerspricht. Hier bemerken wir bereits, dass die Wahrheit der 3. Aussage (*Sie ist durch 55 teilbar.*) sofort nach sich zieht, dass die 1. und 2. Aussage auch richtig sind. Damit ist klar, dass die 3. Aussage falsch sein muss. Also muss genau eine der beiden ersten Aussagen und die 4. Aussage richtig sein. Die 2. Aussage zusammen mit der 4. Aussage wird nur von der 0 erfüllt, womit dann aber auch die 1. und 3. Aussage richtig wären. Demzufolge wissen wir, dass die beiden richtigen Aussagen die 1. und die 4. sind. Die gesuchte Zahl ist 5.

KAENGURU-Zahlenwissen

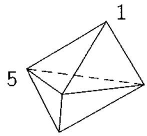
- *Die Summe von vier natürlichen Zahlen ist 1234. Die zweite dieser Zahlen ist um 56 kleiner als die erste. Die dritte dieser Zahlen ist um 78 kleiner als die zweite, und die vierte dieser Zahlen ist um 90 kleiner als die dritte.*
  Welche vier Zahlen sind das?
- *Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 140. Das Produkt der ersten und der zweiten dieser Zahlen ist 28. Die Summe der ersten und der dritten dieser Zahlen ist 7. Wie heißen die drei Zahlen?*
- *Auf wie viele Nullen endet das Produkt der ersten 100 natürlichen Zahlen?*
- *Wenn zum Nummerieren der Seiten einer dicken Enzyklopädie 6929 Ziffern benötigt wurden, wie viele Seiten hat dann dieses Buch?*

22. Beim Handballspiel warfen Adi, Jens, Gerd und Tim zusammen 10 Tore, wobei keiner torlos blieb. Jeder erzielte eine andere Anzahl Treffer. Jens warf mehr Tore als Adi. Tim war am torreichsten, und die anderen drei trafen insgesamt ebenso oft wie Tim und Jens zusammen. Wer hatte die geringste Torzahl?

(**A**) Adi (**B**) Jens (**C**) Gerd (**D**) Tim (**E**) das ist unbestimmt

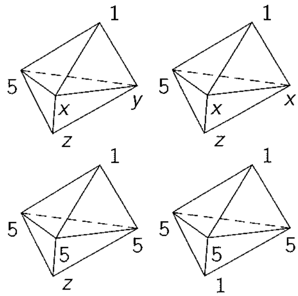
Lösung: Wer wegen der relativ geringen Summe von Toren, die Summe 10 aus lauter verschiedenen Summanden zu erzeugen versucht, ist bei dieser Aufgabe gut beraten. Er wird feststellen, dass $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ die einzige Möglichkeit ist. Folglich hat einer der vier Handballer 1 Tor, einer 2 Tore, einer 3 Tore und der Beste schließlich 4 Tore geworfen. Tim, der torreichste Spieler, erzielte 4 Treffer. Er hat mit Jens zusammen so viele Tore erzielt wie Adi, Jens und Gerd zusammen, nämlich $10 - 4 = 6$. Daraus folgt unmittelbar, dass Jens 2 Tore geschossen hat. Da nun Jens mehr Tore als Adi erzielte, hat Adi 1 Tor geworfen, das ist die geringste Torzahl.

23. Der Körper rechts hat 6 dreieckige Seitenflächen und 5 Ecken. An einer Ecke steht eine 1, an einer anderen eine 5. Die restlichen 3 Ecken sind so mit Zahlen zu beschriften, dass die Summen der Eckzahlen an allen 6 Seitenflächen gleich sind. Wie groß ist dann die Summe aller 5 Eckzahlen?



(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 24

Lösung: Wir schreiben an die drei Ecken, für die geeignete Zahlen zu finden sind, die Buchstaben x, y und z. Dann gibt es eine Seitenfläche des Körpers, an deren Ecken sich 5, 1 und x befinden. Ebenso gibt es eine Seitenfläche, an deren Ecken sich 5, 1 und y befinden. Weil entsprechend den in der Aufgabe gegebenen Bedingungen $5+1+x=5+1+y$ gelten muss, können wir folgern, dass x und y gleich sein müssen. Da es auch eine Seitenfäche gibt, an deren drei Ecken einmal die 1 und zweimal ein x stehen, kann wegen $5+1+x=1+x+x$ nur $x=5$ richtig sein. Wenden wir uns jetzt der Ecke zu, an der das z steht. Wir sehen, dass $1+5+5=z+5+5$ gelten muss. Daraus ergibt sich unmittelbar $z=1$. Die gesuchte Summe der fünf Eckzahlen ist folglich $5+5+5+1+1=17$.

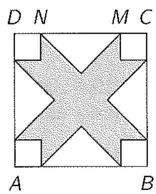


24. In unserem Urlaubshotel gibt es 5 Etagen mit jeweils 35 Zimmern. Die 3-stelligen Zimmernummern beginnen mit der Etagennummer, und dann sind die Zimmer von 1 bis 35 durchnummeriert. Bei uns im 2. Stock findet man z. B. die Zimmer 201 bis 235. Mein Vater, der mir oft Knobelaufgaben stellt, fragt mich, wie oft unter allen Zimmernummern dieses Hotels die Ziffer 2 zu finden ist. Das ist

(**A**) 64-mal (**B**) 96-mal (**C**) 100-mal (**D**) 105-mal (**E**) 128-mal

Lösung: Wir betrachten zuerst die Zweien an den Zehner- und Einerstellen. Da auf jeder Etage nur 35 Zimmer sind, sind die Zweien in den Zahlen von 01 bis 35 zu zählen. In den Einerstellen tritt die 2 viermal auf ($\star$02, $\star$12, $\star$22 und $\star$32). Im Zehner erscheint sie genau zehnmal ($\star$20, $\star$21 ..., $\star$29). Und an der Hunderterstelle schließlich finden wir die 2 nur in der zweiten Etage und zwar genau 35-mal. Insgesamt sind das $35+5\cdot(10+4)=105$-mal.

25. $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 10 cm. Der Abstand zwischen M und N beträgt 6 cm. Die Dreiecke an den Seiten sind gleichschenklig-rechtwinklig, und die Vierecke an den Eckpunkten sind Quadrate. Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?

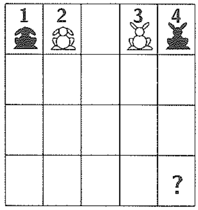


(**A**) $40\,\text{cm}^2$ (**B**) $42\,\text{cm}^2$ (**C**) $44\,\text{cm}^2$ (**D**) $46\,\text{cm}^2$ (**E**) $48\,\text{cm}^2$

Lösung: Da $\overline{NM}=6\,\text{cm}$, haben die kleinen Quadratseiten je die Länge $\dfrac{10\,\text{cm}-6\,\text{cm}}{2}=2\,\text{cm}$.

Da die vier Dreiecke rechtwinklig und gleichschenklig sind, lassen sie sich zu einem Quadrat zusammenfügen, dessen Seitenlänge 6 cm ist. Damit finden wir folgende Flächeninhalte:
Der Flächeninhalt der vier kleinen Quadrate: $4\cdot 2^2\,\text{cm}^2=16\,\text{cm}^2$
Der Flächeninhalt der vier Dreiecke: $6^2\,\text{cm}^2=36\,\text{cm}^2$
Der Flächeninhalt der grauen Fläche: $10^2\,\text{cm}^2-16\,\text{cm}^2-36\,\text{cm}^2=(100-16-36)\,\text{cm}^2=48\,\text{cm}^2$.

26. Kaninchenzüchter Krause bereitet seinen Ausstellungskäfig vor. In der oberen Reihe hat er mit dem Einordnen der vier Rassen begonnen: schwarzer Zwergwidder (1), weißer Deutscher Widder (2), weißer Hotot (3) und schwarzer Riese (4). Auch auf die restlichen Käfige will er die Tiere so verteilen, dass gleiche Rassen nur in Käfige kommen, die weder eine Seite noch eine Ecke gemeinsam haben. Dann gehört in den Fragezeichenkäfig



(**A**) nur **1** (**B**) nur **2** (**C**) nur **3**
(**D**) nur **4** (**E**) es gibt mehr als eine Möglichkeit

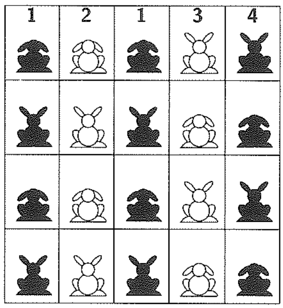
Lösung: Wir beschränken uns bei der Darstellung der Lösung auf die Zahlen und setzen erst zum Schluss die Kaninchen dazu.
Um den Stall übersichtlich zu bezeichnen, schreiben wir z. B. (r1,s1) für den Käfig in der Reihe 1 (von oben) und Spalte 1 (von links). – Für den Stall in (r2,s1) kommt sowohl die 3 als auch die 4 in Frage. Dabei ist klar, dass dann in (r2,s2) gerade die andere dieser beiden Rassen gehört. Auf der rechten Seite des Stalls können wir analog in (r2,s5) entweder 1 oder 2 und dann in (r2,s4) entsprechend 2 oder 1 sperren. Nun fragen wir uns, ob sämtliche denkbaren Belegungen der eben betrachteten vier Ställe überhaupt möglich sind und stellen fest, dass dies nicht der Fall ist. Auf den Bildern rechts sind die einzelnen Fälle dargestellt. Im ersten Fall (Bild oben) kann das graue Feld nicht besetzt werden, im zweiten Fall (2. Bild von oben) muss die 4 in das hellgraue Feld – und dann kann das graue Feld darunter nicht belegt werden. Offenbar ist aber auch die Belegung, die im 3. Bild von oben zu sehen ist, nicht möglich – für den grauen Käfig gibt es keine geeignete Kaninchenrasse. In das graue Feld kann nur die Rasse 1 gesetzt werden, und für das Feld darunter gibt es dann keine Belegungsmöglichkeit mehr. Es bleibt die im 4. Bild dargestellte Belegung. Wir stellen fest, dass hier die zweite Reihe abgesehen vom mittleren Feld (r2,s3) das Spiegelbild der ersten Reihe ist. Damit ist klar, dass sich für die 3. und 4. Reihe die Betrachtungen wiederholen und wir folglich in den Fragezeichenkäfig das Kaninchen (**1**), den schwarzen Zwergwidder, setzen müssen.

1	2		3	4
3	**4**		**1**	**2**

1	2		3	4
4	**3**		**1**	**2**

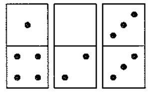
1	2		3	4
3	**4**		**2**	**1**

1	2		3	4
4	**3**		**2**	**1**



Das Bild rechts zeigt eine mögliche Verteilung der Kaninchen auf die Käfige. Es gibt eine zweite Belegung der Käfige, die sich von der ersten dadurch unterscheidet, dass wir beim Zuordnen der Kaninchenrassen auf die mittleren Käfige statt mit dem schwarzen Zwergwidder mit dem schwarzen Riesen beginnen.

27. Ein Komplettsatz Domino besteht aus 28 verschiedenen Steinen. Sie tragen alle möglichen Kombinationen der Punktzahlen von 0 bis 6. Wie viele Punkte sind auf allen 28 Dominosteinen?



(**A**) 84 (**B**) 105 (**C**) 126 (**D**) 147 (**E**) 168

Lösung: In dem Dominostein-Satz tritt jede Punktzahl achtmal auf: sechsmal kommt sie in Kombination mit jeder der anderen Punktzahlen vor, und auf genau einem Stein tritt sie doppelt auf. Damit finden wir auf allen Steinen zusammen $8 \cdot (0+1+2+3+4+5+6) = 8 \cdot 21 = 168$ Punkte.

28. In der Tabelle stehen die Symbole ■, △ und ★ für Zahlen. Die Summe einer jeden Zeile und Spalte ist gegeben und steht rechts neben der Zeile bzw. unterhalb der Spalte. Wie groß ist ■ + ★ − △?

■	★	■	11
★	■	△	8
★	△	■	8
10	8	9	

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Da ■ + ★ − △ gefragt ist, versuchen wir, dies aus den gegebenen Summen zusammenzustellen. Es gibt dafür mehr als eine Möglichkeit. Eine ist die folgende: Addieren wir die erste Zeile und die erste Spalte, so erhalten wir (■ + ★ + ■) + (■ + ★ + ★) = 11 + 10 bzw. 3 · (■ + ★) = 21. Daraus folgt ■ + ★ = 7. Damit erhalten wir aus der 2. Zeile der Tabelle (★ + ■) + △ = 7 + △ = 8 bzw. △ = 1. Und nun ist klar, dass ■ + ★ − △ = 7 − 1 = 6 ist.

KAENGURU-Kryptogramm

```
   K A E N
 + G U R U
 ---------
 M A T H E
```

Im nebenstehenden Kryptogramm sind die Buchstaben derart durch dezimale Grundziffern zu ersetzen, dass eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe entsteht. Dabei sind gleiche Buchstaben durch dieselbe Ziffer und unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Finde mindestens zwei verschiedene Lösungen des Kryptogramms!

29. Olaf stellt die 13 auf jede mögliche Weise als Summe von untereinander *verschiedenen* natürlichen Zahlen dar, z. B. $13 = 12 + 1$ oder $13 = 6 + 4 + 3$. Von diesen Zerlegungen betrachtet Olaf nun diejenigen mit der größten Anzahl von Summanden. Welches ist der größte Summand, der in einer solchen Summe auftreten kann?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Da die Zahlen voneinander verschieden sein sollen, erhalten wir eine größtmögliche Anzahl von Summanden, wenn wir versuchen, möglichst viele kleine Summanden „unterzubringen". Es ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10 < 13$, jedoch $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 13$. Also können es gewiss nicht mehr als 4 Summanden sein. Der größte Summand in einer solchen Vierersumme ist dann $13 - (1 + 2 + 3) = 7$.

30. Theo hat die nebenstehende Tabelle nach folgendem Schema erstellt: In die erste Zeile hat er die zwei Zahlen 10 und 3 eingetragen. In jede folgende Zeile schreibt er links die Summe und rechts die Differenz der beiden Zahlen aus der Zeile darüber. Lina hat nach dem gleichen Muster eine etwas längere Tabelle angefertigt, in der in der siebten Zeile die Zahlen 96 und 64 stehen. Dann ist die Summe ihrer beiden Startzahlen aus der ersten Zeile gleich

10	3
13	7
20	6
26	14

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 20 (**E**) 24

Lösung: Schauen wir uns Theos Tabelle etwas genauer an und schreiben einmal sehr ausführlich auf, wie die einzelnen Zeilen entstehen:

In der 1. Zeile	10	und	3
in der 2. Zeile	$10+3$	und	$10-3$
in der 3. Zeile	$(10+3)+(10-3)=2\cdot10+0\cdot3$	und	$(10+3)-(10-3)=0\cdot10+2\cdot3$
in der 4. Zeile	$(2\cdot10+0\cdot3)+(0\cdot10+2\cdot3)$ $=2\cdot10+2\cdot3=26$	und	$(2\cdot10+0\cdot3)-(0\cdot10+2\cdot3)$ $=2\cdot10-2\cdot3=14$

Würden wir dies fortsetzen, erhielten wir

In der 5. Zeile	$(2\cdot10+2\cdot3)+(2\cdot10-2\cdot3)$ $=4\cdot10+0\cdot3$	und	$(2\cdot10+2\cdot3)-(2\cdot10-2\cdot3)$ $=0\cdot10+4\cdot3$
in der 6. Zeile	$(4\cdot10+0\cdot3)+(0\cdot10+4\cdot3)$ $=4\cdot10+4\cdot3$	und	$(4\cdot10+0\cdot3)-(0\cdot10+4\cdot3)$ $=4\cdot10-4\cdot3$
und in der 7. Zeile	$(4\cdot10+4\cdot3)+(4\cdot10-4\cdot3)$ $=8\cdot10+0\cdot3$	und	$(4\cdot10+4\cdot3)-(4\cdot10-4\cdot3)$ $=0\cdot10+8\cdot3$

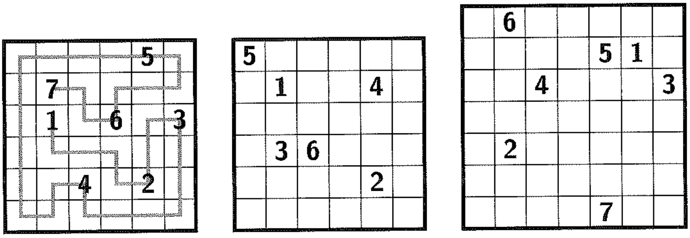
Lina hatte andere Startzahlen als Theo, jedoch steht auch bei ihr in der 7. Zeile das Achtfache ihrer Startzahlen. Daraus ergibt sich die Startzahl auf der linken Seite zu $96:8=12$. Für die Startzahl auf der rechten Seite ergibt sich analog $64:8=8$. Die gesuchte Summe ist daher 20, die richtige Antwort (**D**).

Aufgaben auf kariertem Papier – Teil 2

Noch einmal fügen wir eine ganze Seite Knobeleien ein, die wir aus dem „Großen Buch der Kopfnüsse“ ausgesucht haben.

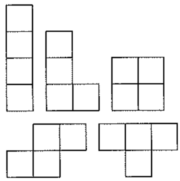
Auf die richtige Reihenfolge kommt es an

Die Zahlen in den folgenden Figuren auf Kästchenpapier sind von der 1 bis zur größten in der richtigen Reihenfolge miteinander zu verbinden. Dabei darf der Kurvenzug nur waagerecht und senkrecht verlaufen, sämtliche Kästchen müssen genau einmal passiert werden, und der Kurvenzug darf sich nirgendwo selbst überschneiden. Ein Beispiel ist angegeben – dann folgen zwei Aufgaben.

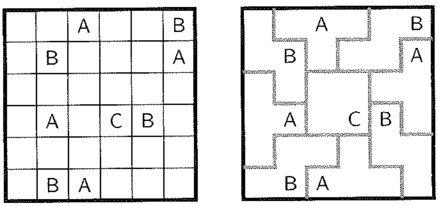


Tetraminos in Aktion

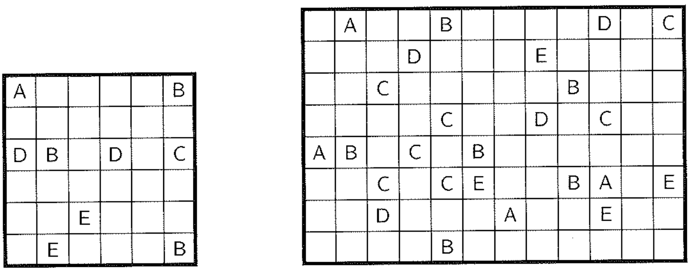
„Tetramino-Buchstaben“ sind eine ungewöhnliche Knobelei: Gegeben ist ein rechteckiges Stück Karopapier, auf dem sich an vorgegebenen Stellen Buchstaben befinden. Das Rechteck ist mit den rechts abgebildeten 4-Karo-Figuren, den sogenannten Tetraminos, zu füllen. Zu jedem Buchstaben gehört genau eines der Tetraminos. Bei jeder neuen Aufgabe ist herauszufinden, welche der Figuren welchem Buchstaben zugeordnet werden muss.



Zuerst geben wir ein Beispiel an – links die Aufgabe, rechts die Lösung – bei dem genau drei der fünf Figuren auszuwählen waren.



Wer findet eine Lösung für das 6×6-Quadrat und das 12×8-Rechteck?



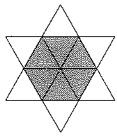
Klassenstufen 7 und 8

1. $200 \cdot 9 + 20 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 9 + 2 =$

(**A**) 1998 (**B**) 1999 (**C**) 2008 (**D**) 2009 (**E**) 2010

Lösung: Wir rechnen $200 \cdot 9 + 20 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 9 + 2 = 1800 + 180 + 18 + 9 + 2 = 2009$.

2. Der rechts abgebildete Stern besteht aus 12 zueinander kongruenten gleichseitigen Dreiecken. Sein Umfang beträgt 36 cm. Welchen Umfang hat das graue Sechseck?



(**A**) 6 cm (**B**) 12 cm (**C**) 18 cm (**D**) 24 cm (**E**) 30 cm

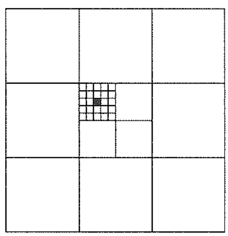
Lösung: Da die 12 gleichseitigen Dreiecke zueinander kongruent sind, sind sämtliche Dreiecksseiten gleich lang. Der Umfang des Sterns ist die Summe von 12 Seitenlängen, der Umfang des grauen Sechsecks die Summe von 6 Seitenlängen. Folglich ist der Umfang des Sechsecks halb so lang wie der des Sterns, also 18 cm, denn der Umfang des Sterns misst 36 cm.

3. Samstags verteilt Antonia Kataloge, in jedes Haus einen. „Nun noch die Häuser auf der linken Straßenseite mit den ungeraden Hausnummern", denkt sie, „dann bin ich fertig. Die erste Hausnummer ist 15, und mit Nummer 53 ist dann Schluss." Wie viele Häuser muss Antonia noch beliefern?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 27 (**D**) 38 (**E**) 53

Lösung: Wer mag, kann bei dieser relativ kleinen Anzahl von Häusern die Hausnummern aufschreiben und auszählen. Es ist jedoch effektiver zu rechnen: mit $\frac{53-15}{2}$ erhalten wir die Anzahl der Häuser ab dem mit der Hausnummer 17 bis zum Haus mit der Nummer 53 (die 15 wurde mit abgezogen). Also gibt es in der Straße $\frac{53-15}{2} + 1 = 20$ Häuser.

4. Welchen Bruchteil der Fläche des großen Quadrats nimmt die Fläche des winzigen schwarzen Quadrats ein?



(**A**) $\frac{1}{100}$ (**B**) $\frac{1}{300}$ (**C**) $\frac{1}{600}$ (**D**) $\frac{1}{900}$ (**E**) $\frac{1}{1000}$

Lösung: Das Teilquadrat in der Mitte des großen Quadrates hat ein Neuntel der Fläche des großen Quadrats. Dieses Neuntel ist geviertelt. Das Viertel mit dem kleinen schwarzen Quadrat ist in 25 Teile geteilt. Dann beträgt also der Anteil des Flächeninhalts des kleinen schwarzen Quadrates am Flächeninhalt des großen Quadrats $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{900}$.

5. Das Produkt von vier voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen ist 100. Dann ist die Summe dieser vier Zahlen

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Wir zerlegen die Zahl 100 in das Produkt ihrer Primfaktoren: $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Nun gilt es, vier voneinander verschiedene Faktoren zu finden. Durch systematisches Probieren finden wir, dass 2, 5 und 10 – und 1 – die gesuchten Faktoren sind. Die Summe ist $2 + 5 + 10 + 1 = 18$.

6. Mein Einkaufsgeld reicht für genau 12 Brezeln oder für genau 20 kleine Laugenbrötchen. Wenn ich 9 Brezeln kaufe, wie viele Laugenbrötchen kann ich dann vom restlichen Geld höchstens kaufen?

(**A**) 10 (**B**) 8 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Kaufe ich mir 9 Brezeln, so habe ich noch ein Viertel meines Geldes übrig. Für ein Viertel des Geldes kann ich ein Viertel der für das gesamte Geld möglichen 20 Laugenbrötchen bekommen. Also reicht mein Geld noch für 5 Laugenbrötchen.

KAENGURU-Kryptogramm

$K+A+N+G+A+R+O+O=56$

Im nebenstehenden Kryptogramm mit dem englischen Wort für Känguru sind die Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen. Dabei sind gleiche Buchstaben durch dieselbe Ziffer und unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Wie groß ist die Summe $A + O$?

