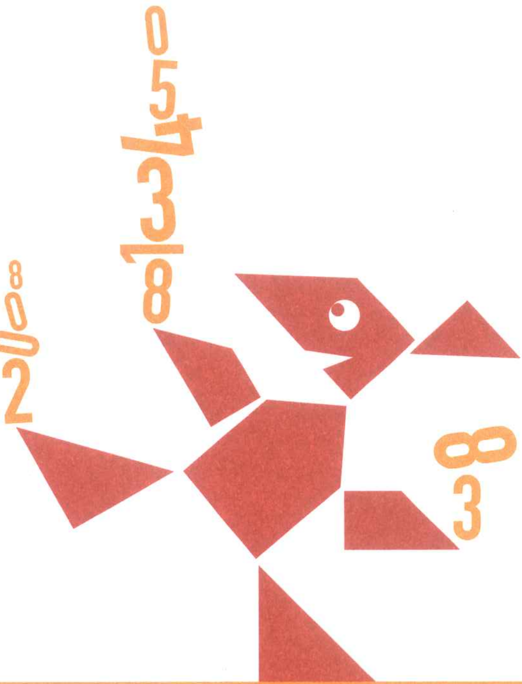
2008 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2008!

Der Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ ist in Deutschland noch einmal kräftig gewachsen. Mehr als eine dreiviertel Million Schülerinnen und Schüler aus knapp 8000 Schulen haben teilgenommen und sich an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières“ erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben versucht. Auch in der deutschsprachigen Schweiz haben sich wieder um die zehntausend Knaben und Mädchen bzw. junge Männer und junge Frauen darum bemüht, von den 21 bzw. 30 Multiple-Choice-Fragen möglichst viele richtig zu beantworten. Unerwartet wird dabei für manchen der Teilnehmenden die Vielfalt der Aufgabenstellungen gewesen sein. Aber mathematische Methoden finden eben an den unterschiedlichsten Stellen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, das Berücksichtigen von Wahrscheinlichkeiten – all das sind Dinge, die besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt werden und die im täglichen Leben überall eine Rolle spielen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V.“ hoffen, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

In der vorliegenden Broschüre sind die Aufgaben sowie Hinweise zu den Lösungen zusammengestellt worden. Dazu noch einige Bemerkungen: In der tiefsten Klassenstufe 3/4 wurden 21 Aufgaben gestellt, die Teilnehmer aus den höheren Klassenstufen hatten 30 Aufgaben zu lösen. Für das erste Drittel der 21 bzw. 30 Aufgaben konnten jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte erreicht werden. Bei einer falschen Antwort gab es Punktabzug, und zwar wurden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte abgezogen, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe wurde 1 Punkt abgezogen und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe betrug der Punktabzug 1.25 Punkte. Wenn keine Antwort angekreuzt war, gab es 0 Punkte. Auch wenn mehr als eine Antwort angekreuzt war – was nicht erlaubt ist – gab es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekam 21 bzw. 30 Punkte als Grundpunktzahl; auf diese Weise kann es eine negative Gesamtpunktzahl nicht geben, und die Höchstpunktzahl beträgt 105 bzw. 150 Punkte.

Die Organisation für die Schweiz wurde auch in diesem Jahr von der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK) übernommen. Die deutsche Übersetzung der Aufgaben, die ja zunächst in englischer Sprache vorliegen, wurde gemeinsam entwickelt, so dass schliesslich einmal mehr eine Version entstand, die mit dem gleichen Wortlaut sowohl in Deutschland als auch in der Schweiz verwendet werden konnte.

Viel Freude mit Mathematik wünscht euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack unter Mithilfe von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin
www.mathe-kaenguru.de

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Lussi Druck AG, Offsetdruck, 6370 Stans

Deutschschweizerische Mathematikkommission: www.vsmp.ch/dmk

Klassenstufen 3 und 4

1. Die Kängurus in unserem Zoo werden dreimal täglich gefüttert. Wie viele Fütterungen sind das pro Woche?

(A) 7 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 30

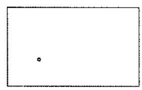
Lösung: Jede Woche hat 7 Tage, also gibt es pro Woche $7 \cdot 3 = 21$ Fütterungen.

2. $1002 - 102 = 12 + \ldots$?

(A) 222 (B) 333 (C) 555 (D) 777 (E) 888

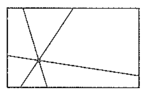
Lösung: Es ist $1002 - 102 = 900$, und es ist $900 - 12 = 888$. Wer sich seiner Rechenkünste nicht ganz sicher ist, sollte dann noch die Probe machen. Allerdings, wer pfiffig war, konnte bereits an der letzten Ziffer das richtige Resultat erkennen.

3. Ich habe auf einem Stück Papier einen Punkt markiert (s. Zeichnung) und zeichne nun mit dem Lineal durch diesen Punkt drei verschiedene Linien, jede so lang, wie es auf dem Papier möglich ist. In wie viele Teile wird das Papier durch die drei Linien geteilt?



(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

Lösung: Mit der ersten Linie teilen wir das Papier in zwei Teile. Die zweite Linie teilt jedes der Teile in zwei Teile; es entstehen 4 Teile. Im dritten Schritt werden wieder zwei Teile je in zwei Teile geteilt, so dass wir insgesamt 6 Teile erhalten. – Würden wir so weiter verfahren, kämen in jedem Schritt zwei Teile hinzu, so dass wir z. B. nach dem 10. Schritt 20 Teile vorfinden würden und allgemein doppelt so viele Teile wie Schnitte.

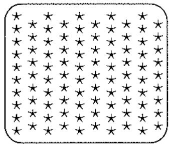


4. Elli hat auf ihrer Geschichten-CD drei spannende Erzählungen. Sie stoppt, dass die erste 6 Minuten und 25 Sekunden, die zweite 13 Minuten und 26 Sekunden und die dritte 10 Minuten und 13 Sekunden dauert. Wie lange dauern alle drei zusammen?

(A) 28 min 30 sec (B) 29 min 3 sec (C) 30 min 4 sec
(D) 30 min 6 sec (E) 31 min 13 sec

Lösung: Es ist die Summe aus den Zeiten zu bilden, die die 3 Geschichten lang sind. Dabei ist zu beachten, dass eine Minute 60 Sekunden – und nicht 100 – lang ist. Wir addieren zuerst die Sekunden: $25 \text{ sec} + 26 \text{ sec} + 13 \text{ sec} = 64 \text{ sec} = 1 \text{ min } 4 \text{ sec}$. Nun addieren wir die Minuten: $6 \text{ min} + 13 \text{ min} + 10 \text{ min} + 1 \text{ min} = 30 \text{ min}$. Insgesamt sind das 30 min 4 sec.

5. Wie viele Sternchen sind in der Figur?



(**A**) 85 (**B**) 90 (**C**) 95 (**D**) 100 (**E**) 105

Lösung: Wer wollte, konnte alle Sternchen zählen. Schneller geht es natürlich, wenn wir uns angucken, was sich wiederholt. Wir finden, dass es 5 Reihen mit je 10 Sternchen gibt und 5 Reihen mit je 9 Sternchen. Das sind insgesamt $5 \cdot 10 + 5 \cdot 9 = 95$.

6. Zusammen mit seinem Vater schenkte Marvin seiner Mutter, seiner Großmutter, der Tante und sogar seinen beiden Schwestern zu Ostern jeweils einen der in **A** bis **E** genannten Blumensträuße. Für die Mutter und die beiden Schwestern hat er gleichfarbige Sträuße ausgesucht und für die Großmutter etwas anderes als Rosen. Alle Beschenkten erhielten verschiedene Sträuße. Welchen Strauß bekam die Tante?

(**A**) gelbe Tulpen (**B**) rosa Rosen (**C**) gelbe Rosen
(**D**) rote Gerbera (**E**) gelbe Gerbera

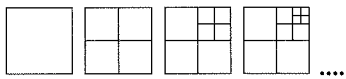
Lösung: Festgelegt ist, dass die Mutter und die beiden Schwestern gleichfarbige Sträuße bekommen. Damit ist klar, dass dies die drei gelben Sträuße sein müssen. Zur Auswahl stehen jetzt noch rosa Rosen und rote Gerbera. Da die Großmutter keine Rosen bekommt, gehen diese an die Tante.

1			4
			2
		4	

Ein Sudoku für 4

Die Ziffern 1, 2, 3 und 4 sollen so in das (4×4)-Quadrat geschrieben werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der (2×2)-Quadrate jede der Ziffern genau einmal vorkommt.

7. Die Zeichnung zeigt eine Folge von Figuren. Die 1. Figur ist ein Quadrat, die 2. besteht aus 4 Quadraten, die 3. aus 7 und die 4. aus 10 Quadraten (von der 3. Figur an sind sie unterschiedlich groß). Aus wie vielen Quadraten besteht die 6. Figur?



(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 18 (**D**) 19 (**E**) 20

Lösung: In jedem Schritt wird bei der Figurenfolge ein Quadrat in 4 Quadrate geteilt. Dabei erhöht sich die Anzahl der Quadrate jedesmal um 3. So besteht die 1. Figur aus einem Quadrat, die zweite aus $1+3=4$ Quadraten, die 3. aus $(1+3)+3 = 1+2\cdot 3 = 7$ Quadraten, die 4. aus $(1+2\cdot 3)+3 = 1+3\cdot 3 = 10$, die 5. aus $(1+3\cdot 3)+3 = 1+4\cdot 3 = 13$ und die 6. aus $1+(4\cdot 3)+3 = 1+5\cdot 3 = 16$ Quadraten. – Die 100. Figur würde dann aus $1+99\cdot 3 = 298$ Quadraten – darunter allerdings vielen winzig kleinen – bestehen.

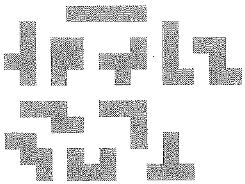
8. Welche der Figuren tritt in der abgebildeten Figurenfolge am seltensten auf?

♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★♠♣★

(**A**) nur ★ (**B**) nur ♣ (**C**) nur ♠

(**D**) ★ und ♣ (**E**) alle drei sind gleich häufig

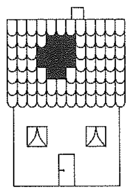
Lösung: Wir schauen die Abfolge aufmerksam an und bemerken, dass sich ohne Ausnahme die Dreiergruppe ♣★♠ bis fast zum Ende der Zeile wiederholt. Erst am Ende der Zeile gibt es eine Ausnahme: ♠ fehlt. Also treten ★ und ♣ häufiger als ♠ auf; ♠ ist am seltensten.



Eine fehlt

Die links gezeichneten elf Figuren gehören zusammen, d. h. sie haben eine gemeinsame Eigenschaft. Welche zwölfte Figur hat ebenfalls diese Eigenschaft und ist vergessen worden?

9. Der Sturm hat ein Loch in unser Dach gerissen. Vor dem Sturm waren auf der Vorderseite des Hauses in jeder der 7 Reihen 12 Dachziegel. Wie viele Dachziegel sind nun noch auf der Vorderseite vorhanden?



(**A**) 70 (**B**) 71 (**C**) 75 (**D**) 81 (**E**) 84

Lösung: Wir stellen fest, dass in 4 Reihen Ziegel fehlen, und zwar fehlen – da es stets 12 waren – in der obersten der vier Reihen 3 Ziegel, in den nächsten beiden je 4 und in der untersten 2 Ziegel. Insgesamt fehlen also $3 + 2 \cdot 4 + 2 = 13$. Folglich sind auf der Vorderseite noch $7 \cdot 12 - 13 = 84 - 13 = 71$ Dachziegel vorhanden.

10. Am ersten Sommerwochenende im Freibad tauchen wir um die Wette. Guido kann länger als Herta tauchen, aber nicht so lange wie Flora. Horst kann länger tauchen als Isolde, aber nicht so lange wie Guido. Wer kann am längsten tauchen?

(**A**) Flora (**B**) Guido (**C**) Herta (**D**) Horst (**E**) Isolde

Lösung: Aus dem ersten Satz: „Guido kann länger als Herta tauchen, aber nicht so lange wie Flora." entnehmen wir, dass von den drei Kindern Guido, Herta und Flora, die Letztgenannte, also Flora, diejenige ist, die am längsten tauchen kann. Der zweite Satz: „Horst kann länger tauchen als Isolde, aber nicht so lange wie Guido." macht klar, dass von den drei Kindern Horst, Isolde und Guido, der Letztgenannte, also Guido, derjenige ist, der am längsten tauchen kann. Da wir schon wissen, dass Flora das noch besser als Guido kann, ist klar, dass sie die gesuchte Taucherin ist.

11. Morgen fahre ich in die Ferien. Um pünktlich am Zug zu sein, muss ich morgen schon um 4 Uhr in der Früh aufstehen. Mir bleiben nur noch sechseinhalb Stunden zum Schlafen. Wie spät ist es?

(**A**) 20.30 Uhr (**B**) 21.30 Uhr (**C**) 22.30 Uhr (**D**) 23.30 Uhr (**E**) 0.30 Uhr

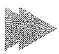
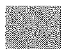
Lösung: Vor Mitternacht bleiben, da ich danach nur noch 4 Stunden schlafen kann, noch zweieinhalb Stunden. Also ist es 21:30 Uhr.

12. Lara liebt das Multiplizieren mit 3, Merlin addiert am liebsten 2 und Nick subtrahiert von jeder Zahl am liebsten 1. Ich gebe die Zahl 3 vor. In welcher Reihenfolge müssen die drei Freunde je einmal ihre Lieblingsrechnerei durchführen, damit 14 herauskommt?

(**A**) Nick – Merlin – Lara (**B**) Lara – Nick – Merlin (**C**) Merlin – Nick – Lara
(**D**) Lara – Merlin – Nick (**E**) Merlin – Lara – Nick

Lösung: Lara kann gewiss nicht als Erste dran gewesen sein, denn $3 \cdot 3$ ist nur 9, und 14 wäre einfach zu groß. Also muss zuerst addiert werden. Damit ergibt sich die Reihenfolge Merlin – Lara – Nick. Die Probe bestätigt das, denn $(3+2) \cdot 3 - 1 = 14$.

13. Tilo hat zwei gleichseitige Dreiecke aus Pappe ausgeschnitten, um damit auf dem Tisch Bilder zu legen. Welche der abgebildeten Figuren kann nicht aus den beiden Dreiecken gelegt werden?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wie auch immer wir die beiden Dreiecke mit ihren spitzen Winkeln zueinander legen, es wird uns nicht gelingen, mit ihnen gleich 4 rechte Winkel zu erzeugen. Alle anderen Umrisse sind möglich, wie die Abbildung zeigt.

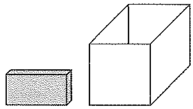
EICHE DOCH MODE HEXE	**Eines stört** Eines der vier Wörter hat die gemeinsame Eigenschaft der anderen drei nicht. Welches ist es?

14. Als wir in der Jugendherberge ankommen, werden uns gleich 7 Dreibett-Zimmer zugewiesen. Wie viele Zweibett-Zimmer müssen noch dazukommen, wenn alle 31 Klassenfahrt-Teilnehmer unterkommen sollen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: In den 7 Dreibett-Zimmern haben $7 \cdot 3 = 21$ Personen Platz. Für die restlichen $31 - 21 = 10$ Personen sind noch $10 : 2 = 5$ Zweibett-Zimmer nötig.

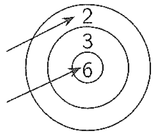
15. Ich soll die Bausteine meiner kleinen Nichte einräumen. Sie sind $1\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ groß.
Wie viele davon passen in eine $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ große Schachtel?



(A) 16 **(B)** 18 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 24

Lösung: Stellt man sich die große Schachtel auf die quadratische Seite gestellt vor, so können je Schicht zwei der kleinen Bausteine nebeneinander gelegt werden. Sie haben dann eine Höhe von 1 cm. Da in der Höhe 8 cm zur Verfügung stehen, passen insgesamt $8 \cdot 2 = 16$ Bausteine hinein.

16. Anke übt für den Wettkampf im Pfeilwerfen, bei dem die Punktzahlen von zwei Würfen zusammengezählt werden. Sie wirft zwei Pfeile und jubelt: insgesamt 8 Punkte (s. Bild). Wie viele verschiedene Gesamtergebnisse sind möglich? Beachte, dass ein Pfeil, der die Zielscheibe nicht trifft, 0 Punkte gibt.



(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

Lösung: Mit 2 Pfeilen lassen sich folgende Ergebnisse erzielen:

$$\begin{array}{rr} 6+6=12 & 6+3=3+6=9 \\ 6+2=2+6=8 & 6+0=0+6=3+3=6 \\ 3+2=2+3=5 & 3+0=0+3=3 \\ 2+2=4 & 2+0=0+2=2 \\ \text{und} & 0+0=0 \end{array}$$

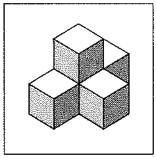
Das sind die neun verschiedenen Gesamtergebnisse: 12; 9; 8; 6; 5; 4; 3; 2 und 0.

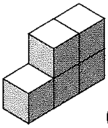
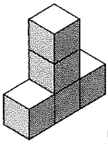
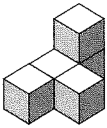
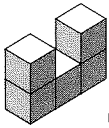
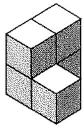
3	1	5	4	7				
						1	5	4
					6		7	
		1		3		5	8	
7					5	9		2
		4			7			
1				8			9	
6			7					
	8		2	4	9	6		

Ein Sudoku für 9

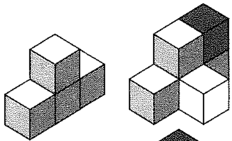
Die Ziffern 1, 2, ..., 9 sollen so in das (9×9)-Quadrat geschrieben werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der (3×3)-Quadrate jede der Ziffern genau einmal vorkommt.

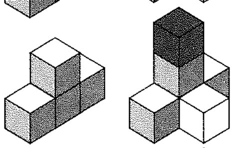
17. Andreas hat aus 5 gleich großen Würfeln das rechts gezeichnete Bauwerk gebaut. Welches der unten abgebildeten Bauwerke (jedes besteht aus genau 5 Würfeln) kann er *nicht* durch Umsetzen von genau einem Würfel aus seinem Bauwerk erzeugen?

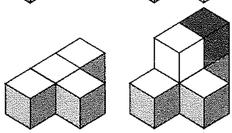


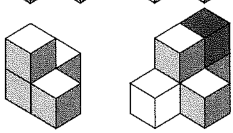
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Damit ich durch Umsetzen nur eines Würfels aus dem Ausgangsbauwerk eines der unter (**A**) bis (**E**) gezeichneten erhalten kann, müssen vier der Würfel fest bleiben. Diese vier Würfel sind für die Fälle (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) rechts gezeichnet. Daneben ist jeweils – weiß – gezeichnet, welcher Würfel des Ausgangsbauwerks umgesetzt werden muss und – dunkelgrau – an welcher Stelle des Bauwerks (**A**), (**B**), (**C**) bzw. (**E**) sich der umgesetzte dann befindet.
Bei (**D**) liegen alle fünf Würfel in einer Ebene, also müssten die vier fest bleibenden Würfel ebenfalls in einer Ebene liegen. Als Vierergruppe, die in einer Ebene liegt, kommt von der Ausgangsfigur nur eine einzige Konstellation in Frage – diejenige, die auch bei (**A**) und (**B**) als Vierergruppe gewählt werden konnte. Und die ist in (**D**) offenbar nicht zu finden.
Also lässt sich das Bauwerk (**D**) nicht durch Umsetzen nur eines Würfels erhalten.

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**E**) 

18. Mein Urgroßvater Franz erzählte mir, dass er ebenso viele Schwestern wie Brüder habe. „Meine Lieblingsschwester Rabea allerdings hatte doppelt so viele Brüder wie Schwestern", fügte er verschmitzt hinzu. Wie viele Kinder hatte meine Ururgroßmutter, die Mutter meines Urgroßvaters Franz?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Wenn der Urgroßvater ebenso viele Brüder wie Schwestern hat, so hat die Ururgroßmutter einen Sohn mehr als Töchter. Wenn nun Rabea doppelt so viele Brüder wie Schwestern hat, so ist die Anzahl der Söhne doppelt so groß wie die um 1 verminderte Zahl der Töchter. Da es mindestens zwei Töchter geben muss, da anderenfalls die Aussage über Rabea sinnlos wäre, müssen es mindestens vier Söhne sein – zwei Söhne ist nicht möglich, weil der Urgroßvater dann nicht ebenso viele Schwestern wie Brüder hätte. Mit 4 Söhnen klappt es auch wirklich, denn dann hat der Urgroßvater 3 Brüder und 3 Schwestern und Rabea hat 2 Schwestern und 4 Brüder. Das sind insgesamt 7 Kinder.

19. Wie viele zweistellige Zahlen gibt es, bei denen die Einer-Ziffer größer ist als die Zehner-Ziffer?

(**A**) 9 (**B**) 18 (**C**) 26 (**D**) 30 (**E**) 36

Lösung: Als Zehnerziffer kommen nur die Ziffern von 1 bis 9 in Frage. Davon fällt allerdings die 9 auf Grund der Bedingung, dass die Einerziffer größer sein soll als die Zehnerziffer, weg. Bei 8 als Zehnerziffer kann die Einerziffer nur 9 sein, ist die Zehnerziffer 7, so sind die Einerziffern 8 und 9 möglich. Für 6 als Zehnerziffer sind es die drei möglichen Einerziffern 7, 8 und 9 usw. Bei 1 als Zehnerziffer sind es schließlich die 8 möglichen Einerziffern $2, 3, \ldots, 9$. Insgesamt gibt es $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$ zweistellige Zahlen, bei denen die Einerziffer größer ist als die Zehnerziffer. – Wer mochte, konnte auch alle 36 Zahlen aufschreiben und auszählen.

Ausfüll-Knobelei

Schreibe in jedes freie Feld des (5×10)-Feldes eine Zahl. Felder mit gleichen Zahlen müssen horizontal und vertikal zusammenhängende Bereiche bilden, die aus genau so vielen Feldern bestehen, wie die Zahl angibt. Zwei verschiedene, horizontal oder vertikal zusammenstoßende Bereiche dürfen nicht die gleiche Größe haben.

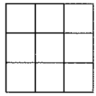
	5			5			1		
	4			1			4		4
			2			4			
1		3			3			1	
		2			1			3	

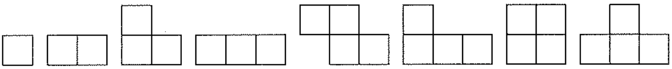
20. Als Carla hungrig aus der Schule kommt, hat ihre Mutter gerade den 25. Pfannkuchen von der Pfanne genommen. Die Mutter bäckt weiter, aber Carla schnappt die Pfannkuchen schneller weg, als sie backen kann. In der Zeit, die die Mutter für zwei frische Pfannkuchen braucht, verschwinden drei in Carlas Mund. Nach dem 12. Pfannkuchen gibt Carla auf, gerade als der Teig verbraucht ist und ihre Mutter den letzten Pfannkuchen fertig hat. Wie viele Pfannkuchen bleiben für den Rest der Familie übrig?

(**A**) 23 (**B**) 21 (**C**) 20 (**D**) 19 (**E**) 13

Lösung: Wir stellen uns vor, dass sich Carla, um sich nicht den Mund zu verbrennen, bei den fertigen Pfannkuchen bedient, wobei der Berg von 25 Pfannkuchen auf $25 - 12 = 13$ schrumpft. Die Zeit, die Carla braucht, um ihre 12 Pfannkuchen zu futtern, entspricht $12 : 3 = 4$ Backfuhren ihrer Mutter mit jeweils 2 Pfannkuchen. Durch das Hinzutun der heißen, frischen Pfannkuchen wächst der Stapel wieder um $4 \cdot 2 = 8$ Pfannkuchen, und zwar auf $13 + 8 = 21$.

21. Justina hat die 8 unten gezeichneten Puzzleteile. Sie wählt 3 dieser Teile aus und puzzelt damit das rechts gezeichnete (3 × 3)-Quadrat.

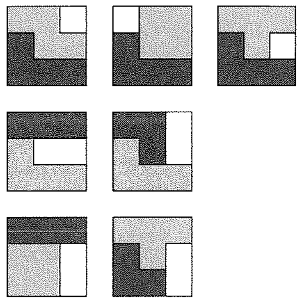




Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Justina, 3 von den 8 Teilen auszuwählen, mit denen sich das (3 × 3)-Quadrat puzzeln lässt?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wir analysieren die Aufgabe: Es gibt vier Sorten von Teilen, solche aus vier Quadraten (Viererteile), aus drei Quadraten (Dreierteile) und je eines aus zwei und einem Quadrat. Es ist nicht möglich, aus drei Teilen, unter denen sich kein Viererteil befindet, das (3 × 3)-Quadrat zu puzzeln, weil es nur zwei – und nicht drei – Dreierteile gibt und die Anzahl der kleinen Quadrate der kleinen Teile dann nicht ausreicht.



Wir versuchen als erstes zwei Viererteile zu kombinieren. Sie müssen dann als 3. Teil das Einerquadrat dazubekommen. Die Möglichkeiten sind rechts gezeichnet. Es sind insgesamt 3.

