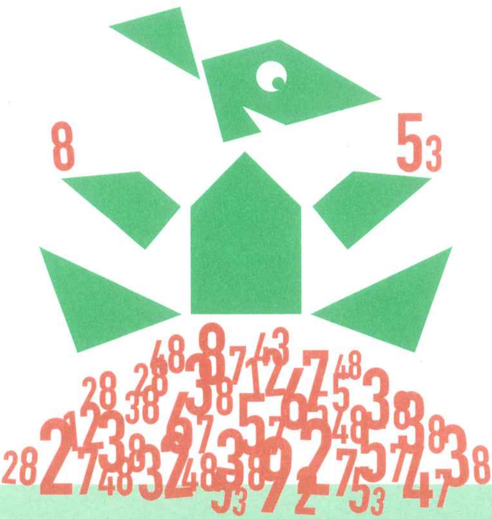
Hw

2007 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2007!

Im Jahre 2007 haben in Deutschland mehr als eine halbe Million und in der Schweiz genau 10 138 Schülerinnen und Schüler aus über 5 500 bzw. 74 Schulen am Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ teilgenommen und sich an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières“ erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben versucht. Unerwartet wird dabei für manchen der Teilnehmenden die Vielfalt der Aufgabenstellungen gewesen sein. Aber mathematische Methoden finden eben an den unterschiedlichsten Stellen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, das Berücksichtigen von Wahrscheinlichkeiten – all das sind Dinge, die besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt werden und die im täglichen Leben überall eine Rolle spielen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V.“ hoffen, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

In der vorliegenden Broschüre sind die Aufgaben sowie Hinweise zu den Lösungen zusammengestellt worden. Dazu noch einige Bemerkungen: In der tiefsten Klassenstufe 3/4 wurden 21 Aufgaben gestellt, die Teilnehmer aus den höheren Klassenstufen hatten 30 Aufgaben zu lösen. Für das erste Drittel der 21 bzw. 30 Aufgaben konnten jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte erreicht werden. Bei einer falschen Antwort gab es Punktabzug, und zwar wurden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte abgezogen, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe wurde 1 Punkt abgezogen und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe betrug der Punktabzug 1.25 Punkte. Wenn keine Antwort angekreuzt war, gab es 0 Punkte. Auch wenn mehr als eine Antwort angekreuzt war – was nicht erlaubt ist – gab es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekam 21 bzw. 30 Punkte als Grundpunktzahl; auf diese Weise kann es eine negative Gesamtpunktzahl nicht geben, und die Höchstpunktzahl beträgt 105 bzw. 150 Punkte.

Die Organisation für die Schweiz wurde auch in diesem Jahr von der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK) übernommen. Die deutsche Übersetzung der Aufgaben, die ja zunächst in englischer Sprache vorliegen, wurde gemeinsam entwickelt, so dass schliesslich einmal mehr eine Version entstand, die mit dem gleichen Wortlaut sowohl in Deutschland als auch in der Schweiz verwendet werden konnte.

Viel Freude mit Mathematik wünscht euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack unter Mithilfe von Dr. A. Noack, Dr. D. Vigerske, Hj. Stocker und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin
www.mathe-kaenguru.de

Umschlaggestaltung: Peperoni Werbeagentur GmbH

Druck: Lussi Druck AG, Offsetdruck, 6370 Stans

Deutschschweizerische Mathematikkommission: www.vsmp.ch/dmk

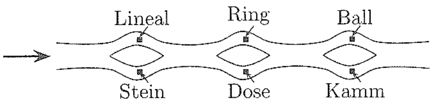
Klassenstufen 3 und 4

1. Wie viele Buchstaben des Wortes KAENGURU sind auch im Wort MATHEMATIK enthalten?

(**A**) keine (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

Lösung: Genau die Buchstaben K, A und E aus dem Wort KAENGURU sind auch im Wort MATHEMATIK vorhanden, also sind es drei.

2. Bei einem Wettlauf ist eine Strecke mit Hindernissen zu passieren; links und rechts der Hindernisse liegen Dinge, von denen beim Vorbeilaufen genau 3 einzusammeln sind.



Wenn nur vorwärts gelaufen werden darf, welche 3 Dinge können dann nicht zusammen ins Ziel getragen werden?

(**A**) Lineal, Dose, Ball (**B**) Stein, Dose, Kamm (**C**) Lineal, Ring, Stein
(**D**) Stein, Ring, Kamm (**E**) Lineal, Ring, Ball

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass es beim Vorwärtslaufen nicht möglich ist, zwei auf verschiedenen Seiten desselben Hindernisses liegende Dinge einzusammeln, weil man dafür gewiss ein Stück rückwärts laufen müsste. Gehen wir nun die jeweils 3 Trophäen durch, die während des Wettlaufs gesammelt worden sein könnten, so finden wir schnell, dass die unter (**C**) gegebene Zusammenstellung nicht möglich ist, denn Lineal und Stein liegen auf verschiedenen Seiten des ersten Hindernisses.