7. Sarah, Tim, Nora und Hannes radeln am Wochenende zum Reiterhof, wo sie auf vier verschiedenen Pferden reiten. Auf jedem Pferd reiten genau zwei der Kinder. Sarah reitet auf drei verschiedenen Pferden, Tim auf zwei und Nora auf einem. Auf wie vielen verschiedenen Pferden reitet Hannes?

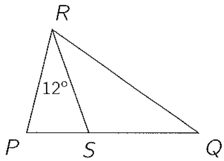
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Da jedes der vier Pferde von genau zwei Kindern geritten wird, entstehen dabei genau acht verschiedene Paare aus je einem Pferd und einem Kind. Sarah gehört zu drei dieser Paare, Tim zu zwei Paaren und Nora zu einem. Demnach muss Hannes wegen $8 - (3 + 2 + 1) = 2$ zu zwei Paaren gehören, d. h., Hannes ist auf zwei verschiedenen Pferden geritten.

8. Nach unserem Urlaub auf dem Bauernhof fragt meine Tante neugierig: „Wie viele Schafe und Ziegen gab es denn dort?" Ich antworte ziemlich frech, dass es doppelt so viele Schafsbeine wie Ziegenköpfe zu zählen gab. Nun weiß die Tante immerhin, es sind

(**A**) halb so viele Schafe wie Ziegen. (**B**) gleich viele Schafe wie Ziegen.
(**C**) doppelt so viele Schafe wie Ziegen. (**D**) ein Viertel so viele Schafe wie Ziegen.
(**E**) ein Sechstel so viele Schafe wie Ziegen.

Lösung: Wie wir wissen, hat jedes Schaf vier Beine, jede Ziege einen Kopf. Also hat ein Schaf viermal so viele Beine wie eine Ziege Köpfe hat. Da es nur doppelt – und nicht viermal – so viele Schafsbeine wie Ziegenköpfe zu zählen gab, sind es nur halb so viele Schafe wie Ziegen. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe stimmt mit dem der Aufgabe 10 in der Klassenstufe 5/6 überein.

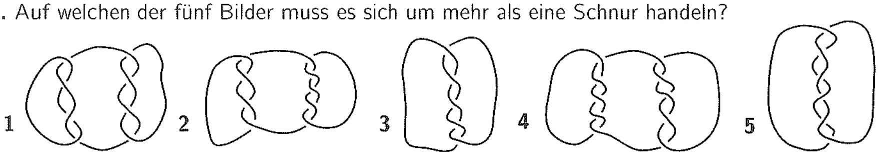


9. Im Dreieck PQR liegt der Punkt S auf der Seite PQ, und es gilt $\measuredangle PRS = 12°$ sowie $\overline{RP} = \overline{RS} = \overline{SQ}$. Wie groß ist $\measuredangle SRQ$?

(**A**) 36° (**B**) 42° (**C**) 54° (**D**) 60° (**E**) 84°

Lösung: Im Dreieck PSR, das nach den Vorgaben der Aufgabe gleichschenklig ist, rechnen wir die Größe der Basiswinkel aus: $(180° - 12°) : 2 = 84°$. Dabei haben wir benutzt, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Der Winkel $\measuredangle RSP$ ist Außenwinkel des – nach Aufgabenstellung ebenfalls gleichschenkligen – Dreiecks SQR. Da der Außenwinkel stets gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel ist, finden wir unmittelbar für die Größe des Basiswinkels $\measuredangle SRQ$: $84° : 2 = 42°$.

10. Auf welchen der fünf Bilder muss es sich um mehr als eine Schnur handeln?



(**A**) auf keinem (**B**) auf allen (**C**) **1**, **3**, **4** und **5** (**D**) **3**, **4** und **5** (**E**) **1**, **2** und **5**

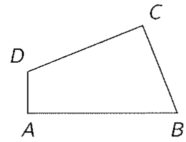
Lösung: Zeichnet man mit dem Bleistift die Linien nach, lässt sich gut erkennen, bei welchen es sich um geschlossene und bei welchen um solche handelt, die in mehrere Teile zerfallen. Die Verknotungen **1** und **2** zerfallen je in drei, die Verknotung **5** zerfällt in zwei Teile. Diese Aufgabe stimmt – bis auf die Vertauschung der Bilder (1 mit 5 und 2 mit 3) – mit Aufgabe 11 in der Klassenstufe 5/6 überein. Dort findet sich auch eine Abbildung zur Lösung.

11. Welche der Zahlen 11, 20, 21, 23 und 25 ist das arithmetische Mittel der anderen vier?

(**A**) 11 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 25

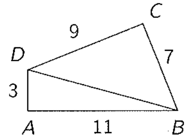
Lösung: Bei dieser Aufgabe lohnt es sich zu schätzen. Für das arithmetische Mittel kommen hier weder die größte noch die kleinste Zahl in Frage – und auch nicht die 23, die nur unwesentlich kleiner als die größte Zahl ist. Wir versuchen es mit 20. Um zu verifizieren, dass unsere Wahl richtig ist, rechnen wir das arithmetische Mittel der anderen 4 Zahlen aus, $\frac{11+21+23+25}{4} = \frac{80}{4} = 20$, und haben so die Lösung gefunden.

Eine zweite Lösungsvariante nutzt folgende Eigenschaft des arithmetischen Mittels: Bildet man das arithmetische Mittel aus einer Menge von Zahlen *und* dem arithmetischem Mittel dieser Zahlen, so erhält man wieder das arithmetische Mittel dieser Zahlen. Bilden wir also das arithmetische Mittel aller fünf Zahlen, so ist dies die gesuchte Zahl: $\frac{11+20+21+23+25}{5} = 20$.



12. Im Viereck $ABCD$ ist $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{CD} = 9$ und $\overline{DA} = 3$. An den Ecken A und C sind rechte Winkel. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks?

(**A**) 30 (**B**) 44 (**C**) 48 (**D**) 52 (**E**) 60

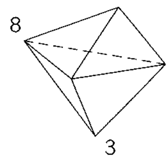


Lösung: Wir denken uns die Diagonale BD eingezeichnet. Das Viereck wird dadurch in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt. Den Flächeninhalt dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke können wir ausrechnen, da wir in beiden Fällen die Seitenlängen der beiden aufeinander senkrecht stehenden Seiten kennen – die Dreiecke sind jeweils die Hälften der aus den beiden Seiten zu konstruierenden Rechtecke. Der gesuchte Flächeninhalt ist $\frac{3 \cdot 11}{2} + \frac{9 \cdot 7}{2} = \frac{33 + 63}{2} = 48$.

13. In der Gleichung $(D \cdot R \cdot E \cdot I) \cdot (V \cdot I \cdot E \cdot R) = Z \cdot W \cdot O \cdot E \cdot L \cdot F$ steht jeder Buchstabe für eine einstellige Zahl. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen. Wie viele verschiedene Werte kann das Produkt $Z \cdot W \cdot E \cdot I$ haben?

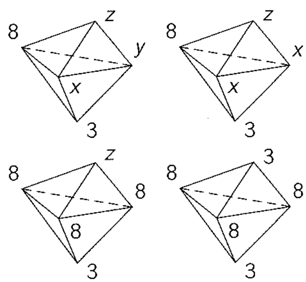
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Die Anzahl der verschiedenen Buchstaben ist 10. Folglich treten alle 10 einstelligen Zahlen in der Produktgleichung auf, insbesondere die 0. Damit ist klar, dass jenes Produkt, in dem die 0 als Faktor enthalten ist, 0 ist. Also steht auf einer Seite der Gleichung 0. Dann muss jedoch auch das auf der anderen Seite der Gleichung stehende Produkt 0 sein, mit anderen Worten muss der Faktor 0 auf beiden Seiten der Gleichung vorkommen. Der einzige Buchstabe, den wir auf beiden Seiten finden, ist E. Dann ist $E = 0$ und demzufolge das Produkt $Z \cdot W \cdot E \cdot I$ gleich 0. Die richtige Antwort ist (**A**).



14. Der rechts gezeichnete Körper ist von sechs dreieckigen Flächen begrenzt. An zwei Ecken stehen die Zahlen 3 und 8. Die anderen Ecken sollen ebenfalls mit einer Zahl beschriftet werden, so dass die Summen der Eckzahlen einer jeden Seitenfläche gleich sind. Dann ist die Summe aller 5 Eckzahlen gleich

(**A**) 30 (**B**) 27 (**C**) 24 (**D**) 18 (**E**) 17

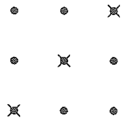


Lösung: Wir schreiben an die drei Ecken, für die geeignete Zahlen zu finden sind, die Buchstaben x, y und z. Dann befinden sich 8, 3 und x auf einer Seitenfläche des Körpers. Ebenso befinden sich 8, 3 und y auf einer Seitenfläche des Körpers. Daraus folgt, dass x dieselbe Zahl wie y sein muss, da $8 + 3 + x = 8 + 3 + y$ gelten muss. Da es auch eine Seitenfäche gibt, an deren Ecken die 3 und zweimal x stehen, kann wegen $8+3+x = 3+x+x$ nur $x = 8$ gelten. Nun sehen wir, dass gelten muss $3+8+8 = z+8+8$, woraus sofort $z = 3$ folgt. Die Summe der 5 Eckzahlen ist $3 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 30$. – Diese Aufgabe stimmt inhaltlich mit Aufgabe 23 in der Klassenstufe 5/6 überein.

15. Wie viele der neun Punkte muss man mindestens entfernen, damit von den verbliebenen keine drei Punkte auf derselben Geraden liegen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Wenn keine drei der neun Punkte auf derselben Geraden liegen dürfen, so muss ganz sicher aus jeder der drei senkrechten Reihen mindestens ein Punkt entfernt werden. Gelingt es uns, diese drei Punkte so zu entfernen, dass von den verbleibenden sechs Punkten keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so haben wir mit 3 die Minimalzahl der zu entfernenden Punkte gefunden. Da auch aus jeder waagerechten Reihe ein Punkt entfernt werden muss, versuchen wir es mit den drei Punkten auf einer Diagonale. Die Zeichnung zeigt, dass dies eine Lösung ist.



KAENGURU-Kryptogramm

$$\begin{array}{cccccc} & & & K & A & N \\ + & & & G & O & U \\ + & & & R & O & U \\ \hline = & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

Im nebenstehenden Kryptogramm mit dem französischen Wort für Känguru sind die Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen. Gleiche Buchstaben sind durch dieselbe Ziffer und unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Wie viele Lösungen gibt es?

16. Auf einem Arbeitsblatt sollen wir die Winkel in einem spitzwinkligen und einem stumpfwinkligen Dreieck messen. Als mich Nick in der Pause fragt, was ich gemessen habe, erinnere ich mich nur noch an 120°, 80°, 55° und 10°. Wie groß ist der kleinste Winkel im spitzwinkligen Dreieck?

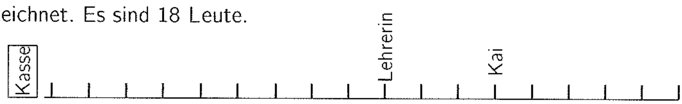
(**A**) 5° (**B**) 10° (**C**) 45° (**D**) 55° (**E**) unbestimmt

Lösung: Schauen wir uns die Winkelgrößen aufmerksam an, so fällt zuerst auf, dass der stumpfe 120°-Winkel und der 80°-Winkel nicht zum selben Dreieck gehören können, da ihre Summe größer als 180° ist. Folglich gehört der 80°-Winkel zum spitzwinkligen Dreieck. Dann kann aber der Winkel von 10° nicht zu dem spitzwinkligen Dreieck gehören, denn der dritte Winkel in diesem Dreieck wäre $180° - 80° - 10° = 90°$ groß, es würde also ein rechtwinkliges Dreieck sein. Da $120° + 10° + 55° > 180°$ ist, muss der 55°-Winkel zu dem spitzwinkligen Dreieck gehören. Der dritte Winkel in diesem Dreieck ist $180° - 80° - 55° = 45°$ groß, und damit der kleinste im spitzwinkligen Dreieck.

17. In der Schlange an der Kinokasse entdecke ich meine Lehrerin. Hinter ihr stehen noch 8 Leute, auch Kai, mit dem ich für den Film verabredet bin. Er steht 3 Plätze hinter meiner Lehrerin und ruft mir zu: „Vor mir sind noch 12 Leute, dann bin ich dran!" Wie lang ist die Schlange?

(**A**) 21 (**B**) 20 (**C**) 19 (**D**) 18 (**E**) 17

Lösung: Schnell und übersichtlich findet man die Lösung, wenn man sich die Kinoschlange aufzeichnet. Es sind 18 Leute.



18. Rudi rätselt. Er muss die Zahlen von 1 bis 4 so in ein 5×5-Quadrat eintragen, dass niemals gleiche Zahlen nebeneinander stehen – auch nicht in Feldern, die nur eine Ecke gemeinsam haben. Einige der Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahlen passen an die Fragezeichen-Stelle?

1	2			
3	4			
		2		
				?
2				

(**A**) nur eine 1 (**B**) nur eine 3 (**C**) nur eine 4 (**D**) 3 oder 4 (**E**) es geht gar nicht

Lösung: Um das Ausfüllen des 5×5-Quadrats darstellen zu können, beschreiben wir das Kästchen durch die Angabe der Zeile (von oben) und der Spalte (von links). Durch die vorgegebenen Zahlen liegt bereits fest, welche Zahl an die Stelle (z3,s2) (also Zeile 3, Spalte 2) geschrieben werden muss. Es ist die 1, denn wegen der 2 und der 4 in angrenzenden Kästchen und der 3 in einem Kästchen übereck ist dies die einzige Möglichkeit. Damit folgt, dass an die Stelle (z3,s1) eine 2 geschrieben werden muss und ebenso, dass an (z2,s3) eine 3 gehört. Damit folgt für (z1,s3) eine 1. Jetzt hat das Kästchen (z2,s4) drei unterschiedliche Nachbarn – die 3 mit gemeinsamer Kante, die 1 und die 2 mit gemeinsamer Ecke – so dass sich für (z2,s4) 4 ergibt. Nun muss in (z1,s4) eine 2 und in (z3,s4) eine 1, und es folgt für (z2,s5) eine 3 und daraus für (z3,s5) eine 2. Der erreichte Zustand ist rechts oben abgebildet. An die Stelle des Fragezeichens passt nun sowohl eine 3 als auch eine 4, und für beide Möglichkeiten folgt dann jeweils eindeutig, wie das 5×5-Quadrat weiter auszufüllen ist. – Diese Aufgabe ist inhaltlich ganz ähnlich zur Aufgabe 26 in der Klassenstufe 5/6.

1	2	**1**	**2**	
3	4	**3**	**4**	**3**
2	**1**	2	**1**	**2**
				?
2				

1	2	**1**	**2**	**1**
3	4	**3**	**4**	**3**
2	**1**	2	**1**	**2**
4	**3**	**4**	**3**	**4**
2	**1**	**2**	**1**	**2**

1	2	**1**	**2**	**1**
3	4	**3**	**4**	**3**
2	**1**	2	**1**	**2**
3	**4**	**3**	**4**	**3**
2	**1**	**2**	**1**	**2**

KAENGURU-Kryptogramm

Welches ist der kleinste Wert, den der Term

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$$

annehmen kann? In den englischen Worten für Känguru und Spiel sind die Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen, wobei gleiche Buchstaben durch dieselbe Ziffer und unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen sind.

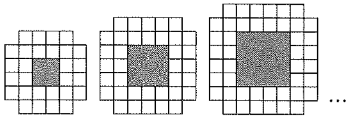
19. Verringert man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ um dieselbe natürliche Zahl, so verdoppelt sich der Wert des Bruchs. Welche natürliche Zahl ist gemeint?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 18
(**D**) eine andere Zahl (**E**) eine solche Zahl existiert nicht

Lösung: Bei dieser Aufgabe können wir das Ergebnis auf direktem Weg ausrechnen. Angenommen, es gibt eine Lösung x. Dann ist ganz gewiss $x \neq 4$, und es muss gelten: $\frac{3-x}{4-x} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ bzw. $6-2x = 12-3x$, woraus $x = 6$ folgt. Setzen wir das Ergebnis ein, so erhalten wir $\frac{3-6}{4-6} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. Die Antwort (**D**) ist also richtig.

Probieren mit den drei Lösungsmöglichkeiten (**A**), (**B**) und (**C**) hätte uns zwar gezeigt, dass diese keine Lösung darstellen, ob allerdings Antwort (**D**) oder (**E**) die richtige ist, ließ sich daraus nicht ersehen.

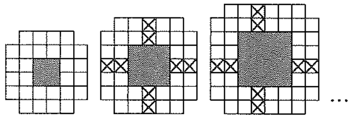
20. Es gibt Spiegel unterschiedlicher Größe, deren Rahmen aus kleinen weißen quadratischen Mosaiksteinen zusammengesetzt sind (siehe Bild). Der Rahmen des kleinsten Spiegels besteht aus 28 Mosaiksteinen, der des zweiten aus 36 usw. Wie viele Mosaiksteine umrahmen den siebten Spiegel dieser Serie?



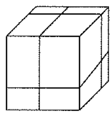
(**A**) 100 (**B**) 92 (**C**) 84 (**D**) 80 (**E**) 76

Lösung: Wer die kleinen Mosaiksteinchen des dritten Spiegels auch noch ausgezählt hat, konnte feststellen, dass die Differenz zwischen der Mosaiksteinanzahl des zweiten und ersten und die Differenz zwischen der des dritten und zweiten Spiegels je gleich 8 ist. Zählt man hier kühn weiter, gelangt man zum Ergebnis $28 + 6 \cdot 8 = 76$, das sich auch unter den Lösungsmöglichkeiten findet.

Dass diese Rechnung auch wirklich richtig ist, wollen wir nun begründen. Von einem Spiegel der Serie gelangen zum nächstgrößeren, indem wir rechts und links je zwei Mosaiksteine hinzufügen und ebenso oben und unten (s. Bild). Also kommen in jedem Schritt acht quadratische Mosaiksteine hinzu, (**E**) ist richtig.



21. Elli bastelt mit ihrer Schwester Luise. Sie hat einen großen Holzwürfel rot gestrichen. Luise zersägt ihn mit drei Schnitten in 8 Quader (siehe Bild). Bevor Elli mit dem Streichen der noch unbemalten Quaderflächen beginnt, überlegt sie, welchen Teil der Gesamtoberfläche der 8 Quader sie jetzt noch zu streichen hat. Es ist



(**A**) die Hälfte (**B**) ein Drittel (**C**) ein Viertel (**D**) ein Sechstel (**E**) ein Achtel

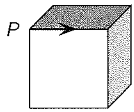
Lösung: Bei jedem Quader sind nach dem Zersägen drei Seitenflächen gestrichen und jede einer gestrichenen Seitenfläche gegenüberliegende Seitenfläche ist ohne Farbe. Weil gegenüberliegende Seitenflächen eines Quaders denselben Flächeninhalt haben, ist genau die Hälfte jeder Quaderoberfläche gestrichen, also muss die andere Hälfte noch gestrichen werden. – Zum selben Ergebnis können wir auch auf folgende Weise gelangen: Jeder der Schnitte, die Elli führt, verläuft parallel zu zwei der Seitenflächen des Würfels, da sie ja Quader erhält. Die beiden zu streichenden Flächen, die dabei entstehen, sind jeweils so groß wie eine Würfelseitenfläche. Bei den drei Schnitten entstehen 6 solche Flächen, also noch einmal so viel, wie sie bereits gestrichen hat. Dann hat sie folglich die Hälfte der Gesamtoberfläche der Quader noch zu streichen.

22. In der Nacht hat die Polizei 13 mutmaßliche Diebe gefasst. Auf dem Polizeirevier beginnt der Erste lässig: „Von mir erfährt niemand etwas, und die anderen lügen sowieso alle." Da ruft der Zweite: „Der lügt!" Der Dritte behauptet, dass der Zweite gelogen habe, der Vierte, dass der Dritte gelogen habe usw. Die Polizei ist ratlos. Wie viele der Festgenommenen haben tatsächlich gelogen?

(**A**) 0 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 12 (**E**) 13

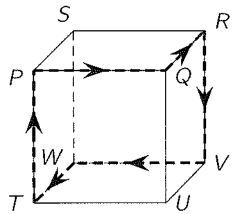
Lösung: Angenommen, der erste mutmaßliche Dieb hätte die Wahrheit gesagt – alle anderen würden lügen. Dann wäre die Aussage des Zweiten, der behauptet, dass der Erste gelogen habe, eine Lüge. Der Dritte würde also die Wahrheit sprechen – im Widerspruch zur Aussage des Ersten. Folglich ist die Aussage des Ersten eine Lüge. Damit hat der Zweite die Wahrheit gesprochen, der Dritte jedoch, der den Zweiten als Lügner bezeichnet, hat eine falsche Aussage gemacht. Dies behauptet auch der Vierte, der somit die Wahrheit spricht. Nun ist klar, dass in der Gruppe der mutmaßlichen Diebe jeder zweite Aussagende die Wahrheit spricht, also der 2., 4., 6., 8., 10. und 12. Die verbleibenden 7 mutmaßlichen Diebe haben falsche Aussagen gemacht.

23. Käfer Klaus krabbelt auf den Kanten eines Würfels. Er startet im Punkt P und entscheidet an jeder Ecke, ob er nach links oder nach rechts weiterkrabbelt. Nach wie vielen Kanten kehrt Klaus zum ersten Mal zum Punkt P zurück, wenn er immer abwechselnd nach links und nach rechts gekrabbelt ist?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Wegen der Symmetrie des Würfels ist die Anzahl der zu bekrabbelnden Kanten unabhängig davon, ob Käfer Klaus sich zuerst nach links oder zuerst nach rechts wendet. Wir betrachten den Fall, dass er zuerst nach links geht. Es wird übersichtlich, wenn wir die Punkte des Würfels bezeichnen (s. Bild) und den Weg dann entsprechend beschreiben. Der Käfer krabbelt von P zu Q, dort nach links zu R, dort nach rechts zu V, wieder nach links zu W, von dort nach rechts zu T und jetzt nach links zu P. Er hat dabei 6 Kanten passiert.

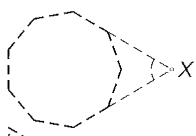


24. Ein 6 cm × 6 cm-Quadrat bedeckt die Fläche eines Dreiecks maximal zu 60 %. Legt man das Dreieck auf das Quadrat, dann werden maximal zwei Drittel der Fläche des Quadrats bedeckt. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

(**A**) 24 cm² (**B**) 25 cm² (**C**) 36 cm² (**D**) 40 cm² (**E**) 48 cm²

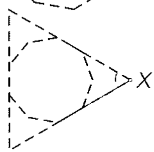
Lösung: Bedecken zwei Flächen einander (teilweise), so ist der Flächeninhalt des bedeckenden Teiles der einen Fläche gleich dem des bedeckten Teiles der anderen Fläche. Ist eine Fläche maximal bedeckt, so natürlich auch die andere. Folglich entsprechen die 60 % der Dreiecksfläche den zwei Dritteln der Quadratfläche. Mit $F_\triangle$ sei der Flächeninhalt der Dreiecksfläche bezeichnet. Dann gilt: $\frac{60}{100} \cdot F_\triangle = \frac{2}{3} \cdot (6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm})$, woraus wir $\frac{2}{5} F_\triangle = \frac{2 \cdot 36\,\text{cm}^2}{3}$ bzw. $F_\triangle = 40\,\text{cm}^2$ errechnen.