Die zweite grundsätzliche Variante besteht in der Kombination eines Viererteils mit einem Dreierteil und dem Zweierteil. Davon gibt es 4 Möglichkeiten.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 3 und 4 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Antwort	C	E	B	C	C	B	A
Aufgabe	8	9	10	11	12	13	14
Antwort	C	B	A	B	E	D	D
Aufgabe	15	16	17	18	19	20	21
Antwort	A	D	D	E	E	B	D

Klassenstufen 5 und 6

1. Bei welcher der 5 Rechenaufgaben mit den Zahlen 2, 0, 0 und 8 ist das Ergebnis am kleinsten?

(**A**) 2+0+0+8 (**B**) 200 : 8 (**C**) $2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 8$ (**D**) 200 − 8 (**E**) 8+0+0−2

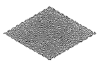
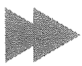
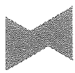
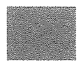
Lösung: Viele werden sofort erkennen, dass bei (**C**) mit 0 multipliziert wird, und dass dabei das kleinste Ergebnis entsteht. Wer gerechnet hat, war mit 10; 25; 0; 192 und 6 auch schnell fertig.

2. Wie viel ist die Hälfte von einem Drittel von einem Viertel von 24?

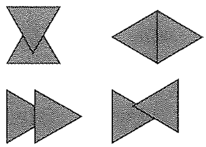
(**A**) 12 (**B**) 8 (**C**) 6 (**D**) 3 (**E**) 1

Lösung: Wir fangen mit dem Viertel an: ein Viertel von 24 ist 6, davon ein Drittel ist 2 und davon die Hälfte 1.

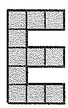
3. Lukas hält zwei aus Pappe ausgeschnittene gleichseitige Dreiecke in der Hand, die er auf unterschiedliche Weise auf dem Tisch anordnet. Dabei entstehen Figuren, deren Umriss Lukas nachzeichnet. Welche der abgebildeten Zeichnungen kann *nicht* der Umriss der beiden irgendwie zusammengelegten Dreiecke sein?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Aus den beiden gleichseitigen Dreiecken, die je drei Winkel von 60° haben, lässt sich ein Rechteck mit 4 rechten Winkeln nicht zusammenschieben. Die anderen Figuren sind alle möglich, wie die nebenstehenden Bilder zeigen.



4. Unsere Schulwandzeitung soll eine neue Überschrift bekommen. Für das „E“ habe ich elf Quadrate der Seitenlänge 2 cm ausgeschnitten, zusammengeschoben und auf Papier geklebt. Als ich mit einem Stift die äußere Linie nachziehe, frage ich mich, wie lang diese Linie ist. Es sind



(**A**) 70 cm (**B**) 67 cm (**C**) 65 cm (**D**) 48 cm (**E**) 44 cm

Lösung: Bei dieser Aufgabe gelangen wir wahrscheinlich am schnellsten zum Ziel, wenn wir einfach die Quadratseiten, die am Rand liegen, abzählen. Das sind 24. Dies ist mit der Länge von 2 cm zu multiplizieren, wodurch wir 48 cm als Lösung erhalten.

5. Als Peter zum Heft seiner Banknachbarin rüberguckt, sieht er $1 + 1\;\;1 - 2 = 100.$ Was gehört an die vom Löschblatt verdeckte Stelle zwischen den beiden Einsen?

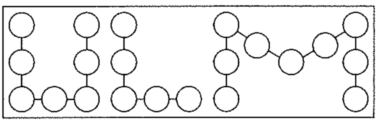
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) + (**D**) – (**E**) 9

Lösung: Zur teilweise verdeckten Zahl ist 1 zu addieren und 2 ist zu subtrahieren, also ist insgesamt 1 zu subtrahieren, um zu 100 zu gelangen. Und das gelingt nur, wenn ich von 101 subtrahiere.

6. Die Summe der Ziffern einer 3-stelligen Zahl ist 12. Die Einerziffer ist um 4 größer als die Zehnerziffer und sogar um 5 größer als die Hunderterziffer. Diese Zahl ist

(**A**) 615 (**B**) 237 (**C**) 372 (**D**) 327 (**E**) 126

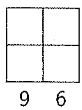
Lösung: Schnell stellen wir fest, dass bei 4 der 5 Zahlen die Quersumme, also die Summe der Ziffern, 12 ist – (**E**) entfällt. Nun untersuchen wir die Differenz von Einer- und Zehnerziffer. Sie ist bei (**A**) und (**B**) wie gefordert 4. Untersuchen wir jetzt die Differenz von Einer- und Hunderterziffer, so stellt sich heraus, dass nur bei 237 die Hunderterziffer um 5 kleiner ist als die Einerziffer.
Ebenso schnell ist die Lösung zu finden, wenn wir gucken, bei welchen Zahlen wir die große Zifferndifferenz 5 zwischen Hunderter- und Einerziffer antreffen. Das sind 237 und 126 – aber nur 237 hat die geforderte Quersumme 12.



In und um Ulm

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 21 sollen so in die Kreisfelder des Stadtnamens ULM eingetragen werden, dass die Zahlensummen auf *jedem* geradlinigen Buchstabenabschnitt den gleichen Wert haben. Versucht es, wenn ihr für diese Summe 28 nehmt. Geht es auch mit 38?

7. Welche Zahl ist gemeinsam mit den Zahlen 2, 3 und 4 in die nebenstehende (2×2)-Tabelle einzutragen, damit die Summe der beiden Zahlen in der ersten Spalte 9 und die in der zweiten Spalte 6 beträgt?



(**A**) 6 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 7

Lösung: Damit die drei Zahlen in das (2×2)-Feld eingeordnet werden können, müssen wir zwei solche unter ihnen finden, deren Summe 9 oder 6 ist. Wir sehen schnell, dass 9 zu groß ist, um Summe aus zwei der Zahlen 2, 3 oder 4 zu sein. Hingegen gilt $6 = 4 + 2$. Damit ist klar, dass in das noch zu besetzende Feld $9 - 3 = 6$ geschrieben werden muss.
Um das Kreuz an die richtige Stelle zu setzen, hätte auch folgende Überlegung ausgereicht: Da nicht nach der Anordnung der Zahlen, sondern nur nach dem Wert der vierten Zahl gefragt ist, genügt es, von der Summe *aller* Zahlen, $9 + 6 = 15$, die bereits bekannten drei Zahlen abzuziehen, $15 - 2 - 3 - 4 = 6$.

8. Ich spiele mit meiner Cousine und möchte mit ihr eine Pyramide aus verschieden großen Scheiben bauen. Die rote Scheibe ist kleiner als die blaue, die violette größer als die weiße. Wie könnte die fertige Pyramide aussehen?

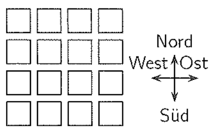
Lösung: Zuerst suche ich all jene Pyramiden, bei denen die rote Scheibe kleiner als die blaue ist – die anderen kommen sowieso nicht in Frage. Das sind (**B**), (**C**) und (**D**). Die zweite Bedingung, die gelten muss, ist, dass die weiße Scheibe kleiner als die violette ist. Dies ist nun nur noch bei der Pyramide (**D**) so.
Natürlich kann man auch die Lösungsvorschläge einen nach dem anderen daraufhin überprüfen, ob die Bedingungen erfüllt sind und dabei die falschen aussortieren.

9. Teilt Berit ihr Alter durch 5, bleibt der Rest 3. Berits Freund Yakob ist doppelt so alt wie Berit. Teilt er sein Alter durch 5, bleibt als Rest

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

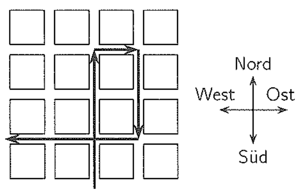
Lösung: Eine Zahl – das Alter von Berit – lässt beim Teilen durch 5 den Rest 3, sie ist also von der Gestalt $5 \cdot x + 3$, wobei x eine natürliche Zahl ist. Verdopple ich jetzt diese Zahl, erhalte ich $2 \cdot (5 \cdot x + 3) = 5 \cdot (2x) + 6$, auch der Rest verdoppelt sich also. Die Zahl 6 ist jedoch größer als 5 und daher durch die Zahl zu ersetzen, die kleiner als 5 ist und bei Division durch 5 denselben Rest wie 6 lässt. Das ist 1.
Sicher werden viele die Aufgabe zu lösen versucht haben, indem sie mit Beispielzahlen versucht haben, der Gesetzmäßigkeit auf die Spur zu kommen. Das ist legitim und führt ebenfalls zum richtigen Ergebnis.

10. In unserer Vorstadtsiedlung sind die Grundstücke ganz ordentlich ausgerichtet (s. Zeichnung). Als Benno Isa besucht, läuft er drei Grundstücke lang nach Norden (N), dann eines nach Osten (O), zwei nach Süden (S) und drei nach Westen (W). Isa begleitet ihn zurück, sie kennt einen viel kürzeren Weg. Welcher ist das?



(**A**) 2N – 2O (**B**) 3O – 1N (**C**) 1S – 2O (**D**) 1N – 2O (**E**) 3O –2N

Lösung: Wie die nebenstehende Abbildung des Weges zeigt, den Benno gegangen sein könnte (wir wissen ja nicht, an welcher Stelle er in das Geviert der Grundstücke getreten ist), hat er einen ziemlich großen Umweg gemacht. Der Weg zurück wird an der Abbildung sofort klar: Wenn Benno auf dem Hinweg drei Grundstücke nach Norden und später wieder zwei nach Süden gelaufen ist, hätte er stattdessen auch nur ein Grundstück weit nach Norden zu laufen brauchen.



Analog gehen wir für die Ost-West-Richtung vor: Benno ist auf dem Hinweg ein Grundstück nach Osten, drei nach Westen gelaufen, folglich kann er auf dem Rückweg mit zwei Grundstücken in Richtung Osten den Weg verkürzen. Insgesamt läuft er also 1S – 2O.

11. Die drei alten Freundinnen Loni, Tina und Elsa treffen sich im Park zum Stricken. „Loni, dein Strickstrumpf ist länger als die Strümpfe von Tina und Elsa zusammen," urteilt ihr gemeinsamer Freund Ernst, „und Elsas Strumpf ist länger als die Strümpfe von Tina und Loni zusammen", setzt er an Elsa gewandt fort. Was trifft nun sicher zu?

(**A**) Elsa hat den längsten Strumpf. (**B**) Loni hat den längsten Strumpf.
(**C**) Tina hat den längsten Strumpf. (**D**) Die drei Strümpfe sind gleich lang.
(**E**) Was Ernst beschreibt, ist nicht möglich.

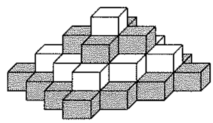
Lösung: Wenn Lonis Strickstrumpf länger ist als die Strümpfe von Elsa und Tina zusammen, so ist es der längste. Allerdings behauptet Ernst dasselbe von Elsas Strickstrumpf. Es kann aber nur einer der längste sein. – In der Mathematik nennt man so etwas einen Widerspruch. – Das, was Ernst beschreibt, ist nicht möglich.

Karlas Rätsel

Karla sagt zu ihrem Bruder Karl: „Als Tante Klara so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Klara so alt war, wie du jetzt bist, da warst du...

1. Wie alt war Karl da?
2. Wievielmal so alt wie Karl ist Tante Klara jetzt?

12. Die rechts gezeichnete Pyramide besteht aus 4 Schichten, die komplette 1. und 3. Schicht ist grau, die komplette 2. und 4. weiß. Wie viele weiße Steine wurden insgesamt verbaut?



(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

Lösung: Die oberste Schicht der Pyramide besteht aus einem Stein. Es folgt eine graue Schicht aus $1+3+1 = 5$ Steinen, die darauf folgende weiße Schicht aus $1+3+5+3+1 = 13$ Steinen. Insgesamt wurden 14 weiße Steine verbaut.

13. Lenis Leidenschaft ist das Multiplizieren mit 5, Mary addiert am liebsten 4 und Nils mag von jeder Zahl am liebsten 3 subtrahieren. Ich gebe die Zahl 6 vor. In welcher Reihenfolge müssen die drei rechnen, damit 19 herauskommt, nachdem jeder einmal seine Lieblingsrechnerei vollzogen hat?

(**A**) Nils – Mary – Leni (**B**) Mary – Leni – Nils (**C**) Leni – Nils – Mary
(**D**) Nils – Leni – Mary (**E**) Leni – Mary – Nils

Lösung: Da $5 \cdot 6 = 30$ viel größer als 19 ist, wird Leni sicher nicht beginnen. Vor dem Multiplizieren muss erst einmal die 6 verringert werden, damit dann beim Multiplizieren mit der 5 keine zu große Zahl entsteht. Außerdem darf Leni nicht zuletzt an der Reihe sein, weil

ja 19 nicht durch 5 teilbar ist. Damit kommt als Reihenfolge nur Nils – Leni – Mary in Frage, und so klappt es auch wirklich, denn $(6-3)\cdot 5+4=19$.
Eine andere Lösungsmöglichkeit ist die folgende: 19 liegt zwischen den durch 5 teilbaren Zahlen 15 und 20, die entstehen können, wenn Leni am Zuge ist. Die 15 liefert bei Addition von 4 (Mary) die gewünschte 19. Also sollten die Mädchen Nils den Vortritt lassen.

14. Hier ist ein Stück einer Multiplikationstafel.

×	4	3
5	20	15
7	28	21

Genauso ist die zweite Tafel aufgebaut, leider fehlen ein paar Zahlen.

×		
	35	63
	30	**?**

.

Welche Zahl gehört an die Stelle des Fragezeichens ?

(**A**) 54 (**B**) 56 (**C**) 65 (**D**) 36 (**E**) 42

Lösung: In der zweiten Multiplikationstafel sind die Produkte 35, 63 und 30 eingetragen. Jeweils für 35 und 63 bzw. für 35 und 30 müssen wir gemeinsame Faktoren finden. Im ersten Fall ist 7 gemeinsamer Faktor, im zweiten Fall 5. Demzufolge können wir die Tafel ergänzen zu

×	5	9
7	35	63
6	30	★

. Damit gehört an die Stelle des Sterns die Zahl $6\cdot 9=54$.

15. Welche Zahl muss den ★ ersetzen, damit die Gleichung $3\cdot 12\cdot 15=6\cdot\bigstar\cdot 5$ korrekt ist?

(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 24 (**D**) 27 (**E**) 30

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten herauszufinden, was an die Stelle des Sternchens gehört. Beispielsweise ist es möglich, die Zahlen 3, 12 und 15 zu multiplizieren und das Produkt durch $6\cdot 5=30$ zu teilen. – Wer Rechnerei sparen will, sollte sich die Faktoren genauer angucken. Wir stellen uns 3, 12 und 15 in (Prim-)Faktoren zerlegt vor und finden, dass zweimal die 2, dreimal die 3 und einmal die 5 vorkommt. Auf der rechten Seite sind – ohne Sternchen – die 2, 3 und 5 je nur einmal vorhanden. Also gehört an die Stelle des Sternchens das Produkt aus einer 2 und 2 Dreien: $2\cdot 3^2=18$.

16. Fanni ist noch dabei, Schneebälle zu formen, da beginnt ihr Vater schon die Schneeballschlacht. Während sich die beiden wild bewerfen, kann Fanni noch 5 weitere Bälle formen. Als sie 14 Bälle verschossen hat, gibt ihr Vater auf. Da hat sie noch 7 Schneebälle übrig. Wie viele hatte Fanni schon vor der Schneeballschlacht für sich bereitgelegt?

(**A**) 21 (**B**) 19 (**C**) 16 (**D**) 12 (**E**) 10

Lösung: Wir wissen, dass Fanni zu der unbekannten Zahl schon fertiger Bälle während des Tobens der Schneeballschlacht noch 5 weitere fertigbekommt. Mit 14 Bällen wirft sie nach ihrem Vater, und zurück behält sie 7. Dann ist die Gesamtzahl der von Fanni geformten Bälle $14+7=21$. Davon waren $21-5=16$ schon vor Beginn der Schneeballschlacht fertig.
Ein anderer Gedankenweg: Fanni hat sich während des Werfens mit der Fabrikation 5 neuer Bälle beschäftigt, und am Ende blieben ihr neben diesen 5 neuen noch zwei weitere Schneebälle übrig. Da sie insgesamt 14 geworfen hat, hatte sie vor Beginn der Schneeballschlacht einen Vorrat von $14+2=16$ Bällen.

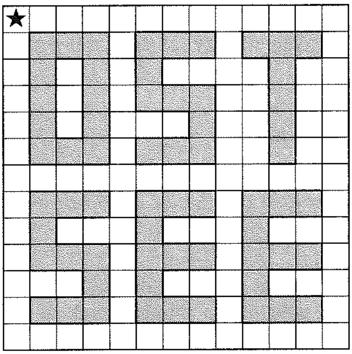
17. Jeder der 3 Buchstaben B, H und O ist in der nebenstehenden Additionsaufgabe durch genau eine der Ziffern $1, \ldots, 9$ zu ersetzen, so dass die Rechnung richtig ist. Dann ist O =

$$\begin{array}{rccc} & & O & H \\ + & & H & O \\ \hline & B & O & B \end{array}$$

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Für B kommt nur 1 in Frage, denn die Summe zweier zweistelliger Zahlen kann nie größer als 198 werden. Da die Summe von H und O eine Zahl mit der Einerziffer 1 ist und da 0 als Ziffer nicht zugelassen ist, ist also die Summe $H + O > 10$. Dann muss $O = B + 1$, also gleich 2 sein. Die fertige Additionsaufgabe ist dann übrigens $29 + 92 = 121$.

Ostsee-Rösselsprung



Beim Schach gibt es sechs verschiedene Figuren, die sich unterscheiden in der Art der Züge, die ihnen erlaubt sind. Der Springer bewegt sich am auffälligsten. Seine Züge setzen sich aus einer Vor- oder Rückwärts und einer Seitwärtsbewegung zusammen, die entweder nach links oder nach rechts erfolgt. Genauer gesagt: entweder wird zwei Felder vor- oder zurück- und anschließend eines nach links oder rechts gesprungen. Oder es wird ein Feld vor- oder zurück und anschließend zwei Felder nach links oder nach rechts gesprungen.

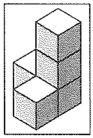
Ein Springer beginnt in der mit dem Sternchen markierten Ecke zu springen und betritt jedes Kästchen, das zum Wort OSTSEE gehört, genau einmal; die anderen Felder kann er für Zwischensprünge beliebig oft betreten. Wie viele Sprünge braucht er? Versucht, die Aufgabe mit höchstens 84 Zügen zu lösen.

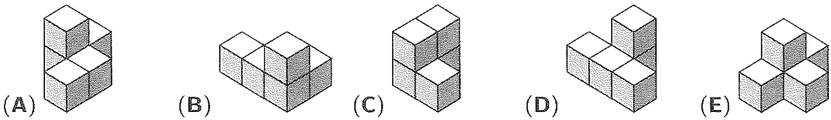
18. Onkel Willy bemerkt, dass er jeden Winter 5 kg zunimmt. Im Sommer schwimmt und radelt er stets und nimmt beglückt 4 kg wieder ab, im Frühling und Herbst verändert sich sein Gewicht nicht. Wenn Onkel Willy am 10. April 2008 77 kg wiegt, wie viel wog er dann im Herbst 2000?

(**A**) 65 kg (**B**) 66 kg (**C**) 73 kg (**D**) 77 kg (**E**) 88 kg

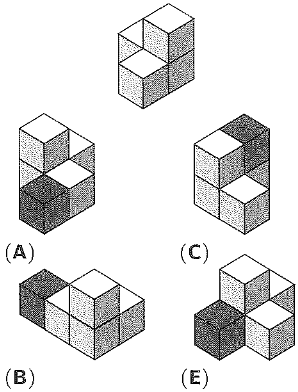
Lösung: Da Onkel Willy von den 5 kg, die er im Winter zunimmt, stets nur 4 kg im Sommer wieder verliert, hat er in jedem Herbst 1 kg Körpergewicht mehr als im Herbst des Vorjahres. Sein Gewicht erhöht sich also vom Herbst 2000 bis zum Herbst 2007 um 7 kg. Im Winter 2007/2008 nimmt Onkel Willy noch einmal 5 kg zu, hat also am 10. April, dem Kängurutag 2008 12 kg mehr als im Herbst 2000. Dann wog er damals also nur $77\text{ kg} - 12\text{ kg} = 65\text{ kg}$.

19. Welche der Figuren (A), ..., (E) lässt sich *nicht* durch Umsetzen genau eines Würfels aus der rechts abgebildeten Figur erhalten? Jede der Figuren besteht aus genau 5 Würfeln. Beachte, dass die Bauwerke aus unterschiedlichen Richtungen gezeichnet wurden.



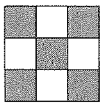


Lösung: Wie bei Aufgabe 17 in der Klassenstufe 3 und 4 stellen wir zuerst fest, dass wir in dem Ausgangsbauwerk, das auf der eingerahmten Zeichnung zu sehen ist, stets 4 Würfel auszeichnen können müssen, die in der gegebenen Stellung verbleiben und die sich in der entsprechenden Figur, in die umgebaut wird, wiederfinden. Diese Vierergruppe ist in der Zeichnung rechts oben dargestellt; sie ist für die Fälle (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) identisch. In den darunter gezeichneten Bauwerken ist der beim Ausgangsbauwerk „von oben" weggenommene Würfel dunkelgrau an der Stelle der entsprechenden Figur gezeichnet, an die er umgesetzt worden ist.



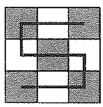
Für das Bauwerk (**D**) können wir keine Vierergruppe finden, die mit einer der möglichen Vierergruppen des Ausgangsbauwerkes identisch ist. Da es bei 5 Würfeln nur 5 Vierergruppen gibt, lässt sich dies gut nachweisen.

20. Eine Spielfigur soll so über das Spielbrett (s. Bild) bewegt werden, dass sie auf ihrem Weg jedes Feld genau einmal betritt. Sie darf sich – wie der Turm beim Schach – nur waagerecht und senkrecht bewegen. Wo *muss* sie starten?



(**A**) von irgendeinem Eckfeld
(**B**) jedes Feld ist möglich
(**C**) von irgendeinem grauen Feld
(**D**) nur vom grauen Mittelfeld
(**E**) von irgendeinem weißen Feld

Lösung: Auf dem (3×3)-Brett gibt es 5 graue, aber nur 4 weiße Felder. Bei jedem Schritt der Spielfigur wechselt die Farbe des Feldes, das sie betritt. Daher kann das Startfeld nicht weiß sein, denn nach viermaliger Abfolge von weiß–grau müsste ein weißes Feld betreten werden, es ist aber nur noch ein graues frei. Dagegen kann von jedem grauen Feld aus ein Weg gefunden werden, bei dem alle 9 Felder in 8 Schritten erreicht werden. Wir zeigen dies in der nebenstehenden Zeichnung, bei der im Mittelfeld begonnen und in einem Eckfeld geendet wird.

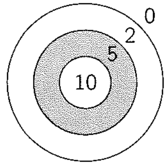


21. Wie viele 2-stellige Zahlen gibt es, bei denen die Zehnerziffer größer ist als die Einerziffer?

(**A**) 9 (**B**) 18 (**C**) 27 (**D**) 36 (**E**) 45

Lösung: Die Zehnerziffer kann 1, 2,. . . ,9 sein. Wenn sie größer sein soll als die Einerziffer, so gibt es für die Zehnerziffer 1 nur die mögliche Einerziffer 0. Für die Zehnerziffer 2 gibt es bereits zwei mögliche Einerziffern, 0 und 1 usw. Insgesamt trifft die geforderte Eigenschaft also für $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ zweistellige Zahlen zu. – Wer mochte, konnte auch alle 45 Zahlen aufschreiben und auszählen.

22. Auf das Dartbrett (s. Bild) wird mit Pfeilen geworfen. Je nach getroffenem Ring werden 10, 5, 2 oder 0 Punkte vergeben. Ich habe zwei Versuche und addiere meine Punkte. Wie viele verschiedene Gesamtpunktzahlen sind möglich?



(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Beim Werfen sind alle Kombinationen von geworfenen Punkten möglich, d. h. auf jede der vier Punktzahlen 10, 5, 2 und 0 kann jede dieser vier Punktzahlen folgen. Als Summen entstehen 20 als $10+10$, 15 als $10+5=5+10$, 12 als $10+2=2+10$, 10 als $10+0=0+10=5+5$, 7 als $5+2=2+5$, 5 als $5+0=0+5$, 4 als $2+2$, 2 als $2+0=0+2$ und 0 als $0+0=0$. Das sind 9 verschiedene Gesamtpunktzahlen.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{Z} \\ + & \mathrm{R} & \mathrm{H} & \mathrm{\ddot{O}} & \mathrm{N} \\ \hline \mathrm{H} & \mathrm{O} & \mathrm{E} & \mathrm{H} & \mathrm{E} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{E} & \mathrm{S} & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{N} \\ + & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{E} \\ \hline & \mathrm{S} & \mathrm{T} & \mathrm{A} & \mathrm{D} & \mathrm{T} \end{array}$$

Geographische Kryptographie

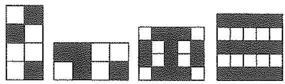
In den beiden Kryptogrammen mit geographischem Hintergrund stehen die Buchstaben für Ziffern. Gleiche Buchstaben stehen dabei für gleiche Ziffern, und verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen, so dass korrekte Additionen entstehen. Beide Aufgaben haben nicht nur eine Lösung. Mindestens zwei verschiedene Lösungen sollten jeweils gefunden werden.