3. $2007 + 1023 =$

(**A**) 3303 (**B**) 3030 (**C**) 3300 (**D**) 3003 (**E**) 4030

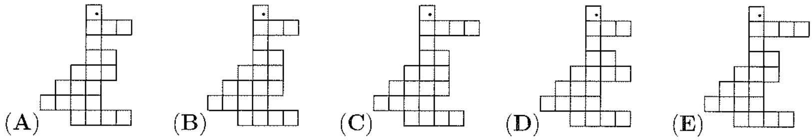
Lösung: Wer aufmerksam gerechnet hat, erhielt $2007 + 1023 = 3030$. Also ist (**B**) richtig.

4. Eines Tages ringt sich der Großvater durch, seine Sammlung von Matchboxautos aufzulösen und alle Autos seinen Enkeln zu schenken. Er stellt fest, dass er jedem der 6 Enkelkinder dieselbe Anzahl schenken kann, ohne dass etwas übrig bleibt. Wie viele Autos könnten in der großväterlichen Sammlung sein?

(**A**) 27 (**B**) 34 (**C**) 56 (**D**) 77 (**E**) 84

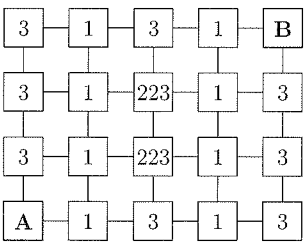
Lösung: Da der Großvater 6 Enkel hat und jedes Enkelkind dieselbe Zahl von Matchboxautos bekommt, muss die Anzahl durch 6 teilbar sein. Überprüfen wir die vorgeschlagenen Antworten daraufhin, stellen wir fest, dass nur 84 durch 6 teilbar ist. 27 lässt den Rest 3 bei Division durch 6, 34 den Rest 4, 56 den Rest 2 und 77 den Rest 5.

5. In welcher Känguru-Figur sind die meisten kleinen Quadrate zu finden?



Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Eine Möglichkeit besteht darin, die kleinen Kästchen jeweils zu zählen und die Anzahlen zu notieren. Ebenso kommen wir zum Ergebnis durch Vergleichen der Känguru-Figuren. Wir können nämlich bemerken, dass sich die Kängurus nur bzgl. „Schnauze" und „Bauch" unterscheiden und **(C)** als *das* Känguru, das sowohl eine längere Schnauze als auch einen dickeren Bauch hat, als jenes mit den meisten kleinen Quadraten ermitteln.
Ganz ordentlich durchgeführt sieht das dann so aus: Vergleichen wir beispielsweise die unter **(A)** und **(B)** abgebildeten und beginnen beim Kopf, so finden wir, dass beide in der 1. bis 5. Schicht übereinstimmen, in der 6. Schicht hat das Känguru unter **(B)** ein Kästchen mehr (4 statt 3), die beiden unteren Schichten sind wieder identisch. Also setzen wir das Vergleichen fort, indem wir **(B)** und **(C)** vergleichen, denn **(A)** kann die Lösung nicht sein. Hier nun stellen wir fest, dass sich **(B)** und **(C)** genau in der 2. Schicht (von oben) unterscheiden und **(C)** dort mehr Kästchen besitzt, womit **(B)** ausscheidet. Zwischen **(C)** und **(D)** schlägt der Vergleich zugunsten von **(C)** aus, denn sowohl in der 2. als auch in der 6. Schicht hat **(C)** ein Kästchen mehr, während **(D)** nur in der 5. Schicht ein Kästchen mehr hat. Nun folgt der letzte Vergleich, der zwischen **(C)** und **(E)**. Wieder hat **(C)** ein Kästchen mehr, wieder in der 6. Schicht. Was sich so lang liest, ist schneller getan, als das Auszählen aller Kästchen.

2007-Knobelei - 1



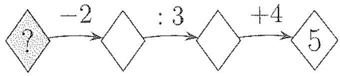
Wie viele verschiedene direkte Wege von A nach B gibt es in der abgebildeten Figur, bei denen das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2007 beträgt?
Dabei bedeutet „direkter Weg": Es dürfen keine Umwege gemacht werden, d. h. es darf nur nach rechts oder nach oben fortgeschritten werden.

6. Am Weg durch unseren kleinen Stadtpark stehen rechts – immer im selben Abstand voneinander - 9 Laternen. Meine kleine Nichte schafft es von einer zur nächsten mit 7 Hüpfern. Wie viele Hüpfer braucht sie von der ersten bis zur letzten Laterne?