25. In der Zeichnung ist ein regelmäßiges Neuneck zu sehen. Wie groß ist der Winkel bei X?

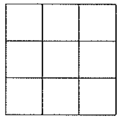


(**A**) 50° (**B**) 52,5° (**C**) 55° (**D**) 57,5° (**E**) 60°

Lösung: Auf Grund der Symmetrie des Neunecks entsteht ein gleichseitiges Dreieck, wenn die Schenkel des Winkels bis zum Schnitt mit der Gerade verlängert werden, die durch die dem Scheitelpunkt X gegenüberliegende Neunecksseite verläuft. Folglich ist der gesuchte Winkel 60° groß.



26. Heiner möchte in die neun Quadrate eines 3×3-Spielbretts Damesteine platzieren, so dass die Anzahl der Steine in jeder Zeile und in jeder Spalte unterschiedlich ist. Dabei dürfen Felder leer bleiben, aber es darf auch in jedes Quadrat mehr als ein Stein gelegt werden. Wie viele Steine braucht Heiner mindestens?



(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 12

Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir ein Damebrett mit minimaler Anzahl von Steinen vor uns haben. Als Summen, die über die Spalten und Zeilen gebildet werden, haben wir, der Aufgabe entsprechend, 6 verschiedene Zahlen. Addieren wir diese 6 Zahlen, so erhalten wir das Doppelte der Anzahl der Damesteine auf dem Brett. Aus diesem Grund können die 6 Zahlen nicht die (minimal denkbaren) Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 sein, denn deren Summe ist 15, also keine gerade Zahl. Damit muss die gesuchte kleinstmögliche Anzahl Damesteine, die sich auf dem Brett unterbringen lassen, mindestens $16 : 2 = 8$ sein. Auf der Abbildung ist eine Möglichkeit mit 8 Steinen angegeben.

1	0	3	4
0	0	1	1
1	0	2	3
2	0	6	

Ein deutscher Naturforscher

Ergänzt die folgenden Wortbruchstücke so durch das Zahlwort für eine natürliche Zahl, dass sich sinnvolle Begriffe ergeben:

A) ...... *guldenkraut*, ... *schönchen*

B) ...... *waldstätter See*, ... *erdeck*, ... *los*, ... *enbeinküste*, ... *meterlauf (Kurzstrecke)*, ... *schaft*

C) ...... *amkeit*, ... *fel*, ... *g*, ... *stigkeit*, ... *gebirge*, ... *sachen*, ... *erbahn*, ... *ung*, ... *malklug*, ... *t*, ... *fußkrebs*, ... *e*, ... *enbein*, ... *errat*, ... *riede*, ... *jähriger Krieg (1618-1648)*

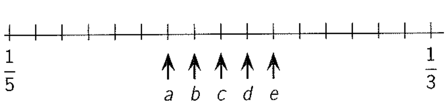
Wenn a die Summe der unter A *eingefügten, b die Summe der unter* B *eingefügten und c die Summe der unter* C *eingefügten Zahlen ist, so gibt* $a-b$ *das Geburtsjahr und* $a-c$ *das Todesjahr des genialen und vielseitigen Naturwissenschaftlers Alexander von Humboldt an, der im diesjährigen „Humboldt-Jahr" auf vielfältige Weise geehrt wird.*

27. Lydia denkt sich eine natürliche Zahl N, die Jakob erraten soll. Lydia sagt: „Der größte Teiler meiner Zahl N, der ungleich N ist, ist genau 45-mal so groß wie der kleinste Teiler meiner Zahl N, der ungleich 1 ist." Wie viele natürliche Zahlen N besitzen diese Eigenschaft?

(A) keine **(B)** eine **(C)** zwei **(D)** drei **(E)** mehr als drei

Lösung: Da 45 den größten von N verschiedenen Teiler von N teilt, ist 45 auch Teiler von N. Somit muss der kleinste von 1 verschiedene Teiler von N kleiner oder gleich dem kleinsten von 1 verschiedenen Teiler der Zahl 45 sein. Der kleinste von 1 verschiedene Teiler von 45 ist 3. Somit kommen für den kleinsten von 1 verschiedenen Teiler von N nur 2 und 3 in Frage. Wir versuchen in beiden Fällen, eine Zahl N zu bestimmen: Ist der kleinste von 1 verschiedene Teiler 2, so ist der größte von N verschiedene Teiler $2 \cdot 45 = 90$. Da das Produkt aus kleinstem und größtem Teiler, sofern beide von 1 bzw. der Zahl selbst verschieden sind, die Zahl selbst ergibt, ist im betrachteten Fall $N = 2 \cdot 90 = 180$. Im anderen möglichen Fall ist 3 der kleinste von 1 verschiedene Teiler, der größte von N verschiedene Teiler also $3 \cdot 45 = 135$ und die Zahl selbst $N = 3 \cdot 135 = 405$. Es gibt also genau zwei Zahlen mit der von Lydia beschriebenen Eigenschaft, d. h., Antwort **(C)** ist richtig.

28. Auf dem Zahlenstrahl sind die Brüche $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$ eingetragen. Wo befindet sich $\frac{1}{4}$?



(A) in a **(B)** in b **(C)** in c **(D)** in d **(E)** in e

Lösung: Wir zählen 16 Intervalle zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$. Da die Differenz $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$ ist, ist jedes Intervall $\frac{2}{15 \cdot 16} = \frac{1}{120}$ lang. Da die Differenz $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = \frac{6}{120}$ beträgt, liegt der Bruch $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{5}$ genau 6 Intervalle entfernt, also in a.

Ein Universalgelehrter

Der geniale deutsche Naturforscher Alexander von Humboldt (1769–1859), der im diesjährigen „Humboldt-Jahr" auf vielfältige Weise geehrt wird, gilt als Universalgelehrter, denn er hat in vielen Wissenschaften wesentliche Beiträge geliefert. Sechs der zahlreichen Wissenschaftsgebiete, auf denen er geforscht hat, sind im Rösselsprung, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, aufeinanderfolgend und bei P *beginnend in die abgebildete Figur eingetragen. Um welche sechs Wissenschaftsgebiete handelt es sich?*

C	H	I	M	G	L	N	G	M
S		H	O		I	E		E
P	K	Y	E	E	E	O	I	I
R	I	N	A	N	O	I	R	O
O		T	T		K	L		E
E	O	M	I	S	A	B	G	A

29. Treppenhausen ist ein seltsames Dorf. In jeder Straße ist eine Seite unbebaut, und auf der anderen Seite stehen genau 10 Häuser nebeneinander. Die Häuser haben 1, 2 oder 3 Stockwerke. Benachbarte Häuser unterscheiden sich immer um genau ein Stockwerk. Wie viele Straßen gibt es in Treppenhausen höchstens, wenn die Anordnung der Häuser in jeder Straße verschieden ist?

(A) 16 **(B)** 32 **(C)** 64 **(D)** 72 **(E)** 96

Lösung: Wir beschreiben die Straßen durch die Angabe der Stockwerksfolgen, stellen uns also vor, wir stünden vor den 10 Häusern und würden notieren, wie die Höhen aufeinander folgen.
Wir stellen zuerst fest, dass neben einem 1- und neben einem 3-stöckigen Haus stets ein 2-stöckiges stehen muss, während es umgekehrt beim 2-stöckigen zwei Möglichkeiten gibt.
Betrachten wir eine Straße, die links mit einem einstöckigen Haus beginnt, so folgt rechts daneben ein 2-stöckiges. Für das Haus rechts neben dem 2-stöckigen gibt es zwei Möglichkeiten (1- oder

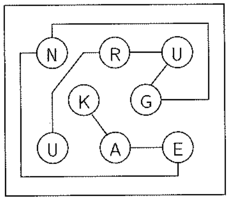
3-stöckig), worauf es – unabhängig davon, ob ein 1- oder ein 3-stöckiges Haus folgte – für das darauf rechts folgende Haus nur die Möglichkeit 2-stöckig gibt. Und nun wiederholt es sich. Wir finden für mit einem 1-stöckigen Haus beginnende Straßen also $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4$ Möglichkeiten der Anordnung der Häuser, d. h. 2^4 verschiedene Straßen. Dasselbe trifft natürlich für mit einem 3-stöckigen Hause beginnende Straßen zu. Für Straßen, die mit einem 2-stöckigen Haus beginnen, gibt es entsprechend $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2^5$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es somit $2 \cdot 2^4 + 2^5 = 2^5 + 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^6 = 64$ Straßen.

30. Auf der Einkaufsliste, die meine Mutter für mich vorbereitet hat, stehen alle Artikel und die jeweils benötigte Anzahl säuberlich untereinander. Mir fällt auf, dass all diese Zahlen voneinander verschieden sind, keine ist größer als 10, und ulkigerweise ist von je zwei direkt untereinanderstehenden Zahlen stets eine der beiden durch die andere teilbar. Wie viele Positionen kann die Einkaufsliste höchstens haben?

(**A**) 10 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

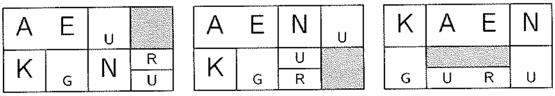
Lösung: Auf dem Einkaufszettel sind als Anzahl einige oder alle der Zahlen von 1 bis 10 unterzubringen. Dabei ist unter zwei aufeinanderfolgenden Zahlen stets eine der beiden ein Teiler der anderen. Natürlich versuchen wir zunächst, eine Liste aus allen Zahlen zu schreiben. Dazu gucken wir uns die Zahlen genauer an: Unter den 10 Zahlen sind vier Primzahlen – 2, 3, 5 und 7 – und drei Primzahlpotenzen – 4, 8 und 9. Zum „Verbinden" der verschiedenen Primzahlen stehen 1, 4, 6, 8, 9 und 10 zur Verfügung. Die 7 kann ausschließlich mit Hilfe der 1 in die Zahlenliste integriert werden, müsste also am Anfang oder Ende der Liste stehen. Wir setzen die 7 an den Anfang. Es muss die 1 folgen. Unter den zu den Primzahlen 2, 3 und 5 gehörenden Vielfachen kann jetzt, da die 1 nicht mehr zur Verfügung steht, ausschließlich über den Teiler 2 „umgeschaltet" werden. Dies ist jedoch, da alle Positionen auf der Einkaufsliste voneinander verschieden sind, nur einmal möglich. Folglich ließen sich nach der 1 nur zwei der Vielfachen der 2 anschließen: entweder die Potenzen der 2 und die Vielfachen mit der 3 oder die Potenzen der 2 und die Vielfachen mit der 5 oder die Vielfachen mit der 3 und mit der 5. In jedem Fall könnten mehrere der 10 Zahlen nicht eingebunden werden: im ersten Fall würden die Vielfachen der 5, im zweiten Fall die der 3 und im dritten Fall die Potenzen der 2 (außer natürlich der 2 selbst) fehlen. Gehört die 7 zur Liste, ist die Anzahl der Positionen also höchstens 8 (z. B. 7 1 9 3 6 2 4 8). Verzichten wir auf die 7, so finden wir eine Liste, die 9 Positionen umfasst, z. B. 5 10 1 9 3 6 2 4 8.

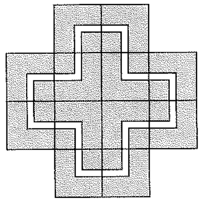
Lösungen der Känguru-Knobeleien



Seite 5, KAENGURU-Linienzug: Ein möglicher Linienzug ist rechts abgebildet.

Seite 7, KAENGURU-Schiebespiel: Eine mögliche Lösung mit 18 Zügen ist diese (es bedeuten zum Beispiel: Ur = Stein U nach rechts, No = Stein N nach oben): Kl, Gl, Nl, Uu, Ru (linkes Bild), Ur, No, Ul, Uo, Ru, Rl (mittleres Bild), Uu, Nr, AEr, Ko, Gl, Ul, Uu (rechtes Bild).





Seite 8, KAENGURU-Buchstabentausch: Wir müssen 5 mal tauschen; eine Möglichkeit ist diese: U2 ⟷ A8, R5 ⟷ G7, U1 ⟷ K3, U3 ⟷ E4, U4 ⟷ N6 (die Zahl gibt jeweils die Position des Buchstaben an)

Seite 12, KAENGURU-Streckenzug: Für den nächstgrößeren Streckenzug braucht man 12 solche Kärtchen, wie rechts zu sehen ist.

Seite 15, KAENGURU-Legespiel: Die folgende Abbildung zeigt eine Legemöglichkeit pro Buchstabe:

Seite 17, KAENGURU-Zahlenwissen: Die vier gesuchten Zahlen der ersten Aufgabe sind 412, 356, 278 und 188. Die Zahlen 2, 14 und 5 lösen die zweite Aufgabe. Das Produkt der ersten 100 natürlichen Zahlen endet auf 24 Nullen. Die Enzyklopädie hat genau 2009 Seiten.

Seite 20, KAENGURU-Kryptogramm: Es gibt zahlreiche Lösungen wie z. B.

$$\begin{array}{r} 8\,0\,7\,3 \\ +\,2\,4\,9\,4 \\ \hline 1\,0\,5\,6\,7 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 4\,2\,0\,3 \\ +\,8\,7\,5\,7 \\ \hline 1\,2\,9\,6\,0 \end{array}$$

Seite 24, KAENGURU-Kryptogramm: Die gesuchte Summe ist A+O = 17, denn die beiden Buchstaben sind 8 und 9.

Seite 27, KAENGURU-Kryptogramm: Die Einer- und Zehnerstellen sind eindeutig, nämlich N = 7, U = 1, A = 4, O = 3. Für die Hunderterstellen bleiben 5, 6 und 8, und diese können beliebig zugeordnet werden. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten: (K, G, R) = (5, 6, 8), (5, 8, 6), (6, 5, 8), (6, 8, 5), (8, 5, 6) oder (8, 6, 5).

Seite 28, KAENGURU-Kryptogramm: Der Bruch wird für M = 8, E = 9 (oder umgekehrt), K = 2, A = 3, N = 4, R = 5 (ebenso vertauschbar), G = 6 oder 7 und O = 1 am kleinsten. Der kleinstmögliche Wert ist 5/3.

Seite 31, ein deutscher Naturforscher: Die gesuchten Begriffe sind: A) *Tausend*guldenkraut, *Tausend*schönchen; B) *Vier*waldstätter See, *Acht*erdeck, *acht*los, *Elf*enbeinküste, *Hundert*meterlauf, *Hundert*schaft; C) *Eins*amkeit, *Zwei*fel, *Zwei*g, *Drei*stigkeit, *Sieben*gebirge, *Sieben*sachen, *Acht*erbahn, *Acht*ung, *neun*malklug, *Zehn*t, *Zehn*fußkrebs, *Elf*e, *Elf*enbein, *Elf*errat, *Elf*riede, *dreißig*jähriger Krieg – Es ist $a = 2000$, $b = 231$ und $c = 141$, $a - b = 1769$, $a - c = 1859$. Alexander von Humboldt lebte also von 1769 bis 1859.

Seite 32, ein Universalgelehrter: Die sechs Wissenschaftsgebiete, auf denen Alexander von Humboldt geforscht hat, sind in der durch die linke Abbildung dargestellten Sprung-Reihenfolge aufeinander folgend eingetragen:
PHYSIK – CHEMIE – GEOLOGIE – MINERALOGIE – BOTANIK – ASTRONOMIE

7	2	5	10	13	16	23	18	21
4		8	15		11	20		24
1	6	3	12	9	14	17	22	19
42	47	44	39	36	33	30	25	28
45		41	34		38	27		31
48	43	46	37	40	35	32	29	26

C	H	I	M	G	L	N	G	M
S		H	O		I	E		E
P	K	Y	E	E	E	O	I	I
R	I	N	A	N	O	I	R	O
O		T	T		K	L		E
E	O	M	I	S	A	B	G	A

Hinweis: Die Lösungen der Aufgaben auf kariertem Papier aus dem „Großen Buch der Kopfnüsse" auf den Seiten 10 und 22 stehen auf der Internetseite des Wettbewerbs: `www.mathe-kaenguru.de`.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Antwort	C	B	C	A	D	B	C

Aufgabe	8	9	10	11	12	13	14
Antwort	B	A	E	D	A	D	D

Aufgabe	15	16	17	18	19	20	21
Antwort	C	E	A	A	D	E	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	A	C	E	D	D	B	E	A	C

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	E	D	C	C	E	C	D	D	E

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	A	C	D	E	A	E	C	B	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

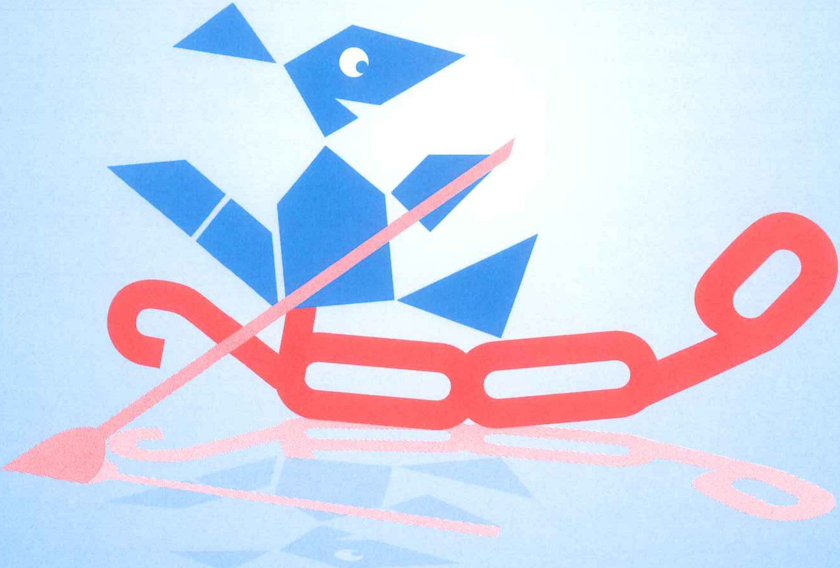
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	B	D	E	D	C	A	B	E

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	A	A	B	C	D	D	D	E

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	C	B	D	E	B	C	A	C	B

www.mathe-kaenguru.de

2009 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2009!

In diesem Jahr wurden bei uns in der Schweiz erstmals auch Volksschulen aktiv auf den internationalen Känguru-Wettbewerb aufmerksam gemacht, an dem ja weltweit über 5 Millionen Jugendliche teilnehmen. Durch Vermittlung von René Schelldorfer (Pädagogische Hochschule Zürich) konnten so fast 3000 zusätzliche junge Leute gewonnen werden, womit – zusammen mit den „Stammgästen" – die Grenze von 14 000 Teilnehmenden überschritten worden ist.

Dass die Aufgabenstellungen sich ein wenig von denen aus den Schullehrbüchern unterscheiden, mag für manchen Teilnehmenden neu gewesen sein. Aber Mathematik steckt in mehr Fragestellungen als oft vermutet, mathematische Methoden finden in unterschiedlichsten Bereichen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht und nicht nur in den Naturwissenschaften und der Vorlaufforschung für Hochtechnologien. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, Trendvoraussagen – all dies wird besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt und spielt im täglichen Leben, wohin man schaut, eine Rolle. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, ebenso wie die vielen Lehrerinnen und Lehrer, die den Wettbewerb überall in Deutschland und in der Schweiz an ihren Schulen organisiert haben, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

Die vorliegende Broschüre ist zur Unterstützung einer nachträglichen Beschäftigung mit den verschiedenen mathematischen Problemen gedacht. Für eine ganze Reihe von Aufgaben wurde nicht nur eine Lösungsmöglichkeit angegeben, sondern anhand der Darstellung verschiedener Wege gezeigt, dass es hilfreich ist, unterschiedliche Methoden zur Lösung mathematischer Aufgabenstellungen zu beherrschen.

Beim Känguru-Wettbewerb konnten für die Aufgaben 1 bis 10 jeweils 3, für die Aufgaben 11 bis 20 jeweils 4 und für die Aufgaben 21 bis 30 jeweils 5 Punkte erreicht werden; bei einer falschen Antwort wurde ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen; falls keine Antwort gegeben wurde, gab es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekam 30 Punkte als Grundpunktzahl; auf diese Weise kann es eine negative Gesamtpunktzahl nicht geben. Die Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Hansjürg Stocker
Deutschschweizerische Mathematikkommission

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet.
Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin
www.mathe-kaenguru.de

Organisation Schweiz: DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission): www.vsmp.ch/dmk

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Lussi Druck AG, Offsetdruck, 6370 Stans

ISBN 978-3-9812144-0-6

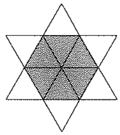
Klassenstufen 7 und 8

1. $200 \cdot 9 + 20 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 9 + 2 =$

(A) 1998 **(B)** 1999 **(C)** 2008 **(D)** 2009 **(E)** 2010

Lösung: Wir rechnen $200 \cdot 9 + 20 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 9 + 2 = 1800 + 180 + 18 + 9 + 2 = 2009$.

2. Der rechts abgebildete Stern besteht aus 12 zueinander kongruenten gleichseitigen Dreiecken. Sein Umfang beträgt 36 cm. Welchen Umfang hat das graue Sechseck?



(A) 6 cm **(B)** 12 cm **(C)** 18 cm **(D)** 24 cm **(E)** 30 cm

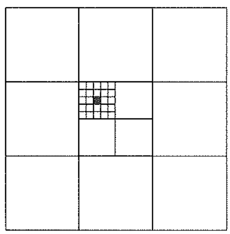
Lösung: Da die 12 gleichseitigen Dreiecke zueinander kongruent sind, sind sämtliche Dreiecksseiten gleich lang. Der Umfang des Sterns ist die Summe von 12 Seitenlängen, der Umfang des grauen Sechsecks die Summe von 6 Seitenlängen. Folglich ist der Umfang des Sechsecks halb so lang wie der des Sterns, also 18 cm, denn der Umfang des Sterns misst 36 cm.

3. Samstags verteilt Antonia Kataloge, in jedes Haus einen. „Nun noch die Häuser auf der linken Straßenseite mit den ungeraden Hausnummern", denkt sie, „dann bin ich fertig. Die erste Hausnummer ist 15, und mit Nummer 53 ist dann Schluss." Wie viele Häuser muss Antonia noch beliefern?

(A) 19 **(B)** 20 **(C)** 27 **(D)** 38 **(E)** 53

Lösung: Wer mag, kann bei dieser relativ kleinen Anzahl von Häusern die Hausnummern aufschreiben und auszählen. Es ist jedoch effektiver zu rechnen: mit $\frac{53-15}{2}$ erhalten wir die Anzahl der Häuser ab dem mit der Hausnummer 17 bis zum Haus mit der Nummer 53 (die 15 wurde mit abgezogen). Also gibt es in der Straße $\frac{53-15}{2} + 1 = 20$ Häuser.

4. Welchen Bruchteil der Fläche des großen Quadrats nimmt die Fläche des winzigen schwarzen Quadrats ein?



(A) $\frac{1}{100}$ **(B)** $\frac{1}{300}$ **(C)** $\frac{1}{600}$ **(D)** $\frac{1}{900}$ **(E)** $\frac{1}{1000}$

Lösung: Das Teilquadrat in der Mitte des großen Quadrates hat ein Neuntel der Fläche des großen Quadrats. Dieses Neuntel ist geviertelt. Das Viertel mit dem kleinen schwarzen Quadrat ist in 25 Teile geteilt. Dann beträgt also der Anteil des Flächeninhalts des kleinen schwarzen Quadrates am Flächeninhalt des großen Quadrats $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{900}$.

5. Das Produkt von vier voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen ist 100. Dann ist die Summe dieser vier Zahlen

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** 18

Lösung: Wir zerlegen die Zahl 100 in das Produkt ihrer Primfaktoren: $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Nun gilt es, vier *voneinander verschiedene* Faktoren zu finden, die multipliziert 100 ergeben. Mit 2, 5, 10 – und 1 – haben wir die gesuchten Faktoren gefunden. Die Summe ist $2 + 5 + 10 + 1 = 18$.