23. Vor der Musikschule treffen sich ein Geiger, ein Flötist und ein Trompeter. Einer heißt Ulrich, einer Ivo und einer Alex. Der Geiger hat weder Bruder noch Schwester, er ist auch der Jüngste. Alex ist älter als der Flötist und spielt mit Ulrichs Schwester im Orchester. Dann heißen – in dieser Reihenfolge – Geiger, Flötist und Trompeter

(**A**) Alex, Ulrich, Ivo (**B**) Ulrich, Ivo, Alex (**C**) Ivo, Alex, Ulrich
(**D**) Ivo, Ulrich, Alex (**E**) Alex, Ivo, Ulrich

Lösung: Da der Geiger am jüngsten ist, kann Alex nicht der Geiger sein, außerdem kann der Geiger nicht Ulrich sein, denn Ulrich hat eine Schwester. Demzufolge heißt der Geiger Ivo. Da Alex weder Geiger noch Flötist ist, spielt Alex Trompete – und Ulrich bläst die Flöte. Die Reihenfolge ist Ivo, der Geiger – Ulrich, der Flötist – Alex, der Trompeter.

24. In der Piratenschule übt sich jeder künftige Pirat im Nähen schwarz-weißer Fahnen. Im ersten Test ist eine Fahne zu nähen, bei der drei Fünftel der Fläche schwarz sein müssen. Wie viele der abgebildeten Fahnen sind gelungen?



(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle vier

Lösung: In der ersten Fahne sind 3 von 8 Feldern schwarz, das sind zu wenige. In der zweiten Fahne sind 4 von 8 Feldern schwarz, auch das sind noch zu wenige. Erst bei den beiden rechts gezeichneten Fahnen sind tatsächlich drei Fünftel der Fläche schwarz gewählt, denn von je 5 Kästchen sind 3 schwarz.

25. Die Buchstaben a, b, c, d und e stehen für 5 verschiedene *Ziffern*. Wenn nun $a+a+a=c$ und $b+b+b=d$ und $c+d=e$ gilt, dann ist $e=$

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

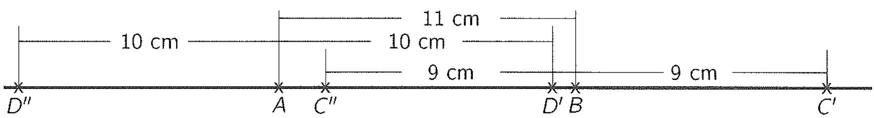
Lösung: Zuerst bemerken wir, dass keine der Ziffern unter den gegebenen Bedingungen 0 sein kann, denn wäre etwa a oder b 0, so auch c bzw. d, was der geforderten Verschiedenheit der fünf Ziffern widerspricht.

Die Bedingungen besagen weiterhin, dass die beiden Ziffern c und d jeweils durch 3 teilbar sind. Dies muss demzufolge auch für die Summe dieser beiden, e, zutreffen. Als Summe zweier *verschiedener* durch 3 teilbarer Ziffern kann e nur 9 sein.

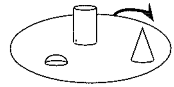
26. Von den 4 Punkten A, B, C und D, die auf derselben Geraden liegen, weiß ich, dass $\overline{AB}=11$ cm, $\overline{BC}=9$ cm, $\overline{CD}=12$ cm und $\overline{DA}=10$ cm ist. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden am weitesten voneinander entfernten Punkten?

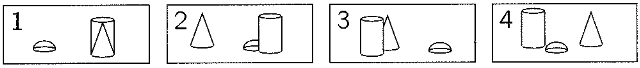
(**A**) 14 cm (**B**) 21 cm (**C**) 23 cm (**D**) 30 cm (**E**) 33 cm

Lösung: Wir denken uns die Punkte A und B im Abstand von 11 cm auf eine Gerade gezeichnet. Der Punkt C ist 9 cm von B entfernt, aber wir wissen noch nicht, ob er sich links oder rechts von B auf der Geraden befindet und zeichnen erst einmal beide Möglichkeiten – als C' und C'' bezeichnet – ein. Punkt D ist 10 cm von A entfernt, und auch hier wissen wir nicht, wo in Bezug auf A sich D auf der Geraden befindet und zeichnen beide Möglichkeiten, als D' bzw. D'' bezeichnet, ein. Jetzt können wir feststellen, dass der Abstand $\overline{CD}$, der ja 12 cm betragen soll, nur von C'' zu D'' eingenommen wird. Die anderen Möglichkeiten sind $\overline{C''D'}=8$ cm, $\overline{C'D'}=10$ cm und $\overline{C'D''}=30$ cm. Es ist also $C\equiv C''$ und $D\equiv D''$. Die am weitesten voneinander entfernten Punkte sind B und D, ihr Abstand beträgt 21 cm.



27. Johann umrundet einen Tisch einmal und macht dabei 4 Fotos. Er bewegt sich vom markierten Punkt in Pfeilrichtung. In welcher Reihenfolge sind die Fotos entstanden?





(**A**) 2 1 4 3 (**B**) 4 2 1 3 (**C**) 2 4 3 1 (**D**) 2 1 3 4 (**E**) 3 2 1 4

Lösung: Am Startpunkt befindet sich der Kegel linkerhand; das ist auf genau einem der Fotos der Fall, dem Bild 2. Bevor Johann – auf der anderen Seite des Tisches – den Kegel rechts vom Zylinder sieht, gibt es einen Moment, in dem der Kegel vor dem Zylinder steht, und der ist auf dem Foto 1 festgehalten. Es folgt nun das Foto 4, auf dem der Kegel rechts vom Zylinder steht – das ist der Anblick nach etwa einer Dreiviertelumrundung des Tisches. Und anschließend verdeckt dann der Zylinder den Kegel, wie es auf Foto 3 zu sehen ist. – Die Reihenfolge, in der Johann die Fotos gemacht hat, ist: 2 1 4 3.

B	O	D	E
O			
D			
E			

	I		
I	L	S	E
	S		
	E		

		H	
		A	
H	A	M	M
		M	

Kreuz und Quer

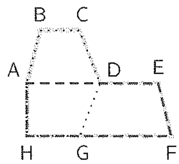
In die vier Quadrate sind die folgenden Worte so einzutragen, dass jedes Wort in dem Quadrat, in dem es erscheint, einmal senkrecht und einmal waagerecht zu lesen ist: die Flussnamen BODE, ILSE, ISAR und MAIN, die Städtenamen HAMM, KEHL, KIEL und LEER und weiterhin ALSO, DEIN, ERNA, ESAU, ESSE, LUMP und NORM. Um den Start zu erleichtern, sind drei der Begriffe schon eingetragen.

28. In der Gleichung LUC + DU = ASS steht jeder Buchstabe für eine Ziffer (verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern, gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern). Welchen Wert hat AC – LD?

(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: Wir sehen, dass die Addition der zweistelligen Zahl DU zu einer Änderung der Hunderterstelle führt. Folglich ist A um 1 größer als L. Weiterhin erkennen wir, dass bei der Addition von C und U die Einerziffer dieselbe ist wie bei der Addition von D und U, nämlich beide Male S. Das ist aber nur möglich, wenn die Summe $C + U$ größer als 10 ist, und folglich D um 1 kleiner ist als C. Damit wissen wir jetzt, dass $A = L + 1$ und $C = D + 1$ ist, woraus $AC–LD = 11$ folgt.
Ungewohnt war für viele hier sicher, dass keine Lösung der Ausgangsaufgabe gefunden werden sollte. Wer auf die Idee kam, eine – von vielen – Lösungen zu suchen und von dort die Differenz AC – LD zu bilden, konnte auch auf diese Weise schnell das Kreuz an die richtige Stelle bekommen.

29. Im Busfahrplan sind die Linien 1, 2 und 3 eingezeichnet. Linie 1 fährt alle Haltestellen ab, also ABCDEFGHA, und ist 20 km lang. Linie 2 fährt ABCDGHA mit 12 km, während Linie 3, DEFGHAD, 17 km lang ist. Die viel benutzte Innenroute ADGHA soll die Linie 4 werden. Wie lang ist diese?

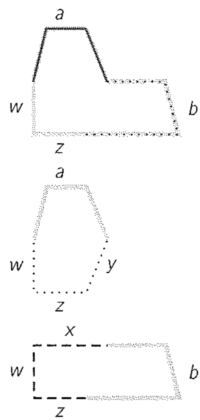


(**A**) 5 km (**B**) 7,5 km (**C**) 8 km (**D**) 9 km (**E**) 9,5 km

Lösung: Mit einem aufmerksamen, geübten Blick auf die Busfahrstrecken ließ sich erkennen, dass es von der Strecke her egal ist, ob ich Linie 2 und Linie 3 (hintereinander) fahre, also 12 km + 17 km = 29 km oder Linie 1 und die neue Linie 4 wähle. Folglich muss Linie 4 dann 29 km − 20 km = 9 km lang sein.

Es folgt eine ausführlichere Darstellung des Lösungsweges: Um uns nicht mit all den vielen Buchstaben, mit denen die Bushaltestellen bezeichnet wurden, herumzuplagen, bezeichnen wir den Teil der Strecke, der von A über B und C nach D geht, mit a, den Teil der Strecke, der von D über E und F nach G führt, mit b. Für die Teile der neuen 4. Buslinie setzen wir AD $= x$, DG $= y$, GH $= z$ und HA $= w$. Dann ist Linie 1: $a + b + z + w$, Linie 2: $a + y + z + w$, Linie 3: $b + z + w + x$ und die neue Linie 4: $x + y + z + w$. Wenn wir die Längen der Linien 2 und 3 addieren und davon die Länge der Linie 1 abziehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} &a + y + z + w + b + z + w + x - a - b - z - w \\ &\quad = x + y + z + w \\ &\quad = 12 + 17 - 20 = 9. \end{aligned}$$



Linie 4 ist 9 km lang.

Domino-Parkett

2	1	0	3	0	4	5	5
6	2	0	6	3	1	4	0
3	2	3	6	2	5	4	3
5	4	5	1	1	2	1	2
0	0	1	5	0	5	4	4
4	6	2	1	3	6	6	1
4	2	0	6	5	3	3	6

Ein Dominostein besteht immer aus zwei Hälften, auf denen jeweils eine der Zahlen von 0 bis 6 steht. Jeden Dominostein gibt es genau einmal: 0-0, 0-1, usw. bis 6-6; wobei (beispielsweise) 1-2 mit 2-1 identisch ist. Es gibt also insgesamt 28 verschiedene Domino-Steine.
Im gegebenen Diagramm sind alle 28 Domino-steine in einem 7×8-Rechteck zusammengelegt; jedes Kästchen präsentiert einen halben Domino-stein. Es ist aber nicht bekannt ist, welcher Stein wie genau liegt.

Die Aufgabe besteht nun darin, *die* Konfiguration von Domino-Steinen herauszufinden, die das gegebene Muster ergibt. Die Lösung ist eindeutig.

30. Für ein Spiel hat mein Freund in einem Korb 7 Beutel bereitgelegt, in denen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bzw. 7 Murmeln sind. Ich nehme irgendwelche 2 Beutel heraus, Lisa irgendwelche 3 Beutel. Lisa zählt die Murmeln in ihren 3 Beuteln und sagt mir, dass sie wisse, dass ich eine gerade Anzahl von Murmeln hätte. Wie viele Murmeln hat Lisa?

(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Bei dieser Aufgabe ist logisches Denken gefragt. Und zwar muss die Frage beantwortet werden, unter welchen Bedingungen Lisa mit Gewissheit sagen kann, dass die Summe der Murmeln aus den zwei Säckchen, die ich zufällig genommen habe, gerade ist. Sie kann es dann sagen, wenn ich ausschließlich Säckchen mit ungeradzahlig vielen Murmeln genommen haben kann, denn die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl, oder wenn die beiden Anzahlen in meinen beiden Säckchen gerade sein müssen. Da Lisa drei Säckchen weggenommen hat, so kann sie genau dann die Geradzahligkeit der Murmeln in meinen beiden Säckchen voraussagen, wenn sie alle drei Säckchen mit einer geraden Zahl von Murmeln erwischt hat. Und ich kann daraus, dass Lisa sicher ist, folgern, dass sie genau $2+4+6=12$ Murmeln in den drei Säckchen hat.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 5 und 6 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	E	E	D	A	B	A	D	B	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	E	D	A	A	C	B	A	D	C
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	B	D	C	E	B	A	B	D	A

Klassenstufen 7 und 8

1. 6 Kängurus verspeisen 6 Sack Gras in 6 Minuten. Wie viele Kängurus verspeisen 100 Sack Gras in 100 Minuten, wenn alle beteiligten Kängurus stets gleichhungrig sind?

(**A**) 99 (**B**) 60 (**C**) 6 (**D**) 10 (**E**) 600

Lösung: Wir setzen bei dieser nicht ganz ernsten Aufgabe voraus, dass sich die Kängurus im Appetit völlig gleich verhalten. Wenn 6 Kängurus 6 Sack Gras in 6 Minuten verspeisen, so schaffen diese 6 Kängurus pro Minute also einen Sack Gras. Für 100 Sack Gras sind folglich 100 Minuten vonnöten – die 6 gleichhungrigen Kängurus schaffen es ganz allein.

2. $200 \cdot 8 + 200 : 8 =$

(**A**) 1625 (**B**) 1650 (**C**) 1825 (**D**) 2008 (**E**) 2025

Lösung: Es ist $200 \cdot 8 = 1600$ und $200 : 8 = 25$, woraus für die Summe $1600 + 25 = 1625$ folgt.

3. In die nebenstehende (2×2)-Tabelle sind die Zahlen 5, 7, 13 und eine vierte so einzutragen, dass die Summe der beiden Zahlen in der ersten Zeile 20 und die in der zweiten Zeile 14 beträgt. Welches ist die vierte Zahl?

		20
		14

(**A**) 15 (**B**) 7 (**C**) 5 (**D**) 9 (**E**) 8

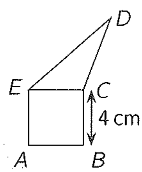
Lösung: Da die Summe der vier Zahlen $20 + 14 = 34$ ist, kann die gesuchte Zahl nur $34 - (5 + 7 + 13) = 9$ sein. Und mit 9 klappt es auch, denn $7 + 13 = 20$ und $5 + 9 = 14$.

4. Welche der Differenzen zweier Brüche ist am kleinsten?

(**A**) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6} - \frac{1}{7}$

Lösung: In jeder der 5 Differenzen ist der Zähler 1 und der Nenner das Produkt der Nenner der beiden Zahlen, deren Differenz gebildet wird. Folglich ist *die* Differenz am kleinsten, bei der das „Nennerprodukt" am größten ist; das ist $6 \cdot 7$.

5. Dreieck ECD und Quadrat $ABCE$ auf der nebenstehenden Zeichnung haben denselben Umfang. Welchen Umfang hat das Fünfeck $ABCDE$?



(**A**) 12 cm (**B**) 20 cm (**C**) 24 cm
(**D**) 32 cm (**E**) unbestimmt, hängt vom Dreieck ab

Lösung: Da der Umfang von $ABCE$ gleich dem von ECD ist, und da die 4 cm lange Seite $\overline{EC}$ zu beiden Figuren gehört, ist der Umfang von $ABCDE$ gleich $2 \cdot (3 \cdot 4 \text{ cm}) = 24$ cm.

6. Zum Osterfest hatte der Großvater drei Sorten Ostereier gekauft, die unterschiedlich eingewickelt sind, 24 in karierte, 42 in gestreifte und 36 in rotgetupfte Folie. Die Anzahlen hat er gut gewählt, denn wenn er mit all diesen Eiern die größtmögliche Zahl gleicher Osternester bastelt, dann kann er jedem Enkel das gleiche Nest verstecken. Wie viele Enkel hat er?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

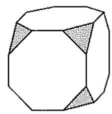
Lösung: Damit der Großvater in jedes Nest dieselbe Anzahl von Eiern der jeweiligen Sorte legen kann, muss die Anzahl der Nester als gemeinsamer Faktor in allen drei Eieranzahlen stecken. Und damit er die größtmögliche Anzahl von Nestern bekommt, muss dieser Faktor der größte gemeinsame Teiler sein. Dieser größte gemeinsame Teiler ist wegen $24 = 2^3 \cdot 3$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ und $36 = 2^2 \cdot 3^2$ hier $2 \cdot 3 = 6$, und das ist auch die Anzahl der Enkel.

7. Gabriel schreibt seinem Vater aus den Ferien in einer SMS: „Bei uns sind 37° C im Schatten", und der Vater schreibt zurück: „Würdest du uns 10° C abgeben können, hätten wir beide dieselbe Temperatur." Wie warm ist es bei Gabriels Vater?

(**A**) 10° C (**B**) 17° C (**C**) 22° C (**D**) 27° C (**E**) 32° C

Lösung: Um diese Aufgabe zu lösen, muss nicht einmal eine Gleichung aufgeschrieben werden. Wir können so überlegen: Bei Gabriel sind zur Zeit 37° C. Nach der „Abgabe" von 10° C wäre seine Temperatur 27°. Und diese Temperatur müsste um 10° C höher sein, als sie zur Zeit bei Gabriels Vater ist. Dort herrschen demnach 17° C.

8. Bei einem Würfel sind durch ebene Schnitte alle Ecken abgeschnitten worden (s. Bild). Wie viele Ecken hat der Restkörper?



(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 30

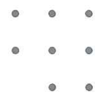
Lösung: Der Würfel selbst hat 8 Ecken. Werden diese Ecken abgeschnitten, so entstehen an jeder dieser 8 Ecken jeweils 3 Ecken anstelle der einen, also sind es $8 \cdot 3 = 24$ Ecken.

9. Die kleine Koboldin Kiki spricht donnerstags und freitags stets die Wahrheit, am Dienstag stets die Unwahrheit. An den anderen Tagen der Woche spricht sie, wie es ihr gerade einfällt, mal die Wahrheit und mal lügt sie wie gedruckt. An 6 aufeinanderfolgenden Tagen nach ihrem Namen gefragt, nennt sie Kiki, Coco, Kiki, Coco, Lucy, Coco – in dieser Reihenfolge. Welchen Namen würde sie am 7. Tag nennen?

(**A**) Kiki (**B**) Coco (**C**) Lucy
(**D**) keinen der 3 bisherigen (**E**) irgendeinen der 3 bisherigen

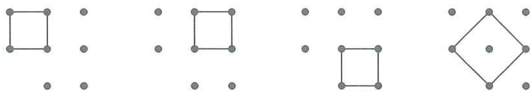
Lösung: Nach Voraussetzung muss Kiki an zwei *aufeinanderfolgenden* Tagen (Donnerstag und Freitag) „Kiki" sagen. Da dies noch nicht geschehen ist, muss sie es am 7. Tag tun.
Etwas ausführlicher dargestellt: In der Folge von 7 Tagen muss es irgendwo auch den Donnerstag und den Freitag geben. An diesen – aufeinanderfolgenden – Tagen nennt Kiki ganz bestimmt ihren richtigen Namen. Da es in der Folge der 6 Namen nicht zweimal nacheinander Kiki gibt, muss die Folge der 6 Nennungen an einem Freitag begonnen haben – mit Kiki – und am 7. Tag, dem Donnerstag, muss die Koboldin erneut ihren richtigen Namen nennen.

10. Wie viele Quadrate können gezeichnet werden, wenn die 4 Eckpunkte zu den 8 Punkten der nebenstehenden Abbildung gehören müssen?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

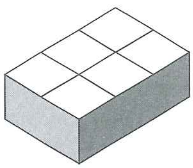
Lösung: In der Zeichnung ist die Lage der vier möglichen Quadrate zu sehen.



11. Auf ~~dem~~ einem Tisch liegen 9 rote und 13 grüne Filzstifte. Jeder zweite Stift ist mit einem ~~Känguru~~Bild verziert. Welches ist die kleinstmögliche Zahl grüner Stifte mit ~~Känguru~~Bild?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Insgesamt liegen $9+13=22$ Stifte auf dem Tisch, davon sind 11 verziert. Gesetzt den Fall, dass alle 9 roten Stifte die Verzierung tragen, dann sind 2 grüne Stifte ebenfalls damit versehen, und weniger können es auch nicht sein.



Ordnung im Schubfach

Manchmal habe ich meine liebe Mühe, Ordnung zu halten. Ich habe mir also für das Schubfach, in dem meine Schulsachen liegen, eine Unterteilung in sechs kleinere Abteilungen – für 1. Taschenrechner, 2. Knete, 3. Radiergummi und Spitzer, 4. Zeichendreieck und Zirkel, 5. Buntstift und 6. Tintenpatronen – gebaut.

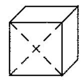
Einmal – im Traum – werde ich gefragt, was wo liege und ich erinnere mich: der Taschenrechner liegt im Fach direkt links neben dem Fach mit der Knete für den Geometrieunterricht. Die Buntstifte habe ich im Fach rechts gleich neben dem, in dem Radiergummis und Spitzer sind. Das Taschenrechner-Fach ist weiter hinten als das mit den Radiergummis und Spitzern, das Fach mit der Knete weiter vorn als das Fach mit Zeichendreieck und Zirkel. Und dieses Fach ist nicht auf derselben Seite wie das Taschenrechner-Fach. Lässt sich daraus ermitteln, was in welchem Fach liegt?

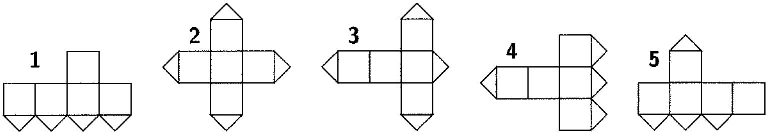
12. Piet und Hagen zählen das Restgeld vom Einkauf. Piet hat neun 2-Cent-Münzen, Hagen acht 5-Cent-Münzen. Wie viele Münzen müssen insgesamt mindestens den Besitzer wechseln, wenn Piet und Hagen das Geld zu gleichen Teilen behalten dürfen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) nicht möglich

Lösung: Piet und Hagen haben zusammen $9\cdot 2+8\cdot 5=58$ Cent. Nach dem Münzentausch müssen sie jeder $58:2=29$ Cent haben. Da Piet nur 18 Cent hat, muss er 11 Cent dazubekommen; da aber 11 nicht durch 5 teilbar ist, geht es nur (mit möglichst geringem Münzentausch), indem er drei 5-Cent-Münzen bekommt und zwei 2-Cent-Münzen weggibt. Damit haben insgesamt $3+2=5$ Münzen den Besitzer gewechselt.

13. Eine der Würfelseiten ist entlang der Diagonalen zerschnitten worden. Welche der folgenden Würfelnetze passen *nicht* zu diesem Würfel?





(**A**) **1** und **3** (**B**) **1** und **5** (**C**) **3** und **4** (**D**) **3** und **5** (**E**) **2** und **4**

Lösung: Netz 3 ist kein Würfelnetz, denn die Würfelseitenviertel können keine gemeinsame Fläche bilden. Ebenso ist Netz 5 kein Würfelnetz, denn das nach oben zeigende Würfelseitenviertel bildet mit den anderen drei Vierteln keine Seite, vielmehr würde es beim Falten auf die ganz rechts gezeichnete Würfelseite zu liegen kommen.

14. Ich denke mir alle 3-stelligen Zahlen aufgeschrieben. Bei wie vielen ist das Produkt der 3 Ziffern gleich 6?

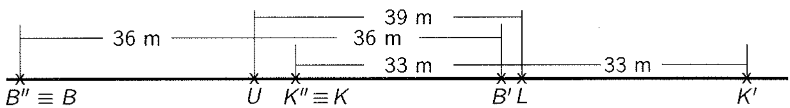
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Es sei $\overline{abc}$ die dreistellige Zahl. Dann soll also $a \cdot b \cdot c = 6$ sein. Da $6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ ist und andere Zerlegungen in drei Faktoren nicht existieren, gibt es also mit 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312 und 321 genau 9 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

15. An unserer schnurgeraden Dorfallee stehen eine Ulme, eine Linde, eine Kastanie und eine Birke, alle auf derselben Straßenseite. Der Abstand von Ulme zu Linde ist 39 m, von Linde zu Kastanie 33 m, von Kastanie zu Birke 42 m und von Birke zu Ulme 36 m. Wie groß ist der Abstand zwischen den am weitesten voneinander entfernten Bäumen?

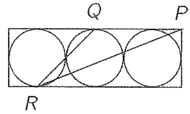
(**A**) 72 m (**B**) 75 m (**C**) 78 m (**D**) 81 m (**E**) 108 m

Lösung: Wir kürzen die Namen der Bäume mit ihren Anfangsbuchstaben ab und versuchen, sie in einer Skizze an der Allee zu platzieren. Ulme und Linde können wir erst einmal beliebig markieren. Für die Kastanie kommen in Bezug auf die Linde zwei Möglichkeiten in Betracht – eine mit K', die andere mit K'' markiert. Ebenso kommen für die Birke, die ja 36 m von der Ulme entfernt steht, zwei mögliche Standorte in Betracht.



Von der Kastanie zur Birke sind es 42 m. Diese Entfernung haben nur die möglichen Standorte K'' und B'' voneinander, denn die Entfernung zwischen K'' und B' ist kleiner als 39 m, die zwischen B' und K' $33\text{ m} + 3\text{ m} = 36\text{ m}$ und die zwischen K' und B'' ist größer als 100 m. Damit ist die größte Entfernung, die zwischen den Bäumen gemessen werden kann, die von der Birke (am Standplatz B'') zur Linde. Sie beträgt 75 m.

16. Drei gleich große Kreise sind von einem Rechteck von 36 cm Länge und 12 cm Breite umschlossen. Q und R sind Berührungspunkte, P ist ein Eckpunkt (s. Zeichnung). Welchen Flächeninhalt hat $\triangle PQR$?



(**A**) 27 cm^2 (**B**) 45 cm^2 (**C**) 54 cm^2 (**D**) 108 cm^2 (**E**) 180 cm^2

Lösung: Bei dieser Aufgabe darf man sich nicht von den Kreisen beeindrucken lassen. Wir brauchen von ihnen nur zu wissen, dass das Rechteck 6 Radiuslängen lang und 2 Radiuslängen breit ist, dass der Berührungspunkt R sich eine Radiuslänge von der linken Rechtecksseite und Q sich drei Radiuslängen von der linken (wie rechten) Rechtecksseite entfernt befindet. Die Grundlinie des Dreiecks PQR ist $\overline{PQ}$ und drei Radiuslängen bzw. halb so lang wie das Rechteck. Die Höhe des Dreiecks ist gleich der Rechtecksbreite. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12\ \text{cm}^2 = 108\ \text{cm}^2$.