(A) 72 **(B)** 81 **(C)** 49 **(D)** 63 **(E)** 56

Lösung: Zwischen 9 Laternen gibt es genau 8 Zwischenräume. Meine Nichte muss also 8 solche Räume mit je 7 Hüpfern überbrücken. Die Anzahl ihrer Hüpfer ist $8 \cdot 7 = 56$.

7. Welche Zahl muss in das erste Viereck geschrieben werden, damit nach den angegebenen Rechnungen schließlich 5 das Ergebnis ist?



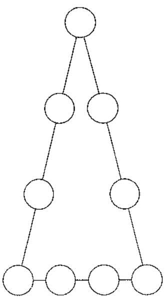
(A) 0 (B) 5 (C) 7 (D) 10 (E) 12

Lösung: Wir beginnen am Ende der langen Rechnung und kehren alle Schritte um: $5 - 4 = 1$, $1 \cdot 3 = 3$, und schließlich ist die Zahl, von der wir 2 subtrahieren müssen, um 3 zu erhalten, $3 + 2 = 5$. Also ist 5 die gesuchte Zahl. Wir machen die Probe: $(5-2) : 3 + 4 = 3 : 3 + 4 = 1 + 4 = 5$.

8. Es ist $4 \cdot 4 + 4 + 4 + 4 \cdot 4 =$

(A) 40 (B) 48 (C) 24 (D) 112 (E) 64

Lösung: Das Rechnen bei dieser Aufgabe ist nicht schwer. Wichtig ist zu beachten, dass Punktrechnung vor Strichrechnung geht, dass also *vor* dem Addieren die beiden Multiplikationen ausgeführt werden müssen: $4 \cdot 4 + 4 + 4 + 4 \cdot 4 = 16 + 4 + 4 + 16 = 40$.



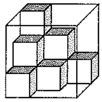
Schreib in jeden der 9 Kreise, die die Seiten eines Dreiecks schmücken, genau eine der Zahlen von 1 bis 9 und zwar so, dass die Summe der Zahlen, die sich auf derselben Dreiecksseite befinden, jeweils 17 ist.

9. Als Kati ihre Spaghetti mit Tomatensoße fast aufgegessen und keinen rechten Hunger mehr hat, zählt sie noch 13 Spaghetti auf ihrem Teller. Sie beginnt, die Spaghetti hintereinander zu legen und fragt sich, wie lang die Schlange aus allen 13 Spaghetti wäre, wenn sie alle je 25 cm lang wären. Das wären

(A) 6,5 m (B) 2,5 m (C) 12,5 m (D) 7,25 m (E) 3,25 m

Lösung: Kati will 13 je 25 cm lange Spaghetti hintereinanderlegen; dann ist die Spaghettischlange insgesamt $13 \cdot 25$ cm $= 2,5$ m $+ 0,75$ m $= 3,25$ m lang.
Hier lohnt es sich auch, falsche Lösungsvarianten auszuschließen: Da die Spaghetti je 25 cm lang sind, sind bereits zehn 2,5 m lang, also ist Variante (**B**) zu kurz. Andererseits sind die 6,5 m von (**A**) viel zu lang. Folglich ist – den Regeln des Känguruwettbewerbs entsprechend – (**E**) richtig.

10. Für die kleinen Würfel, mit denen Theo spielt, hat er einen großen Hohlwürfel, in den er sie nach dem Spielen zurücklegt. Einige hat er schon einsortiert (s. Zeichnung). Wie viele finden noch Platz?



(A) 9 (B) 13 (C) 17 (D) 21 (E) 27

Lösung: In den großen Würfel können insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleine Würfel einsortiert werden. Die bereits einsortierten kleinen Würfel lassen sich gut auszählen; es sind 10. Dann müssen also noch 17 eingeräumt werden.
Ein etwas anderer Zugang ist folgender: Wir können uns gut vorstellen, mit den vorhandenen Würfeln die unterste Schicht aufzufüllen. Es bleibt ein Würfel übrig, und es passen $2 \cdot 9 - 1 = 18 - 1 = 17$ Würfel insgesamt zu den schon vorhandenen dazu hinein.

11. Elsa feierte am 1. Januar 2000 ihren 4. Geburtstag. Sie ist ein Jahr und einen Tag älter als Lisa. Wann feierte Lisa ihren 4. Geburtstag?

(A) am 31. Dezember 2001
(B) am 31. Dezember 2000
(C) am 2. Januar 1999
(D) am 2. Januar 2001
(E) am 31. Dezember 1999

Lösung: Da Lisa mehr als ein Jahr jünger als Elsa ist, ist sie 2001 geboren, und dies einen Tag nach dem Geburtstag von Elsa, d. h., am 2. Januar 2001.