6. Mein Einkaufsgeld reicht für genau 12 Brezeln oder für genau 20 kleine Laugenbrötchen. Wenn ich 9 Brezeln kaufe, wie viele Laugenbrötchen kann ich dann vom restlichen Geld höchstens kaufen?

(A) 10 **(B)** 8 **(C)** 6 **(D)** 5 **(E)** 4

Lösung: Kaufe ich mir 9 Brezeln, so habe ich noch ein Viertel meines Geldes übrig. Für ein Viertel des Geldes kann ich ein Viertel der für das gesamte Geld möglichen 20 Laugenbrötchen bekommen. Also reicht mein Geld noch für 5 Laugenbrötchen.

7. Sarah, Tim, Nora und Hannes radeln am Wochenende zum Reiterhof, wo sie auf vier verschiedenen Pferden reiten. Auf jedem Pferd reiten genau zwei der Kinder. Sarah reitet auf drei verschiedenen Pferden, Tim auf zwei und Nora auf einem. Auf wie vielen verschiedenen Pferden reitet Hannes?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

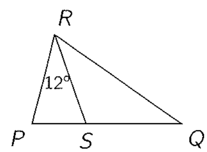
Lösung: Da jedes der vier Pferde von genau zwei Kindern geritten wird, entstehen dabei genau acht verschiedene Paare aus je einem Pferd und einem Kind. Unter den acht Paaren gibt es drei, zu denen Sarah, zwei zu denen Tim und eines, zu dem Nora gehört. Demnach muss Hannes wegen $8 - (3 + 2 + 1) = 2$ zu zwei Paaren gehören, d. h., Hannes ist auf zwei verschiedenen Pferden geritten.

8. Nach unserem Urlaub auf dem Bauernhof fragt meine Tante neugierig: „Wie viele Schafe und Ziegen gab es denn dort?" Ich antworte ziemlich frech, dass es doppelt so viele Schafsbeine wie Ziegenköpfe zu zählen gab. Nun weiß die Tante immerhin, es sind

(A) halb so viele Schafe wie Ziegen. **(B)** gleich viele Schafe wie Ziegen.
(C) doppelt so viele Schafe wie Ziegen. **(D)** ein Viertel so viele Schafe wie Ziegen.
(E) ein Sechstel so viele Schafe wie Ziegen.

Lösung: Wie wir wissen, hat jedes Schaf vier Beine, jede Ziege einen Kopf. Also hat ein Schaf viermal so viele Beine wie eine Ziege Köpfe hat. Da es nur doppelt – und nicht viermal – so viele Schafsbeine wie Ziegenköpfe auf dem Bauernhof zu zählen gab, sind es nur halb so viele Schafe wie Ziegen.

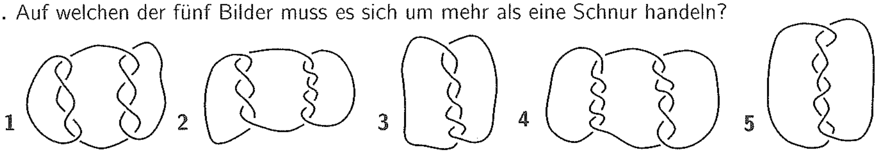
9. Im Dreieck PQR liegt der Punkt S auf der Seite PQ, und es gilt $\measuredangle PRS = 12°$ sowie $\overline{RP} = \overline{RS} = \overline{SQ}$. Wie groß ist $\measuredangle SRQ$?



(A) 36° **(B)** 42° **(C)** 54° **(D)** 60° **(E)** 84°

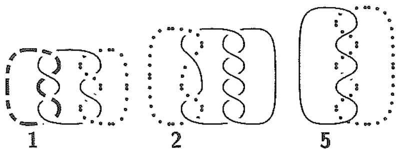
Lösung: Im Dreieck PSR, das nach den Vorgaben der Aufgabe gleichschenklig ist, rechnen wir die Größe der Basiswinkel aus: $(180° - 12°) : 2 = 84°$. Dabei haben wir benutzt, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Der Winkel $\measuredangle RSP$ ist Außenwinkel des – nach Aufgabenstellung ebenfalls gleichschenkligen – Dreiecks SQR. Da der Außenwinkel stets gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel ist, finden wir unmittelbar für die Größe des Basiswinkels $\measuredangle SRQ$: $84° : 2 = 42°$.

10. Auf welchen der fünf Bilder muss es sich um mehr als eine Schnur handeln?



(**A**) auf keinem (**B**) auf allen (**C**) **1**, **3**, **4** und **5** (**D**) **3**, **4** und **5** (**E**) **1**, **2** und **5**

Lösung: Zeichnet man mit dem Bleistift die Linien nach, lässt sich gut erkennen, bei welchen es sich um geschlossene und bei welchen um solche handelt, die in mehrere Teile zerfallen.
In der Abbildung ist deutlich hervorgehoben, dass die Verknotung 1 in drei Schnüre und die Verknotungen 2 und 5 jeweils in zwei Schnüre zerfallen.

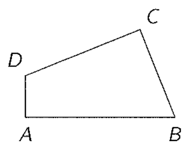


11. Welche der Zahlen 11, 20, 21, 23 und 25 ist das arithmetische Mittel der anderen vier?

(**A**) 11 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 25

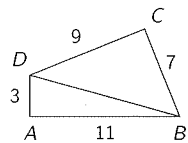
Lösung: Bei dieser Aufgabe lohnt es sich zu schätzen. Für das arithmetische Mittel kommen hier weder die größte noch die kleinste Zahl in Frage – und auch nicht die 23, die nur unwesentlich kleiner als die größte Zahl ist. Wir versuchen es mit 20. Um zu verifizieren, dass unsere Wahl richtig ist, rechnen wir das arithmetische Mittel der anderen 4 Zahlen aus, $\frac{11+21+23+25}{4} = \frac{80}{4} = 20$, und haben so die Lösung gefunden.
Ein zweite Lösungsvariante nutzt folgende Eigenschaft des arithmetischen Mittels: Bildet man das arithmetische Mittel aus einer Menge von Zahlen *und* dem arithmetischem Mittel dieser Zahlen, so erhält man wieder das arithmetische Mittel dieser Zahlen. Bilden wir also das arithmetische Mittel aller 5 Zahlen, so ist dies die gesuchte Zahl: $\frac{11+20+21+23+25}{5} = 20$.

12. Im Viereck $ABCD$ ist $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{CD} = 9$ und $\overline{DA} = 3$. An den Ecken A und C sind rechte Winkel. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks?



(**A**) 30 (**B**) 44 (**C**) 48 (**D**) 52 (**E**) 60

Lösung: Wir denken uns die Diagonale BD eingezeichnet. Das Viereck wird dadurch in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt. Den Flächeninhalt dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke können wir ausrechnen, da wir in beiden Fällen die Seitenlängen der beiden aufeinander senkrecht stehenden Seiten, der sogenannten Katheten, kennen. Der gesuchte Flächeninhalt ist $\frac{3 \cdot 11}{2} + \frac{9 \cdot 7}{2} = \frac{33+63}{2} = 48$.

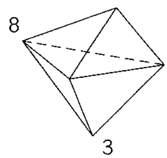


13. In der Gleichung $(D \cdot R \cdot E \cdot I) \cdot (V \cdot I \cdot E \cdot R) = Z \cdot W \cdot O \cdot E \cdot L \cdot F$ steht jeder Buchstabe für eine einstellige Zahl. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Zahlen. Wie viele verschiedene Werte kann das Produkt $Z \cdot W \cdot E \cdot I$ haben?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

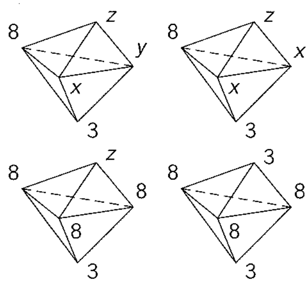
Lösung: Die Anzahl der verschiedenen Buchstaben ist 10. Folglich treten alle 10 einstelligen Zahlen in der Produktgleichung auf, insbesondere die 0. Damit ist klar, dass jenes Produkt, in dem die 0 als Faktor enthalten ist, 0 ist. Also steht auf einer Seite der Gleichung 0. Dann muss jedoch auch das auf der anderen Seite der Gleichung stehende Produkt 0 sein, mit anderen Worten muss der Faktor 0 auf beiden Seiten der Gleichung vorkommen. Der einzige Buchstabe, den wir auf beiden Seiten finden, ist das E. Dann ist $E = 0$ und demzufolge das Produkt $Z \cdot W \cdot E \cdot I$ gleich 0. Die richtige Antwort ist (**A**).

14. Der rechts gezeichnete Körper ist von sechs dreieckigen Flächen begrenzt. An zwei Ecken stehen die Zahlen 3 und 8. Die anderen Ecken sollen ebenfalls mit einer Zahl beschriftet werden, so dass die Summen der Eckzahlen einer jeden Seitenfläche gleich sind. Dann ist die Summe aller 5 Eckzahlen gleich

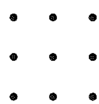


(**A**) 30 (**B**) 27 (**C**) 24 (**D**) 18 (**E**) 17

Lösung: Wir schreiben an die drei Ecken, für die geeignete Zahlen zu finden sind, die Buchstaben x, y und z. Dann befinden sich 8, 3 und x auf einer Seitenfläche des Körpers. Ebenso befinden sich 8, 3 und y auf einer Seitenfläche des Körpers. Daraus folgt, dass x dieselbe Zahl wie y sein muss, da $8 + 3 + x = 8 + 3 + y$ gelten muss. Da es auch eine Seitenfäche gibt, an deren Ecken die 3 und zweimal x stehen, kann wegen $8 + 3 + x = 3 + x + x$ nur $x = 8$ gelten. Nun sehen wir, dass $3 + 8 + 8 = z + 8 + 8$ gelten muss, woraus sofort $z = 3$ folgt. Die Summe der 5 Eckzahlen ist $3 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 30$. – Die Aufgabe stimmt inhaltlich mit Aufgabe 6 in der Klassenstufe 9/10 sowie Aufgabe 5 für die 11. bis 13. Klassenstufe überein.

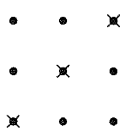


15. Wie viele der neun Punkte muss man mindestens entfernen, damit von den verbliebenen keine drei Punkte auf derselben Geraden liegen?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Wenn keine drei der neun Punkte auf derselben Geraden liegen dürfen, so muss ganz sicher aus jeder der drei senkrechten Reihen mindestens ein Punkt entfernt werden. Gelingt es uns, diese drei Punkte so zu entfernen, dass von den verbleibenden sechs Punkten keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so haben wir mit 3 die Minimalzahl der zu entfernenden Punkte gefunden. Da auch aus jeder waagerechten Reihe ein Punkt entfernt werden muss, versuchen wir es mit den drei Punkten einer Diagonale. Die Zeichnung zeigt, dass dies eine Lösung ist.



16. Auf einem Arbeitsblatt sollen wir die Winkel in einem spitzwinkligen und einem stumpfwinkligen Dreieck messen. Als mich Nick in der Pause fragt, was ich gemessen habe, erinnere ich mich nur noch an 120°, 80°, 55° und 10°. Wie groß ist der kleinste Winkel im spitzwinkligen Dreieck?

(**A**) 5° (**B**) 10° (**C**) 45° (**D**) 55° (**E**) unbestimmt

Lösung: Schauen wir uns die Winkelgrößen aufmerksam an, so fällt zuerst auf, dass der stumpfe 120°-Winkel und der 80°-Winkel nicht zum selben Dreieck gehören können, da ihre Summe größer als 180° ist. Folglich gehört der 80°-Winkel zum spitzwinkligen Dreieck. Dann kann aber der Winkel von 10° nicht zu dem spitzwinkligen Dreieck gehören, denn der dritte Winkel in diesem Dreieck wäre $180° - 80° - 10° = 90°$ groß, es würde also ein rechtwinkliges Dreieck sein. Da $120° + 10° + 55° > 180°$ ist, muss der 55°-Winkel zu dem spitzwinkligen Dreieck gehören. Der dritte Winkel in diesem Dreieck ist $180° - 80° - 55° = 45°$ groß, und dies ist damit der kleinste im spitzwinkligen Dreieck.

Ein deutscher Naturforscher

1	2							9	10	11	12							19	20
		3	4	5			8					13			16	17	18		
C					6	7 K	A	E	N	G	U	R	14 U	15					M
	M		D													L		G	
		L		S	N									S	E		E		
	I	T		R		E		O			A		F		R		L	R	
Z			S		R		E		R	N		T		T		D			R

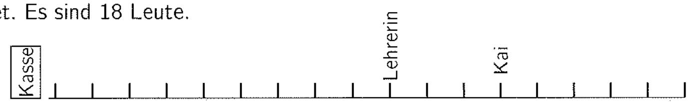
Es sind 20 meist naturwissenschaftliche Begriffe senkrecht in die Figur einzutragen, wobei jeweils zwei Buchstaben vorgegeben sind. Bei richtiger Eintragung der Begriffe steht in der grauen Zeile der Name eines genialen und vielseitigen Naturwissenschaftlers, der in diesem Jahr anlässlich seines 150. Todestages besonders geehrt wird. Die zu erratenden Begriffe haben folgende Bedeutung:

1. *Speisewürze*, 2. *Pelztier (großes Wiesel)*, 3. *Knochengerüst der Wirbeltiere*, 4. *griechischer Philosoph, Mathematiker und Astronom (etwa 400–347 v. u. Z.)*, 5. *Greifvogel*, 6. *Teil eines Bruches*, 7. *junger Mensch (Mehrzahl)*, 8. *Seite im rechtwinkligen Dreieck*, 9. *negativ geladenes Elementarteilchen*, 10. *Hauptstadt von Niedersachsen*, 11. *alte Bezeichnung für Weißdorn*, 12. *Salz der Aluminiumsäure*, 13. *Modifikation des Kohlenstoffs*, 14. *Abluft, die in die Luftversorgung zurückgeführt wird*, 15. *chemisches Element (Metall)*, 16. *Teilgebiet der Mathematik*, 17. *Drachenviereck*, 18. *Lachsfisch*, 19. *italienischer Physiker und Chemiker (1776–1856)*, 20. *elektronisches, programmierbares Datenverarbeitungssystem*

17. In der Schlange an der Kinokasse entdecke ich meine Lehrerin. Hinter ihr stehen noch 8 Leute, auch Kai, mit dem ich für den Film verabredet bin. Er steht 3 Plätze hinter meiner Lehrerin und ruft mir zu: „Vor mir sind noch 12 Leute, dann bin ich dran!“ Wie lang ist die Schlange?

(**A**) 21 (**B**) 20 (**C**) 19 (**D**) 18 (**E**) 17

Lösung: Schnell und übersichtlich findet man die Lösung, wenn man sich die Kinoschlange aufzeichnet. Es sind 18 Leute.



18. Rudi rätselt. Er muss die Zahlen von 1 bis 4 so in ein 5×5-Quadrat eintragen, dass niemals gleiche Zahlen nebeneinander stehen – auch nicht in Feldern, die nur eine Ecke gemeinsam haben. Einige der Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahlen passen an die Fragezeichen-Stelle?

1	2			
3	4			
		2		
				?
2				

(**A**) nur eine 1 (**B**) nur eine 3 (**C**) nur eine 4 (**D**) 3 oder 4 (**E**) es geht gar nicht

Lösung: Um das Ausfüllen des 5×5-Quadrats darstellen zu können, beschreiben wir die Kästchen durch die Angabe der Zeile (von oben) und der Spalte (von links). Durch die vorgegebenen Zahlen liegt bereits fest, welche Zahl an die Stelle (z3,s2) (also Zeile 3, Spalte 2) geschrieben werden muss. Es ist die 1, denn wegen der 2 und der 4 in angrenzenden Kästchen und der 3 in einem Kästchen übereck ist dies die einzige Möglichkeit. Damit folgt, dass an die Stelle (z3,s1) eine 2 geschrieben werden muss und ebenso, dass an (z2,s3) eine 3 gehört. Damit folgt für (z1,s3) eine 1. Jetzt hat das Kästchen (z2,s4) drei unterschiedliche Nachbarn – die 3 mit gemeinsamer Kante, die 1 und die 2 mit gemeinsamer Ecke –, so dass sich für (z2,s4) 4 ergibt. Nun muss in (z1,s4) eine 2 und in (z3,s4) eine 1, und es folgt für (z2,s5) eine 3 und daraus für (z3,s5) eine 2. Der erreichte Zustand ist rechts oben abgebildet.
An die Stelle des Fragezeichens passt nun sowohl eine 3 als auch eine 4. Für beide Möglichkeiten folgt dann eindeutig, wie das 5×5-Quadrat weiter auszufüllen ist. – Diese Aufgabe ist ähnlich zur Aufgabe 10 in der Klassenstufe 11 bis 13.

1	2	**1**	**2**	
3	4	**3**	**4**	**3**
2	**1**	2	**1**	**2**
				?
2				

1	2	**1**	**2**	**1**
3	4	**3**	**4**	**3**
2	**1**	2	**1**	**2**
4	**3**	**4**	**3**	**4**
2	**1**	**2**	**1**	**2**

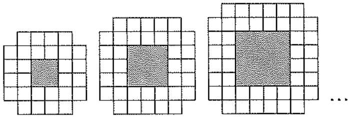
1	2	**1**	**2**	**1**
3	4	**3**	**4**	**3**
2	**1**	2	**1**	**2**
3	**4**	**3**	**4**	**3**
2	**1**	**2**	**1**	**2**

19. Verringert man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ um dieselbe natürliche Zahl, so verdoppelt sich der Wert des Bruchs. Welche natürliche Zahl ist gemeint?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 18
(**D**) eine andere Zahl (**E**) eine solche Zahl existiert nicht

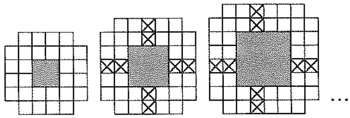
Lösung: Bei dieser Aufgabe können wir das Ergebnis auf direktem Weg ausrechnen. Angenommen, es gibt eine Lösung x. Dann ist x ganz gewiss ungleich 4. Es muss gelten: $\frac{3-x}{4-x} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ bzw. $6 - 2x = 12 - 3x$, woraus $x = 6$ folgt. Setzen wir das Ergebnis ein, so erhalten wir $\frac{3-6}{4-6} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. Die Antwort (**D**) ist also richtig. – Probieren mit den drei Lösungsmöglichkeiten hätte uns zwar gezeigt, dass diese keine Lösung darstellen, ob allerdings Antwort (**D**) oder (**E**) die richtige ist, ließ sich daraus nicht ersehen.

20. Es gibt Spiegel unterschiedlicher Größe, deren Rahmen aus kleinen weißen quadratischen Mosaiksteinen zusammengesetzt sind (siehe Bild). Der Rahmen des kleinsten Spiegels besteht aus 28 Mosaiksteinen, der des zweiten aus 36 usw. Wie viele Mosaiksteine umrahmen den siebten Spiegel dieser Serie?

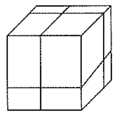


(**A**) 100 (**B**) 92 (**C**) 84 (**D**) 80 (**E**) 76

Lösung: Wer die kleinen Mosaiksteinchen des dritten Spiegels auch noch ausgezählt hat, konnte feststellen, dass die Differenz zwischen der Mosaiksteinanzahl des zweiten und ersten und die Differenz zwischen der des dritten und zweiten gleich ist, nämlich 8. Zählt man hier kühn weiter, gelangt man zum Ergebnis $28 + 6 \cdot 8 = 76$, das sich auch unter den Lösungsmöglichkeiten findet. Dass diese Rechnung auch wirklich richtig ist, wollen wir nun begründen. Von einem Spiegel der Serie gelangen zum nächstgrößeren, indem wir rechts und links je zwei Mosaiksteine hinzufügen und ebenso oben und unten (s. Bild). Also kommen in jedem Schritt 8 quadratische Mosaiksteine hinzu.



21. Elli bastelt mit ihrer Schwester Luise. Sie hat einen großen Holzwürfel rot gestrichen. Luise zersägt ihn mit drei Schnitten in 8 Quader (siehe Bild). Bevor Elli mit dem Streichen der noch unbemalten Quaderflächen beginnt, überlegt sie, welchen Teil der Gesamtoberfläche der 8 Quader sie jetzt noch zu streichen hat. Es ist



(**A**) die Hälfte (**B**) ein Drittel (**C**) ein Viertel (**D**) ein Sechstel (**E**) ein Achtel

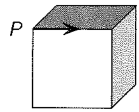
Lösung: Bei jedem Quader sind drei Seiten gestrichen, und jede einer gestrichenen Seite gegenüberliegende Seite ist ohne Farbe. Weil gegenüberliegende Seitenflächen eines Quaders denselben Flächeninhalt haben, ist genau die Hälfte jeder Quaderoberfläche gestrichen, also muss die andere Hälfte noch gestrichen werden.

22. In der Nacht hat die Polizei 13 mutmaßliche Diebe gefasst. Auf dem Polizeirevier beginnt der Erste lässig: „Von mir erfährt niemand etwas, und die anderen lügen sowieso alle." Da ruft der Zweite: „Der lügt!" Der Dritte behauptet, dass der Zweite gelogen habe, der Vierte, dass der Dritte gelogen habe usw. Die Polizei ist ratlos. Wie viele der Festgenommenen haben tatsächlich gelogen?

(**A**) 0 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 12 (**E**) 13

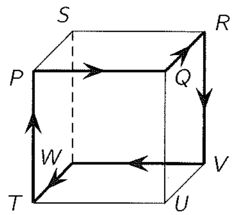
Lösung: Angenommen, der erste mutmaßliche Dieb hätte die Wahrheit gesagt – alle anderen würden lügen. Dann wäre die Aussage des Zweiten, der behauptet, dass der Erste gelogen habe, eine Lüge. Der Dritte würde also die Wahrheit sprechen – im Widerspruch zur Aussage des Ersten. Folglich ist die Aussage des Ersten eine Lüge. Damit hat der Zweite die Wahrheit gesprochen. Der Dritte jedoch, der den Zweiten als Lügner bezeichnet, hat eine falsche Aussage gemacht. Dies behauptet auch der Vierte, der somit die Wahrheit spricht. Nun ist klar, dass in der Gruppe der mutmaßlichen Diebe jeder zweite Aussagende die Wahrheit spricht, also der 2., 4., 6., 8., 10. und 12. Die verbleibenden sieben mutmaßlichen Diebe haben falsche Aussagen gemacht.

23. Käfer Klaus krabbelt auf den Kanten eines Würfels. Er startet im Punkt P und entscheidet an jeder Ecke, ob er nach links oder nach rechts weiterkrabbelt. Nach wie vielen Kanten kehrt Klaus zum ersten Mal zum Punkt P zurück, wenn er immer abwechselnd nach links und nach rechts gekrabbelt ist?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Wegen der Symmetrie des Würfels ist die Anzahl der zu bekrabbelnden Kanten unabhängig davon, ob Käfer Klaus sich zuerst nach links oder zuerst nach rechts wendet. Wir betrachten den Fall, dass er zuerst nach links geht. Es wird übersichtlich, wenn wir die Punkte des Würfels bezeichnen (s. Bild) und den Weg dann entsprechend beschreiben. Der Käfer krabbelt von P zu Q, dort nach links zu R, dort nach rechts zu V, wieder nach links zu W, von dort nach rechts zu T und jetzt nach links zu P. Er hat dabei 6 Kanten passiert.



Ein Universalgelehrter

Der geniale deutsche Naturforscher Alexander von Humboldt (1769–1859), der im diesjährigen „Humboldt-Jahr" auf vielfältige Weise geehrt wird, gilt als Universalgelehrter, denn er hat in vielen Wissenschaften wesentliche Beiträge geliefert. Sechs der zahlreichen Wissenschaftsgebiete, die er erforscht hat, sind im Rösselsprung, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, aufeinanderfolgend und bei P beginnend in die abgebildete Figur eingetragen. Welche sind es?