17. Die vom Sportfest übrig gebliebenen Äpfel dürfen die Helfer unter sich aufteilen, und die Zahl geht auch ohne Rest auf. „Wären wir zwei Helfer weniger gewesen, hätte jeder einen Apfel mehr bekommen können“, stellt Jana fest. „Stimmt“, meint Uli, „und bei drei Helfern weniger, hätte es sogar exakt für zwei Äpfel mehr gereicht.“ Wie viele Helfer waren es?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 16

Lösung: Wir stellen zum Lösen der Aufgabe den Sachverhalt in drei Gleichungen dar. Mit h bezeichnen wir die Zahl der Helfer beim Sportfest und mit a die Zahl der Äpfel, die jeder tatsächlich bekommen hat. A sei die Gesamtzahl der Äpfel. Dann gilt $h \cdot a = A$, $(h-2) \cdot (a+1) = A$ und schließlich $(h-3) \cdot (a+2) = A$. Hieraus finden wir durch Gleichsetzen von 1. und 2. Gleichung aus $h \cdot a = (h-2) \cdot (a+1)$, dass $h = 2a + 2$ ist. Gleichsetzen von 1. und 3. Gleichung ergibt nun $(2a+2) \cdot a = (2a+2-3) \cdot (a+2)$ bzw. $2a^2 + 2a = 2a^2 - a + 4a - 2$ oder $a = 2$, woraus $h = 6$ folgt.

Diese Aufgabe lässt sich sehr gut auch durch Probieren lösen. Dabei fängt man sinnvollerweise mit der kleinsten Zahl 6 an (und ist dann gleich fertig, weil ja von den 5 Antwortmöglichkeiten stets nur eine richtig ist): Also angenommen, es handelt sich um 6 Helfer und jeder bekommt einen Apfel. Dann müssten diese 6 Äpfel auf 4 (zwei weniger) aufgeteilt werden können, was nicht geht. Also: nächster Versuch; jeder bekommt 2 Äpfel. Nun könnten die 12 Äpfel auf 4 Helfer aufgeteilt werden – und richtig bekäme jeder statt 2 nun 3 Äpfel. Und schließlich trifft auch zu, dass es bei 3 Helfern weniger – dann sind es nur 3 Helfer – für jeden 4 Äpfel, also 2 mehr als bei 6 Helfern, gibt.

18. Für ein Spiel liegen 7 Beutel bereit, in denen sich 1, 2, 3, 4, 5, 6 bzw. 7 Murmeln befinden. Theo fischt sich 3 Beutelchen heraus, öffnet sie und zählt die Murmeln. „He, ich weiß, dass die Summe deiner Murmeln eine gerade Zahl ist“, sagt er zu Uta, die sich zwei der Beutel genommen hat. „Na, dann weiß ich sogar, wie viele Murmeln du insgesamt hast“, erwidert Uta. Es sind

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Die Lösung ist inhaltlich identisch mit der von Aufgabe 30 in Klassenstufe 5/6.

19. Zwei Busse verkehren auf einem Rundkurs im Abstand von 25 Minuten. Wie viele Busse müssen unterwegs sein, wenn der Abstand um 60 % verringert werden soll?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Eine Verringerung des Abstandes der Busse um 60 % bedeutet, dass sich der Abstand *auf* 40 % verringert. 40 % von 25 Minuten sind $\frac{40}{100} \cdot 25 = 10$ Minuten. Somit sind für die gesamte Strecke, bei der das Durchfahren $2 \cdot 25$ min $= 50$ min dauert, $50 : 10 = 5$ Busse erforderlich.

		B	U	C	H					B	E	R	N		
		O	M	E	N					W	E	I	L		
		H	A	A	C					I	R	M	A		
		B	E	R	N					W	A	M	S		
		M	E	E	R					D	U	R	I		
		G	A	M	B					A	S	S	E		
		L	E	C	K					R	U	L	P		
K	A	S	S	E	B	L	Ü	T	E	F	R	A	U	E	N

Städte gesucht

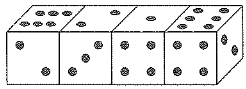
Die Figur ist so in zwölf zueinander kongruente Flächenteile zu zerlegen, dass sich aus den jeweils in einem solchen Flächenteil befindlichen Buchstaben nach geeignetem Sortieren der Name einer Stadt in Deutschland ergibt.
Welche zwölf Städte sind das?

20. Stell dir vor, du hättest einen $(9 \times 9 \times 9)$-Würfel aus 9^3 gleich großen kleinen Würfeln gebaut. Weil er so gut gelungen ist, fotografierst du den großen Würfel und fragst dich, wie viele der kleinen Würfel auf dem Foto höchstens zu sehen sind. Es sind

(**A**) 261 (**B**) 243 (**C**) 225 (**D**) 217 (**E**) 192

Lösung: Von einem Würfel können im günstigsten Fall drei Seitenflächen gesehen werden. Die Anzahl der kleinen Würfel auf diesen drei Seiten kann „ausgezählt" werden. Dies ist z. B. folgendermaßen möglich: Jede der drei Seiten besteht aus $9 \cdot 9 = 81$ kleinen Würfeln, das sind insgesamt 243. Davon sind jene abzuziehen, die sich auf gemeinsamen Kanten befinden, da wir sie doppelt berücksichtigt haben, also $243 - 3 \cdot 9 = 216$. Allerdings ist der Würfel, der den gemeinsamen Eckpunkt der drei Seiten bildet, nun zwar dreimal gezählt, aber auch dreimal wieder abgezogen worden. Er muss einmal wieder hinzugefügt werden, die gesuchte Anzahl ist 217.
Ein eleganterer Lösungsweg, der sich dann auch gut verallgemeinern lässt, ist der folgende: Im günstigsten Fall können wir drei – nie mehr – Seitenflächen eines Würfels sehen. Nehmen wir nun alle Würfelchen dieser drei Seitenflächen (Schichten) weg, so bleibt ein kleinerer Würfel zurück, nämlich ein $(8 \times 8 \times 8)$-Würfel. Für die Anzahl Würfelchen der drei Seitenflächen erhalten wir folglich das Ergebnis: $9^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$.
Dieser Lösungsansatz lässt sich sehr gut verallgemeinern: Wäre der große Würfel aus k kleinen aufgebaut gewesen, so hätten wir zur Berechnung der Anzahl x der sichtbaren Würfelchen wie folgt rechnen müssen: $x = k^3 - (k-1)^3$
Durch Anwendung der binomischen Formel (die allerdings noch nicht bei allen Teilnehmern im Schulstoff da ist) auf den zweiten Term erhalten wir $k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 3k^2 - 3k + 1$. Für $k = 3$ erhalten wir daraus erwartungsgemäß das Resultat 217.

21. Die vier untereinander identischen Würfel sind Spielwürfel, d. h., die Summe der Punkte auf einander gegenüberliegenden Seiten ist 7. Dann ist die Summe der Punkte auf den 6 einander berührenden Seiten gleich



(**A**) 19 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 25

Lösung: Der rechts außen sichtbaren 2 liegt wegen $7 - 2 = 5$ die 5 gegenüber. Die je zwei Berührungsseiten der mittleren Würfel tragen jeweils 7 zur Summe bei, ganz egal, welche Zahlen sich dort gegenüberliegen. Beim letzten Würfel müssen wir noch einmal nachdenken. Da 2 und 6 zu sehen sind, kommen für die Berührungsseite 5 und 1 nicht in Frage, es muss 3 oder 4 sein. Nun können wir erkennen, dass der linke Würfel (der nach Voraussetzung identisch zum rechts liegenden ist) der auf seiner Grundfläche um 90° gedrehte rechts liegende Würfel ist. Also weist die 4 nach außen, und die 3 ist die gesuchte letzte Punktzahl. Die Summe ist $5 + 7 + 7 + 3 = 22$.

7	+		=	
				:
	:		=	
				=
	−		=	

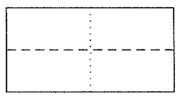
Zahlenknobelei

In das nebenstehende Stück aus einem Kästchenpapier sind die Ziffern von 1 bis 9 so unterzubringen, dass alle Rechnungen korrekt sind.

22. Heinz aus Heindorf und Kurt aus Kurtshagen haben das Grundstück ihrer Großtante geerbt. Per Email einigen sie sich, das rechteckige Grundstück in zwei rechteckige Hälften zu teilen. Heinz will den Zaun um das Gesamtgrundstück bezahlen, Kurt die Hecke, die die Teile trennen soll. Als sie auf die Länge der Hecke zu sprechen kommen, nennt Heinz 200 m, Kurt jedoch nur 165 m. Wie lang muss der Zaun werden?

(**A**) 365 m (**B**) 565 m (**C**) 330 m (**D**) 730 m (**E**) 665 m

Lösung: Da Heinz und Ernst das ursprüngliche rechteckige Grundstück beide halbiert haben, dabei für die Halbierungslinie des Grundstücks jedoch unterschiedliche Längen erhalten haben, müssen sie die Halbierung unterschiedlich geplant haben, so wie es die Zeichnung zeigt.



Um die Länge des Zaunes, sprich den Umfang des Gesamtgrundstücks, auszurechnen, sind die beiden Längen der Halbierungslinien, die ja gleich den Längen der Rechtecksseiten sind, zu addieren und mit 2 zu multiplizieren. Das Ergebnis ist $2 \cdot (200\text{ m} + 165\text{ m}) = 730\text{ m}$.

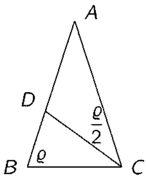
23. Es sei n eine durch 2, 5 und 15 teilbare Zahl. Welche der in (**A**) bis (**E**) aufgeführten Zahlen ist dann auch durch 2, 5 und 15 teilbar?

(**A**) $n+2$ (**B**) $n+10$ (**C**) $n+15$ (**D**) $n+20$ (**E**) $n+30$

Lösung: Wenn n durch 2, 5 und 15 teilbar ist, so ist n auch durch das kleinste gemeinsame Vielfache 30 teilbar. Weiter gilt: Wenn von zwei Summanden einer durch eine gewisse Zahl (hier 30) teilbar ist, ist es die Summe nur dann, wenn auch der andere Summand durch diese Zahl teilbar ist. Wenn also neben n auch $n+x$ durch 30 teilbar sein soll, muss x durch 30 teilbar sein. Damit ist $n+30$ die Lösung.

24. Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, in dem die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ des Winkels bei C ebenso lang ist wie die Basis $\overline{BC}$ des Dreiecks. Dann ist $\measuredangle CDA =$

(**A**) 108° (**B**) 110° (**C**) 115° (**D**) 120° (**E**) nicht eindeutig bestimmt



Lösung: Wir bemerken, dass im Text durch die Bezeichnung von BC als Basis festgelegt ist, welche Seiten ($\overline{AB}$ und $\overline{AC}$) gleich lang sind. Damit sind die Winkel bei B und C gleich, wir bezeichnen sie mit ϱ. Wegen $\overline{CD} = \overline{BC}$ ist auch $\measuredangle BDC = \varrho$. Da $\measuredangle DCB = \frac{1}{2}\varrho$, gilt im $\triangle BCD$ $2\varrho + \frac{1}{2}\varrho = 180°$ bzw. $\varrho = 72°$, woraus $\measuredangle CDA = 180° - 72° = 108°$ folgt.

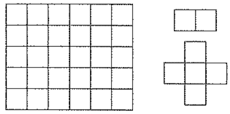
Eine Zahl aus Fünfen

Unter Verwendung von drei Fünfen und geeigneten Rechenzeichen ist ein Term gesucht, der den Wert 1 hat. Ein Beispiel ist $\left(\frac{5}{5}\right)^5$. Wer findet weitere Beispiele? Lässt sich auch die Fünf mit drei Fünfen schreiben?

25. Ich lese, dass in einer Versuchsserie zwar mehr als 45,0 % jedoch weniger als 50,0 % der Versuche gelungen sind. Wie viele *gelungene* Versuche muss die Reihe mindestens enthalten, damit die Prozentangaben sinnvoll sind?

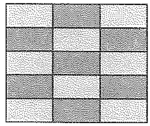
(**A**) 5 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 15

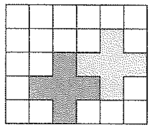
Lösung: Damit die Prozentangaben sinnvoll sind, muss der prozentuale Anteil der gelungenen Versuche zwischen 45 % und 50 % betragen, d. h., der Quotient aus gelungenen und insgesamt durchgeführten Versuchen muss eine Zahl zwischen $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$ und $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ sein. Wer hier mit den 5 Lösungsvorschlägen probiert, findet schnell, dass man 11 Versuche braucht, von denen 5 gelungen sein müssen.
Die Aufgabe lässt sich natürlich auch systematisch lösen: Es seien p und q ganze Zahlen derart, dass $\frac{9}{20} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2}$ gilt. Das lässt sich umformen zu $9q < 20p$ und $2p < q$. Aus der 2. Ungleichung folgt $2p + 1 \leq q$. Setzen wir dies in die 1. Ungleichung ein, erhalten wir $9 \cdot (2p+1) \leq 9q < 20p$ oder $18p + 9 < 20p$ bzw. $2p > 9$ oder $p > 4{,}5$ bzw. $p \geq 5$. Daraus finden wir $q > 10$ und mit $\frac{5}{11}$ einen Bruch, für den $\frac{9}{20} < \frac{5}{11} < \frac{1}{2}$ gilt.



26. Ich möchte das (5 × 6)-Kästchenpapier so entlang der Kästchenseiten zerschneiden, dass keine anderen als die beiden rechts gezeichneten Teile entstehen. Wie viele der „Kreuzteile" kann ich erhalten?

(**A**) keines (**B**) entweder 0 oder 1 (**C**) entweder 0 oder 2
(**D**) entweder 0, 1, 2 oder 3 (**E**) entweder 0, 2 oder 4





Lösung: Es ist möglich, das (5 × 6)-Kästchenpapier in lauter (2 × 1)-Teile zu zerlegen, wofür die nebenstehende Zeichnung ein Beispiel zeigt. Es ist dagegen nicht möglich das (5 × 6)-Kästchenpapier ausschließlich in Kreuzteile zu zerschneiden. Die auch entstehenden Zweierteile reduzieren die Gesamtzahl der Kästchen stets um eine gerade Anzahl. Folglich ist auch die Anzahl der Kreuzteile, die ja je aus 5 Kästchen bestehen, gerade sein muss. Dass es ausgeschlossen ist, 4 Kreuzteile unterzubringen, erkennt man schnell. Für die Unterbringung von 2 Kreuzteilen ist rechts ein Beispiel gegeben. Man überzeugt sich leicht, dass der Rest sich in (2 × 1)-Teile zerschneiden lässt.

Sternchen zu ersetzen

★	8	★	·	4	★	2
	★	★	★	★		
			3	★	★	
				7	★	0
	★	★	★	★	★	0

★	★	★	·	★	★	★
	★	1	★	★		
			★	★	5	
			★	0	★	★
	★	★	★	★	★	8

Durch Einsetzen von Ziffern für die Sternchen sind richtig gelöste Multiplikationsaufgaben herzustellen. Dabei ist auch die Frage zu beantworten, ob es mehr als eine Lösung gibt.

27. In der Gleichung $\mathcal{KAE} - \mathcal{NG} = \mathcal{URU}$ sind die Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen, und zwar gleiche Buchstaben durch gleiche und verschiedene durch verschiedene Ziffern. Welchen größtmöglichen Wert kann $\mathcal{URU}$ annehmen?

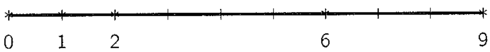
(**A**) 797 (**B**) 878 (**C**) 989 (**D**) 898 (**E**) 979

Lösung: Da $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ voneinander verschieden sind, kann $\mathcal{U}$ nicht gleich 9 sein, ist also maximal 8. Falls wir $\mathcal{U} = 8$ annehmen, kann $\mathcal{R}$ nicht gleich 9 sein, weil bereits $\mathcal{K}$ gleich 9 wäre. Für $\mathcal{URU} = 878$ findet man nun schnell eine Lösung, z. B. ist $910 - 32 = 878$.

28. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert, und dies so, dass sich zu jedem der Abstände 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm und 9 cm zwei von diesen Punkten finden lassen, die genau diesen Abstand voneinander haben. Wie viele Punkte sind das mindestens?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wir können ausrechnen, dass die Anzahl der Punkte größer als 4 sein muss, denn bei 4 Punkten gibt es nur 6 Abstände dieser Punkte untereinander (das lässt sich schnell auszählen, indem wir bei dem am weitesten links liegenden Punkt beginnen, der zu den drei rechts liegenden je einen Abstand hat; hinzu kommt der als zweiter in der Reihe von links liegende Punkt, der zu seinen beiden rechten Nachbarn einen Abstand hat und schließlich kommen die beiden rechts liegenden Punkte hinzu). Bei 5 Punkten wäre es möglich, 9 unterschiedliche Abstände dieser Punkte voneinander zu realisieren, denn es gibt zwischen ihnen insgesamt 10 Abstände. Eine mögliche Anordnung der Punkte ist folgende:



Es ist $1-0=1$, $2-0=2$, $9-6=3$, $6-2=4$, $6-1=5$, $6-0=6$, $9-2=7$, $9-1=8$, $9-0=9$.

			1	9	3			
		3	7	7	3	5		
	2	6	3	7	2	3	5	
7	8	9	8	8	4	1	6	8

Städtequartett

Wer findet bei diesem „Antikryptogramm" zu den Ziffern die passenden Buchstaben? Zu verschiedenen Ziffern gehören verschiedene, zu gleichen Ziffern die gleichen Buchstaben.
Gesucht ist eine solche Ersetzung, bei der in jeder Zeile der Name einer Stadt aus Deutschland erscheint.

29. Der größte gemeinsame Teiler der beiden natürlichen Zahlen m und n ist 12 und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist eine Quadratzahl. Wie viele der folgenden fünf Zahlen $m \cdot n$, $\frac{n}{3}$; $\frac{m}{3}$; $\frac{n}{4}$; $\frac{m}{4}$ sind dann Quadratzahlen?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei
(**D**) drei (**E**) das hängt von m und n ab

Lösung: Da 12 größter gemeinsamer Teiler (ggT) von m und n ist, gibt es natürliche Zahlen p und q, so dass $m = 12p$ und $n = 12q$ ist, das kleinste gemeinsame Vielfache ist dann $12pq$ und enthält nach den Voraussetzungen der Aufgabe alle Faktoren in gerader Potenz, woraus insbesondere folgt, dass *genau eine* der beiden Zahlen p und q die 3 in ungerader Potenz enthält. Daraus ergibt sich, dass $m \cdot n = 12 \cdot 12 \cdot pq$ keine Quadratzahl ist, da sie ebenfalls die 3 in ungerader Potenz enthält. Von den beiden Zahlen $\frac{n}{3}$ und $\frac{m}{3}$ ist genau eine, nämlich jene, die die 3 in ungerader Potenz enthält, eine Quadratzahl. Und von $\frac{m}{4}$ und $\frac{n}{4}$ ist wiederum genau eine eine Quadratzahl, und in diesem Fall jene, die die 3 *nicht* in ungerader Potenz, sondern in gerader – was auch 0 sein darf – enthält. Insgesamt gibt es folglich zwei Quadratzahlen.

30. Svenja und Mimi machen eine Bergwanderung. Am Fuß des Berges sind für den Weg bis zum Gipfel 2 h 55 min angegeben. Sie brechen um 8 Uhr auf und machen nach einer Stunde eine Rast von 15 min. Auf dem Wegweiser am Rastplatz ist als Wanderzeit bis zum Gipfel nur noch 1 h 15 min angegeben, Svenja und Mimi waren also schneller als der Richtwert. Wann sind die beiden auf dem Gipfel, wenn sie ihr Tempo beibehalten?

(**A**) um 10:00 Uhr (**B**) um 10:15 Uhr (**C**) um 10:30 Uhr
(**D**) um 11:10 Uhr (**E**) um 11:20 Uhr

Lösung: Wären Svenja und Mimi mit dem der Schätzung auf dem Wegweiser am Fuß des Berges zugrunde gelegten Tempo gewandert, so hätte auf dem Rastplatzwegweiser 1 h 55 min stehen müssen. Sie haben also statt der angesetzten 100 Minuten (2 : 55 − 1 : 15) nur 60 Minuten gebraucht. Bei gleichem Tempo werden sie für die bis zum Gipfel angegebenen 75 Minuten wieder das $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$-fache an Zeit brauchen. Das sind $\frac{3}{5} \cdot 75$ min $= 45$ min. Da sie eine Viertelstunde Rast eingelegt haben, sind sie dann nach insgesamt 2 h, also um 10:00 Uhr auf dem Gipfel.

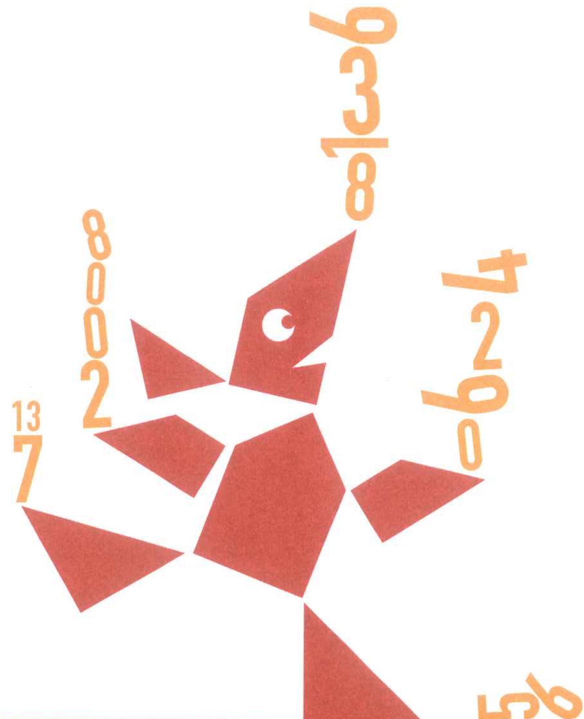
In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 7 und 8 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	D	E	C	B	B	D	A	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	C	D	E	B	D	A	D	E	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	D	E	A	A	C	B	B	C	A

Zeig uns, was du kannst!
Auf www.du-kannst-mathe.de erwartet dich ein galaktisches Mathe-Abenteuer. Logilos, Gnorken, Suna, Morabianer und Arithmanden treten zum mathematischen Wettkampf an. Wähle eine Spielfigur und löse auf der Raumstation Zeta12 spannende mathematische Knobeleien. Hier triffst du außerdem Freunde und die klügsten Köpfe der Galaxie.
Mach mit beim spannendsten Mathespiel des Universums. Wir warten schon auf dich.
Känguru der Mathematik 2008
Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

www.mathe-kaenguru.de

2008 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2008!

Der Wettbewerb „Känguru der Mathematik" ist in Deutschland noch einmal kräftig gewachsen. Mehr als eine dreiviertel Million Schülerinnen und Schüler aus knapp 8000 Schulen haben teilgenommen und sich an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières" erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben versucht. Auch in der deutschsprachigen Schweiz haben sich wieder um die zehntausend Knaben und Mädchen bzw. junge Männer und junge Frauen darum bemüht, von den 21 bzw. 30 Multiple-Choice-Fragen möglichst viele richtig zu beantworten. Unerwartet wird dabei für manchen der Teilnehmenden die Vielfalt der Aufgabenstellungen gewesen sein. Aber mathematische Methoden finden eben an den unterschiedlichsten Stellen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, das Berücksichtigen von Wahrscheinlichkeiten – all das sind Dinge, die besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt werden und die im täglichen Leben überall eine Rolle spielen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V." hoffen, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

In der vorliegenden Broschüre sind die Aufgaben sowie Hinweise zu den Lösungen zusammengestellt worden. Dazu noch einige Bemerkungen: In der tiefsten Klassenstufe 3/4 wurden 21 Aufgaben gestellt, die Teilnehmer aus den höheren Klassenstufen hatten 30 Aufgaben zu lösen. Für das erste Drittel der 21 bzw. 30 Aufgaben konnten jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte erreicht werden. Bei einer falschen Antwort gab es Punktabzug, und zwar wurden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte abgezogen, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe wurde 1 Punkt abgezogen und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe betrug der Punktabzug 1.25 Punkte. Wenn keine Antwort angekreuzt war, gab es 0 Punkte. Auch wenn mehr als eine Antwort angekreuzt war – was nicht erlaubt ist – gab es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekam 21 bzw. 30 Punkte als Grundpunktzahl; auf diese Weise kann es eine negative Gesamtpunktzahl nicht geben, und die Höchstpunktzahl beträgt 105 bzw. 150 Punkte.

Die Organisation für die Schweiz wurde auch in diesem Jahr von der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK) übernommen. Die deutsche Übersetzung der Aufgaben, die ja zunächst in englischer Sprache vorliegen, wurde gemeinsam entwickelt, so dass schliesslich einmal mehr eine Version entstand, die mit dem gleichen Wortlaut sowohl in Deutschland als auch in der Schweiz verwendet werden konnte.