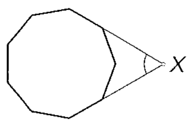
C	H	I	M	G	L	N	G	M
S		H	O		I	E		E
P	K	Y	E	E	E	O	I	I
R	I	N	A	N	O	I	R	O
O		T	T		K	L		E
E	O	M	I	S	A	B	G	A

24. Ein 6 cm × 6 cm-Quadrat bedeckt die Fläche eines Dreiecks maximal zu 60 %. Legt man das Dreieck auf das Quadrat, dann werden maximal zwei Drittel der Fläche des Quadrats bedeckt. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

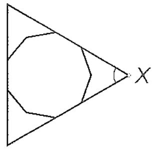
(**A**) $24\,\text{cm}^2$ (**B**) $25\,\text{cm}^2$ (**C**) $36\,\text{cm}^2$ (**D**) $40\,\text{cm}^2$ (**E**) $48\,\text{cm}^2$

Lösung: Bedecken zwei Figuren einander (teilweise), so ist der Flächeninhalt des bedeckenden Teiles der einen Figur gleich dem des bedeckten Teiles der anderen Figur. Vergrößert man einen dieser Flächeninhalte (zum Beispiel durch Verschieben einer der Figuren), so nimmt automatisch auch der jeweils andere Flächeninhalt zu. Wird also eine der beiden Figuren maximal bedeckt, so auch die andere. Folglich entsprechen die 60 % der Dreiecksfläche den zwei Dritteln der Quadratfläche. Mit $F_\triangle$ sei der Flächeninhalt der Dreiecksfläche bezeichnet. Dann gilt $\frac{60}{100} \cdot F_\triangle = \frac{2}{3} \cdot (6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm})$, woraus wir $\frac{3}{5} \cdot F_\triangle = \frac{2 \cdot 36\,\text{cm}^2}{3}$ bzw. $F_\triangle = 40\,\text{cm}^2$ errechnen.

25. In der Zeichnung ist ein regelmäßiges Neuneck zu sehen. Wie groß ist der Winkel bei X?

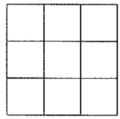


(**A**) 50° (**B**) 52,5° (**C**) 55° (**D**) 57,5° (**E**) 60°



Lösung: Auf Grund der Symmetrie des Neunecks entsteht ein gleichseitiges Dreieck, wenn die Schenkel des Winkels bis zum Schnitt mit der Gerade verlängert werden, die durch die dem Scheitelpunkt X gegenüberliegende Neunecksseite verläuft. Folglich ist der gesuchte Winkel 60° groß.

26. Heiner möchte in die neun Quadrate eines 3×3-Spielbretts Damesteine platzieren, so dass die Anzahl der Steine in jeder Zeile und in jeder Spalte unterschiedlich ist. Dabei dürfen Felder leer bleiben, aber es darf auch in jedes Quadrat mehr als ein Stein gelegt werden. Wie viele Steine braucht Heiner mindestens?



(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir ein Damebrett mit minimaler Anzahl von Steinen vor uns haben. Als Summen, die über die Spalten und Zeilen gebildet werden, haben wir, der Aufgabe entsprechend, 6 verschiedene Zahlen. Addieren wir diese 6 Zahlen, so erhalten wir das Doppelte der Anzahl der Damesteine auf dem Brett. Aus diesem Grund können die 6 Zahlen nicht die (minimal denkbaren) Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 sein, denn deren Summe ist 15, also keine gerade Zahl. Damit muss die gesuchte kleinstmögliche Anzahl Damesteine, die sich auf dem Brett unterbringen lassen, mindestens $16 : 2 = 8$ sein. Auf der Abbildung ist eine Möglichkeit mit 8 Steinen angegeben.

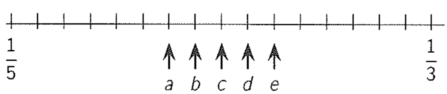
1	0	3	4
0	0	1	1
1	0	2	3
2	0	6	

27. Lydia denkt sich eine natürliche Zahl N, die Jakob erraten soll. Lydia sagt: „Der größte Teiler meiner Zahl N, der ungleich N ist, ist genau 45-mal so groß wie der kleinste Teiler meiner Zahl N, der ungleich 1 ist." Wie viele natürliche Zahlen N besitzen diese Eigenschaft?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) mehr als drei

Lösung: Da 45 ein Teiler der gesuchten Zahl N ist, muss der kleinste Teiler von N kleiner oder gleich dem kleinsten Teiler der Zahl 45 sein. Der kleinste von 1 verschiedene Teiler von 45 ist 3. Somit kommen für den kleinsten Teiler von N nur 2 und 3 in Frage. Wir versuchen in beiden Fällen, eine Zahl N zu bestimmen: Ist der kleinste Teiler 2, so ist der größte Teiler $2 \cdot 45 = 90$. Da das Produkt aus kleinstem und größtem Teiler, sofern beide von 1 bzw. der Zahl selbst verschieden sind, die Zahl selbst ergibt, ist im betrachteten Fall $N = 2 \cdot 90 = 180$. Im anderen möglichen Fall ist 3 der kleinste Teiler, der größte Teiler also $3 \cdot 45 = 135$ und die Zahl selbst $N = 3 \cdot 135 = 405$. Es gibt also genau zwei Zahlen mit der von Lydia beschriebenen Eigenschaft.

28. Auf dem Zahlenstrahl sind die Brüche $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$ eingetragen. Wo befindet sich $\frac{1}{4}$?



(**A**) in a (**B**) in b (**C**) in c (**D**) in d (**E**) in e

Lösung: Wir zählen 16 Intervalle zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$. Da die Differenz $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$ ist, ist jedes Intervall $\frac{2}{15 \cdot 16} = \frac{1}{120}$ lang. Da die Differenz $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = \frac{6}{120}$ beträgt, liegt der Bruch $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{5}$ genau 6 Intervalle entfernt, also in a.

29. Treppenhausen ist ein seltsames Dorf. In jeder Straße ist eine Seite unbebaut, und auf der anderen Seite stehen genau 10 Häuser nebeneinander. Die Häuser haben 1, 2 oder 3 Stockwerke. Benachbarte Häuser unterscheiden sich immer um genau ein Stockwerk. Wie viele Straßen gibt es in Treppenhausen höchstens, wenn die Anordnung der Häuser in jeder Straße verschieden ist?

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 64 (**D**) 72 (**E**) 96

Lösung: Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Häuseranordnungen systematisch aufzulisten: Wir beginnen mit der Straße 1212121212. Nach – und ebenso vor – jedem Paar „12" kann das Häuserpaar „32" stehen. Dies ergibt 5 Möglichkeiten: 1212121232; 1212123212; 1212321212; 1232121212; 3212121212. Als nächstes fügen wir den „12"-Paaren zwei „32"-Paare hinzu. Hier gibt es für die Verteilung 10 Möglichkeiten: 1212123232; 1212321232; 1232121232; 3212121232; 1212323212; 1232123212; 3212123212; 1232321212; 3212321212; 3232121212. Nun ist klar, dass es im umgekehrten Fall, wo wir zwei „12"-Paare und drei „32"-Paare haben ebenfalls 10 Möglichkeiten und im Fall, dass wir ein „12"-Paar und vier „32"-Paare haben, 5 Möglichkeiten gibt. Schließlich gibt es noch die Möglichkeit, dass es nur „32"-Paare sind. Offensichtlich finden wir ebenso viele Möglichkeiten, wenn wir die Häuserpaare „21" und „23" kombinieren. Damit sind alle Möglichkeiten erfasst. Es sind insgesamt $(1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1) \cdot 2 = 64$. – In ein wenig veränderter Einkleidung gibt es diese Aufgabe auch in den Klassenstufen 9/10 und 11/13, als Aufgabe 22 bzw. 21. Dort ist ein anderer Lösungsweg beschrieben.

30. Auf der Einkaufsliste, die meine Mutter für mich vorbereitet hat, stehen alle Artikel und die jeweils benötigte Anzahl säuberlich untereinander. Mir fällt auf, dass all diese Zahlen voneinander verschieden sind, keine ist größer als 10, und ulkigerweise ist von je zwei direkt untereinanderstehenden Zahlen stets eine der beiden durch die andere teilbar. Wie viele Positionen kann die Einkaufsliste höchstens haben?

(**A**) 10 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

Lösung: Auf dem Einkaufszettel sind als Anzahl einige oder alle der Zahlen von 1 bis 10 unterzubringen. Dabei ist unter zwei aufeinanderfolgenden Zahlen stets eine der beiden ein Teiler der anderen. Natürlich versuchen wir zunächst, eine Liste mit allen Zahlen zu schreiben. Dazu gucken wir uns die Zahlen genauer an: Unter den 10 Zahlen sind vier Primzahlen – 2, 3, 5 und 7 – und drei Primzahlpotenzen – 4, 8 und 9. Zum „Verbinden" verschiedener Primzahlen stehen die Zahlen 1, 4, 6, 8, 9 und 10 zur Verfügung. Die 7 kann ausschließlich mit Hilfe der 1 in die Zahlenliste integriert werden, müsste also am Anfang oder Ende der Liste stehen. Wir setzen die 7 an den Anfang. Es muss die 1 folgen. Unter den zu den Primzahlen 2, 3 und 5 gehörenden Vielfachen kann jetzt, da die 1 nicht mehr zur Verfügung steht, ausschließlich über den Teiler 2 „umgeschaltet" werden. Dies ist jedoch, da alle Positionen auf der Einkaufsliste voneinander verschieden sind, nur einmal möglich. Folglich ließen sich nach der 1 nur zwei der Vielfachen der 2 anschließen: entweder die Potenzen der 2 und die Vielfachen mit der 3 oder die Potenzen der 2 und die Vielfachen mit der 5 oder die Vielfachen mit der 3 und mit der 5. In jedem Fall könnten mehrere der 10 Zahlen nicht eingebunden werden: im ersten Fall würden die Vielfachen der 5, im zweiten Fall die der 3 und im dritten Fall die Potenzen der 2 (außer natürlich der 2 selbst) fehlen. Gehört die 7 zur Liste, ist die Anzahl der Positionen also höchstens 8 (z. B. 7 1 9 3 6 2 4 8). Verzichten wir auf die 7, so finden wir eine Liste, die 9 Positionen umfasst, z. B. 5 10 1 9 3 6 2 4 8. – Aufgabe 18 in Klassenstufe 9/10 stimmt vom mathematischen Gehalt her mit dieser Aufgabe überein; die Darstellung der Lösung allerdings unterscheidet sich ein wenig.

Klassenstufen 9 und 10

1. $\dfrac{1}{2\cdot 2009}+\dfrac{1}{3\cdot 2009}+\dfrac{1}{6\cdot 2009}=$

(**A**) $\dfrac{1}{2009}$ (**B**) $\dfrac{2}{2009}$ (**C**) $\dfrac{1}{2\cdot 2009}$ (**D**) $\dfrac{12}{2009}$ (**E**) $\dfrac{1}{12\cdot 2009}$

Lösung: Wir lösen die Aufgabe, indem wir $\dfrac{1}{2009}$ ausklammern:

$$\frac{1}{2\cdot 2009}+\frac{1}{3\cdot 2009}+\frac{1}{6\cdot 2009}=\frac{1}{2009}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2009}\left(\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{2009}$$

2. Am Stadtmarathon haben in diesem Jahr 2009 Läufer teilgenommen. Die Zahl derjenigen, die Karla dabei besiegen konnte, ist dreimal so groß wie die Zahl der Läufer, die besser als Karla waren. Welchen Platz hat Karla belegt?

(**A**) 500 (**B**) 502 (**C**) 503 (**D**) 1505 (**E**) 1507

Lösung: Von den 2008 Läufern, die mit Karla am Stadtmarathon teilnahmen, waren ein Viertel besser und drei Viertel schlechter als Karla. Ein Viertel von 2008 ist 502, und so hat Karla den 503. Platz belegt. – Etwas präziser sehen wir das mit der folgenden Lösungsvariante: Die Anzahl der Teilnehmer am Stadtmarathon setzt sich aus der Zahl v der vor Karla ins Ziel Gelangten, der Zahl n der nach Karla ins Ziel Gelangten und Karla zusammen: $2009=v+n+1$, wobei $n=3v$ gilt. Daraus erhalten wir $4v=2008$ bzw. $v=502$. Karla kam als 503. Teilnehmende ins Ziel.

3. Es ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{5}$ von $\frac{5}{6}$ von $\frac{6}{7}$ von $\frac{7}{8}$ von $\frac{8}{9}$ von $\frac{9}{10}$ von 1000 gleich

(**A**) 2500 (**B**) 250 (**C**) 200 (**D**) 100 (**E**) nichts von alldem

Lösung: Schreiben wir die Aufgabe in mathematischer Form, so finden wir rasch das Gesuchte:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot 1000=\frac{1000}{10}=100$$

4. Wie viele spitze Winkel sind in fünf stumpfwinkligen Dreiecken?

(**A**) 0 (**B**) 5 (**C**) 10
(**D**) 15 (**E**) das hängt von den Dreiecken ab

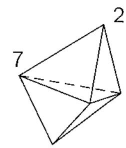
Lösung: Stumpfwinklige Dreiecke sind dadurch charakterisiert, dass sie einen stumpfen Winkel haben, d. h. einen Winkel, der größer als 90° und kleiner als 180° ist. Da die Winkelsumme im Dreick 180° beträgt, müssen die anderen beiden Winkel kleiner als 90° Grad, also spitze Winkel sein. Folglich gibt es in 5 Dreiecken 10 spitze Winkel.

5. Eine lange Ziffernfolge ist entstanden, indem jemand 2009-mal die Zahl 2009 hintereinander ausgedruckt hat. Die Summe aller ungeraden Ziffern, auf die unmittelbar eine gerade Ziffer folgt, ist

(**A**) 9 (**B**) 2009 (**C**) 4018 (**D**) 18072 (**E**) 18081

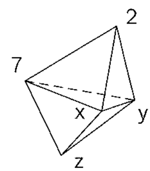
Lösung: In der Ziffernfolge 200920092009... ist 9 die einzige ungerade Zahl. Von den 2009 hintereinander zu denkenden Zahlen 2009 haben alle bis auf die letzte hinter der 9 eine 2. Die gesuchte Eigenschaft kommt also 2008 mal vor: $2008 \cdot 9 = 18072$ ist die gesuchte Summe.

6. Der rechts gezeichnete Körper ist von sechs dreieckigen Flächen begrenzt. An zwei der Ecken sind Zahlen geschrieben, und die restlichen Ecken sollen derart mit Zahlen beschriftet werden, dass die Summe der Zahlen an den Ecken einer jeden Seitenfläche gleich ist. Dann ist die Summe aller 5 Eckzahlen gleich



(**A**) 14 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 27

Lösung: Wir schreiben an die drei Ecken, für die geeignete Zahlen zu finden sind, die Buchstaben x, y und z. Dann befinden sich 2, 7 und x auf einer Seitenfläche des Körpers, und ebenso befinden sich 2, 7 und y auf einer Seitenfläche des Körpers. Folglich ist $x = y$. Da es nun auch eine Seitenfäche gibt, an deren Ecken die 2 und zweimal x steht, folgt $2+7+x = 2+x+x$, also $x = 7$. Wegen $2+7+7 = z+7+7$ erhalten wir schließlich $z = 2$. Die Summe der 5 Eckzahlen ist somit 25. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe stimmt mit dem der Aufgabe 14 in Klassenstufe 7/8 und Aufgabe 5 in Klassenstufe 11 bis 13 überein.

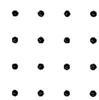


7. Holger hat eine Folge von Zahlen aufgeschrieben. Von der dritten Zahl an ist jede Zahl der Folge die Summe ihrer beiden Vorgängerzahlen. Wenn die vierte Zahl eine 6 und die sechste eine 15 ist, welche Zahl steht dann an siebter Stelle?

(**A**) 9 (**B**) 16 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

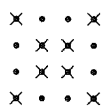
Lösung: Wir bezeichnen die Elemente der Folge mit $\{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Der Bildungsvorschrift der Folge entsprechend, ist die gesuchte Zahl $a_7 = a_6 + a_5$. Laut Aufgabenstellung ist $a_6 = 15$ gegeben. Berechnen wir nun noch a_5. Da $a_6 = a_5 + a_4$ und $a_6 = 15$, $a_4 = 6$ ist, ist $a_5 = 15 - 6 = 9$. Also ist $a_7 = a_6 + a_5 = 15 + 9 = 24$.

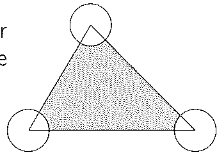
8. Wie viele der 16 Punkte in dem 4×4-Gitter müssen mindestens gelöscht werden, wenn von den verbliebenen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen sollen?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wenn keine drei der 16 Punkte auf derselben Geraden liegen dürfen, so müssen ganz sicher aus jeder der vier senkrechten Reihen mindestens zwei Punkte entfernt werden. Gelingt es uns, diese $4 \cdot 2 = 8$ Punkte so zu entfernen, dass von den übrigen acht Punkten keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so haben wir mit 8 die Minimalzahl der zu entfernenden Punkte gefunden. Da auch aus jeder waagerechten Reihe ein Punkt entfernt werden muss, versuchen wir es mit den Punkten auf den Diagonalen. Die Zeichnung zeigt, dass dies eine Lösung ist. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist dem der Aufgabe 15 in Klassenstufe 7/8 ähnlich.





9. Der Flächeninhalt des abgebildeten Dreiecks beträgt 36. Der Radius der drei Kreise mit Mittelpunkten in den Ecken des Dreiecks ist jeweils 2. Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Teilfläche des Dreiecks?

(**A**) $18+\pi^2$ (**B**) $36-2\pi$ (**C**) $18+4\pi$ (**D**) $36-\pi$ (**E**) 36π

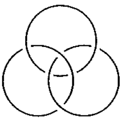
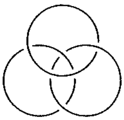
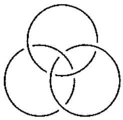
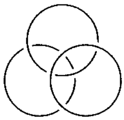
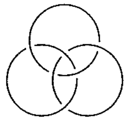
Lösung: Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, bilden die drei Kreisausschnitte an den Ecken zusammen genau einen Halbkreis, dessen Fläche $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2\pi$ beträgt. Folglich ist der Flächeninhalt der grauen Fläche $36-2\pi$.

10. Für wie viele positive ganze Zahlen a stimmt die Anzahl der Ziffern der Zahlen a^2 und a^3 überein?

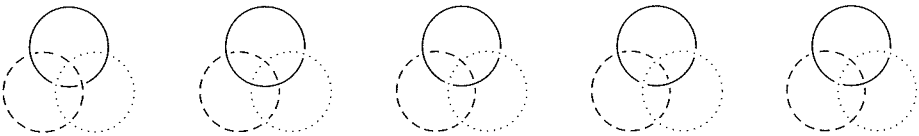
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 9 (**E**) für unendlich viele

Lösung: Die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl a wächst mit größer werdendem a viel schneller als ihr Quadrat. Bereits für $a \geq 10$ gilt $a^3 = a\cdot a^2 \geq 10\cdot a^2$. Also hat a^3 in diesem Fall mindestens eine Stelle mehr als a^2. Unter den einstelligen Zahlen a gilt die Bedingung nur für 1 ($1^2=1, 1^3=1$), 2 ($2^2=4, 2^3=8$) und 4 ($4^2=16, 4^3=64$), also für insgesamt 3 Zahlen.

11. Borromäische Ringe sind speziell verschlungene Ringe, die man nur lösen kann, wenn man einen von ihnen zerstört. Löst man jedoch einen der Ringe heraus, egal, welchen der drei, so sind auch die anderen frei. Welche Abbildung zeigt Borromäische Ringe?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Um deutlicher zu sehen, welche der Abbildungen Borromäische Ringe zeigt, heben wir die einzelnen Ringe unterschiedlich hervor:

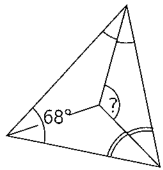


In (**A**) hängen der durchgezogene und der gestrichelte Ring ineinander. Entfernt man also den gepunkteten, so bleiben diese beiden Ringe verschlungen und die zweite Bedingung ist nicht erfüllt. In (**B**) hängen der durchgezogene und der gepunktete Ring ineinander und in (**C**) gilt dasselbe für den gepunkteten und den gestrichelten Ring. Die beiden Abbildungen zeigen also aus demselben Grund wie (**A**) keine Borromäischen Ringe. In Abbildung (**D**) sehen wir leicht, dass die drei Ringe einfach übereinander liegen, also noch nicht einmal verschlungen sind.
Weil wir die ersten vier Möglichkeiten ausgeschlossen haben, muss (**E**) die Lösung sein. Überprüfen wir das: In (**E**) sieht man an den Überkreuzungen in der Mitte, dass alle drei Ringe zusammenhängen. Der gestrichelte Ring liegt über dem gepunkteten, der gepunktete über dem durchgezogenen und der durchgezogene über dem gestrichelten Ring. Entfernt man also einen beliebigen Ring, dann werden die anderen beiden Ringe frei. Diese Abbildung zeigt Borromäische Ringe.

12. Der Preis der Wegglis, die Ilse immer zum Frühstück kauft, liegt unter dem durchschnittlichen Brötchenpreis bei ihrem Bäcker. Als der Bäcker Rögglis als neue Sorte zu seinem Angebot dazunimmt, liegt der Weggli-Preis über dem Durchschnittspreis aller Brötchen. Dann gilt sicher:

(**A**) Rögglis sind billiger als Wegglis. (**B**) Wegglis waren die billigsten Brötchen.
(**C**) Rögglis sind die billigsten Brötchen. (**D**) Wegglis waren billiger als die Hälfte der Brötchen.
(**E**) Rögglis sind billiger als die Hälfte der Brötchen.

Lösung: Offenbar drücken Rögglis den Durchschnittspreis der Brötchen nach unten. Weil der Weggli-Preis dann über dem Durchschnittspreis liegt, ist unter den fünf Aussagen (**A**) ganz sicher richtig. – Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass jede der anderen Aussagen zwar gelten *kann*, aber *nicht muss*.



13. Einer der Innenwinkel eines Dreiecks misst 68°. Die Winkelhalbierenden der beiden anderen Winkel schließen den mit einem Fragezeichen markierten Winkel ein. Wie groß ist dieser?

(**A**) 124° (**B**) 128° (**C**) 132° (**D**) 134° (**E**) 136°

Lösung: Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ist die Summe der beiden dem 68°-Winkel gegenüberliegenden Winkel $180° - 68° = 112°$. Die Summe der beiden halben Winkel, die dem gesuchten Winkel gegenüberliegen, ist $112° : 2 = 56°$, und folglich ist der gesuchte Winkel $180° - 56° = 124°$.

14. Wenn $a \square b = ab + a + b$ und $3 \square 5 = 2 \square x$, dann ist $x =$

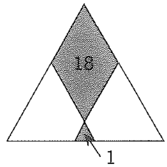
(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 10 (**E**) 12

Lösung: Wir rechnen die linke und rechte Seite der Gleichung, in der das x auftritt, nach dem gegebenen Muster aus und erhalten $3 \cdot 5 + 3 + 5 = 2 \cdot x + 2 + x$. Nach Zusammenfassen wird daraus $23 = 3x + 2$ bzw. $3x = 21$ und schließlich $x = 7$.