Viel Freude mit Mathematik wünscht euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack unter Mithilfe von Dr. A. Noack, Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, B. und U. Hutschenreiter, Hj. Stocker, Dr. D. Vigerske und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin
www.mathe-kaenguru.de

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Druck: Lussi Druck AG, Offsetdruck, 6370 Stans

Deutschschweizerische Mathematikkommission: www.vsmp.ch/dmk

Klassenstufen 7 und 8

1. 6 Kängurus verspeisen 6 Sack Gras in 6 Minuten. Wie viele Kängurus verspeisen 100 Sack Gras in 100 Minuten, wenn alle beteiligten Kängurus stets gleichhungrig sind?

(**A**) 99 (**B**) 60 (**C**) 6 (**D**) 10 (**E**) 600

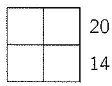
Lösung: Wir setzen bei dieser nicht ganz ernsten Aufgabe voraus, dass sich die Kängurus im Appetit völlig gleich verhalten. Wenn 6 Kängurus 6 Sack Gras in 6 Minuten verspeisen, so schaffen diese 6 Kängurus pro Minute also einen Sack Gras. Für 100 Sack Gras sind folglich 100 Minuten vonnöten – die 6 gleichhungrigen Kängurus schaffen es ganz allein.

2. $200 \cdot 8 + 200 : 8 =$

(**A**) 1625 (**B**) 1650 (**C**) 1825 (**D**) 2008 (**E**) 2025

Lösung: Es ist $200 \cdot 8 = 1600$ und $200 : 8 = 25$, woraus für die Summe $1600 + 25 = 1625$ folgt.

3. In die nebenstehende (2×2)-Tabelle sind die Zahlen 5, 7, 13 und eine vierte so einzutragen, dass die Summe der beiden Zahlen in der ersten Zeile 20 und die in der zweiten Zeile 14 beträgt. Welches ist die vierte Zahl?



(**A**) 15 (**B**) 7 (**C**) 5 (**D**) 9 (**E**) 8

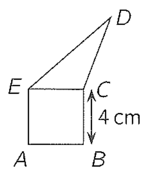
Lösung: Da die Summe der vier Zahlen $20 + 14 = 34$ ist, kann die gesuchte Zahl nur $34 - (5 + 7 + 13) = 9$ sein. Und mit 9 klappt es auch, denn $7 + 13 = 20$ und $5 + 9 = 14$.

4. Welche der Differenzen zweier Brüche ist am kleinsten?

(**A**) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6} - \frac{1}{7}$

Lösung: In jeder der 5 Differenzen ist der Zähler 1 und der Nenner das Produkt der Nenner der beiden Zahlen, deren Differenz gebildet wird. Folglich ist *die* Differenz am kleinsten, bei der das „Nennerprodukt" am größten ist; das ist $6 \cdot 7$.

5. Dreieck ECD und Quadrat $ABCE$ auf der nebenstehenden Zeichnung haben denselben Umfang. Welchen Umfang hat das Fünfeck $ABCDE$?



(**A**) 12 cm (**B**) 20 cm (**C**) 24 cm
(**D**) 32 cm (**E**) unbestimmt, hängt vom Dreieck ab

Lösung: Da der Umfang von $ABCE$ gleich dem von ECD ist, und da die 4 cm lange Seite $\overline{EC}$ zu beiden Figuren gehört, ist der Umfang von $ABCDE$ gleich $2 \cdot (3 \cdot 4 \text{ cm}) = 24$ cm.

6. Zum Osterfest hatte der Großvater drei Sorten Ostereier gekauft, die unterschiedlich eingewickelt sind, 24 in karierte, 42 in gestreifte und 36 in rotgetupfte Folie. Die Anzahlen hat er gut gewählt, denn wenn er mit all diesen Eiern die größtmögliche Zahl gleicher Osternester bastelt, dann kann er jedem Enkel das gleiche Nest verstecken. Wie viele Enkel hat er?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

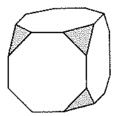
Lösung: Damit der Großvater in jedes Nest dieselbe Anzahl von Eiern der jeweiligen Sorte legen kann, muss die Anzahl der Nester als gemeinsamer Faktor in allen drei Eieranzahlen stecken. Und damit er die größtmögliche Anzahl von Nestern bekommt, muss dieser Faktor der größte gemeinsame Teiler sein. Dieser größte gemeinsame Teiler ist wegen $24 = 2^3 \cdot 3$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ und $36 = 2^2 \cdot 3^2$ hier $2 \cdot 3 = 6$, und das ist auch die Anzahl der Enkel.

7. Gabriel schreibt seinem Vater aus den Ferien in einer SMS: „Bei uns sind 37° C im Schatten“, und der Vater schreibt zurück: „Würdest du uns 10° C abgeben können, hätten wir beide dieselbe Temperatur.“ Wie warm ist es bei Gabriels Vater?

(**A**) 10° C (**B**) 17° C (**C**) 22° C (**D**) 27° C (**E**) 32° C

Lösung: Um diese Aufgabe zu lösen, muss nicht einmal eine Gleichung aufgeschrieben werden. Wir können so überlegen: Bei Gabriel sind zur Zeit 37° C. Nach der „Abgabe“ von 10° C wäre seine Temperatur 27°. Und diese Temperatur müsste um 10° C höher sein, als sie zur Zeit bei Gabriels Vater ist. Dort herrschen demnach 17° C.

8. Bei einem Würfel sind durch ebene Schnitte alle Ecken abgeschnitten worden (s. Bild). Wie viele Ecken hat der Restkörper?



(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 30

Lösung: Der Würfel selbst hat 8 Ecken. Werden diese Ecken abgeschnitten, so entstehen an jeder dieser 8 Ecken jeweils 3 Ecken anstelle der einen, also sind es $8 \cdot 3 = 24$ Ecken.

9. Die kleine Koboldin Kiki spricht donnerstags und freitags stets die Wahrheit, am Dienstag stets die Unwahrheit. An den anderen Tagen der Woche spricht sie, wie es ihr gerade einfällt, mal die Wahrheit und mal lügt sie wie gedruckt. An 6 aufeinanderfolgenden Tagen nach ihrem Namen gefragt, nennt sie Kiki, Coco, Kiki, Coco, Lucy, Coco – in dieser Reihenfolge. Welchen Namen würde sie am 7. Tag nennen?

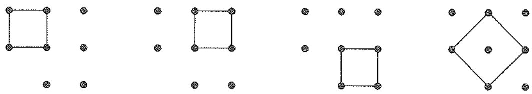
(**A**) Kiki (**B**) Coco (**C**) Lucy
(**D**) keinen der 3 bisherigen (**E**) irgendeinen der 3 bisherigen

Lösung: Nach Voraussetzung muss Kiki an zwei *aufeinanderfolgenden* Tagen (Donnerstag und Freitag) „Kiki“ sagen. Da dies noch nicht geschehen ist, muss sie es am 7. Tag tun.

10. Wie viele Quadrate können gezeichnet werden, wenn die 4 Eckpunkte zu den 8 Punkten der nebenstehenden Abbildung gehören müssen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

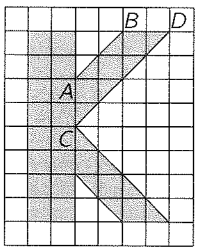
Lösung: In der Zeichnung ist die Lage der vier möglichen Quadrate zu sehen.



11. Auf dem Tisch liegen 9 rote und 13 grüne Filzstifte. Jeder zweite Stift ist mit einem Kängurubild verziert. Welches ist die kleinstmögliche Zahl grüner Stifte mit Kängurubild?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Insgesamt liegen $9+13=22$ Stifte auf dem Tisch, davon sind 11 verziert. Gesetzt den Fall, dass alle 9 roten Stifte die Verzierung tragen, dann sind 2 grüne Stifte ebenfalls damit versehen, und weniger können es auch nicht sein.



KAENGURU-Geometrie

a) Zu berechnen sind die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ (in Längeneinheiten: 1 LE = Seitenfläche eines Quadratkästchens) sowie der Umfang des „K".

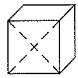
b) Wie groß ist die Fläche des Buchstabens K und wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche sind das?

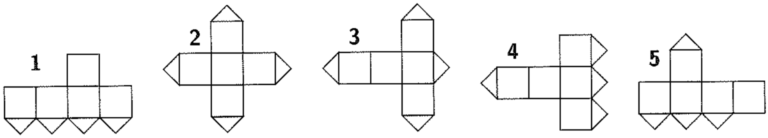
12. Piet und Hagen zählen das Restgeld vom Einkauf. Piet hat neun 2-Cent-Münzen, Hagen acht 5-Cent-Münzen. Wie viele Münzen müssen insgesamt mindestens den Besitzer wechseln, wenn Piet und Hagen das Geld zu gleichen Teilen behalten dürfen?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5
(**D**) 7 (**E**) nicht möglich

Lösung: Piet und Hagen haben zusammen $9\cdot 2+8\cdot 5=58$ Cent. Nach dem Münzentausch müssen sie jeder $58:2=29$ Cent haben. Da Piet nur 18 Cent hat, muss er 11 Cent dazubekommen; da aber 11 nicht durch 5 teilbar ist, geht es nur (mit möglichst geringem Münzentausch), indem er drei 5-Cent-Münzen bekommt und zwei 2-Cent-Münzen weggibt. Damit haben insgesamt $3+2=5$ Münzen den Besitzer gewechselt.

13. Eine der Würfelseiten ist entlang der Diagonalen zerschnitten worden. Welche der folgenden Würfelnetze passen *nicht* zu diesem Würfel?





(**A**) **1** und **3** (**B**) **1** und **5** (**C**) **3** und **4** (**D**) **3** und **5** (**E**) **2** und **4**

Lösung: Netz 3 ist kein Würfelnetz, denn die Würfelseitenviertel können keine gemeinsame Fläche bilden. Ebenso ist Netz 5 kein Würfelnetz, denn das nach oben zeigende Würfelseitenviertel bildet mit den anderen drei Vierteln keine Seite, vielmehr würde es beim Falten auf die ganz rechts gezeichnete Würfelseite zu liegen kommen.

14. Ich denke mir alle 3-stelligen Zahlen aufgeschrieben. Bei wie vielen ist das Produkt der 3 Ziffern gleich 6?

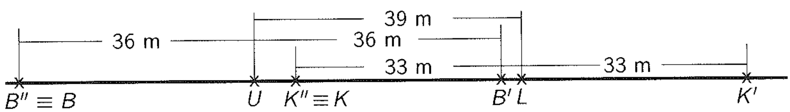
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Es sei $\overline{abc}$ die dreistellige Zahl. Dann soll also $a \cdot b \cdot c = 6$ sein. Da $6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ ist und andere Zerlegungen in drei Faktoren nicht existieren, gibt es also mit 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312 und 321 genau 9 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

15. An unserer schnurgeraden Dorfallee stehen eine Ulme, eine Linde, eine Kastanie und eine Birke, alle auf derselben Straßenseite. Der Abstand von Ulme zu Linde ist 39 m, von Linde zu Kastanie 33 m, von Kastanie zu Birke 42 m und von Birke zu Ulme 36 m. Wie groß ist der Abstand zwischen den am weitesten voneinander entfernten Bäumen?

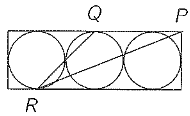
(**A**) 72 m (**B**) 75 m (**C**) 78 m (**D**) 81 m (**E**) 108 m

Lösung: Wir kürzen die Namen der Bäume mit ihren Anfangsbuchstaben ab und versuchen, sie in einer Skizze an der Allee zu platzieren. Ulme und Linde können wir erst einmal beliebig markieren. Für die Kastanie kommen in Bezug auf die Linde zwei Möglichkeiten in Betracht – eine mit K', die andere mit K'' markiert. Ebenso kommen für die Birke, die ja 36 m von der Ulme entfernt steht, zwei mögliche Standorte in Betracht.



Von der Kastanie zur Birke sind es 42 m. Diese Entfernung haben nur die möglichen Standorte K'' und B'' voneinander, denn die Entfernung zwischen K'' und B' ist kleiner als 39 m, die zwischen B' und K' $33\text{ m} + 3\text{ m} = 36\text{ m}$ und die zwischen K' und B'' ist größer als 100 m. Damit ist die größte Entfernung, die zwischen den Bäumen gemessen werden kann, die von der Birke (am Standplatz B'') zur Linde. Sie beträgt 75 m.

16. Drei gleich große Kreise sind von einem Rechteck von 36 cm Länge und 12 cm Breite umschlossen. Q und R sind Berührungspunkte, P ist ein Eckpunkt (s. Zeichnung). Welchen Flächeninhalt hat $\triangle PQR$?



(A) 27 cm^2 **(B)** 45 cm^2 **(C)** 54 cm^2 **(D)** 108 cm^2 **(E)** 180 cm^2

Lösung: Bei dieser Aufgabe darf man sich nicht von den Kreisen beeindrucken lassen. Wir brauchen von ihnen nur zu wissen, dass das Rechteck 6 Radiuslängen lang und 2 Radiuslängen breit ist, dass der Berührungspunkt R sich eine Radiuslänge von der linken Rechtecksseite und Q sich drei Radiuslängen von der linken (wie rechten) Rechtecksseite entfernt befindet. Die Grundlinie des Dreiecks PQR ist $\overline{PQ}$ und drei Radiuslängen bzw. halb so lang wie das Rechteck. Die Höhe des Dreiecks ist gleich der Rechtecksbreite. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12\ cm^2 = 108\ cm^2$.

17. Die vom Sportfest übrig gebliebenen Äpfel dürfen die Helfer unter sich aufteilen, und die Zahl geht auch ohne Rest auf. „Wären wir zwei Helfer weniger gewesen, hätte jeder einen Apfel mehr bekommen können", stellt Jana fest. „Stimmt", meint Uli, „und bei drei Helfern weniger, hätte es sogar exakt für zwei Äpfel mehr gereicht." Wie viele Helfer waren es?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 12 **(E)** 16

Lösung: Wir stellen zum Lösen der Aufgabe den Sachverhalt in drei Gleichungen dar. Mit h bezeichnen wir die Zahl der Helfer beim Sportfest und mit a die Zahl der Äpfel, die jeder tatsächlich bekommen hat. A sei die Gesamtzahl der Äpfel. Dann gilt $h{\cdot}a = A$, $(h-2){\cdot}(a+1) = A$ und schließlich $(h-3)\cdot(a+2) = A$. Hieraus finden wir durch Gleichsetzen von 1. und 2. Gleichung aus $h \cdot a = (h-2)\cdot(a+1)$, dass $h = 2a+2$ ist. Gleichsetzen von 1. und 3. Gleichung ergibt nun $(2a+2)\cdot a = (2a+2-3)\cdot(a+2)$ bzw. $2a^2+2a = 2a^2-a+4a-2$ oder $a = 2$, woraus $h = 6$ folgt.

18. Für ein Spiel liegen 7 Beutel bereit, in denen sich 1, 2, 3, 4, 5, 6 bzw. 7 Murmeln befinden. Theo fischt sich 3 Beutelchen heraus, öffnet sie und zählt die Murmeln. „He, ich weiß, dass die Summe deiner Murmeln eine gerade Zahl ist", sagt er zu Uta, die sich zwei der Beutel genommen hat. „Na, dann weiß ich sogar, wie viele Murmeln du insgesamt hast", erwidert Uta. Es sind

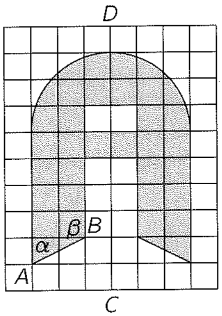
(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 15

Lösung: Es muss die Frage beantwortet werden, unter welchen Bedingungen Theo mit Gewissheit sagen kann, dass die Summe der Murmeln aus den zwei Säckchen, die Uta sich zufällig genommen hat, gerade ist. Er kann es dann sagen, wenn Uta ausschließlich Säckchen mit ungeradzahlig vielen Murmeln genommen haben kann, denn die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl, oder wenn die beiden Anzahlen von Murmeln in Utas beiden Säckchen gerade sein müssen. Da Theo drei Säckchen weggenommen hat, kann er genau voraussagen, dass die Summe der Murmeln in Utas beiden Säckchen eine gerade Zahl ist, wenn er alle drei Säckchen mit einer geraden Zahl von Murmeln erwischt hat. Dann nämlich bleiben für Uta nur ungerade Anzahlen in jedem der Säckchen möglich. Und Uta kann daraus, dass Theo sicher ist, folgern, dass er genau $2+4+6 = 12$ Murmeln in den drei Säckchen hat.

19. Zwei Busse verkehren auf einem Rundkurs im Abstand von 25 Minuten. Wie viele Busse müssen unterwegs sein, wenn der Abstand um 60 % verringert werden soll?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Eine Verringerung des Abstandes der Busse um 60 % bedeutet, dass sich der Abstand *auf* 40 % verringert. 40 % von 25 Minuten sind $\frac{40}{100} \cdot 25 = 10$ Minuten. Somit sind für die gesamte Strecke, bei der das Durchfahren $2 \cdot 25$ min $= 50$ min dauert, $50 : 10 = 5$ Busse erforderlich.



KAENGURU-Geometrie

a) Wie groß sind die Winkel α und β? Wie lang ist $\overline{AB}$, welchen Umfang hat das A, wenn die Begrenzung nach oben hin ein Halbkreis ist?

b) Wie groß ist die Fläche von A und wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche ist das?

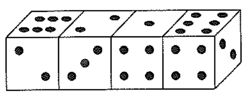
c) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der entstehen würde, wenn der Buchstabe um seine Mittelachse rotieren würde?

20. Stell dir vor, du hättest einen $(9 \times 9 \times 9)$-Würfel aus 9^3 gleich großen kleinen Würfeln gebaut. Weil er so gut gelungen ist, fotografierst du den großen Würfel und fragst dich, wie viele der kleinen Würfel auf dem Foto höchstens zu sehen sind. Es sind

(**A**) 261 (**B**) 243 (**C**) 225 (**D**) 217 (**E**) 192

Lösung: Im günstigsten Fall können wir drei – nie mehr – Seitenflächen eines Würfels sehen. Nehmen wir nun alle Würfelchen dieser drei Seitenflächen (Schichten) weg, so bleibt ein kleinerer Würfel zurück, nämlich ein $(8 \times 8 \times 8)$-Würfel. Für die Anzahl Würfelchen der drei Seitenflächen erhalten wir folglich das Ergebnis: $9^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$.
Dieser Lösungsansatz lässt sich sehr gut verallgemeinern: Wäre der große Würfel aus k kleinen aufgebaut gewesen, so hätten wir zur Berechnung der Anzahl x der sichtbaren Würfelchen wie folgt rechnen müssen: $x = k^3 - (k-1)^3$
Durch Anwendung der binomischen Formel (die allerdings noch nicht bei allen Teilnehmern im Schulstoff da ist) auf den zweiten Term erhalten wir $k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 3k^2 - 3k + 1$.
Für $k = 3$ erhalten wir daraus erwartungsgemäß das Resultat 217.

21. Die vier untereinander identischen Würfel sind Spielwürfel, d. h., die Summe der Punkte auf einander gegenüberliegenden Seiten ist 7. Dann ist die Summe der Punkte auf den 6 einander berührenden Seiten gleich



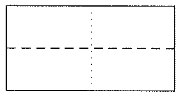
(**A**) 19 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 25

Lösung: Der rechts außen sichtbaren 2 liegt wegen $7-2=5$ die 5 gegenüber. Die je zwei Berührungsseiten der mittleren Würfel tragen jeweils 7 zur Summe bei, ganz egal, welche Zahlen sich dort gegenüberliegen. Beim letzten Würfel müssen wir noch einmal nachdenken. Da 2 und 6 zu sehen sind, kommen für die Berührungsseite 5 und 1 nicht in Frage, es muss 3 oder 4 sein. Nun können wir erkennen, dass der linke Würfel (der nach Voraussetzung identisch zum rechts liegenden ist) der auf seiner Grundfläche um 90° gedrehte rechts liegende Würfel ist. Also weist die 4 nach außen, und die 3 ist die gesuchte letzte Punktzahl. Die Summe ist $5+7+7+3=22$.

22. Heinz aus Heindorf und Kurt aus Kurtshagen haben das Grundstück ihrer Großtante geerbt. Per Email einigen sie sich, das rechteckige Grundstück in zwei rechteckige Hälften zu teilen. Heinz will den Zaun um das Gesamtgrundstück bezahlen, Kurt die Hecke, die die Teile trennen soll. Als sie auf die Länge der Hecke zu sprechen kommen, nennt Heinz 200 m, Kurt jedoch nur 165 m. Wie lang muss der Zaun werden?

(**A**) 365 m (**B**) 565 m (**C**) 330 m (**D**) 730 m (**E**) 665 m

Lösung: Da Heinz und Ernst das ursprüngliche rechteckige Grundstück beide halbiert haben, dabei für die Halbierungslinie des Grundstücks jedoch unterschiedliche Längen erhalten haben, müssen sie die Halbierung unterschiedlich geplant haben, so wie es die Zeichnung zeigt.



Um die Länge des Zaunes, sprich den Umfang des Gesamtgrundstücks, auszurechnen, sind die beiden Längen der Halbierungslinien, die ja gleich den Längen der Rechtecksseiten sind, zu addieren und mit 2 zu multiplizieren. Das Ergebnis ist $2 \cdot (200\text{ m} + 165\text{ m}) = 730\text{ m}$.

23. Es sei n eine durch 2, 5 und 15 teilbare Zahl. Welche der in (**A**) bis (**E**) aufgeführten Zahlen ist dann auch durch 2, 5 und 15 teilbar?

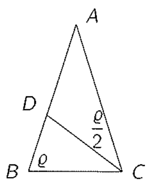
(**A**) $n+2$ (**B**) $n+10$ (**C**) $n+15$ (**D**) $n+20$ (**E**) $n+30$

Lösung: Wenn n durch 2, 5 und 15 teilbar ist, so ist n auch durch das kleinste gemeinsame Vielfache 30 teilbar. Weiter gilt: Wenn von zwei Summanden einer durch eine gewisse Zahl (hier 30) teilbar ist, ist es die Summe nur dann, wenn auch der andere Summand durch diese Zahl teilbar ist. Wenn also neben n auch $n+x$ durch 30 teilbar sein soll, muss x durch 30 teilbar sein. Damit ist $n+30$ die Lösung.

24. Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, in dem die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ des Winkels bei C ebenso lang ist wie die Basis $\overline{BC}$ des Dreiecks. Dann ist $\measuredangle CDA =$

(**A**) 108° (**B**) 110° (**C**) 115°
(**D**) 120° (**E**) nicht eindeutig bestimmt

Lösung: Wir bemerken, dass im Text durch die Bezeichnung von BC als Basis festgelegt ist, welche Seiten ($\overline{AB}$ und $\overline{AC}$) gleich lang sind. Damit sind die Winkel bei B und C gleich, wir bezeichnen sie mit ϱ. Wegen $\overline{CD} = \overline{BC}$ ist auch $\measuredangle BDC = \varrho$. Da $\measuredangle DCB = \frac{1}{2}\varrho$, gilt im $\triangle BCD$ $2\varrho + \frac{1}{2}\varrho = 180°$ bzw. $\varrho = 72°$, woraus $\measuredangle CDA = 180° - 72° = 108°$ folgt.

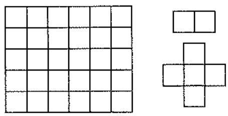


25. Ich lese, dass in einer Versuchsserie zwar mehr als 45,0 % jedoch weniger als 50,0 % der Versuche gelungen sind. Wie viele *gelungene* Versuche muss die Reihe mindestens enthalten, damit die Prozentangaben sinnvoll sind?

(**A**) 5 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 15

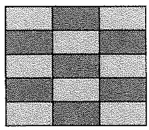
Lösung: Damit die Prozentangaben sinnvoll sind, muss der prozentuale Anteil der gelungenen Versuche zwischen 45 % und 50 % betragen, d. h., der Quotient aus gelungenen und insgesamt durchgeführten Versuchen muss eine Zahl zwischen $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$ und $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ sein. Wer hier mit den 5 Lösungsvorschlägen probiert, findet schnell, dass man 11 Versuche braucht, von denen 5 gelungen sein müssen.
Die Aufgabe lässt sich natürlich auch systematisch lösen: Es seien p und q ganze Zahlen derart, dass $\frac{9}{20} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2}$ gilt. Das lässt sich umformen zu $9q < 20p$ und $2p < q$. Aus der 2. Ungleichung folgt $2p + 1 \leq q$. Setzen wir dies in die 1. Ungleichung ein, erhalten wir $9 \cdot (2p + 1) \leq 9q < 20p$ oder $18p + 9 < 20p$ bzw. $2p > 9$ oder $p > 4,5$ bzw. $p \geq 5$. Daraus finden wir $q > 10$ und mit $\frac{5}{11}$ einen Bruch, für den $\frac{9}{20} < \frac{5}{11} < \frac{1}{2}$ gilt.

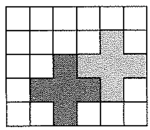
26. Ich möchte das (5 × 6)-Kästchenpapier so entlang der Kästchenseiten zerschneiden, dass keine anderen als die beiden rechts gezeichneten Teile entstehen. Wie viele der „Kreuzteile" kann ich erhalten?



(**A**) keines (**B**) entweder 0 oder 1 (**C**) entweder 0 oder 2
(**D**) entweder 0, 1, 2 oder 3 (**E**) entweder 0, 2 oder 4

Lösung: Es ist möglich, das (5 × 6)-Kästchenpapier in lauter (2 × 1)-Teile zu zerlegen, wofür die nebenstehende Zeichnung ein Beispiel zeigt. Es ist dagegen nicht möglich das (5 × 6)-Kästchenpapier ausschließlich in Kreuzteile zu zerschneiden. Die auch entstehenden Zweierteile reduzieren die Gesamtzahl der Kästchen stets um eine gerade Anzahl. Daraus folgt, dass auch die Anzahl der Kreuzteile, die ja jedes aus 5 Kästchen bestehen, gerade sein muss. Dass es ausgeschlossen ist, 4 Kreuzteile unterzubringen, erkennt man schnell. Und für die Unterbringung von 2 Kreuzteilen ist in der nebenstehenden Zeichnung ein Beispiel gegeben. Man überzeugt sich leicht, dass der Rest sich in (2 × 1)-Teile zerschneiden lässt.