15. Wegen einer Straftat werden 15 Personen nacheinander verhört, von denen bekannt ist, dass sie entweder immer lügen oder immer die Wahrheit sprechen. Die 2. und jede folgende Person sagt aus, dass die vor ihr befragte Person gelogen habe. Nach der 15. Person wird erneut die 1. Person befragt, die nun behauptet, dass alle anderen gelogen hätten. Wie viele der Personen sagen die Wahrheit?

(**A**) keine (**B**) 1 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 14

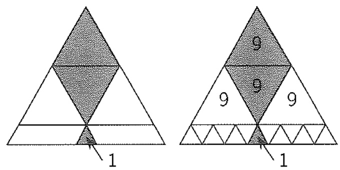
Lösung: Angenommen, die erste vernommene Person hätte die Wahrheit gesagt – alle anderen würden lügen. Dann wäre die Aussage der zweiten Person, die behauptet, dass die erste gelogen habe, eine Lüge. Die dritte Person würde also die Wahrheit sprechen – im Widerspruch zur Aussage der ersten. Folglich ist die Aussage der ersten Person eine Lüge. Damit hat die zweite Person die Wahrheit gesprochen. Die dritte jedoch, die die zweite als Lügner bezeichnet, hat eine falsche Aussage gemacht. Dies bedeutet, dass die vierte Person die Wahrheit spricht. Nun ist klar, dass in der Gruppe der verhörten Personen jede zweite die Wahrheit spricht, also die 2., 4., 6., 8., 10., 12. und 14. Das sind 7 Personen, während die verbleibenden 8 Personen gelogen haben. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe stimmt mit dem der Aufgabe 22 in Klassenstufe 7/8 und der Aufgabe 11 in Klassenstufe 11 bis 13 überein.



16. Ein gleichseitiges Dreieck ist in eine Raute, ein kleines gleichseitiges Dreieck und zwei Trapeze aufgeteilt. Der Flächeninhalt der Raute beträgt 18 und der des kleinen Dreiecks 1. Wie groß ist der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks?

(**A**) 35 (**B**) 43 (**C**) 49 (**D**) 55 (**E**) 67

Lösung: Wir zeichnen die zur Grundlinie des Dreiecks parallele Diagonale der Raute und eine Parallele zur Grundlinie durch den Berührungspunkt der Raute mit dem kleinen grauen Dreieck. Die dabei entstehenden vier Dreiecke sind offenbar gleichseitig und zueinander kongruent. Ihr Flächeninhalt ist gleich dem der halben Raute, also 9. Da das kleine graue Dreieck mit dem Flächeninhalt 1 nach Konstruktion ebenfalls gleichseitig ist, ist es zu den vier großen ähnlich. Weil sich die Flächeninhalte wie $1:9$ verhalten, verhalten sich die Seitenlängen wie $1:\sqrt{9}=1:3$. Dann passt das kleine graue Dreieck in jedes der beiden Parallelogramme links und rechts des kleinen grauen Dreiecks genau 6 mal hinein. Die Parallelogramme haben also jeweils eine Fläche von 6. Der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ist somit $4\cdot 9+1+2\cdot 6=49$.



17. Die Zahlen $\sqrt{n}$ und 10 unterscheiden sich um höchstens 1. Für wie viele natürliche Zahlen n ist das wahr?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 39 (**D**) 40 (**E**) 41

Lösung: Die Zahl $\sqrt{n}$ liegt zwischen 9 und 11, diese beiden Zahlen eingeschlossen. Also muss n zwischen $9^2=81$ und $11^2=121$ liegen, und dafür gibt es genau $121-80=41$ Möglichkeiten.

18. Hänsel schreibt in eine Reihe nebeneinander verschiedene positive ganze Zahlen, die sämtlich 10 nicht übersteigen. Gretel bemerkt nach genauem Hinschauen, dass in jedem Paar benachbarter Zahlen eine der beiden durch die andere teilbar ist. Wie viele Zahlen kann Hänsel höchstens notiert haben?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Die Aufgabe ist inhaltlich identisch mit Aufgabe 30 in Klasse 7/8.

KAENGURU-Wortgleichung

$$x=(a-b)+(c-d)+e$$

Gesucht ist der Begriff x, der sich entsprechend der Gleichung aus den folgenden Begriffen zusammensetzt ($a+b$ bedeutet das Aneinanderfügen der Worte a und b; Subtraktion $a-b$ bedeutet das Entfernen der Buchstaben des Wortes b vom Wort a):

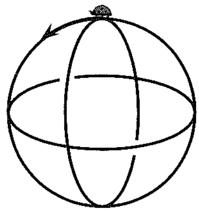
$a=$ isolierte elektrische Leitung, $b=$ physikalische Einheit der Lautstärke,
$c=$ rechter Nebenfluss der Donau, $d=$ kleine Zeiteinheit (Kurzbezeichnung),
$e=$ religiöser Lehrer des Hinduismus

19. Wie viele Nullen müssen an die Stelle des $*$ bei dem Dezimalbruch $1,*1$ geschrieben werden, damit die entstehende Zahl kleiner als $\frac{2009}{2008}$, aber größer als $\frac{20009}{20008}$ ist?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

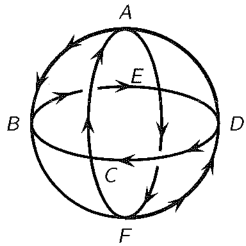
Lösung: Es ist $\frac{2009}{2008} = 1 + \frac{1}{2008}$ und $\frac{20009}{20008} = 1 + \frac{1}{20008}$. Da $\frac{1}{20008} < \frac{1}{10000} < \frac{1}{2008}$ gilt, und $\frac{1}{10000} = 0,0001$ ist, gehören 3 Nullen an die Stelle des Sternchens.

20. Drei kreisförmige Reifen gleicher Größe sind wie in der Abbildung jeweils im Winkel von 90° miteinander verschweißt. Ein geometrisch interessierter Marienkäfer landet zur Erforschung des Gebildes auf einem der Schweißpunkte, krabbelt dann in eine der vier möglichen Richtungen bis zum nächsten Schweißpunkt, ändert dort die Richtung um 90° nach rechts, krabbelt wieder bis zum nächsten Schweißpunkt, ändert seine Richtung um 90°, jetzt nach links, dann wieder nach rechts usw. Auf wie vielen Viertelkreisen muss der Marienkäfer entlanglaufen, bevor er das erste Mal an seinen Landeplatz zurückkehrt?



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18

Lösung: Wir bezeichnen die Schweißpunkte und beschreiben von Punkt zu Punkt den Weg des Marienkäfers. Er läuft von A nach B, dort nach rechts zu E, nun nach links zu F, anschließend nach rechts zu D, von dort nach links zu C, dann wieder nach rechts zu A. Damit liegen 6 Viertelkreise hinter dem Marienkäfer.



21. Meine kleine Schwester ist dabei, sich eine Kette aus blauen, roten, goldenen und silbernen Perlen zu fädeln. Sie legt die Perlen in eine Reihe vor sich hin, so dass stets verschiedenfarbige Perlen nebeneinander liegen. Wie viele Perlen muss die Reihe mindestens enthalten, damit jede der vier Farben mindestens einmal jede andere Farbe zum Nachbarn hat?

(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Damit in einer Reihe jede der vier verschiedenen Perlen die drei anderen berühren kann, muss jede der Farben mindestens zweimal auftreten, da sie ja immer nur höchstens zwei andere Perlen berühren kann. Folglich ist die Mindestzahl 8, und für 8 geben wir die folgende Lösung an: blau–rot–gold–silber–blau–gold–silber–rot.

22. Wie viele 10-stellige Zahlen mit den Ziffern 1, 2 und 3 existieren, bei denen sich benachbarte Ziffern um genau 1 unterscheiden?

(**A**) 32 (**B**) 64 (**C**) 96 (**D**) 128 (**E**) 1024

Lösung: Betrachten wir jene Zahlen, die mit 1 beginnen. Die 2. Ziffer liegt damit fest, es kann nur eine 2 sein. Als 3. Ziffer kommen 1 und 3 in Frage, für die 4. Ziffer gibt es wieder nur eine Möglichkeit (die Ziffer 2) usw. Es gibt also genau $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4$ mögliche Zahlen mit erster Ziffer 1, was analog für die mit 3 beginnenden Zahlen zutrifft. Beginnt eine Zahl mit 2, so ist sie offenbar das Spiegelbild von einer der mit 1 oder mit 3 beginnenden Zahlen. Von dieser Sorte gibt es also $2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot 2^4$ verschiedene Zahlen. Damit gibt es insgesamt $4 \cdot 2^4 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^6 = 64$ Zahlen der in der Aufgabe beschriebenen Art. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe stimmt mit dem der Aufgabe 29 in Klassenstufe 7/8 und Aufgabe 21 in Klassenstufe 11/13 überein.

23. Es sei $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ und $c = 3^{11}$. Dann gilt

(**A**) $a < b < c$ (**B**) $b < a < c$ (**C**) $c < a < b$ (**D**) $b < c < a$ (**E**) $c < b < a$

Lösung: Wir vergleichen die Zahlen in Zweierpotenzen. Es ist $b = 8^8 = (2^3)^8 = 2^{3 \cdot 8} = 2^{24} < a$. Weiterhin ist $c = 3^{11} < 4^{11} = (2^2)^{11} = 2^{2 \cdot 11} = 2^{22} < 2^{24} = b$, also $c < b < a$.

24. Bei der Stichwahl um den Vorsitz unseres Karnevalsvereins war ich bei der Stimmenauszählung dabei. Als ich kurz den Raum verließ, waren bereits 62 % der ausgezählten Stimmen auf meinen Freund Kurt und 38 % auf seinen Gegenkandidaten gefallen. Ich fragte mich, wie viel Prozent der Stimmen (in ganzen Zahlen) zu diesem Zeitpunkt bereits ausgezählt sein müssten, damit die Wahl von Kurt *schon jetzt sicher* ist – vorausgesetzt, dass alle noch auszuzählenden Stimmen gültig sind. Es sind

(**A**) 74 % (**B**) 75 % (**C**) 81 % (**D**) 84 % (**E**) 89 %

Lösung: Es sei N die Gesamtzahl aller Stimmen und p die gesuchte Prozentzahl der Stimmen, für die Kurts Sieg mit den 62 % dieser Stimmen bereits feststünde. In diesem Fall müsste Kurt bereits mehr als 50 % aller Stimmen haben, also $\frac{62}{100} \cdot \left(\frac{p}{100} N\right) > \frac{50}{100} N$. Daraus erhalten wir $p > \frac{5000}{62} \approx 80,6$. Die gesuchte ganzzahlige Prozentzahl ist 81.

25. Auf der Suche nach Knobeleien mit der Jahreszahl fiel uns auf, dass $2009 = 41 \cdot 49$ ist. Damit ersann ich folgende Aufgabe: Ich habe 2009 $1 \times 1 \times 1$-Würfel und 2009 1×1-Klebequadrate. Aus allen Würfeln baue ich einen Quader und beklebe anschließend seine Oberfläche, indem ich auf jede zur Oberfläche gehörende Würfelfläche genau ein Klebequadrat klebe. Wie viele Klebequadrate bleiben übrig?

(**A**) mehr als 1000 (**B**) 763 (**C**) 476 (**D**) 321 (**E**) 0

Lösung: Für den Quader aus den 2009 kleinen $1 \times 1 \times 1$-Würfeln gibt es entsprechend den möglichen Zerlegungen der 2009 verschiedene Varianten. Es kann sich um a) einen $1 \times 1 \times 2009$-Quader, b) einen $1 \times 7 \times 287$-Quader, c) einen $1 \times 41 \times 49$-Quader oder d) einen $7 \times 7 \times 41$-Quader handeln. Im Fall a) brauchte man für die Oberfläche $4 \cdot 2009 + 2 > 2009$ Klebequadrate, also zu viele. Das trifft ebenso im Fall b) zu, wo $2 \cdot 7 + 2 \cdot 287 + 2 \cdot 7 \cdot 287 \,(= 4606)$ benötigt würden, sowie im Fall c) mit $2 \cdot 41 + 2 \cdot 49 + 2 \cdot 41 \cdot 49 \,(= 4198)$ erforderlichen Klebequadraten. Also muss der Quader das Format $7 \times 7 \times 41$ haben. Dann benötigt man zum Bekleben $2 \cdot 7 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 41 = 1246$. Nach dem Bekleben der Oberfläche behalten wir somit $2009 - 1246 = 763$ Klebequadrate übrig.

26. Von einer Zahl N werden alle Teiler aufgeschrieben, die von N und 1 verschieden sind. Es stellt sich heraus, dass der größte der aufgeschriebenen Teiler 45-mal so groß ist wie der kleinste. Für wie viele Zahlen N trifft dies zu?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) mehr als drei

Lösung: Die Aufgabe ist inhaltlich identisch mit Aufgabe 27 in Klassenstufe 7/8.

27. Der Zirkusfloh Fred trainiert für eine neue Nummer. Er steht am Startpunkt und führt 10 exakt gleichlange Hüpfer aus. Zugelassen sind nur die vier Richtungen rechts, links, vorwärts, rückwärts. Nach jedem Hüpfer kann Fred die Richtung ändern. Wie viele verschiedene Punkte kommen als Endpunkt nach seinen 10 Hüpfern in Frage?

(**A**) 121 (**B**) 144 (**C**) 400 (**D**) 441 (**E**) eine andere Anzahl

Lösung: Wir legen die Situation in ein kartesisches Koordinatensystem mit $(0,0)$ als Startpunkt. Bei jedem Sprung, den der Zirkusfloh macht, ändert sich genau eine der Koordinaten: sie kann um 1 wachsen oder um 1 abnehmen. Damit ist klar, dass am Endpunkt der 10 Sprünge die Summe beider Koordinaten stets eine gerade Zahl ist, deren Betrag maximal 10 ist. Andererseits ist auch jeder Punkt, dessen Betrag der Koordinatensumme eine gerade Zahl kleiner oder gleich 10 ist, vom Zirkusfloh zu erreichen. Ist nämlich (x,y) ein Koordinatenpaar mit $|x+y| \leq 10$ und $x+y$ geradzahlig, dann ist (x,y) zu erreichen, indem Fred zunächst mit der geraden Anzahl $|x+y|$ von Sprüngen direkt zum Punkt (x,y) springt und dann im Falle, dass $|x+y|$ kleiner als 10 ist, die verbleibende Zahl von Sprüngen (die ja wieder geradzahlig ist) durch Hin- und Herspringen zu einem waagerecht benachbarten Gitterpunkt absolviert.
Zählen wir nun alle Gitterpunkte mit gerader Koordinatensumme $x+y$ und $|x+y| \leq 10$. Wenn $x=-10$ ist, muss $y=0$ sein. Ist $x=-9$, gibt es für y die beiden Möglichkeiten 1 und -1. Für $x=-8$ gibt es die drei möglichen y-Koordinaten $-2, 0, 2$, für $x=-7$ die vier Möglichkeiten $-3, -1, 1, 3$ usw. Das Prinzip ist nun klar: Zu jeder erreichbaren x-Koordinate gibt es $10-|x|+1$ mögliche y-Koordinaten. Wir addieren schließlich die Anzahl der möglichen y-Werte für die x-Koordinaten $-10, -9, \ldots, -1, 0, 1, \ldots 9, 10$ und erhalten so die Anzahl aller erreichbaren Punkte: $1+2+\ldots+10+11+10+\ldots+2+1=(1+10)+(2+9)+\ldots+(10+1)+11=11\cdot 11=121$.

28. Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, für die $(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot\ldots\cdot(n^2-1)$ eine Quadratzahl ist?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 16 (**E**) 27

Lösung: Wir versuchen, die Faktoren geeignet zusammenzufassen. Dabei ist klar, dass wir uns auf $n \geq 6$ beschränken können. Es ist $P=(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot\ldots\cdot(n^2-1)$ nach einer binomischen Formel darstellbar als $P=(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)\cdots(n-1)(n+1)$. Rechnen wir die Differenzen und Summen aus, erhalten wir

$$P=1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 9\cdots(n-3)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$$

Bei aufmerksamer Betrachtung dieses Produktes erkennen wir, dass – angefangen mit der 3 und von 1, 2, n und $n+1$ abgesehen – jeder Faktor nach seinem ersten Auftreten drei Positionen weiter erneut erscheint. Es ist also $P=1\cdot 2\cdot[3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdots(n-1)^2]\cdot n\cdot(n+1)$. Der Term $[3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdots(n-1)^2]$ ist bereits ein Quadratzahl. Es ist folglich zu klären, für welches kleinste n der Term $2\cdot n\cdot(n+1)$ eine Quadratzahl ist. Da die Faktoren n und $n+1$ teilerfremd sind sowie einer von beiden gerade und der andere ungerade ist, ist $2\cdot n\cdot(n+1)$ genau dann eine Quadratzahl, wenn einer der Faktoren eine ungerade Quadratzahl, und der andere das Doppelte (irgend)einer Quadratzahl ist. Die kleinste in Frage kommende ungerade Quadratzahl ist 9. Und $9-1=8$ ist das Doppelte der Quadratzahl 4. Damit ist die kleinste natürliche Zahl n mit der geforderten Eigenschaft 8. In der Tat ist $2\cdot n\cdot(n+1)=2\cdot 8\cdot 9=16\cdot 9$ ein Produkt zweier Quadratzahlen und damit selbst eine Quadratzahl.

29. Rike verteilt Damesteine auf einem 4×4-Brett. Das macht sie so, dass in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe verschieden viele Steine liegen. Leere Felder sind erlaubt, aber sie darf natürlich in jedes Feld auch mehr als einen Stein legen. Welches ist die kleinste Zahl von Damesteinen, die Rike für eine solche Belegung benötigt?

(A) 35 **(B)** 28 **(C)** 21 **(D)** 16 **(E)** 14

Lösung: Summieren wir die Anzahl der Steine aller Zeilen (oder aller Spalten), so erhalten wir die Gesamtzahl N aller Steine auf dem Brett. Die Summe der Steine aller Zeilen *und* Spalten ist demnach $2N$. Wenn die Anzahl der Damesteine in jeder Zeile und jeder Spalte unterschiedlich sein soll, müssen in den Zeilen und Spalten mindestens $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bzw. 7 Steine liegen. Also folgt $2N \geq 0+1+2+3+4+5+6+7$, was wegen $0+1+2+3+4+5+6+7 = 28$ gleichbedeutend mit $N \geq 14$ ist. Eine mögliche Lösung mit der Minimalzahl von 14 Steinen zeigt die Abbildung rechts. – Ähnlich lautet die Aufgabe 26 in Klassenstufe 7/8.

0	0	0	1
0	0	2	0
0	0	0	6
0	3	2	0

30. Eine Primzahl wird „prima“ genannt, wenn sie entweder einstellig ist oder – falls sie mehr als eine Stelle hat – sowohl nach Streichen der ersten Ziffer, als auch nach Streichen der letzten Ziffer, jeweils eine „prima“ Primzahl übrigbleibt. Wie viele „prima“ Primzahlen gibt es?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** unendlich viele

Lösung: Die einstelligen Primzahlen 2, 3, 5 und 7 sind per definitionem „prima“. Zweistellige „prima“ Primzahlen haben nach Aufgabenstellung einstellige „prima“ Primzahlen als Ziffern, also 2, 3, 5 oder 7. Die zweistelligen Primzahlen mit den Ziffern 2, 3, 5 und 7 sind 23, 37, 53 und 73, die anderen Kombinationen der vier Ziffern (25, 27, 32, 35, 52, 57, 72, 75 sowie 22, 33, 55 und 77) liefern keine Primzahlen.

Falls es dreistellige „prima“ Primzahlen gibt, so müssen die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern jeweils eine zweistellige „prima“ Primzahl bilden, also eine der Zahlen 23, 37, 53 oder 73 sein. Dabei ist die zweite Ziffer der Zahl aus den ersten beiden Ziffern mit der ersten Ziffer der Zahl aus den letzten beiden Ziffern identisch. So ließen sich beispielsweise die Zahlen 23 und 37 zur dreistelligen Zahl 237 „zusammenschieben“. Jedoch ist 237 durch 3 teilbar, also keine Primzahl. Andere mögliche dreistellige Zahlen sind 373, 537 und 737. Die Zahl 537 ist ebenfalls durch 3 teilbar, und 737 ist ein Vielfaches von 11. Die Zahl 373 ist prim und damit die einzige dreistellige „prima“ Primzahl.

Angenommen es gäbe eine vierstellige „prima“ Primzahl. Dann müsste sie mit 373 beginnen, da nach Streichen der letzten Stelle eine dreistellige „prima“ Primzahl übrig bleibt. Ebenso müsste sie auf 373 enden. Das ist aber nicht möglich. Also gibt es keine vierstelligen „prima“ Primzahlen und somit, gemäß der Bedingung der Aufgabe, auch keine mit mehr als vier Stellen. Die gefundenen 9 Zahlen sind die einzigen „prima“ Primzahlen.

Klassenstufen 11 bis 13

3-Punkte-Aufgaben

1. 200 Fische hab ich in meinem Aquarium, davon ist 1 % blau, der Rest gelb. Wie viele gelbe Fische müsste ich aus dem Aquarium nehmen, um zu erreichen, dass unter den im Aquarium verbleibenden Fischen 2 % blau sind?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 50 (**D**) 98 (**E**) 100

Lösung: Blaue Fische sind es 1 % von 200, also $\frac{1}{100} \cdot 200 = 2$. Und 2 Stück von irgendetwas sind 2 %, wenn es sich – wie der Name sagt – um 2 von Hundert handelt. Nach dem Herausnehmen müssen folglich 98 Fische gelb sein, also müssen 100 der 198 gelben Fische aus dem Aquarium genommen werden.

2. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

(**A**) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ (**B**) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (**C**) $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ (**D**) $\sqrt{5} - \sqrt{4}$ (**E**) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

Lösung: Wer den Graphen der Wurzelfunktion vor Augen hat, wird bei dieser Aufgabe nicht zögern, das Kreuz bei (**A**) zu setzen. Durch die Betrachtung einer Ungleichung wollen wir beweisen, dass dies auch wirklich richtig ist.
Wir behaupten, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, also $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$. Da beide Seiten der Ungleichung positiv sind, ist diese äquivalent zur durch Quadrieren entstehenden Ungleichung $(n+1) + 2\sqrt{n^2-1} + (n-1) < 4n$, und diese ist äquivalent zu $2\sqrt{n^2-1} < 2\sqrt{n^2} = 2n$. Diese Ungleichung ist wahr und damit auch unsere Behauptung, womit die Richtigkeit von (**A**) folgt.

3. Marie, Nina und Peer sitzen für die Vorbereitung auf eine Prüfung in einer stillen Ecke in einem Café. Im Laufe des Nachmittags bestellen sie jeder 3 Tee, 2 Stück Apfelkuchen und 1 Paar Würstchen. Welches könnte der Betrag auf ihrer gemeinsamen Rechnung sein?

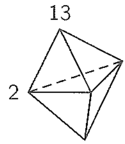
(**A**) 39,20 € (**B**) 38,20 € (**C**) 37,20 € (**D**) 36,20 € (**E**) 35,20 €

Lösung: Da von den drei im Café Sitzenden jeder dasselbe verzehrt, muss der Preis auf der Rechnung durch 3 teilbar sein. Dies trifft nur für 37,20 € zu.

4. Für wie viele positive ganze Zahlen n ist $n^2 + n$ eine Primzahl?

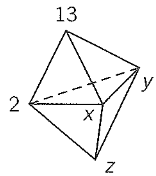
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) mehr als 2, endlich viele (**E**) unendlich viele

Lösung: Es ist $n^2 + n = n(n+1)$ ein Produkt zweier aufeinanderfolgender Zahlen, von denen stets eine durch 2 teilbar ist. Dieses Produkt ist dann nur eine Primzahl, wenn es gleich 2, also $n = 1$ ist.



5. Der abgebildete Körper hat 6 dreieckige Seitenflächen. An jeder Ecke befindet sich eine Zahl, zwei dieser Zahlen sind vorgegeben. Wenn die Summen der Eckzahlen an jeder der 6 Seitenflächen gleich sind, wie groß ist dann die Summe aller 5 Zahlen?

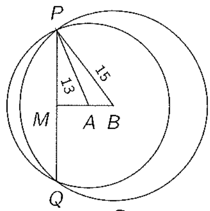
(A) 21 **(B)** 27 **(C)** 30 **(D)** 32 **(E)** 43

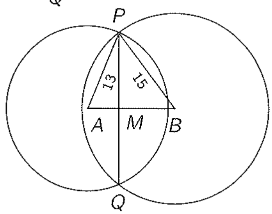


Lösung: Wir schreiben an die drei Ecken, für die geeignete Zahlen zu finden sind, die Buchstaben x, y und z. Dann befinden sich 2 und 13 und x auf einer Seitenfläche des Körpers, ebenso wie 2, 13 und y. Folglich ist $x = y$. Da es nun auch eine Seitenfäche gibt, an deren Ecken die 13 und zweimal x steht, folgt wegen $13+2+x = 13+2 \cdot x$, dass $x = 2$ ist. Wegen $13+2+2 = z+2+2$ erhalten wir schließlich $z = 13$. Die Summe der 5 Eckzahlen ist somit 32. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe entspricht dem von Aufgabe 14 in Klassenstufe 7/8 und Aufgabe 6 in Klassenstufe 9/10.

6. Die Kreise $k_1(A; 13)$ und $k_2(B; 15)$ schneiden sich in den Punkten P und Q. Es ist $\overline{PQ} = 24$. Von den folgenden Zahlen kann nur eine die Länge der Strecke $\overline{AB}$ sein. Welche?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 9 **(D)** 14 **(E)** 18



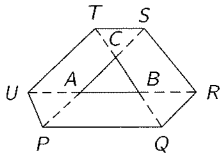


Lösung: Für die beiden einander schneidenden Kreise gibt es zwei unterschiedliche Lagemöglichkeiten. Wie abgebildet kann entweder der längere oder der kürzere Bogen des kleineren Kreises im Inneren des großen Kreises liegen.
Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$, der aus Symmetriegründen auf der Geraden AB liegt. Da die Strecke $\overline{PQ}$ und die Gerade AB senkrecht zueinander stehen, ist mit $\overline{PM} = \overline{PQ} : 2 = 12$ nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AM} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ und $\overline{BM} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$, unabhängig davon, welche der Lagemöglichkeiten wir vor uns haben. Liegt der größere Bogen des kleineren Kreises im Inneren des großen Kreises, so haben wir die Differenz dieser beiden Strecken zu bilden. Wir erkennen, dass $9 - 5 = 4$ keine der vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten ist. Liegt jedoch der kürzere Bogen des kleineren Kreises im Inneren des großen Kreises, dann müssen wir die Summe für die Länge von $\overline{AB}$ bilden. $\overline{AB} = 5 + 9 = 14$ ist die gesuchte Lösung.

7. Wenn die Länge einer Seite eines Rechtecks um 20 % zunimmt, während die andere um 20 % kürzer wird, dann gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks:

(A) Er nimmt um 20 % ab. **(B)** Er nimmt um 4 % ab. **(C)** Er bleibt unverändert.
(D) Er wächst um 20 %. **(E)** Er wächst um 4 %.

Lösung: Bezeichnen wir die Länge des Rechtecks mit a, die Breite mit b, so ist der Flächeninhalt des neu entstehenden Rechtecks $\frac{100+20}{100}a \cdot \frac{100-20}{100}b = \frac{120}{100} \cdot \frac{80}{100}ab = \frac{12 \cdot 8}{100}ab = \frac{96}{100}ab$, der Flächeninhalt ist also um 4 % geringer.



8. Die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ seien derart in beide Richtungen bis zu den Punkten P, Q, R, S, T und U verlängert, dass $\overline{TC} = \overline{CB} = \overline{BQ}$, $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{CS}$ und $\overline{UA} = \overline{AB} = \overline{BR}$ gilt (s. Skizze). Wenn der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ gleich 1 ist, so ist der Flächeninhalt von $PQRSTU$ gleich

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 13

Lösung: Durch die Streckungen entstehen ähnliche Dreiecke. Es ist $\triangle ABC \sim \triangle PQC \sim \triangle ARS \sim \triangle UBT$. Da der Streckungsfaktor 2 ist, sind die Flächen von $\triangle PQC$, $\triangle ARS$ und $\triangle UBT$ viermal so groß wie die Fläche von $\triangle ABC$. Die Dreiecke $\triangle RBQ$, $\triangle STC$ und $\triangle AUP$ sind, da sie jeweils in zwei Seiten und einem Winkel, dem Scheitelwinkel, übereinstimmen, zueinander kongruent. Nun können wir den gesuchten Flächeninhalt ausrechnen. Es ist $A_{PQRSTU} = A_{PQC} + A_{ARS} + A_{UBT} - 2 \cdot A_{ABC} + A_{RBQ} + A_{STC} + A_{AUP}$. Dabei haben wir berücksichtigt, dass wir die Fläche von $\triangle ABC$ dreimal addiert haben, wir mussten sie also dann zweimal subtrahieren. Wir fassen zusammen: $A_{PQRSTU} = 3 \cdot 4 - 2 + 3 = 13$.

9. Im Wäschefach sind zwei weiße, drei rote und vier blaue Socken. Drei der Socken haben ein Loch, und Lisa weiß nicht, welche. Sie möchte heute mit gleichfarbigen, lochfreien Socken zur Prüfung gehen. Wie viele muss sie mindestens – ohne auf Löcher und Farbe zu testen – aus dem Fach nehmen, um mit Sicherheit ein gleichfarbiges Paar ohne Löcher dabei zu haben?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

Lösung: Da unklar ist, welche Socken Löcher haben, greift Lisa im ungünstigsten Fall die drei Socken mit Loch und drei Socken ohne Loch, die jedoch unterschiedliche Farben haben. Das sind schon sechs Socken, und noch ist kein geeignetes Paar dabei. Greift Lisa nun irgendeine weitere Socke, so hat sie garantiert das gewünschte farbgleiche und lochfreie Paar.

KAENGURU-Versteck

In der Buchstaben-Matrix hat sich das KAENGURU *versteckt. In dieser Matrix sind 24 mathematische Begriffe eingetragen, und zwar entweder von links nach rechts, von rechts nach links, von oben nach unten oder von unten nach oben. Findet diese 24 Begriffe und markiert deren Buchstaben. Achtung, einige Buchstaben gehören mehreren Begriffen an! Diejenigen Buchstaben, die am Schluss unmarkiert übrig bleiben, zeigen von links nach rechts und von oben nach unten gelesen, wo sich das* KAENGURU *versteckt hat.*

D	E	Z	I	M	A	L	B	R	U	C	H
U	M	F	A	N	G	O	K	T	A	N	T
A	X	I	O	M	K	T	O	R	U	S	T
L	O	G	A	R	I	T	H	M	U	S	K
S	N	I	E	Z	A	R	E	N	N	E	N
Y	G	E	R	A	D	E	U	L	E	R	U
S	T	R	A	H	L	A	M	S	I	R	P
T	E	A	E	L	N	D	I	L	K	U	E
E	G	U	N	N	O	I	S	I	V	I	D
M	U	T	E	D	N	E	U	N	I	M	N
R	U	E	B	T	N	E	N	O	P	X	E
H	C	I	E	R	E	B	E	T	R	E	W

10. Ein 5×5-Quadrat auf kariertem Papier soll bunt ausgemalt werden, die linke obere Ecke ist schon oliv (o), pink (p), rot (r) bzw. schwarz (s). Zwei weitere Karos sind ebenfalls bereits gefärbt. Wenn Karos, die eine Kante oder eine Ecke gemeinsam haben, nicht gleich gefärbt werden dürfen, welche Farbe ist dann für das Karo mit dem Fragezeichen vorzusehen?

o	p			
r	s			
		p		
p			?	

(**A**) nur o (**B**) nur r (**C**) o oder p (**D**) r oder s (**E**) jede Farbe ist möglich

Lösung: Wir bezeichnen die Felder des Gitters mit (x, y), wobei die erste Zahl die waagerechte Reihe von oben und die zweite Zahl die senkrechte Reihe von links bezeichnet. Durch die Vorgabe der Farben der 5 Felder in der linken oberen Ecke des 5×5-Quadrates, liegt eindeutig fest, wie das Feld $(3; 2)$ zu färben ist. Übereck ist dieses Feld mit einem roten benachbart, und Kanten hat es mit einem pinkfarbenen und einem schwarzen Feld gemeinsam: oliv ist die einzige Möglichkeit. Daraufhin liegt die Färbung von $(3; 1)$ mit pink und $(2; 3)$ mit rot fest. Es folgen nun – ohne Wahlmöglichkeit, da stets drei verschiedenfarbige Felder benachbart sind – die Felder $(1; 3)$, $(2; 4)$, $(1; 4)$ und $(3; 4)$, darauf $(2; 5)$, dann $(1; 5)$ und $(3; 5)$. Damit ist der obere 3×5-Bereich ausgefüllt. Für die vierte Zeile gibt es offenbar gleichberechtigt zwei Möglichkeiten. Sie kann abwechselnd rot und schwarz gefärbt werden, wobei sowohl mit rot als auch mit schwarz begonnen werden kann. Die unterste Zeile allerdings ist in ihrer Färbung wieder eindeutig, unabhängig von der Anordnung der rot-schwarzen Reihe darüber. Hier ist durch die Vorgabe, dass $(5; 1)$ pink gefärbt ist, für die Färbung von $(5; 4)$ – das ist das Fragezeichen-Kästchen – oliv die einzig mögliche. – Ähnlich zu dieser Aufgabe ist die Aufgabe 18 in Klassenstufe 7/8.

o	p	o	p	o
r	s	r	s	r
p	o	p	o	p
r	s	r	s	r
p	o	p	o	p

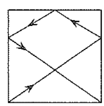
o	p	o	p	o
r	s	r	s	r
p	o	p	o	p
s	r	s	r	s
p	o	p	o	p

11. Wegen einer Straftat werden 17 Personen nacheinander verhört, von denen bekannt ist, dass sie entweder immer lügen oder immer die Wahrheit sprechen. Die 2. und jede folgende Person sagt aus, dass die vor ihr befragte Person gelogen habe. Nach der 17. Person wird erneut die 1. Person befragt, die nun behauptet, dass alle anderen gelogen hätten. Wie viele der Personen sagen die Wahrheit?

(**A**) keine (**B**) 1 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 16

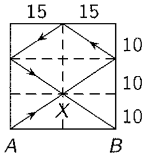
Lösung: Mit etwas Überlegen findet man heraus, dass die erste Person lügt und die Aussagen der weiteren Personen immer abwechselnd wahr und falsch sind. Insgesamt gibt es 9 Lügner und 8 Personen, die die Wahrheit sprechen. Eine ausführliche Begründung steht in den Lösungen der Aufgaben 22 in Klassenstufe 7/8 und 15 in Klassenstufe 9/10.

12. Im Winter wird bei uns oft eine quadratische $30\,\text{m} \times 30\,\text{m}$ große Eisfläche gespritzt. Neben Schlittschuhlaufen findet dort auch Puck-Schießen statt: von Ecke A muss über die Bande Ecke B getroffen werden. Wie lang (in m) ist der gezeichnete Puck-Weg? (Achtung: Der Puck wird mit *dem* Winkel reflektiert, mit dem er auf die Bande trifft.)


A B

(**A**) 35 (**B**) $30\sqrt{13}$ (**C**) 8 (**D**) $60\sqrt{3}$ (**E**) $30(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Lösung: Wegen der Symmetrie der Figur, die dadurch entsteht, dass der Puck stets mit dem Winkel reflektiert wird, mit dem er auftrifft, ist die gesuchte Länge genau das Sechsfache von $\overline{AX}$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $\overline{AX} = \sqrt{10^2+15^2} = \sqrt{5^2(2^2+3^2)} = 5\sqrt{13}$. Für den gesamten Puck-Weg ergibt das $6 \cdot 5\sqrt{13}\,\mathrm{m} = 30\sqrt{13}\,\mathrm{m}$.



13. Zur Regionalrunde der Mathematikolympiade sind 100 Teilnehmer zugelassen; es sind 4 Aufgaben zu lösen. 90 Wettbewerber lösten Aufgabe 1, 85 Aufgabe 2, 78 Aufgabe 3 und 67 Aufgabe 4. Welches ist die kleinstmögliche Zahl von Teilnehmern, die alle Aufgaben gelöst haben?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

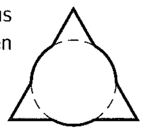
Lösung: Aufgabe 1 haben genau 10 Teilnehmer *nicht* gelöst. Analog haben Aufgabe 2 genau 15, Aufgabe 3 genau 22 und Aufgabe 4 genau 33 Teilnehmer *nicht* gelöst. Wenn kein Teilnehmer mehr als eine Aufgabe *nicht* gelöst hat, haben höchstens $10+15+22+33 = 80$ Teilnehmer irgendeine der Aufgaben *nicht* gelöst. Damit haben mindestens 20 Teilnehmer alle Aufgaben gelöst.

14. Astrid und Jens trainieren für ihr Sportabitur. Runde für Runde drehen sie in der Halle. Jens, der schneller als Astrid ist, braucht 3 Minuten für eine Runde. Sie sind zusammen losgelaufen, und nach 8 Minuten hat Jens Astrid zum ersten Mal überholt. Wie lange braucht Astrid für eine Runde?

(**A**) 6 min (**B**) 8 min (**C**) 4 min 30 s (**D**) 4 min 48 s (**E**) 4 min 20 s

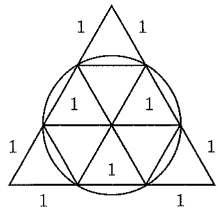
Lösung: In 8 Minuten ist Jens, der ja für eine Runde 3 Minuten braucht, $2\frac{2}{3}$ Runden gelaufen. Astrid, die er dort zum ersten Mal überrundet, schaffte in dieser Zeit eine Runde weniger, also $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ Runden. Dann braucht Astrid also für eine Runde $8\,\mathrm{min} : \frac{5}{3} = \frac{24}{5}\,\mathrm{min}$, und das sind 4 min und 48 sec.

15. Über ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 3 wird ein Kreis mit dem Radius 1 gelegt, wobei der Kreismittelpunkt auf den Schwerpunkt des Dreiecks zu liegen kommt. Welchen Umfang hat die neu entstandene Figur?



(**A**) $3+2\pi$ (**B**) $6+\pi$ (**C**) $9+\frac{\pi}{3}$ (**D**) 3π (**E**) $6+\frac{2\pi}{3}$

Lösung: Ein genauer Blick auf die Zeichnung lässt vermuten, dass die gestrichelten Kreisbogenabschnitte im Inneren des Dreiecks genauso lang wie die durchgezogenen Abschnitte außerhalb des Dreiecks sind. Wir beweisen diese Vermutung, indem wir rückwärts arbeiten. Gegeben sei also ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 3. Wir dritteln die Seiten und verbinden die Teilungspunkte wie in der Abbildung. Dabei wird das Ausgangsdreieck in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 zerlegt. Das aus den Teilungspunkten gebildete Sechseck ist somit regelmäßig. Sein Umkreis, dessen Mittelpunkt aus Symmetriegründen gerade der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks ist, hat den Radius 1, und ist folglich nichts anderes als der in der Aufgabe gegebene Kreis. Damit ist unsere Vermutung bewiesen.



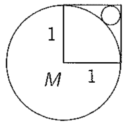
Berechnen wir noch die gesuchte Größe. Der Umfang der Figur besteht aus 6 Seitendritteln des Dreiecks und einem halben Kreisumfang. Er beträgt also genau $6 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = 6 + \pi$.

16. 2009 Kängurus, ein jedes entweder hell oder dunkel von Farbe, vergleichen ihre Größe. Es ist bekannt, dass genau eines der hellen Kängurus größer ist als genau 8 der dunklen, genau eines ist größer als genau 9 der dunklen, genau eines ist größer als genau 10 der dunklen usw. Genau eines der hellen Kängurus ist größer als alle dunklen. Wie viele helle Kängurus genau sind das?

(**A**) 503 (**B**) 1000 (**C**) 1001 (**D**) 1002 (**E**) 1003

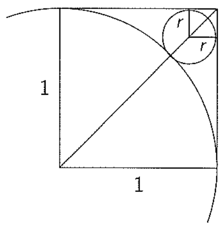
Lösung: Wir stellen uns die Kängurus der Größe nach aufgereiht vor. Die kleinsten Kängurus sind die 8 dunklen, und es folgt jenes helle Känguru, das größer ist als genau 8 der dunklen. Nun folgt das nächstgrößere dunkle Känguru, gefolgt vom nächstgrößeren hellen usw. Dann sind offenbar unter den 2009 Kängurus 8 dunkle, dann 1000 helle und 1000 dunkle, die im Wechsel aufeinander folgen, und schließlich das letzte, größte, ein helles Känguru. Insgesamt sind es 1001 helle Kängurus. – Bei dieser Aufgabe wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass das helle Känguru, welches größer als genau 8 der dunklen ist, wirklich das kleinste helle Känguru ist.

17. Seitenlänge des Quadrats und Radius des großen Kreises seien gleich 1. Welchen Radius hat der kleine Kreis, der den großen Kreis von außen und das Quadrat von innen berührt?



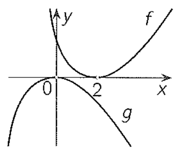
(**A**) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (**D**) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**E**) $3-2\sqrt{2}$

Lösung: Die Diagonale des Quadrats setzt sich zusammen aus dem Radius des großen Kreises, dem Radius r des kleinen Kreises und dem Abstand des Mittelpunktes des kleinen Kreises von der rechten oberen Ecke. Die Länge der Diagonale des Quadrates kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt werden, sie ist $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Mit einer völlig analogen Rechnung finden wir für den Abstand des Mittelpunkts des kleinen Kreises zum rechten oberen Eckpunkt $r\sqrt{2}$. Jetzt können wir den Radius des kleinen Kreises aus der Gleichung $\sqrt{2}=1+r+r\sqrt{2}$ bestimmen. Lösen wir nach r auf, erhalten wir



$$r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}^2-1^2)}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$$

18. Die Abbildung rechts zeigt die Graphen der reellen Funktionen f und g. Welche der folgenden Relationen könnte zwischen den beiden Funktionen bestehen?



(**A**) $g(x-2)=-f(x)$ (**B**) $g(x)=f(x+2)$ (**C**) $g(x)=-f(-x+2)$
(**D**) $g(-x)=f(-x+2)$ (**E**) $g(2-x)=-f(x)$

Lösung: Der Graph der Funktion g ist der um 2 nach links verschobene an der x-Achse gespiegelte Graph der Funktion f. Folglich könnte die Gleichung $g(x)=-f(x+2)$ lauten oder, dazu äquivalent, $g(x-2)=-f(x)$, wie sie in (**A**) vorgeschlagen ist. Wir begründen noch, dass keine der anderen Gleichungen zutreffen kann. Es genügt, dies für geeignete Werte von x zu tun. Für (**B**) wählen wir etwa $x=1$ und erkennen, dass $g(1)<0$, jedoch $f(3)>0$ ist. (**C**) kann nicht zutreffen, weil die Graphen keine vertikale Symmetrieachse haben, so dass zum Beispiel $g(2)>-f(0)$ ist. Für (**D**) trifft dasselbe Argument wie für (**B**) zu. Und im Falle (**E**) schließlich trifft dasselbe Argument wie im Fall (**C**) zu.

19. Ein 6 cm × 8 cm-Rechteck bedeckt ein Dreieck bis zu 80 %. Legt man das Dreieck auf das Rechteck, so werden maximal $\frac{2}{3}$ der Rechtecksfläche bedeckt. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

(**A**) $22\frac{4}{5}\,\text{cm}^2$ (**B**) $24\,\text{cm}^2$ (**C**) $36\,\text{cm}^2$ (**D**) $40\,\text{cm}^2$ (**E**) $60\,\text{cm}^2$

Lösung: Bedecken zwei Figuren einander (teilweise), so ist der Flächeninhalt des bedeckenden Teils der einen Figur gleich dem Flächeninhalt des bedeckten Teils der anderen Figur. Vergrößert man einen dieser Flächeninhalte (zum Beispiel durch Verschieben einer der Figuren), so nimmt automatisch auch der jeweils andere Flächeninhalt zu. Wird also eine der beiden Figuren maximal bedeckt, so auch die andere. Folglich entsprechen die 80 % der Dreiecksfläche den zwei Dritteln der Rechtecksfläche. Wenn $F_\triangle$ den Flächeninhalt der Dreiecksfläche bezeichnet, dann gilt also $\frac{80}{100}\cdot F_\triangle = \frac{2}{3}\cdot(6\,\text{cm}\cdot 8\,\text{cm})$, woraus wir $\frac{4}{5}F_\triangle = \frac{2\cdot 48\,\text{cm}^2}{3} = 32\,\text{cm}^2$ bzw. $F_\triangle = 40\,\text{cm}^2$ errechnen.

20. Wie viel Prozent des Volumens einer Kugel wird von dem dieser Kugel einbeschriebenen Würfel (d. h. die Würfeleckpunkte liegen auf der Kugeloberfläche) eingenommen?

(**A**) etwa 12 % (**B**) etwa 37 % (**C**) etwa 65 % (**D**) etwa 79 % (**E**) etwa 94 %

Lösung: Wird einer Kugel ein Würfel einbeschrieben, so ist der doppelte Radius der Kugel die Länge der Raumdiagonale des Würfels. Da es nur um einen prozentualen Anteil geht, können wir den Radius der Kugel zur Vereinfachung gleich 1 setzen. Somit gilt für die Kantenlänge k des Würfels $\sqrt{3k^2} = 2$, woraus $k = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ folgt. Das Volumen der Kugel ist $\frac{4}{3}\pi$, das des Würfels k^3, also gleich $\frac{2^3}{3^3}3\sqrt{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$. Die gesuchte Prozentzahl ist dann

$$\frac{\frac{8}{9}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\pi}\cdot 100 = \frac{8\sqrt{3}\cdot 3}{9\cdot 4\pi}\cdot 100 = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\cdot 100.$$

Um diese Zahl *ohne* Taschenrechner angenähert zu berechnen, runden wir geschickt und dividieren schriftlich. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, und hier sind einige Vorschläge:

- $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\cdot 100 \approx \frac{2\cdot 1,73}{3\cdot 3,14}\cdot 100 \approx \frac{3,5}{9,5}\cdot 100 \approx 36,84 \approx 37$
- $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\cdot 100 = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\pi}\cdot 100 \approx \frac{2}{1,73\cdot 3,14}\cdot 100 \approx \frac{2}{5,4}\cdot 100 \approx 37,04 \approx 37$
- $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\cdot 100 \approx 2\cdot 1,73\cdot\frac{100}{3\cdot 3,14} \approx 3,4\cdot 11 = 37,4 \approx 37$

Wir können auch Ungleichungen benutzen, um mit Blick auf die Lösungsvorschläge das Ergebnis der Rechnung einzugrenzen:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\cdot 100 < \frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}\cdot 100 = \frac{4}{9}\cdot 100 \approx 44,4$$

bzw.

$$\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\cdot 100 > \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{3\cdot 4}\cdot 100 = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 100 = \frac{1}{4}\cdot 100 = 25$$

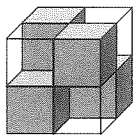
Der einzige Lösungsvorschlag, der diese beiden Ungleichungen erfüllt, ist (**B**).