27. In der Gleichung $\mathcal{KAE} - \mathcal{NG} = \mathcal{URU}$ sind die Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen, und zwar gleiche Buchstaben durch gleiche und verschiedene durch verschiedene Ziffern. Welchen größtmöglichen Wert kann $\mathcal{URU}$ annehmen?

(**A**) 797 (**B**) 878 (**C**) 989 (**D**) 898 (**E**) 979

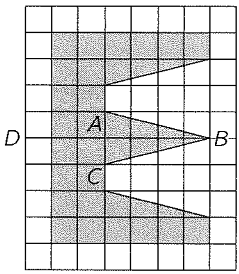
Lösung: Da $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ voneinander verschieden sind, kann $\mathcal{U}$ nicht gleich 9 sein, ist also maximal 8. Falls wir $\mathcal{U} = 8$ annehmen, kann $\mathcal{R}$ nicht gleich 9 sein, weil bereits $\mathcal{K}$ gleich 9 wäre. Für $\mathcal{URU} = 878$ findet man nun schnell eine Lösung, z. B. ist $910 - 32 = 878$.

28. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert, und dies so, dass sich zu jedem der Abstände 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm und 9 cm zwei von diesen Punkten finden lassen, die genau diesen Abstand voneinander haben. Wie viele Punkte sind das mindestens?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wir können ausrechnen, dass die Anzahl der Punkte größer als 4 sein muss, denn bei 4 Punkten gibt es nur 6 Abstände dieser Punkte untereinander (das lässt sich schnell auszählen, indem wir bei dem am weitesten links liegenden Punkt beginnen, der zu den drei rechts liegenden je einen Abstand hat; hinzu kommt der als zweiter in der Reihe von links liegende Punkt, der zu seinen beiden rechten Nachbarn einen Abstand hat und schließlich kommen die beiden rechts liegenden Punkte hinzu). Bei 5 Punkten wäre es möglich, 9 unterschiedliche Abstände dieser Punkte voneinander zu realisieren, denn es gibt zwischen ihnen insgesamt 10 Abstände. Eine mögliche Anordnung der Punkte ist folgende:

Es ist $1-0=1$, $2-0=2$, $9-6=3$, $6-2=4$, $6-1=5$, $6-0=6$, $9-2=7$, $9-1=8$, $9-0=9$.



KAENGURU-Geometrie

a) Wie groß $\measuredangle ABC$? Wie lang ist $\overline{AB}$, welchen Umfang hat das E?

b) Wie groß ist die Fläche von E und wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche sind das?

c) Wie groß sind Volumen und Oberfläche des Körpers, der entstehen würde, wenn das E um DB rotieren würde?

29. Der größte gemeinsame Teiler der beiden natürlichen Zahlen m und n ist 12 und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist eine Quadratzahl. Wie viele der folgenden fünf Zahlen $m \cdot n$, $\frac{n}{3}$; $\frac{m}{3}$; $\frac{n}{4}$; $\frac{m}{4}$ sind dann Quadratzahlen?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei
(**D**) drei (**E**) das hängt von m und n ab

Lösung: Da 12 größter gemeinsamer Teiler (ggT) von m und n ist, gibt es natürliche Zahlen p und q, so dass $m = 12p$ und $n = 12q$ ist, das kleinste gemeinsame Vielfache ist dann $12pq$ und enthält nach den Voraussetzungen der Aufgabe alle Faktoren in gerader Potenz, woraus insbesondere folgt, dass *genau eine* der beiden Zahlen p und q die 3 in ungerader Potenz enthält. Daraus ergibt sich, dass $m \cdot n = 12 \cdot 12 \cdot pq$ keine Quadratzahl ist, da sie ebenfalls die 3 in ungerader Potenz enthält. Von den beiden Zahlen $\frac{n}{3}$ und $\frac{m}{3}$ ist genau eine, nämlich jene, die die 3 in ungerader Potenz enthält, eine Quadratzahl. Und von $\frac{m}{4}$ und $\frac{n}{4}$ ist wiederum genau eine eine Quadratzahl, und in diesem Fall jene, die die 3 *nicht* in ungerader Potenz, sondern in gerader – was auch 0 sein darf – enthält. Insgesamt gibt es folglich zwei Quadratzahlen.

30. Svenja und Mimi machen eine Bergwanderung. Am Fuß des Berges sind für den Weg bis zum Gipfel 2 h 55 min angegeben. Sie brechen um 8 Uhr auf und machen nach einer Stunde eine Rast von 15 min. Auf dem Wegweiser am Rastplatz ist als Wanderzeit bis zum Gipfel nur noch 1 h 15 min angegeben, Svenja und Mimi waren also schneller als der Richtwert. Wann sind die beiden auf dem Gipfel, wenn sie ihr Tempo beibehalten?

(**A**) um 10:00 Uhr (**B**) um 10:15 Uhr (**C**) um 10:30 Uhr
(**D**) um 11:10 Uhr (**E**) um 11:20 Uhr

Lösung: Wären Svenja und Mimi mit dem der Schätzung auf dem Wegweiser am Fuß des Berges zugrunde gelegten Tempo gewandert, so hätte auf dem Rastplatzwegweiser 1 h 55 min stehen müssen. Sie haben also statt der angesetzten 100 Minuten (2 : 55 − 1 : 15) nur 60 Minuten gebraucht. Bei gleichem Tempo werden sie für die bis zum Gipfel angegebenen 75 Minuten wieder das $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$-fache an Zeit brauchen. Das sind $\frac{3}{5} \cdot 75 \text{ min} = 45 \text{ min}$. Da sie eine Viertelstunde Rast eingelegt haben, sind sie dann nach insgesamt 2 h, also um 10:00 Uhr auf dem Gipfel.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 7 und 8 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	D	E	C	B	B	D	A	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	C	D	E	B	D	A	D	E	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	C	D	E	A	A	C	B	B	C	A

Klassenstufen 9 und 10

1. Wie viele der folgenden sieben Rechnungen haben ein von 6 verschiedenes Ergebnis?

$\boxed{2-(-4)}$ ◇ $\boxed{(-2)\cdot(-3)}$ ◇ $\boxed{-8+2}$ ◇ $\boxed{-2+8}$ ◇ $\boxed{0-(-6)}$ ◇ $\boxed{12:(-2)}$ ◇ $\boxed{2:12}$

(A) keine **(B)** zwei **(C)** drei **(D)** vier **(E)** sechs

Lösung: Es ist $2-(-4)=6$, $(-2)\cdot(-3)=6$, $-8+2=-6$, $-2+8=6$, $0-(-6)=6$, $12:(-2)=-6$ und $2:12=\frac{1}{6}$. D. h. nur die 3., 6. und 7. Aufgabe liefern ein von 6 verschiedenes Ergebnis, das sind drei Rechnungen.

2. Welches ist die kleinste Anzahl von Buchstaben, die im französischen Wort KANGOUROU zu streichen sind, damit die übrig bleibenden Buchstaben alphabetisch geordnet sind?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten, dass aus 5 der 9 Buchstaben eine Folge stehenbleibt, die alphabetisch geordnet ist, KNORU, AGORU, ANORU. Jeder der ersten 4 Buchstaben steht im Alphabet vor jedem der letzten 5 Buchstaben, wobei, da K sich hinter A und N sich hinter G im Alphabet befindet, stets nur 2 dieser 4 und aus analogem Grund sich nur 3 aus den 5 letzten Buchstaben wählen lassen. Also ist vier die kleinste Anzahl von Buchstaben, die entfernt werden muss.

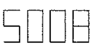
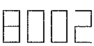
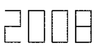
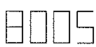
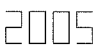
3. In der nebenstehenden Additionsaufgabe ist für jeden Buchstaben genau eine Ziffer zu setzen, zu verschiedenen Buchstaben gehören verschiedene Ziffern. Welche Ziffer muss an die Stelle von „K“ gesetzt werden?

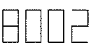
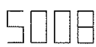
$$\begin{array}{rccc} & & \mathrm{O} & \mathrm{K} \\ + & & \mathrm{K} & \mathrm{O} \\ \hline & \mathrm{W} & \mathrm{O} & \mathrm{W} \end{array}$$

(A) 0 **(B)** 3 oder 8 **(C)** 9 **(D)** 5 **(E)** 1

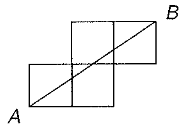
Lösung: Die Summe zweier 2-stelliger Zahlen kann nicht größer als 198 sein, folglich ist W = 1. Da weder O noch K gleich 0 sein darf, muss K + O = 11 sein. Damit folgt für O aus WOW, dass es gleich 2 ist, und folglich K = 9.

4. Am Neujahrstag schlüpfte Paola in ihr mit der neuen Jahreszahl  besticktes T-Shirt und stellte sich im Handstand vor den großen Spiegel. Was sieht der neben ihr auf seinen Füßen stehende Bruder, wenn er in den Spiegel schaut?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

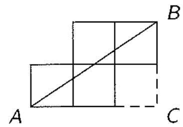
Lösung: Dadurch, dass Paola im Handstand steht, ist die  um 180° gedreht, also zu  verändert. Und dies wird nun gespiegelt, wodurch  entsteht.

5. Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$, wenn die vier Quadrate je die Seitenlänge 1 cm haben?



(**A**) 5 cm (**B**) $\sqrt{13}$ cm (**C**) $\sqrt{7}$ cm
(**D**) $\sqrt{5}$ cm (**E**) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ cm

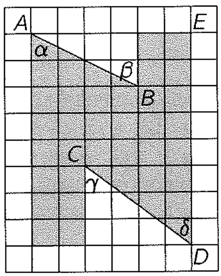
Lösung: Denken wir uns das gestrichelt gezeichnete Quadrat hinzu, so sehen wir, dass ABC als Dreieck, das zwei benachbarte Quadratseiten enthält, rechtwinklig ist. Nun rechnen wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ bzw. $\overline{AB} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.



6. Es sei $a < -1$. Welche der folgenden Zahlen ist am kleinsten?

(**A**) $a-1$ (**B**) a^2-1 (**C**) $-a$ (**D**) $-a-1$ (**E**) $-a^2-1$

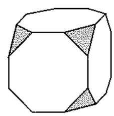
Lösung: Da $a < -1$, ist $-a > 1$, also auch $a^2 > 1$, woraus folgt, dass die unter (**B**), (**C**) und (**D**) aufgeführten Werte sämtlich größer als 0 sind. Da $|a| > 1$, ist $a^2 > |a|$, so dass nun wegen $-a^2 - 1 < a - 1$ folgt, dass (**E**) die Lösung ist.



KAENGURU-Geometrie

a) Wie groß sind die Winkel α, β, γ und δ? Wie lang sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, welchen Umfang hat das N?
b) Wie groß ist die Fläche, die N einnimmt, und wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche sind das?
c) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der entstehen würde, wenn das N um die Achse DE rotieren würde?

7. Bei einem Würfel sind durch ebene Schnitte alle Ecken abgeschnitten worden (s. Bild). Wie viele Kanten hat der Restkörper?



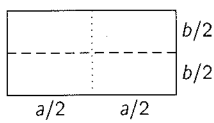
(**A**) 24 (**B**) 30 (**C**) 36 (**D**) 40 (**E**) 48

Lösung: Beim Abschneiden der Würfelecken kommen zu den vorhandenen 12 Würfelkanten je Ecke 3 Kanten hinzu, insgesamt also $8 \cdot 3 = 24$. Der gestutzte Körper hat insgesamt $12 + 24 = 36$ Kanten.

8. Franzi und Greta haben jede ein rechteckiges Stück Papier derselben Form und Größe. Jede schneidet ihr Rechteck in der Mitte durch. Franzis beide dabei entstandenen Rechtecke haben je einen Umfang von 175 cm, Gretas je 125 cm. Welchen Umfang hat das ursprüngliche Rechteck?

(**A**) 200 cm (**B**) 220 cm (**C**) 250 cm (**D**) 260 cm (**E**) 270 cm

Lösung: Da die beiden Mädchen für ihre jeweiligen Hälften unterschiedliche Umfänge messen, müssen sie das Rechteck unterschiedlich halbiert haben – eine längs, die andere quer (s. Abb.).



Nun lässt sich die gesuchte Größe z. B. durch Lösen des folgenden Gleichungssystems errechnen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2 \cdot a/2 + b/2) &= 175 \\ 2 \cdot (2 \cdot b/2 + a/2) &= 125 \end{aligned}$$

Eine einfachere Möglichkeit ist es, sich zu überlegen, dass die Summe der beiden Teil-Umfänge, also $125 + 175$ gerade $3 \cdot (a + b)$ ist, woraus $2 \cdot (a + b) = 200$ folgt.

9. Beim ersten Deutschtest in diesem Jahr habe ich nur einen von fünf Punkten erreicht. Gesetzt den Fall, ich arbeite so gut, dass ich alle kommenden Tests mit der maximalen Punktzahl 5 bestehe. Wie viele Tests müssten noch stattfinden, damit ich am Ende vier Fünftel aller erreichbaren Punkte habe?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Setzen wir die Anzahl der erforderlichen Tests gleich x, so soll gelten: $\frac{1+5x}{5(x+1)} = \frac{4}{5}$. Das formen wir um zu $5(1 + 5x) = 20(x + 1)$ bzw. $5 + 25x = 20x + 20$ bzw. $5x = 15$, woraus $x = 3$ folgt.

10. Onkel Dieter, seines Zeichens passionierter Angler, rudert mit mir durch den Kanal zu seinem Lieblingsangelplatz. „Siehst du", sagt er, als wir einen Seitenarm passieren, „hier fließt ein Drittel des Wassers weg. Und wenig später, nach der Kurve dort, noch einmal ein Viertel von dem, was dort noch fließt. Nun frag ich dich," setzt er fort und guckt mich an, „wie viel von der ursprünglichen Wassermenge ist für uns beide schließlich noch übrig im Kanal?"

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{2}{5}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{3}{5}$

Lösung: Nachdem wir am ersten Seitenarm vorbeigerudert sind, fließen im Kanalarm noch $\frac{2}{3}$ der Anfangsmenge. Davon bleiben nachher noch $\frac{3}{4}$. Also bleiben insgesamt $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Nach beiden Abflüssen ist noch die Hälfte der ursprünglichen Wassermenge im Kanal.

11. Beim schnellen Verteilen der Ostereier in die Nester für ihre vier Enkel haben die Großeltern ins erste 13, ins zweite 11, ins dritte 16 und ins vierte 8 Eier gelegt. Wie viele müssen sie nun mindestens umlegen, damit jeder Enkel dieselbe Anzahl bekommt?

(**A**) 13 (**B**) 11 (**C**) 8 (**D**) 5 (**E**) 4

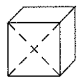
Lösung: Die Großeltern haben insgesamt $13 + 11 + 16 + 8 = 48$ Ostereier verteilt, also sind für jedes Enkelkind $48 : 4 = 12$ vorgesehen. Daher müssen ganz sicher von den Nestern, in denen sich mehr als 12 Eier befinden, die überzähligen auf die anderen so verteilt werden, dass schließlich in jedem Nest 12 Eier liegen. Aus dem Nest mit 13 Eiern kann z. B. eines in das 11-er Nest und von dem Nest mit 16 Eiern können 4 ins 8-er Nest gelegt werden. Insgesamt müssen mindestens 5 Eier umverlegt werden.

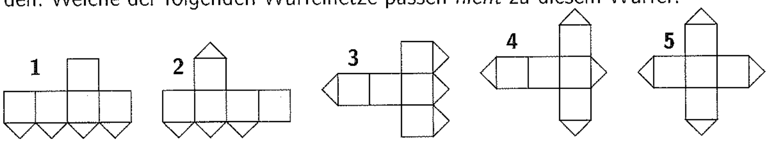
12. Seit ihrer Hochzeit pflanzen meine Eltern alljährlich zum Frühlingsbeginn einen Baum. Irgendwann stellen sie fest, dass die drei Tannen, die sie im 5., 6. und 7. Jahr ihrer Ehe gepflanzt haben, zusammen 42 Jahre alt sind. Wie alt sind demnach die drei erstgepflanzten Bäume zusammen?

(**A**) 46 (**B**) 51 (**C**) 54 (**D**) 60 (**E**) 63

Lösung: Da die Summe der Jahresalter der im 5., 6. und 7. Jahr gepflanzten Bäume 42 ist, muss die Jahresaltersumme der im 1., 2. und 3. Jahr gepflanzten um $3 \cdot 4 = 12$ – hier geht die Altersdifferenz von 4 Jahren ein – größer sein. Insgesamt ist die gesuchte Alterssumme folglich $42 + 12 = 54$.

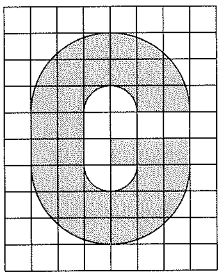
13. Eine der Würfelseiten ist entlang der beiden Diagonalen zerschnitten worden. Welche der folgenden Würfelnetze passen *nicht* zu diesem Würfel?





(**A**) **1** und **3** (**B**) **1** und **5** (**C**) **3** und **4** (**D**) **3** und **5** (**E**) **2** und **4**

Lösung: Netz 2 ist kein Würfelnetz, denn das nach oben zeigende Würfelseitenviertel bildet mit den anderen drei Vierteln keine Seite. Ebenso ist Netz 4 kein Würfelnetz, denn die Würfelseitenviertel können keine gemeinsame Fläche bilden.



KAENGURU-Geometrie

a) Wie groß ist der Umfang des Buchstabens G, wenn die Begrenzung nach oben und nach unten jeweils konzentrische Halbkreisringe sind?

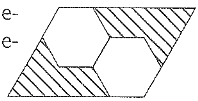
b) Welchen Flächeninhalt hat G, wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche ist das?

14. In einer Schachtel liegen 7 mit den Zahlen von 1 bis 7 beschriebene Karten – jede Zahl kommt genau einmal vor. Nelli und Oskar ziehen zufällig, Nelli 3, Oskar 2 Karten. Unsere Mathelehrerin guckt auf die 3 Karten von Nelli und sagt: „Oskar, ich weiß, dass die Summe der Zahlen auf deinen 2 Karten eine gerade Zahl ist." „Dann weiß ich die Summe der Zahlen auf Nellis Karten", ruft nach kurzer Bedenkzeit jemand aus der Klasse. Diese Summe ist

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

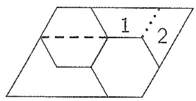
Lösung: Die Lösung ist analog zur Lösung von Aufgabe 18 in der Klassenstufe 7/8.

15. Die beiden regelmäßigen Sechsecke, die in das Parallelogramm eingezeichnet sind, haben denselben Flächeninhalt. Welcher Anteil der Parallelogrammfläche ist schraffiert?



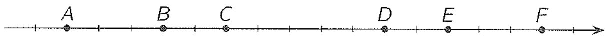
(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{3}{8}$

Lösung: Da es sich bei den beiden Sechsecken um regelmäßige handelt, erhalten wir durch das Ziehen einer Hilfslinie durch zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte zwei kongruente gleichschenklige Trapeze (s. Zeichnung, gestrichelte Linie). Eine weitere Hilfslinie (gepunktet) bildet mit der Parallelogrammseite einen Winkel von 60° bzw. 120°.



Dann ist das dabei entstehende Trapez 1 zu dem „halbierten Sechseck" kongruent, denn zwei Seiten sind identisch und ebenso alle Winkel, woraus die Gleichheit der beiden anderen Seiten folgt. Das andere beim Zeichnen der gepunkteten Hilfslinie entstandene Trapez 2 ist ebenfalls – mit der analogen Begründung – kongruent zu einem halben Sechseck, und somit auch zu Trapez 1. Folglich ist die Hälfte der Parallelogrammfläche schraffiert.

16. Auf dem abgebildeten Zahlenstrahl sind die natürlichen Zahlen markiert. Von den mit den Buchstaben A bis F bezeichneten Zahlen sind mindestens zwei durch 3 und mindestens zwei durch 5 teilbar. Dann ist bzw. sind durch 15 teilbar



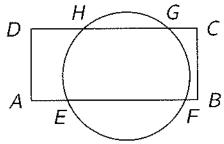
(A) nur eine der Zahlen **(B)** B und D **(C)** C und E
(D) A und F **(E)** alle sechs Zahlen

Lösung: Unter den markierten Zahlen sind nach Voraussetzung mindestens 2 durch 3 teilbare und 2 durch 5 teilbare. Nehmen wir an, dass A weder durch 3 noch durch 5 teilbar ist, also z.B. bei Division durch 3 den Rest 1 lässt. Dann folgt zwar, dass C durch 3 teilbar ist, jedoch lassen B, E und F wie A den Rest 1 und D den Rest 2. Dieser Fall scheidet also aus. Nehmen wir an, dass A bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, so ist außer D keine Zahl durch 3 teilbar. Folglich muss A durch 3 teilbar sein – und das trifft dann auch für B, E und F zu. Wir führen die analogen Überlegungen zur Teilbarkeit durch 5 aus: Angenommen A lässt bei Division durch 5 den Rest 1, dann stellen wir sofort fest, dass keine der fünf Zahlen durch 5 teilbar ist, dieser Fall kann also nicht eintreten. Im Fall, dass A den Rest 2 lässt, ist nur B durch 5 teilbar, beim Rest 3 ist nur E teilbar und beim Rest 4 ist keine der Zahlen durch 5 teilbar. Damit ist klar, dass A durch 3 und 5, also durch 15 teilbar ist. Und dies trifft auch für die 15 Stellen weiter liegende Zahl F zu.

17. Wie viele der Ziffern der 1000-stelligen Zahl 20082008...2008 darf man höchstens löschen, wenn die Summe der Ziffern der verbleibenden Zahl 2008 sein soll?

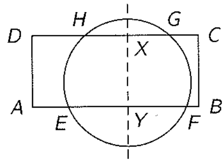
(A) 564 **(B)** 497 **(C)** 499 **(D)** 746 **(E)** 749

Lösung: Ganz sicher dürfen alle Nullen gelöscht werden, das sind 500. Löschen wir nun noch alle Zweien, so bleiben 250 Achten, und die aus diesen Ziffern gebildete Zahl hat die Quersumme 2000, ist also um 8 zu klein. Nehmen wir 4 Zweien hinzu, ist die Quersumme 2008, und wir haben eine 254-ziffrige Zahl, haben also $1000 - 254 = 746$ Ziffern gelöscht.

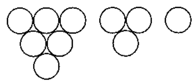


18. Das Rechteck $ABCD$ wird von einem Kreis in den Punkten E, F, G und H geschnitten. Dabei ist $\overline{AE} = 3$, $\overline{DH} = 4$ und $\overline{HG} = 5$. Wie lang ist $\overline{EF}$?
Bemerkung: Die parallelen Sehnen HG und EF haben eine gemeinsame Mittelsenkrechte.

(**A**) 5,5 (**B**) 6 (**C**) 6,2 (**D**) 7 (**E**) $\frac{20}{3}$



Lösung: Wir zeichnen eine Gerade durch den Kreismittelpunkt, senkrecht zu den Seiten AB und CD des Rechtecks. Diese halbiert $\overline{HG}$ in X und $\overline{EF}$ in Y. Da $\overline{HG} = 5$ ist, ist $\overline{HX} = 2{,}5$. Daraus folgt nun, dass $\overline{AY} = \overline{DX} = 6{,}5$ und dass im weiteren $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{EY} = 2 \cdot (\overline{AY} - \overline{AE}) = 2 \cdot (6{,}5 - 3) = 7$ ist.



19. Als 3er-Kugelpyramide wird das Gebilde bezeichnet, das entsteht, wenn die drei rechts abgebildeten Kugelschichten übereinandergelegt werden. Analog gibt es 4er-, 5er-Kugelpyramiden usw. Ich denke mir alle außen liegenden Kugeln einer 8er-Kugelpyramide schwarz, die inneren weiß gefärbt. Dann bilden die weißen Kugeln eine

(**A**) 3er-Kugelpyramide (**B**) 4er-Kugelpyramide (**C**) 5er-Kugelpyramide
(**D**) 6er-Kugelpyramide (**E**) 7er-Kugelpyramide

Lösung: Jede der Kugelpyramiden hat im wesentlichen die Form eines regelmäßigen Tetraeders. Das Tetraeder hat – wie der Name sagt – 4 Seitenflächen. Jede der 4 schwarzen Seitenflächen der 8er-Kugelpyramide muss abgetragen werden, folglich wird die Zahl der Schichten um 4 verringert, wobei eine 4er-Kugelpyramide entsteht.

20. Wie viele Paare reeller Zahlen (x, y) gibt es, für die $x + y = x \cdot y = \frac{x}{y}$ gilt?

(**A**) keines (**B**) 1 Paar (**C**) 2 Paare (**D**) 4 Paare (**E**) 8 Paare

Lösung: Angenommen, es gibt ein Paar (x, y) reeller Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft, für die also gilt: $x + y = xy = \frac{x}{y}$. Dann ist offenbar $y \neq 0$. Aus $xy = \frac{x}{y}$ folgt, dass $y = \frac{1}{y}$ bzw. $y^2 = 1$, d. h. $y = 1$ oder $y = -1$ ist.
Betrachten wir den ersten Fall $y = 1$. Um x zu bestimmen, versuchen wir $x + y = xy$ zu lösen, also x aus $x + 1 = x$ zu berechnen, was offenbar nicht möglich ist, da diese Gleichung keine Lösung hat. Im zweiten Fall lautet die entsprechende Gleichung $x - 1 = -x$, was wir zu $2x = 1$ bzw. $x = \frac{1}{2}$ auflösen. Eine Probe zeigt, dass wir mit $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ tatsächlich eine Lösung gefunden haben.

21. Nach dem Mittagsmahl verteilt mein Vater, der uns mit einem wohlschmeckenden Essen verwöhnt hat, an alle, die bisher gefaulenzt haben, je 10 Kärtchen mit den Zahlen 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68. Wer es schafft, mit der minimalen Anzahl von Kärtchen 100 als Summe zu erzeugen, ist vom Ab- und Aufräumen befreit. Welches ist die kleinste Anzahl?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4
(**D**) 5 (**E**) 100 ist als Summe unmöglich

Lösung: Als Summe soll 100, eine durch 5 teilbare Zahl entstehen. Da alle potentiellen Summanden bei Division durch 5 den Rest 3 lassen, ist die minimale Anzahl 5, wobei die Anzahl der Dreien gerade sein muss. Wir müssen noch zeigen, dass es mit 5 Summanden tatsächlich eine Lösung gibt. Mit $8+18+28+13+33 = 100$ und auch mit $8+3+13+23+53 = 100$ sind Lösungen mit 5 Summanden gefunden.

22. In der Folge $\{a_n\}$ ist jede Summe dreier aufeinanderfolgender Folgenglieder gleich 2008. Es ist bekannt, dass $a_{666} = 666$ und $a_{1004} = 1004$ ist. Dann ist $a_{2008} =$

(**A**) 0 (**B**) 1670 (**C**) 2008 (**D**) 1003 (**E**) 338

Lösung: Da die Summe je dreier aufeinanderfolgender Folgenglieder gleich 2008 ist, gilt dies insbesondere für $a_{666} + a_{667} + a_{668} = 666 + a_{667} + a_{668} = 2008$. Da nun auch $a_{667} + a_{668} + a_{669} = 2008$ ist, muss offenbar $a_{669} = 666$ sein, wie jedes andere Folgenglied mit einem Index, der durch 3 teilbar ist, auch. Aus genau derselben Überlegung heraus ist jedes Folgenglied mit einem Index, der wie 1004 bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, gleich 1004. 2008 lässt bei Division durch 3 den Rest 1, folglich ist das Folgenglied $a_{2008} = 2008 - 666 - 1004 = 338$. Die Folge hat die Form $\{338; 1004; 666; 338; 1004; 666; \ldots\}$.

23. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert, und dies so, dass sich zu jedem der Abstände 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm und 9 cm zwei von diesen Punkten finden lassen, die eben diesen Abstand voneinander haben. Wie viele Punkte sind das mindestens?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

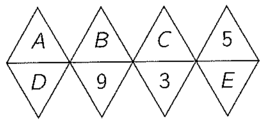
Lösung: Siehe Lösung der Aufgabe 28 in der Klassenstufe 7/8.

24. Gesucht sind alle 6-stelligen Zahlen, bei denen ab der 3. Stelle von links jede Ziffer gleich der Summe der beiden vorausgehenden ist, also z. B. die 6. Ziffer gleich der Summe der 4. und 5. Ziffer. Wie viele solche Zahlen gibt es?

(**A**) keine (**B**) zwei (**C**) vier (**D**) sechs (**E**) acht

Lösung: Angenommen, es gibt eine Zahl $\overline{abcdef}$ mit der beschriebenen Eigenschaft. Dann ist $c = a + b$, $d = b + (a + b) = a + 2b$, $e = (a + b) + (a + 2b) = 2a + 3b$ und schließlich $f = 3a + 5b$. Da f eine Ziffer ist, also $f \leq 9$, kommen als Lösungen nur $a = 1, b = 1$; $a = 1, b = 0$; $a = 2, b = 0$ und $a = 3, b = 0$ in Frage. Die entsprechenden 6-stelligen Zahlen sind 112358; 101123; 202246 und 303369.

25. Das Körpernetz (s. Bild) besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken und lässt sich zu einem Oktaeder falten. Drei der Seitenflächen tragen die Zahlen 9, 3 und 5, die fünf anderen $A, \dots, E$. Beim Oktaeder stoßen in jeder seiner 6 Ecken genau 4 Seitenflächen zusammen. Nun sollen $A, \dots, E$ so durch 2, 4, 6, 7 und 8 ersetzt werden (ohne Wiederholungen), dass die Summe der Zahlen auf solchen 4 Seitenflächen, die einen gemeinsamen Eckpunkt haben, stets gleich ist. Dann ist $B + D =$



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

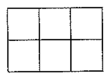
Lösung: Da $2 + 3 + \cdots + 9 = 44$ ist, ist die Summe der Zahlen von je 4 Seitenflächen, die sich in einer Ecke treffen 22. (Das Oktaeder ist eine 4-seitige Doppelpyramide; die Summe auf jeder der 4-seitigen Teilpyramiden ist $44 : 2 = 22$.) Nun erkennen wir, wenn wir uns den Körper fertig gebaut vorstellen, dass $B+C = 22-(9+3) = 10$, dass $D+E = 22-(9+3) = 10$ und dass $C + E = 22 - (3 + 5) = 14$ ist. Addieren wir die beiden ersten Gleichungen und subtrahieren die dritte, erhalten wir $B + C + D + E - C - E = B + D = 10 + 10 - 14 = 6$.

26. Es ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Wenn $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ ist, dann ist $n =$

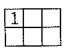
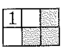
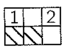
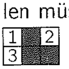
(**A**) 13 (**B**) 14 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 17

Lösung: Offensichtlich ist $n \geq 13$ und $n < 17$. Um nun zu entscheiden, welchen Wert n hat, betrachten wir die Zweierpotenz. Jede gerade Zahl der Fakultät liefert einen Beitrag. Alle durch 2, aber nicht durch 4 teilbaren gehen mit 1 in die Summe ein, alle durch 4, aber nicht durch 8 teilbaren mit 2, alle durch 8, aber nicht durch 16 teilbaren mit 3 usw. Da der Exponent der 2 gerade $15 = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 4$ ist, gilt $n = 16$.

27. An die Tafel wurde ein (2×3)-Feld gezeichnet. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen $1, \dots, 6$ so auf die 6 Felder zu verteilen, dass sich keine aufeinanderfolgenden in benachbarten Feldern befinden, also solchen, die eine gemeinsame Seite haben?



(**A**) 22 (**B**) 24 (**C**) 28 (**D**) 30 (**E**) 32

Lösung: Es ist hilfreich, die Menge der möglichen Anordnungen gut zu strukturieren. Wir konzentrieren uns auf die Lage der Zahl 1 und beginnen damit, dass sich 1 im linken oberen Feld befindet . Dann kann sich 2 nur in einem der nicht-benachbarten, grau gezeichneten Felder befinden . Wir fangen mit der oberen Reihe an. Für 3 muss dann eines der beiden gestreiften Felder gewählt werden . Davon ist jedoch nur das in der Mitte liegende möglich, weil anderenfalls 4, 5 und 6 sich auf die drei dunkelgrauen Felder verteilen müssten, was nicht möglich ist, ohne dass aufeinanderfolgende Zahlen benachbart sind. . Befände sich 3 jedoch in der Mitte, würde es mit Notwendigkeit mit 4 benachbart sein. Folglich muss für 2 ein anderer Platz gewählt werden.

Es befinde sich 2 im Mittelfeld der zweiten Reihe, dann ist sofort der Platz für die 3 vorbestimmt

1		3
	2	

. Aber auch für die 4 kommt nur genau ein Feld in Frage. Für 5 und 6 gibt es zwei Varianten und damit sind die ersten beiden Möglichkeiten gefunden (alle Möglichkeiten s. unten).

Die letzte Möglichkeit für 2 (wenn die 1 oben links ist) ist das Feld rechts unten, wobei dann für 3 die grau gezeichneten Felder verfügbar sind

1		
		2

. Die 3 in die untere linke Ecke zu setzen, ist nicht möglich, denn dann wären 4, 5 und 6

1		
3		2

benachbart. Es bleibt die Möglichkeit, dass die 3 oben in der Mitte steht. In diesem Fall gibt es genau eine Möglichkeit, da die 5, die sowohl zur 4 als auch zur 6 benachbart ist, nicht auf einem der Felder in der unteren Reihe stehen kann. Gleichzeitig können 4 und 6 nicht getauscht werden, weil sonst die 4 mit der 3 eine gemeinsame Grenze hätte. Damit ist der Fall, dass die 1 oben links steht, erschöpft. Offenbar erhalten wir in dem Fall, dass die 1 oben rechts steht, wiederum 3 Möglichkeiten, nämlich die an der Längsachse gespiegelten.

Es bleibt der Fall, dass die 1 oben in der Mitte steht. Die 2 kann dann in einem der grau gezeichneten Felder stehen

	1	

. Dabei brauchen wir nur einen der beiden Fälle zu betrachten, der andere folgt wieder durch Spiegelung an der Längsachse. Stellen wir also die 2 in das linke untere Feld. Dann bleiben für die 3 die beiden schraffiert markierten Felder

	1	
2		

.
Ist die 3 oben rechts, bleiben für 4, 5 und 6 Felder übrig, von denen 2 benachbart sind, in die folglich die 5 nicht eingetragen werden darf. Und da die 4 nicht zur 3 benachbart sein darf, gibt es hier nur eine Lösung. Für 3 im Feld rechts unten muss die 4 im Feld links oben sein, 5 und 6 können die beiden freien Plätze tauschen, hier kommen zwei Möglichkeiten hinzu. Wir haben insgesamt 12 Möglichkeiten gefunden, wenn 1 in der oberen Reihe steht. Fügen wir diejenigen hinzu, die entstehen, wenn an der Querachse gespiegelt wird, so finden wir, dass es insgesamt 24 Möglichkeiten gibt.

Und nun sämtliche Belegungsmöglichkeiten, wobei nur für den ersten der 6 „Grundfälle" alle Spiegelungen angegeben wurden:

1	5	3
4	2	6

3	5	1
6	2	4

1	6	3
4	2	5

1	3	5
4	6	2

5	1	3
2	4	6

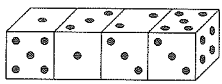
4	1	5
2	6	3

4	1	6
2	5	3

4	2	6
1	5	3

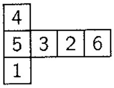
6	2	4
3	5	1

28. Die vier abgebildeten Würfel sind zwar keine Spielwürfel, was bedeutet, dass die Summe der Punkte auf einander gegenüberliegenden Flächen *nicht* 7 sein muss, sie sind jedoch untereinander identisch. Dann ist die Summe der Punkte auf den 6 einander berührenden Seiten gleich

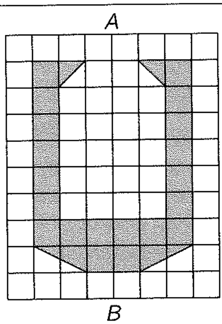


(A) 19 **(B)** 21 **(C)** 23 **(D)** 24 **(E)** 25

Lösung: Da es sich nicht um einen Spielwürfel handelt, ermitteln wir zuerst, welche Zahlen auf einander gegenüberliegenden Würfelflächen liegen. Die 3 ist mit der 1, mit der 2, der 4 und der 5 benachbart, liegt demzufolge der 6 gegenüber. Die 5 ist mit der 3 und folglich auch der 6 sowie der 4 und der 1 benachbart, liegt also der 2 gegenüber. Dann liegt schließlich die 4 der 1 gegenüber:



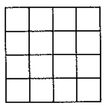
In der Zeichnung des Würfelnetzes ist neben der Anordnung der gegenüberliegenden Seiten auch berücksichtigt, wie die Ecke, in der 3, 4 und 5 zusammenstoßen, orientiert ist.
Wir beginnen nun von rechts die Punktzahlen auf den einander berührenden Seiten zu bestimmen. Der 4 liegt die 1 gegenüber. Beim 2. Würfel (von rechts) kommen die beiden nicht der 2 und nicht der 3 gegenüberliegenden Zahlen, also 1 und 4 an. Beim dritten Würfel kommen entsprechend 5 und 2 hinzu. Beim links liegenden Würfel schließlich kommt die 6 hinzu, da die 3 der Orientierung der aus 1, 5 und 3 gebildeten Ecke entsprechend nach außen weisen muss. Insgesamt zählen wir $1 + 1 + 4 + 2 + 5 + 6 = 19$.



KAENGURU-Geometrie

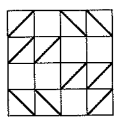
a) Wie groß ist der Umfang des U?
b) Wie groß ist der Flächeninhalt von U und wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche sind das?
c) Wie groß sind Volumen und Oberfläche des Körpers, der entstehen würde, wenn das U um die Achse AB rotieren würde?

29. Ein Quadrat ist in 16 Quadrate unterteilt worden (s. Bild). Nun zeichne ich Diagonalen in einige der 16 Quadrate, aber je höchstens eine und zwar so, dass keine zwei Diagonalen einen Endpunkt gemeinsam haben. Wie viele lassen sich höchstens finden?



(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

Lösung: Eine größere Anzahl als 10 ist nicht möglich, und zwar aus folgendem Grund: Da jeder Punkt des Gitters höchstens Endpunkt einer Diagonalen sein darf, gilt das insbesondere auch für die fünf Punkte des Gitters in der zweiten und vierten Reihe (von oben oder unten). In den daran anschließenden jeweils 8 Quadraten (der oberen Hälfte des großen Quadrates und der unteren Hälfte des großen Quadrates) können also jeweils höchstens 5 Diagonalen liegen.



Tatsächlich gibt es so eine Verteilung, wie die Zeichnung zeigt. Das mögliche Maximum 10 wird also angenommen.

30. Wie viele 2008-stellige Zahlen besitzen die Eigenschaft, dass jede aus zwei aufeinanderfolgenden Ziffern dieser Zahl gebildete zweistellige Zahl durch 17 oder 23 teilbar ist?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 9 (**E**) mehr als 9

Lösung: Wenn eine aus zwei aufeinanderfolgenden Ziffern gebildete Zahl durch 17 oder durch 23 teilbar sein soll, dann kann die Zweierfolge nur eines der Vielfachen 17, 34, 51, 68, 85 bzw. 23, 46, 69, 92 sein. Daraus finden wir als mögliche „Wechselfolge" 2346923469 . . ., wobei jede der einbezogenen 5 Ziffern an der 1. Stelle stehen kann. Genau eine der Ziffern, nämlich 6, tritt in zwei verschiedenen Vielfachen auf, in 68 und in 69. Das führt zu weiteren Lösungen, denn wenn auch mit 68 keine „Wechselfolge" beginnen kann, so kann doch die 2008-stellige Zahl auf 68 enden. Und ebenso auf 685, und ebenso auf 6851 und schließlich auch auf 68517. Damit sind nun alle Möglichkeiten erschöpft. Es sind 9.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 9 und 10 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	C	A	B	E	C	A	A	D
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	C	E	D	A	D	D	D	B	B
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	B	C	A	D	B	A	C	D

Klassenstufen 11 bis 13

1. Wenn $x + y = 0$ und $x \neq 0$, dann ist $\frac{y^{2008}}{x^{2008}} =$

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 2^{2008} (**E**) $\frac{x}{y}$

Lösung: Es ist $\frac{y^{2008}}{x^{2008}} = \frac{y}{x}^{2008} = (-1)^{2008} = 1$.

2. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 45. Dann ist genau eine dieser beiden Zahlen ganz gewiss kleiner als

(**A**) 5 (**B**) 18 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 25

Lösung: Die Hälfte von 45 ist 22,5. Dann muss einer der Summanden eine ganze Zahl kleiner als 22,5 sein, kann also höchstens 22, d. h., muss kleiner als 23 sein.

3. Wie viele Primzahlen p gibt es, für die gilt, dass auch $p^4 + 1$ eine Primzahl ist? (*Zur Erinnerung: 1 ist keine Primzahl.*)

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) fünf (**E**) unendlich viele

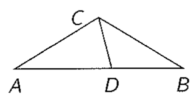
Lösung: Angenommen $p = 2$. Dann ist $p^4 + 1 = 16 + 1 = 17$, also eine Primzahl. Ist p ungerade, wie alle Primzahlen außer 2, so ist $p^4 + 1$ eine gerade Zahl, also keine Primzahl.

4. Es ist $36^2 + 48^2 =$

(**A**) $4^2 \cdot 21^2$ (**B**) $12^2 \cdot 7$ (**C**) $12^2 \cdot 5^2$ (**D**) $12^2 \cdot 7^2$ (**E**) $(36 + 48)^2$

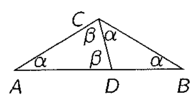
Lösung: Es ist $36^2 + 48^2 = (12^2 \cdot 3^2) + (12^2 \cdot 4^2) = 12^2 \cdot (3^2 + 4^2) = 12^2 \cdot 5^2$.

5. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und einem Punkt D auf der Seite $\overline{AB}$, derart, dass $\overline{AD} = \overline{AC}$ und $\overline{DB} = \overline{DC}$ (s. Abb.). Dann ist $\angle BCA =$



(**A**) 98° (**B**) 100° (**C**) 104° (**D**) 108° (**E**) 110°

Lösung: In der nebenstehenden Zeichnung sind die auf Grund der Gleichschenkligkeit der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ und $\triangle DCA$ gleichen Winkel α bzw. β bereits markiert. Wir suchen $\alpha + \beta$, was sich aus den folgenden beiden Gleichungen berechnen lässt: $2\alpha + \alpha + \beta = 180°$ (Winkelsumme im $\triangle ABC$) und $2\alpha = \beta$ (Außenwinkel im $\triangle BCD$); daraus ergibt sich, wenn wir die 2. in die 1. Gleichung einsetzen $5\alpha = 180°$ bzw. $\alpha = 36°$ ist. Dann ist $\beta = 72°$ und $\alpha + \beta = 108°$.



6. Jedes der 36 Kinder im Kindergarten meines Bruders hat ein Känguru gezeichnet. Gelbe, schwarze und braune Buntstifte standen zur Auswahl, aber nur 5 Kinder haben alle drei Farben benutzt. Als ich die Zeichnungen angucke, stelle ich fest, dass auf 25 von ihnen Gelb, auf 28 Braun und auf 20 Schwarz auftaucht. Dann krieg ich raus, wie viele einfarbige Kängurus dabei sind, sagt meine Mutter. Es sind

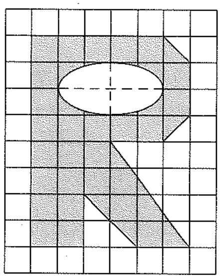
(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Die Anzahl der Kinder, die zwei Farben verwandt haben, bezeichnen wir mit x, und y Kinder mögen nur eine Farbe verwandt haben. Dann ist zum einen $5 + x + y = 36$ und zum anderen $3 \cdot 5 + 2x + y = 25 + 28 + 20 = 73$. Wir lösen die erste Gleichung nach x auf: $x = 31 - y$ und setzen dies in die zweite Gleichung ein: $15 + 2 \cdot (31 - y) + y = 73$ bzw. $-y = 73 - 15 - 62 = -4$, also $y = 4$.

7. Der maximale Wert, den $f(x) = |5 \sin x - 3|$ für $x \in \mathbb{R}$ annehmen kann, ist

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) π (**D**) 5π (**E**) 8

Lösung: Es ist $-1 \leq \sin x \leq 1$. Daraus folgt, dass $-8 \leq 5 \sin x - 3 \leq 2$ und folglich $0 \leq |5 \sin x - 3| \leq 8$ ist.



KAENGURU-Geometrie

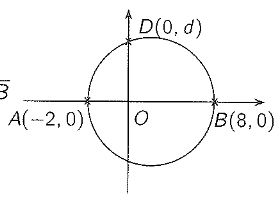
a) Wie groß ist der äußere Umfang des R, welchen Umfang hat die Ellipse, die innere Begrenzung ist?

b) Wie groß ist der Flächeninhalt von R (graue Fläche) und wie viel Prozent der umgebenden Rechteckfläche sind das?

c) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der entstehen würde, wenn die innere Ellipse um ihre horizontale Achse, welches, wenn sie um ihre vertikale Achse rotieren würde?

8. Die Zeichnung zeigt einen Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ und dem Punkt D auf der Kreislinie. Dann ist $d =$

(**A**) 3 (**B**) $2\sqrt{3}$ (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6



Lösung: Da $\overline{AB}$ Durchmesser ist, ist $\triangle ABD$ rechtwinklig, $\overline{DO}$ ist Höhe. Folglich ist nach dem Höhensatz $d^2 = \overline{DO}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{OB} = 2 \cdot 8 = 4^2$ bzw. $d = 4$.

9. Die fünf voneinander verschiedenen Punkte $A_1, \ldots, A_5$ liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, wobei die Abstände der Punkte voneinander unterschiedlich sein können. Auf derselben Geraden soll ein Punkt P markiert werden, für den die Summe der Abstände der fünf Punkte zu P, also $\overline{A_1P} + \overline{A_2P} + \overline{A_3P} + \overline{A_4P} + \overline{A_5P}$ minimal ist. Dann ist P

(**A**) identisch mit A_2
(**B**) identisch mit A_3
(**C**) identisch mit A_4
(**D**) irgendein Punkt zwischen A_2 und A_4
(**E**) irgendein Punkt zwischen A_1 und A_5

Lösung: Es ist $\overline{A_1P} + \overline{A_5P} \geq \overline{A_1A_5}$, und das Gleichheitszeichen gilt, wenn P zur Strecke A_1A_5 gehört. Ebenso ist $\overline{A_2P} + \overline{A_4P} \geq \overline{A_2A_4}$, und das Gleichheitszeichen gilt, wenn P zur Strecke A_2A_4 gehört. Schließlich ist $A_3P \geq 0$, wobei Gleichheit gilt, wenn $A_3 = P$ ist. Folglich gilt $\overline{A_1P} + \overline{A_2P} + \overline{A_3P} + \overline{A_4P} + \overline{A_5P} \geq \overline{A_1A_5} + \overline{A_2A_4} + 0$, und da für $A_3 = P$ alle Gleichheitszeichen gelten, ist (**B**) die Lösung.

10. Nora möchte in die beiden Leerstellen von 2__8 zwei Ziffern schreiben und dabei eine Zahl erhalten, die durch 3 teilbar ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 19 (**D**) 20 (**E**) 33

Lösung: Damit die Zahl durch 3 teilbar ist, muss die Quersumme durch 3 teilbar sein. Da $2 + 8$ bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, muss die Quersumme der beiden anderen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Das trifft für genau ein Drittel der Zahlen, die kleiner als 100 sind, zu, also ist 33 die Lösung. – Wem diese knappe Lösung nicht einfiel, der konnte auch alle Möglichkeiten aufschreiben und auszählen.

11. Gegeben sind die sieben Zahlen $-9; 0; -5; 5; -4; -1; -3$. Ich bilde aus sechs dieser Zahlen Paare, so dass die drei Summen, die ich aus den beiden Zahlen eines jeden Paares bilden kann, gleich sind. Welche Zahl bleibt übrig?

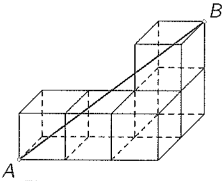
(**A**) 5 (**B**) 0 (**C**) -3 (**D**) -4 (**E**) -5

Lösung: Da hier 3 Summen gleich sein müssen, besteht eine gute Strategie darin, alle 7 Zahlen zu summieren und sich zu fragen, welche ich weglassen kann, wenn die Restsumme durch 3 teilbar sein soll. Die Summe aller 7 Zahlen ist $-9 + 0 - 5 + 5 - 4 - 1 - 3 = -17$. Subtrahiere ich von dieser Zahl eine, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, ist das Ergebnis durch 3 teilbar. Von den 7 Zahlen hat nur eine, -5, diese Eigenschaft. Nun geben wir noch die drei Paare an: Es ist $-9 + 5 = -1 - 3 = 0 - 4 = -4$.

12. Bei der Mathematikolympiade sind bei uns in der Regionalrunde fünf unterschiedlich schwere Aufgaben gestellt worden. Sie wurden mit fünf unterschiedlichen Punktzahlen bewertet. Als ich meine Schwester nach ihrem Abschneiden frage, sagt sie mir, dass sie sowohl die beiden mit den höchsten als auch die beiden mit den niedrigsten Punktzahlen bewerteten Aufgaben vollständig gelöst und dafür 10 bzw. 18 Punkte erhalten hat. Wie viele Punkte gab es für die Aufgabe mit mittlerer Bewertung?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Da die Punktzahl-Summe der beiden verschiedenen niedrig bewerteten Aufgaben 10 ist, muss die größere der Punktzahlen ≥ 6 sein – folglich die gesuchte mittlere Punktzahl ≥ 7. Ebenso muss eine der Punktzahlen der beiden verschiedenen am höchsten bewerteten Aufgaben ≤ 8 sein – folglich die mittlere ≤ 7. Also ist die mittlere Punktzahl 7.