21. Wie viele 12-stellige Zahlen mit den Ziffern 1, 2 und 3 existieren, bei denen sich die benachbarten Ziffern um genau 1 unterscheiden?

(**A**) 32 (**B**) 64 (**C**) 128 (**D**) 512 (**E**) 4096

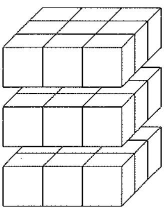
Lösung: Betrachten wir jene Zahlen, die mit 1 beginnen. Die 2. Ziffer liegt damit fest, es kann nur eine 2 sein. Als 3. Ziffer kommen 1 und 3 in Frage, für die 4. Ziffer gibt es wieder nur eine Möglichkeit (die Ziffer 2) usw. Es gibt also genau $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2^5$ mögliche Zahlen mit erster Ziffer 1, was analog für die mit 3 beginnenden Zahlen zutrifft. Beginnt eine Zahl mit 2, so ist sie offenbar das Spiegelbild von einer der mit 1 oder mit 3 beginnenden Zahlen. Damit gibt es insgesamt $4 \cdot 2^5 = 2^2 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$ Zahlen der in der Aufgabe beschriebenen Art. – Der mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist dem der Aufgabe 29 in Klassenstufe 7/8 und Aufgabe 22 in Klassenstufe 9/10 ähnlich.

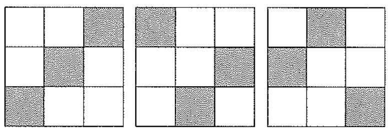
22. Ein $2 \times 2 \times 2$-Würfel wird aus 4 durchsichtigen und 4 undurchsichtigen $1 \times 1 \times 1$-Würfeln gebildet. Sie sind so angeordnet, dass der $2 \times 2 \times 2$-Würfel aus jeder Richtung parallel zu den Kanten undurchsichtig ist. Wie viele undurchsichtige $1 \times 1 \times 1$-Würfel sind mindestens nötig, um einen $3 \times 3 \times 3$-Würfel in diesem Sinne undurchsichtig zu machen?

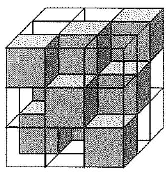


(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Jede Seitenfläche des $3 \times 3 \times 3$-Würfels wird durch die kleinen $1 \times 1 \times 1$-Würfel in 9 Felder unterteilt. Wenn wir senkrecht auf eine Seitenfläche des Würfels blicken, sollen diese 9 Felder alle undurchsichtig sein. Wir brauchen also mindestens 9 undurchsichtige $1 \times 1 \times 1$-Würfel, um die Aufgabe zu erfüllen. Nun überlegen wir uns, ob es eine Lösung mit nur 9 undurchsichtigen Würfeln gibt.







Wir starten mit einem durchsichtigen $3 \times 3 \times 3$-Würfel und unterteilen ihn wie im linken Bild in 3 Schichten. In jeder Schicht ersetzen wir nun durchsichtige mit undurchsichtigen Würfeln bis die Schichten aus den zwei horizontalen Richtungen (rechts–links und vorn–hinten) undurchsichtig erscheinen. Von oben betrachtet muss dazu in jeder Zeile und jeder Spalte ein undurchsichtiger Würfel eingebaut werden, also mindestens 3 je Schicht. Im mittleren Bild sieht man 3 von den 6 möglichen Anordnungen mit der Mindestanzahl von 3 undurchsichtigen Würfeln.
Nun legen wir die Schichten übereinander. Damit der $3 \times 3 \times 3$-Würfel auch in der vertikalen Richtung undurchsichtig wird, haben wir die undurchsichtigen Würfel in den Schichten so gewählt, dass jede der 9 Positionen, die es pro Schicht für die undurchsichtigen Würfel gibt, mindestens einmal vorkommt. Den zusammengesetzten Würfel sieht man im rechten Bild. Man kommt also mit 9 undurchsichtigen Würfeln aus.

KAENGURU-Gleichungssystem

Gesucht sind zwei vierstellige Primzahlen x und y. Dabei seien x = KAEN *und y =* GURU *die Dezimaldarstellungen von x und y, und es gelte das folgende lineare Gleichungssystem:*

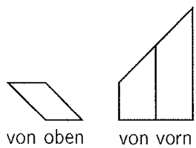
$$\begin{aligned} K+A+E+N &= 13\\ A+E+N &= 12\\ E+N &= \ \ 8\\ E-N &= \ \ 2\\ R+U &= 13\\ U+R+U &= 20\\ G+U+R+U &= 22 \end{aligned}$$

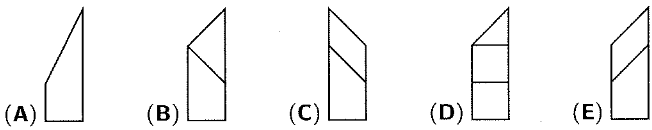
23. Es sei Z die Anzahl aller 8-stelligen Zahlen mit 8 voneinander und von 0 verschiedenen Ziffern. Wie viele dieser Zahlen sind durch 9 teilbar?

(A) $\frac{Z}{8}$ **(B)** $\frac{Z}{3}$ **(C)** $\frac{Z}{9}$ **(D)** $\frac{8Z}{9}$ **(E)** $\frac{7Z}{8}$

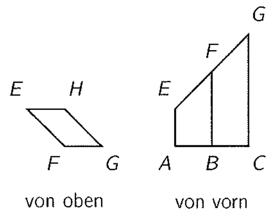
Lösung: Da 9 Ziffern zugelassen sind, gibt es 9 verschiedene Auswahlmöglichkeiten für die 8 Ziffern – je nachdem, welche der 9 Ziffern wir weglassen. Für die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 ist ihre Quersumme ausschlaggebend: ist diese durch 9 teilbar, dann auch die Zahl selbst. Offenbar lässt jede der 9 möglichen Quersummen einen anderen Rest bei Division durch 9. Da die Anzahl der 8-stelligen Zahlen für jede Ziffernauswahl dieselbe ist (nämlich $8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$), ist die gesuchte Anzahl gerade $\frac{Z}{9}$.

24. Rechts sind zwei Skizzen desselben, von ebenen Flächen begrenzten Körpers abgebildet. Welche der folgenden Skizzen gibt den Anblick von links wieder?





Lösung: Zunächst bezeichnen wir in den gegebenen Perspektiven die sichtbaren Eckpunkte des Körpers.



In dem ebenen Viereck $EFGH$ sind die gegenüberliegenden Seiten parallel. Wären nämlich zwei gegenüberliegende Seiten nicht parallel, so würden sich die Verlängerungen dieser Seiten schneiden, also auch in der Sicht von oben, wo sie jedoch parallel erscheinen. Das Viereck $EFGH$ ist also ein Parallelogramm, welches der Sicht von vorn zufolge nach links geneigt ist. Daher ist es von links betrachtet vollständig als Parallelogramm sichtbar.
Folglich kommen nur noch die Antworten **(C)** und **(E)** in Frage. Weil E tiefer als G liegt (Sicht von vorn) und weiter hinten als G (Sicht von oben), entfällt Antwort **(C)**, und **(E)** ist die Lösung.

25. An einem Schulwettbewerb beteiligten sich 55 Kinder. In die Korrekturliste wurde hinter jeden Namen bei jeder Aufgabe eingetragen, ob sie richtig (+), falsch (−) oder nicht gelöst (0) wurde. Dabei bemerkte ein Lehrer etwas Kurioses: Die Anzahl der + und die Anzahl der − war von Kind zu Kind unterschiedlich; stimmten also zwei in der Anzahl der + überein, so gewiss nicht in der Anzahl der −, und umgekehrt. Wie viele Aufgaben waren mindestens zu bearbeiten?

(**A**) 12 (**B**) 11 (**C**) 10 (**D**) 9 (**E**) 8

Lösung: Zur Lösung dieses Problems notieren wir bei n gestellten Aufgaben chronologisch die $A(n)$ Möglichkeiten, wie oft +, − und 0 bei der Korrektur auftauchen könnten:

1 Aufgabe:	+			$A(1) = 3$ Möglichkeiten
	−			
	0			
2 Aufgaben:	+0	++		$A(2) = 3 + 3 = 6$ Möglichkeiten
	−0	−−		
	00	+−		
3 Aufgaben:	+00	++0	+++	$A(3) = 3 + 3 + 4 = 10$ Möglichkeiten
	−00	−−0	++−	
	000	+−0	+−−	
			−−−	

usw.

Wir sehen nun bei n Aufgaben das Folgende: Entweder hat ein Schüler eine der n Aufgaben nicht gelöst. Dann gibt es für die restlichen $n-1$ Aufgaben genauso viele Möglichkeiten, wie diese mit +, − und 0 versehen sind, wie die Gesamtzahl *aller* Möglichkeiten bei $n-1$ Aufgaben. Andernfalls sind alle n Aufgaben gelöst worden. Dann kann das + n-mal, $(n-1)$-mal, …, 1-mal oder 0-mal auftauchen – insgesamt weitere $n+1$ Möglichkeiten. Wir erhalten somit die Rekursionsformel $A(n) = A(n-1) + (n+1)$.
Ersetzen wir $A(1)$ durch $1+2$, so finden wir $A(2) = 1+2+3$, $A(3) = 1+2+3+4, \ldots$, $A(n) = 1+2+\ldots+(n+1)$ – die Summe der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen. Entweder addieren wir nun so lange, bis wir die Zahl 55 überschreiten, oder wir kennen die entsprechende Formel, wissen also, dass $A(n) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ ist. Dann ist $A(n) \geq 55$ gleichbedeutend mit $(n+1)(n+2) \geq 110 = 10 \cdot 11$. Die kleinste Zahl, die diese Ungleichung erfüllt, ist $n = 9$.
Wer sich in Kombinatorik auskennt, hätte die Aufgabe auch schneller lösen können: Wir suchen nämlich gerade die Anzahl der Möglichkeiten, die es gibt, aus der 3-elementigen Menge $\{+, -, 0\}$ ohne Beachtung der Reihenfolge genau n Elemente auszuwählen, wobei aber natürlich jedes Element mehrmals gewählt werden darf. Das ist eine *Kombination mit Wiederholung* und die gesuchte Anzahl ist

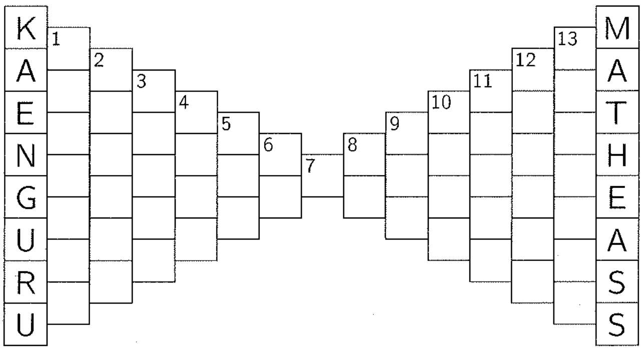
$$\binom{n+3-1}{n} = \frac{(n+2)!}{((n+2)-n)!n!} = \frac{(n+2)!}{2!n!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

26. Ein großes Quadrat ist in 2009 kleinere Quadrate zerteilt worden, sämtlich mit ganzzahligen Seitenlängen. Welches ist die kleinstmögliche Seitenlänge des großen Quadrats?

(**A**) 44 (**B**) 45 (**C**) 46 (**D**) 503 (**E**) das ist nicht möglich

Lösung: Wenn das Quadrat in 2009 kleinere Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen zerlegt wurde, muss die Seitenlänge eine natürliche Zahl sein, die größer als $\sqrt{2009}$ ist. Die nächstgrößere Quadratzahl nach 2009 ist $2025 = 45^2$. Nun versuchen wir, die 2009 Quadrate so zu wählen, dass wir eine große Anzahl von 1×1-Quadraten und eine kleinere Anzahl anderer Quadrate mit ganzzahliger Seitenlänge haben, so dass als Summe der Flächeninhalte 2025 entsteht. Wir beginnen damit, eine Zerlegung in 2008 1×1-Quadrate und 1 größeres zu versuchen. Dabei stellen wir fest, dass $2025 - 2008 = 17$ ist, also keine Quadratzahl. Die nächste Möglichkeit (2007 1×1-Quadrate und 2 größere) führt dann schon zur Lösung: $2025 - 2007 = 18$ und $18 : 2 = 9$, eine Quadratzahl. Wir können das Quadrat mit Seitenlänge 45 in 2007 1×1-Quadrate und zwei 3×3-Quadrate zerlegen.

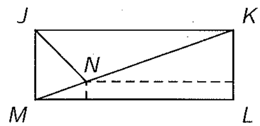
KAENGURU-Metamorphose



Man gelangt in der Abbildung vom KAENGURU zum MATHEASS über senkrecht einzutragende Zwischenbegriffe, wobei ein Begriff aus dem Nachbarbegriff dadurch entsteht, dass man dort einen Buchstaben streicht (bzw. hinzufügt) und die entstehende Buchstabenmenge in geeigneter Weise durchschüttelt. Um das Auffinden der (manchmal nicht ganz ernst zu nehmenden) Begriffe zu erleichtern, seien folgende Begriffsumschreibung genannt:

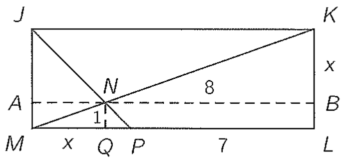
1. *ungebrauchtes Tongefäß*, 2. *Gartengemüse (Mehrzahl)*, 3. *Maßnahmen der medizinischen Vorsorge und Rehabilitation*, 4. *fester innerer Teil einer Frucht*, 5. *nordischer Hirsch*, 6. *Edelgas (chemisches Symbol)*, 7. *mathematische Konstante ($\approx 2,7182818$)*, 8. *Personalpronomen*, 9. *Europäische Weltraumbehörde (Abk.)*, 10. *hervorragende Sportler*, 11. *Trinkgefäß*, 12. *griechische Spielkarte*, 13. *behördliche Genies*

27. Im Rechteck $JKLM$ schneidet die Winkelhalbierende von $\measuredangle MJK$ die Diagonale KM im Punkt N. Die Abstände von N zu LM und KL seien 1 bzw. 8. Dann ist die Länge von $\overline{LM}$ gleich



(A) $8 + 2\sqrt{2}$ **(B)** $11 - \sqrt{2}$ **(C)** 10 **(D)** $8 + 3\sqrt{2}$ **(E)** $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösung: Bezeichnen wir die Strecke $\overline{MQ}$ mit x, so gilt für die gesuchte Größe $\overline{ML} = 8 + x$. Um x zu berechnen, fällen wir zunächst von N aus das Lot auf die Rechteckseiten $\overline{JM}$ bzw. $\overline{KL}$ und bezeichnen die Lotfußpunkte mit A bzw. B. Als halbierter rechter Winkel ist $\measuredangle AJN = 45°$, was demzufolge auch auf $\measuredangle JNA$ zutrifft. Somit folgt nun $\overline{JA} = \overline{AN} = \overline{KB} = \overline{MQ} = x$.



Die Dreiecke MQN und NBK sind offenbar zueinander ähnlich, und so gilt nach dem Strahlensatz $\frac{\overline{BK}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{MQ}}$. Drücken wir die Strecken in dieser Gleichung mit Hilfe von x und den gegebenen Größen aus, so erhalten wir $\frac{x}{8} = \frac{1}{x}$, woraus unmittelbar $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ folgt. Für die Länge von $\overline{ML}$ finden wir damit $\overline{ML} = 8 + 2\sqrt{2}$.

28. Die Folge $\{a_n\}$ von ganzen Zahlen ist folgendermaßen definiert: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}^2$ für $n \geq 0$. Dann ist der Rest, den a_{2009} bei Division durch 7 lässt, gleich

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 6

Lösung: Wir betrachten die Folge $\{r_n\}$ der Reste der Folgenglieder a_n bei Division durch 7. Nach Voraussetzung ist $r_0 = 1$ und $r_1 = 2$. Wenn nun $a_n = 7k_n + r_n$ und $a_{n+1} = 7k_{n+1} + r_{n+1}$ (k_n, k_{n+1} natürliche Zahlen), so ist $a_{n+2} = (7k_n + r_n) + (7k_{n+1} + r_{n+1})^2 = 7(k_n + 7k_{n+1}^2 + 2k_{n+1}r_{n+1}) + r_n + r_{n+1}^2$. Der Rest bei Division von a_{n+2} durch 7 ist $r_n + r_{n+1}^2$. Also gilt für die Folge der Reste $\{r_n\}$ dieselbe Bildungsvorschrift wie für die Folge $\{a_n\}$.
Nun erstellen wir eine Übersicht über die Reste r_n der ersten Folgenglieder a_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
r_n	**1**	**2**	**5**	**6**	**6**	**0**	**6**	**1**	**0**	**1**	1	2	5	...

Wir sehen hier eine typische Eigenschaft von Resten bei Rekursionen: Ab einer bestimmten Stelle wiederholen sich die Reste, die Folge r_n wird periodisch. In unserem Fall hat die Periode (in der Tabelle **fett** gekennzeichnet) die Länge 10. Der 0-te Rest r_0 ist derselbe wie der 10-te, wie der 20-te, der 30-te, ... und schließlich wie der 2010-te. Also lässt das 2009-te Glied der Folge a_n denselben Rest wie das 9-te Glied der Folge, und dieser ist 1, wie in der Tabelle angegeben.

29. In einem magischen Quadrat sind die Summen der Zahlen in allen Zeilen, allen Spalten und den beiden Diagonalen gleich. Welche Zahl ist in die linke obere Ecke zu schreiben, damit ein magisches Quadrat entstehen könnte?

?		
		47
	63	

(A) 16 **(B)** 32 **(C)** 55 **(D)** 110 **(E)** es gibt mehrere Möglichkeiten

Lösung: Wir tragen in einige der leeren Felder Buchstaben ein und beginnen beim Fragezeichen mit a. Wir müssen geschickt nutzen, dass Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen übereinstimmen. Eine Möglichkeit wird nun kurz beschrieben: Es gilt, dass $b + c + 63 = d + 47 + e = a + b + d = a + c + e$ ist. Dann gilt auch: $b + c + 63 + d + 47 + e = a + b + d + a + c + e$, woraus wir nach Subtraktion der auf beiden Seiten der Gleichung anzutreffenden b, c, d und e die Gleichung $63 + 47 = 2a$ erhalten, woraus $a = 55$ folgt.

a	b	d
	c	47
	63	e

30. Wir ordnen jeder zweistelligen Zahl z diejenige Zahl $t(z)$ zu, die entsteht, wenn sämtliche Teiler von z, einschließlich 1 und z selbst, der Größe nach hintereinander geschrieben werden. So ist z. B. $t(14) = 12714$. Wie viele Stellen hat die größte dieser Zahlen $t(z)$?

(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

Lösung: Um eine Zahl $t(z)$ mit möglichst vielen Stellen zu erhalten, muss die Zahl z möglichst viele Teiler, also möglichst viele Primteiler haben. Dazu müssen diese Primteiler möglichst klein sein. Nehmen wir an, dass in der Darstellung von z als Produkt von Primzahlen vier verschiedene Primzahlen vorkommen. Das kleinstmögliche Produkt von vier Primzahlen wird aus den Primzahlen 2, 3, 5 und 7 gebildet. Da bereits $3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$ ist, können höchstens drei verschiedene Primfaktoren in z enthalten sein. Die Zahlen z mit den drei Primfaktoren 2, 3 und 5 bzw. 2, 3 und 7 und möglichst vielen Teilern sind $z = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, zu der $t(z) = 123456101215203060$ gehört, $z = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ mit $t(z) = 123467121421284284$ und $z = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ mit $t(z) = 123569101518304590$. Mit nur zwei verschiedenen Primzahlen haben $z = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ mit $t(z) = 12346891218243672$ und $z = 2^5 \cdot 3 = 96$ mit $t(z) = 123468121624324896$ möglichst viele Teiler. Bis auf $t(72)$ haben all diese Zahlen, also insbesondere die größte unter ihnen, 18 Stellen.
Um die Aufgabe systematisch zu lösen, ohne dass man alle Teiler aufschreiben muss, beachten wir den Zusammenhang zwischen den Teilern einer natürlichen Zahl z und ihren Primfaktoren. Ist $z = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ die Primfaktorzerlegung von z, dann gibt es k *verschiedene* Primfaktoren und $n_1 + \ldots + n_k$ Primteiler *mit Vielfachheit* gezählt. Die Teiler von z sind alle Produkte der Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, in der p_i höchstens n_i-mal vorkommt, also 0-, 1-, 2-, ... oder n_i-mal, was genau $n_i + 1$ Möglichkeiten sind. Also gibt es $A(z) = (n_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$ verschiedene Teiler von z. Die Anzahl $A(z)$ der Teiler von z wird möglichst groß, wenn die Anzahl verschiedener Primfaktoren sowie deren Vielfachheit möglichst groß werden. In unserem Fall ($z < 100$) kann es, wie bereits festgestellt, höchstens 3 verschiedene Primteiler geben. Die Gesamtzahl der Primteiler (mit Vielfachheit) ist höchstens 6, denn bereits für die kleinste Primzahl 2 gilt $2^7 = 128 > 100$.
Fall a) Mit 6 Primteilern gibt es 2 mögliche zweistellige Zahlen: $2^6 = 64$ und $2^5 \cdot 3 = 96$. Die Anzahl der Teiler ist nach der obigen Formel $A(64) = 7$ bzw. $A(96) = 6 \cdot 2 = 12$. Versuchen wir nun, eine Zahl mit mehr als 12 Teilern zu finden.
Fall b) Eine zweistellige Zahl mit insgesamt 5 Primteilern hat höchstens 2 verschiedene Primfaktoren, denn bereits $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 > 100$. In der Primfaktorzerlegung von 96 eine Primzahlpotenz zu verkleinern, ergibt wenig Sinn, da sich so die Anzahl der Teiler verringert. Besser ist nur, die Potenz des zweiten Primfaktors zu erhöhen. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit: $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Diese Zahl hat ebenfalls $A(72) = 4 \cdot 3 = 12$ Teiler.
Fall c) Um mit insgesamt 4 Primteilern mindestens 12 Teiler zu erhalten, muss man nun schon 3 verschiedene Primfaktoren benutzen. In diesem Fall kommt ein Primfaktor zweimal und die anderen beiden einmal vor. Also gibt es $A(z) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ verschiedene Teiler.
Dass man bei weniger als 4 Primteilern weniger als 12 Teiler erhält, sieht man nun leicht ein. Die maximal mögliche Anzahl von Teilern, die eine zweistellige Zahl besitzen kann, ist 12.
Betrachten wir die anfangs gefundene Zahl 96 genauer, so erkennen wir, dass zu jedem *einstelligen* Teiler s ein *zweistelliger* Teiler t gehört, so dass $s \cdot t = 96$. Wären nämlich zwei solche Teiler von 96 beide einstellig, wäre $96 = s \cdot t \leq 9 \cdot 9 = 81$, ein Widerspruch. Bei 12 Teilern sind also 6 einstellig und 6 zweistellig, also hat $t(z)$ genau 18 Stellen. Für die anderen Zahlen mit 12 Teilern kann $t(z)$ nicht mehr Stellen haben, da es sonst mehr zweistellige Teiler als einstellige geben müsste, also auch ein Paar *zweistelliger* Teiler s, t mit $s \cdot t = z < 100$, was nicht möglich ist.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	C	B	D	E	D	C	A	B	E
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	A	A	B	C	D	D	D	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	C	B	D	E	B	C	A	C	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	A	C	D	C	D	D	E	C	B	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	A	A	C	C	C	E	D	C	A
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	B	E	C	B	C	A	B	E	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	A	C	B	D	D	B	E	D	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	B	C	D	B	C	E	A	D	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	B	C	E	D	B	A	B	C	A

www.mathe-kaenguru.de