13. Die fünf Würfel in der Zeichnung haben je die Kantenlänge 1. Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$?

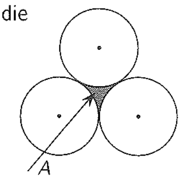
(**A**) $\sqrt{17}$ (**B**) 7 (**C**) $\sqrt{13}$ (**D**) $\sqrt{7}$ (**E**) $\sqrt{14}$

Lösung: Nach dem „dreidimensionalen Pythagoras" gilt $\overline{AB} = \sqrt{3^2+2^2+2^2} = \sqrt{17}$. Dieses Ergebnis lässt sich auch mit dem Satz des Pythagoras, wie er aus der Schule bekannt ist, erhalten. Wir stellen uns die Strecke $\overline{AB}$ in die Grundfläche des Körpers projiziert vor. Die Projektion von B sei B'. Dann ist nach dem Satz von Pythagoras $\overline{AB'}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Wir wenden nun den Satz des Pythagoras noch einmal an, und zwar in dem Dreieck $\triangle AB'B$. Dort finden wir $\overline{AB}^2 = 13 + 2^2 = 17$. Dann ist $\overline{AB} = \sqrt{17}$.

14. Zähler und Nenner eines Bruches b sind beides negative Zahlen, der Zähler ist um 1 größer als der Nenner. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

(**A**) $b < -1$ (**B**) $-1 < b < 0$ (**C**) $0 < b < 1$
(**D**) $b > 1$ (**E**) b kann sowohl positiv als auch negativ sein

Lösung: Wir wissen, dass beide Zahlen – Zähler und Nenner – negativ sind, folglich ist der Bruch positiv. Da der Zähler um 1 größer ist als der Nenner, ist sein Absolutbetrag um 1 kleiner als der Absolutbetrag des Nenners, daraus folgt $0 < b < 1$.



15. Drei Kreise, die jeder den Radius r haben, berühren einander, wie es die nebenstehende Zeichnung zeigt. Welchen Flächeninhalt hat A?

(**A**) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right) r^2$ (**B**) $\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2$ (**C**) $\frac{1}{8}\pi r^2$
(**D**) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \pi r^2$ (**E**) $\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2$

Lösung: Wir verbinden die Mittelpunkte der drei Kreise miteinander, wobei ein gleichseitiges Dreieck entsteht, da jede der Verbindungen genau 2 Radien lang ist. Da die Winkel im gleichseitigen Dreieck 60° sind, schneidet das Dreieck aus jedem der drei Kreise ein Sechstel heraus, denn $360 : 60 = 6$.

Der gesuchte Flächeninhalt ist die Differenz aus der Fläche des gleichseitigen Dreiecks und der Summe der drei Kreissechstel, also $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r\frac{1}{2}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{6}\pi r^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right) r^2$.

16. Wenn die fünf Zahlen 24, a, b, c, 80 aufeinanderfolgende Elemente einer arithmetischen Folge sind, so ist $a+b+c=$

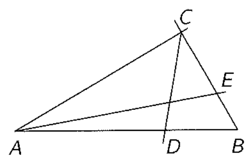
(**A**) 52 (**B**) 104 (**C**) 156 (**D**) 208 (**E**) 260

Lösung: Mit d bezeichnen wir die Differenz der arithmetischen Folge, in der die Zahlen 24, a, b, c, 80 aufeinander folgen. Also ist $a = 24 + d, b = 24 + 2d, c = 24 + 3d$ und $80 = 24 + 4d$, woraus wir $d = (80 - 24) : 4 = 14$ errechnen.
Dann ist $a + b + c = 3 \cdot 24 + 6 \cdot 14 = 156$.

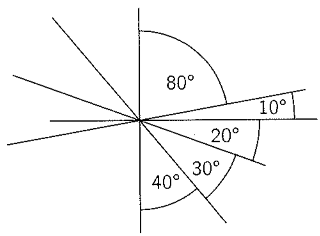
17. Eine Anzahl Geraden seien so in die Ebene gezeichnet, dass sich an den Schnittpunkten dieser Geraden alle folgenden Winkel finden lassen: 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°. Wie viele Geraden mussten dazu mindestens gezeichnet werden?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wir überlegen uns zuerst, dass 4 Geraden nicht ausreichen: Je zwei Geraden haben einen Schnittpunkt miteinander. Da sich aus 4 Geraden 6 verschiedene Paare auswählen lassen, gibt es $6 \cdot 2$ Schnittwinkel. Von den beiden Schnittwinkeln jedes Geradenpaares ist jedoch nur höchstens einer kleiner als 90°. Folglich muss die gesuchte Anzahl größer als 4 sein. Die Anzahl 5 ist prinzipiell möglich, da wir hier $\binom{5}{2} = 10$ Paare von Geraden haben, die sich schneiden. Und es ist auch tatsächlich möglich, fünf Geraden so in der Ebene anzuordnen, dass sich alle neun Winkel an geeigneter Stelle finden lassen. Wir geben zwei unterschiedliche Varianten an (s. Zeichnung).



Im ersten Fall (obere Zeichnung) ist $\angle BAE = 10°$, $\angle EAC = 20°$, also ist $\angle BAC = 30°$. Weiter ist $\angle CBA = 60°$, woraus $\angle ACB = 90°$ folgt. Damit wissen wir, dass im rechtwinkligen Dreieck AEC $\angle CEA = 70°$ ist. Die noch fehlenden Winkel finden wir an den Dreiecken ADC und DBC. Die Gerade CD ist so durch den Eckpunkt C des Dreiecks ABC gelegt, dass $\angle ACD = 50°$ und $\angle DCB = 40°$ ist. Und für den Außenwinkel des Dreiecks ADC bei D gilt schließlich $\angle BDC = 80°$.



Eine zweite Lagemöglichkeit ist darunter gezeichnet. Hier ist es eine Geradenschar aus 5 Geraden. Die Winkel zwischen benachbarten sind eingezeichnet. Die fehlenden Winkel ergeben sich als Summen: $50° = 20° + 30°$, $60° = 10° + 20° + 30°$, $70° = 30° + 40°$ und $90° = 80° + 10°$.

18. Angenommen, es gilt $x^2yz^3 = 7^3$ und außerdem $xy^2 = 7^9$. Dann ist $xyz =$

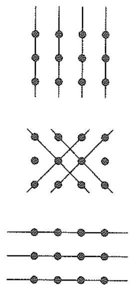
(**A**) 7^{10} (**B**) 7^9 (**C**) 7^8 (**D**) 7^6 (**E**) 7^4

Lösung: Wir multiplizieren die beiden gegebenen Gleichungen: $x^2yz^3 \cdot xy^2 = 7^3 \cdot 7^9$ bzw. $(xyz)^3 = 7^{3+9} = 7^{12}$, woraus $xyz = 7^{12:3} = 7^4$ folgt.

19. Aus den zwölf Punkten des abgebildeten Gitters werden zufällig drei ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen?

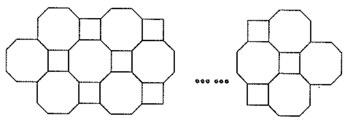
(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{16}$ (E) $\frac{1}{20}$

Lösung: Wir erfassen zuerst, welche Möglichkeiten es gibt, Geraden so zu legen, dass mindestens drei der Punkte aus dem (3×4)-Gitter darauf liegen. Die Möglichkeiten sind in den beiden Zeichnungen zusammengestellt. Die oben gezeichneten Geraden enthalten je genau drei, die unten gezeichneten je vier Punkte. In jedem der Fälle, dass die Gerade 4 Punkte enthält, gibt es genau 4 Möglichkeiten, 3 Punkte auszuwählen.



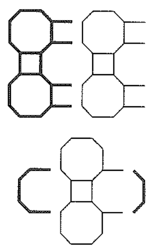
Insgesamt gibt es bei den 12 Punkten $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ Möglichkeiten, drei auszuwählen. In unserer ersten Überlegung hatten wir gefunden, dass in $4 + 2 + 2 + 3 \cdot 4 = 20$ Fällen diese Punkte auf einer Geraden liegen. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{20}{220} = \frac{1}{11}$.

20. Auf dem Weg zum Badmintontraining laufe ich jedes Mal an einem imposanten, aus lauter gleichlangen Vierkanteisenstäben geschmiedeten Zaun (s. Zeichnung) vorbei. Genau 61 Achtecke habe ich gezählt. Die Anzahl der Vierkantstäbe des Zauns beträgt dann



(A) 328 (B) 400 (C) 416 (D) 446 (E) 488

Lösung: Wir wählen ein geeignetes Teilstück aus dem Zaun aus und zählen die Vierkantstäbe dieses Teils (s. Bild). Es besteht aus drei Achtecken und Quadratteilen, wobei das 3. Achteck erst beim Zusammensetzen entsteht, ebenso wie die beiden Quadrate. Da insgesamt 61 Achtecke gezählt wurden, existieren von diesem Teilstück also 20, das 61. Achteck ist das links außen – außerdem ist es für die Komplettierung am rechten Rand notwendig, die beiden „offenen Quadratseiten" sowie ein zusätzliches Vierkantstück zum abschließenden Achteck zu ergänzen.



In dem von uns gewählten Teilstück finden wir 22 Vierkantstäbe. Was nun noch hinzukommt, ist oben bereits beschrieben und in der unteren Zeichnung noch einmal dargestellt. Es sind links 5 Vierkantstäbe und rechts einer. Damit wurden insgesamt $20 \cdot 22 + 5 + 1 = 446$ Vierkantstäbe verbaut.

21. In der nebenstehenden Multiplikationsaufgabe sind die Sternchen durch Ziffern zu ersetzen, so dass die Aufgabe korrekt ist. Dann ist die Summe der Ziffern des Produktes gleich

$$
\begin{array}{r}
* * * \cdot 1 * * \\
\hline
* * 2 \\
9 0 * \\
2 2 * * \\
\hline
5 6 * * *
\end{array}
$$

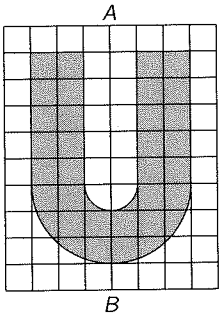
(A) 16 (B) 20 (C) 26 (D) 30 (E) 27

Lösung: Wir bestimmen den ersten Faktor mit Hilfe der Summe $9 + 2 + \star = 16$, woraus für dieses Sternchen folgt, dass es gleich 5 ist. Damit ist der erste Faktor 452. Dann finden wir, dass die Zehnerstelle des zweiten Faktors 2 – und dass die Einerstelle 5 ist. Das Produkt $452 \cdot 125$ ist 56500, und damit die Summe der Ziffern 16.

22. Es sei bekannt, dass für die drei reellen Zahlen x, y, z die Gleichungen $x + y + z = 1$ und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ gelten. Dann ist $x^2 + y^2 + z^2$ gleich

(A) 0 **(B)** $3\sqrt{2}$ **(C)** 1 **(D)** $3\sqrt{3}$ **(E)** 2

Lösung: Da wir an dem Wert $x^2 + y^2 + z^2$ interessiert sind, versuchen wir es mit dem Quadrieren der Summe $x+y+z$. Es ist $1 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2\cdot(xy+yz+zx)$. Nun ist eine Idee gefragt, wie unter Einbeziehung der vorgegebenen Gleichheit $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$ eine Erkenntnis gewonnen werden kann. Z. B. können wir bei dem Term $xy + yz + zx$ das Produkt xyz ausklammern. Dann finden wir $xy+yz+zx = xyz\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 0$, womit gezeigt ist, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist.

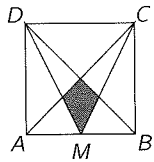


KAENGURU-Geometrie

a) Wie groß ist der Umfang von U, wobei die Begrenzung nach unten zwei konzentrische Halbkreise sind?

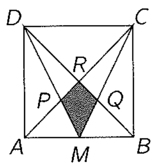
b) Wie groß ist der Flächeninhalt von U und wie groß sein prozentualer Anteil an der umgebenden Rechtecksfläche?

c) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der entstehen würde, wenn das U um seine vertikale Achse rotieren würde?



23. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 1. Mit M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ bezeichnet. Der Flächeninhalt der grau gezeichneten Fläche ist dann

(A) $\frac{1}{24}$ **(B)** $\frac{1}{16}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{2}{25}$ **(E)** $\frac{1}{12}$

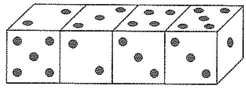


Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe führt uns die Erkenntnis, dass DM und AR Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ADB$ sind (Bezeichnungen sind der Zeichnung zu entnehmen). Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 1 : 2, woraus folgt, dass $\overline{PM} = \frac{1}{3}\overline{DM}$ ist. Dann ist natürlich auch die Höhe von P auf AM ein Drittel der Höhe von D auf AM, d. h. $\frac{1}{3}$.

Da R Mittelpunkt des Quadrats ist, ist $\overline{RM} = \frac{1}{2}$. Wir berechnen den Flächeninhalt von $MQRP$ als Differenz von Dreiecksflächen:

$$A_{MQRP} = A_{ABR} - A_{AMP} - A_{MBQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

24. Die vier abgebildeten Würfel sind zwar keine Spielwürfel, was bedeutet, dass die Summe der Punkte auf einander gegenüberliegenden Flächen *nicht* 7 sein muss, aber sie sind untereinander identisch. Dann ist die Summe der Punkte auf den 6 Würfelseiten, in denen je zwei der Würfel einander berühren, gleich



(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 22 (**D**) 24 (**E**) 25

Lösung: Die Aufgabe ist vom mathematischen Inhalt her identisch mit Aufgabe 28 in der Klassenstufe 9/10. Wir wiederholen daher hier nicht die Überlegungen, sondern geben nur die Ergebnisse an. Zuerst bestimmen wir, welche Zahlen sich auf einander gegenüberliegenden Würfelseiten befinden. Dies sind 3 und 6, 5 und 4 sowie 1 und 2. Ein Netz, das dann auch die Lage von 1, 3 und 5 in der gemeinsamen Ecke berücksichtigt, ist:

6			
5	1	4	2
3			

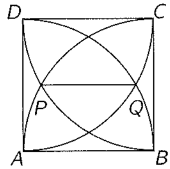
Daraus finden wir nun, dass auf dem Würfel ganz links nach links außen die 3 liegen muss, wir also die 6 zu berücksichtigen haben. Beim 2. Würfel sind die „Berührungsseiten" die mit der 5 und der 4, beim 3. Würfel die mit der 1 und der 2 und beim Würfel rechts ist es die der 1 gegenüberliegende 2. Die Summe ist dann $6 + 5 + 4 + 1 + 2 + 2 = 20$.

25. Wie viele 4-stellige Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Ziffer, die an der Tausenderstelle steht, größer ist als jede der drei anderen Ziffern?

(**A**) 2025 (**B**) 285 (**C**) 3024 (**D**) 504 (**E**) 2970

Lösung: Beginnen wir mit der 1 an der Tausenderstelle, so ist klar, dass an den anderen 3 Stellen je eine 0 stehen muss, es gibt genau eine Möglichkeit. Für die 2 an der Tausenderstelle können an den anderen Stellen 1 oder 0 auftauchen, und zwar an jeder Stelle – unabhängig davon, was an einer der anderen ist. Es kommen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ Möglichkeiten hinzu. Wir sehen, dass für 3 als Ziffer an der Tausenderstelle 3^3 Möglichkeiten existieren, da die Ziffern 0, 1 und 2 unabhängig voneinander auf die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterstelle zu setzen sind. Dies gilt analog für jede mögliche Ziffer, so dass sich insgesamt $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3$ ergibt. Wer sich daran erinnert, wie die Summenformel lautet, kann das Ergebnis sofort angeben. Es kann auch einfach addiert werden. Wer dabei mit $1 + 8 = 9$, $9 + 27 = 36$, $36 + 64 = 100$ beginnt, kann bemerken, dass $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} i\right)^2$ ist. Und da die Summe in der Klammer das wohlbekannte Ergebnis $\frac{n(n+1)}{2}$ hat, finden wir als gesuchte Anzahl $\left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025$.

26. Es ist $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge 1. Um A, B, C bzw. D werden Viertelkreise mit dem Radius 1 gezeichnet, wobei als Schnittpunkte P und Q entstehen (s. Zeichnung). Wie lang ist $\overline{PQ}$?



(A) $2-\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(E)** $\sqrt{3}-1$

Lösung: Da P auf dem Kreisbogen um B mit $\overline{AB}$ und um C mit Radius $\overline{BC}$ liegt und $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist, ist $\triangle BCP$ gleichseitig. Analog ist $\triangle AQD$ gleichseitig. Verlängere ich PQ bis zum Schnittpunkt S mit BC, so ist die Länge von $\overline{PS}$, d. h. die Länge der Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die Differenz $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist die Länge von $\overline{QS}$, die aus Symmetriegründen auch gleich ist zum Abstand von P zu AD. Daraus folgt, dass $\overline{PQ} = 1-2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1$ ist.

27. Judith aus Goslar geht in diesem Jahr in Lausanne in der Schweiz zur Schule. Dort ist die 6 die beste Zensur. Nach dem ersten Viertel des Schuljahres ist Judiths Notendurchschnitt in Mathematik 5,0. Sie verspricht ihren Eltern, sich bis zum Schuljahresende zu verbessern und schafft auch wirklich in den nächsten drei Tests je eine 6. Ihr Durchschnitt ist nun exakt 5,3. Judith will einen Durchschnitt von 5,6 erreichen, indem sie bei den verbleibenden Tests jeweils eine 6 schreibt. Dann beträgt die Anzahl der noch nötigen Sechsen

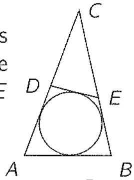
(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 11

Lösung: Die Formulierung der Aufgabe ist leider nicht exakt. Sie lässt verschiedene Interpretationen zu, die darin begründet sind, dass nicht deutlich wurde, ob es sich bei 5,0 bzw. 5,6 um exakte oder gerundete Zahlen handeln soll. Bei der hier vorliegenden Aufgabe sollte der Zensurendurchschnitt zu Beginn exakt 5,0 sein, während 5,6 auch durch Aufrunden entstehen können sollte. Für die so verstandene Aufgabe folgt unten der Lösungsweg.

Unter der Annahme, dass auch der Durchschnitt 5,6 exakt getroffen werden sollte, ergibt sich, dass es noch 8 weiterer Tests mit der Note 6 bedarf, um diesen Durchschnitt zu erreichen – und wer dies angekreuzt hatte, erhielt ebenfalls die volle Punktzahl.

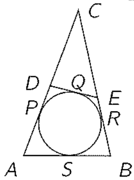
Nun zur Lösung:
Judith hat nach dem ersten Vierteljahr einen Zensurendurchschnitt von 5,0. Wir können voraussetzen, dass sie k-mal die Zensur 5 bekommen hat. Nun erhält sie 3 Sechsen und verbessert sich auf 5,3. Dann gilt also $\frac{k\cdot 5+3\cdot 6}{k+3} = 5{,}3$, woraus wir $k=7$ errechnen. Will Judith den Durchschnitt auf 5,6 verbessern, so sind – vorausgesetzt, sie bekommt nur noch Sechsen – x Sechsen nötig, und es muss die folgende Ungleichung für x gelten: $\frac{7\cdot 5+(3+x)\cdot 6}{7+3+x} > 5,55$. Das formen wir um zu $53+6x > 55,5+5,55x$ bzw. $0,45x > 2,5$, woraus $x>5$ folgt. Und mit 7 Fünfen und $3+6=9$ Sechsen beträgt der Zensurendurchschnitt in Mathematik auch wirklich $(35+54):(7+9) = 89:16 = 5,5625$.

28. In das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 5$ und $\overline{CA} = 6$ sei ein Kreis einbeschrieben (s. Abb., Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht). Ferner sei die Strecke $\overline{DE}$ Tangente an den Kreis. Dann ist der Umfang des Dreiecks CDE gleich



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Wir nennen P, Q, R bzw. S die Berührungspunkte der Geraden AC, DE, CB bzw. AB mit dem Kreis. Da $\overline{DP} = \overline{DQ}$ und $\overline{EQ} = \overline{ER}$ ist, ist der Umfang von $\triangle CDE$ ebenso groß wie die Summe der beiden Tangentenabschnitte $\overline{CP}$ und $\overline{CR}$. Ebenso sind die beiden Tangentenabschnitte von A bzw. B aus je gleich lang. Folglich sind diese vier Abschnitte zusammen doppelt so lang wie die Dreiecksseite $\overline{AB}$.



Damit ist der Umfang u_{CDE} von $\triangle CDE$ gleich dem Umfang von $\triangle ABC$ vermindert um die doppelte Länge der Seite $\overline{AB}$. In Zahlen ausgedrückt: $u_{CDE} = (3 + 5 + 6) - 2 \cdot 3 = 8$.

29. Das erste Element einer Folge ist $a_1 = 0$. Für $n \geq 1$ ist $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$. Ist nun $a_k = 2008$, so ist $k =$

(**A**) 2008 (**B**) 2009 (**C**) 4017 (**D**) 4018 (**E**) 4019

Lösung: Wir schreiben einige Folgenglieder auf, um einen Eindruck von der Gestalt der Folge zu bekommen. Es ist $a_2 = 0-1\cdot 1$, $a_3 = 0-1+1\cdot 2$, $a_4 = 0-1+2-3$, $a_5 = -1+2-3+4$, ... Die Folgenglieder sind alternierende Summen, abwechselnd positiv und negativ, und zwar $0; -1; 1; -2; 2; -3 \ldots$, so dass schnell überschlagen werden kann, dass nur die 4017 als Lösung in Frage kommt. Wir wollen jedoch beweisen, dass die Folge tatsächlich die genannte Gestalt hat. Den Beweis führen wir mit der Methode der vollständigen Induktion.
Wir behaupten also, dass $a_{2n} = -n$ und $a_{2n+1} = n$ ist. Dass der Induktionsanfang richtig ist, haben wir mit den Anfangsgliedern bereits gezeigt. Wir nehmen also an, dass es ein k gibt, für das die Behauptung zutrifft. Dann ist $a_{2k+2} = a_{2k} + (-1)^{2k} \cdot 2k + (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1)$ bzw. $a_{2k+2} = -k + 2k - (2k+1) = -(k+1)$. Der Beweis für ungeraden Index verläuft analog.
Nun rechnen wir noch die Lösung aus: Da $a_k = 2008 > 0$ ist, muss der Index ungerade sein und zwar $k = 2 \cdot 2008 + 1 = 4017$.

30. Es sei M das Produkt aus dem Umfang des Dreiecks und der Summe der drei Höhen dieses Dreiecks. Vorausgesetzt, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks 1 ist, dann ist von den folgenden Aussagen *genau eine* falsch. Welche?

(**A**) M kann größer als 100 sein (**B**) es ist stets $M > 6$
(**C**) M kann gleich 18 sein (**D**) M kann kleiner als 12 sein
(**E**) wenn das Dreieck rechtwinklig ist, so ist $M > 16$

Lösung: Wir beweisen zuerst, dass M nicht kleiner als 12 sein kann. Mit a, b, c seien die Seiten, mit h_a, h_b bzw. h_c die Höhen des Dreiecks bezeichnet. Wir multiplizieren aus: $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) = (ah_a + bh_b + ch_c) + bh_a + ch_a + ah_b + ch_b + ah_c + bh_c$. Die 3 Summanden in der Klammer sind jeweils das Doppelte des Flächeninhalts des Dreiecks, die Summe folglich gleich 6. Die restlichen Summanden fassen wir geeignet zusammen zu: $(a+b)h_c + (b+c)h_a + (c+a)h_b$. Da nach Dreiecksungleichung $a + b > c; b + c > a$ und

$c+a>b$ gilt, ist $(a+b)h_c+(b+c)h_a+(c+a)h_b > ch_c+ah_a+bh_b = 6$. Folglich gilt stets $M > 12$ im Widerspruch zur Aussage (**E**). Damit können wir das Kreuz richtig setzen.
Natürlich wollen wir nun noch zeigen, dass jede der anderen Aussagen auch wirklich zutreffen kann. Wir haben bereits gezeigt, dass (**B**) stets zutrifft. Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, gilt $h_a = b$ und $h_b = a$. Dann gilt $(a+b+c)(b+a+h_c) = (2ab+ch_c)+a(a+c)+b(b+c)+h_c(a+b)$. Wieder ist die Summe in der ersten Klammer gleich 6 und auf Grund der Dreiecksungleichung ist $h_c(a+b) > h_c c > 2$. Es sei weiterhin ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \geq b$. Dann ist, da die Hypotenuse c größer als jede Kathete ist, $a+c > 2a$ und folglich $a(a+c)+b(b+c) > 2a^2+ba > 2ab+ab = 3ab = 6$ bzw. $(a+b+c)(b+a+h_c) > 16$. Dass M beliebig groß werden kann, ist offensichtlich, denn wählen wir z. B. ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\frac{1}{10}$ und der Höhe 10, so sind die beiden Schenkel je etwas größer als 10, das Produkt M somit größer als $20 \cdot 10 > 100$. Um schließlich zu zeigen, dass auch der unter (**C**) aufgeführte Fall eintreten kann, rechnen wir M für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks mit Flächeninhalt 1 aus. Setzen wir die Seitenlänge x, so ist $\frac{1}{2}\sqrt{3}x$ die Länge der Höhe, woraus sich wegen $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}x = 1$ ergibt, dass $x^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ist.
Dann ist $M = 3x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}x = \frac{9}{2}\sqrt{3}x^2 = \frac{9}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = 18$.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 11 bis 13 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	B	C	D	B	E	C	B	E
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	C	A	C	A	C	B	E	B	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	C	E	B	A	E	A	D	C	D

Zeig uns, was du kannst!
Auf www.du-kannst-mathe.de erwartet dich ein galaktisches Mathe-Abenteuer. Logilos, Gnorken, Suna, Morabianer und Arithmanden treten zum mathematischen Wettkampf an. Wähle eine Spielfigur und löse auf der Raumstation Zeta12 spannende mathematische Knobeleien. Hier triffst du außerdem Freunde und die klügsten Köpfe der Galaxie.
Mach mit beim spannendsten Mathespiel des Universums. Wir warten schon auf dich.
Känguru der Mathematik 2008
Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

www.mathe-kaenguru.de