2007-Knobelei - 2

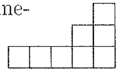
Gesucht wird eine bestimmte gebrochene Zahl. Multipliziert man diese Zahl mit 380, subtrahiert man davon 21, und multipliziert man dieses Ergebnis mit 5, so erhält man den gleichen Wert, wie wenn man das 107-fache der gesuchten Zahl von 1901 subtrahiert. Um welche Zahl handelt es sich?

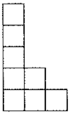
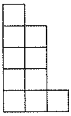
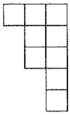
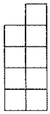
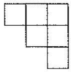
12. David geht mit einem 5-Euro-Schein zum Bäcker. Er soll 8 Brötchen, das Stück zu 40 Cent, einkaufen. Für den Rest darf er seine Lieblingskekse, das Stück zu 25 Cent, mitbringen. Wie viele Kekse kann er vom Restgeld höchstens kaufen?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

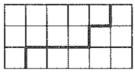
Lösung: Wenn 1 Brötchen 40 Cent kostet, kosten 8 Brötchen 320 Cent bzw. 3 Euro und 20 Cent. David bleiben wegen $5,00 - 3,20 = 1,80$ genau 1 Euro und 80 Cent. Nun ist diese Summe durch 0,25 zu teilen, wobei 7 Rest 0,05 das Ergebnis ist. Viele werden hier anders vorgehen und ihre Erfahrung beim Umgang und Rechnen mit Geld nutzen: Wenn David sich überlegt, dass er für 4 seiner Lieblingskekse 1 Euro bezahlen muss, dann wird er auch schnell wissen, dass die restlichen 80 Cent für 3 Kekse ausreichen, er insgesamt also 7 kaufen kann, wobei dann noch 5 Cent übrig bleiben.

13. Welches Stückchen Karopapier bildet zusammen mit dem rechts gezeichneten ein Rechteck?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: Wer ein sehr gutes Vorstellungsvermögen hat, mag schnell erkennen, welches die richtige Lösung ist. Wer Mühe hat, sich auszumalen, wie er welches Teil drehen muss, damit es sich mit dem Musterteil zu einem Rechteck zusammenfügen lässt, kann auch folgendermaßen vorgehen: Das Musterteil besteht aus 8 Kästchen, ist 5 Kästchen breit und 3 Kästchen hoch. Von den beiden Seiten des Rechtecks, das entstehen soll, muss also die eine *mindestens* 3, die andere *mindestens* 5 Kästchen lang sein. Zählt man die Kästchen bei den einzelnen Lösungsvorschlägen, so würde die Summe aus beiden bei (**A**) 16 betragen. Da sich 16 nur in $1 \cdot 16$, $2 \cdot 8$ oder $4 \cdot 4$ zerlegen lässt, scheidet (**A**) sofort aus. Teil (**B**) hat mit dem Musterteil zusammen 18 kleine Kästchen, hier ist die Zerlegung in $3 \cdot 6$ denkbar, und das funktioniert auch, wie die Abbildung zeigt. Teil (**B**) ist dazu um 90° gedreht worden.

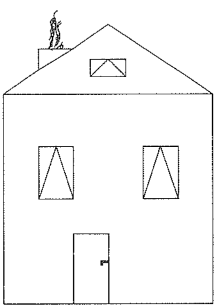


Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch die anderen Lösungsvorschläge. In den Fällen (**C**) und (**D**) ist die Summe der Kästchen 17, lässt sich also nur als $1 \cdot 17$ darstellen und demzufolge scheiden diese Möglichkeiten aus. Im Fall (**E**) sieht man die Untauglichkeit ganz gewiss sofort, und auch die Summe, 14, und die damit verbundenen Zerlegungmöglichkeiten $1 \cdot 14$ oder $2 \cdot 7$ zeigen, dass dies nicht die Lösung sein kann.

14. Franziska denkt sich eine Zahl zwischen 1 und 9 und schreibt sie auf, dann schreibt sie eine Ziffer rechts daneben, wodurch eine 2-stellige Zahl entsteht. Sie addiert 19 und erhält 72. Welche Zahl hat sie zuerst aufgeschrieben?

(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Wir wissen, dass die 2-stellige Zahl plus 19 die Zahl 72 ist. Damit ist klar, dass die 2-stellige Zahl, die Franziska nach dem Anhängen einer Ziffer an die ausgedachte Zahl erhalten hat, $72 - 19 = 53$ ist. Franziska hatte zuerst die Zahl 5 aufgeschrieben.



Wie viele Dreiecke und wie viele Vierecke sind auf dem nebenstehenden Bild zu sehen?

15. Ein Vater, 33 Jahre alt, hat zwei Töchter. Die Töchter sind 10 bzw. 11 Jahre alt. Wie viele Jahre vergehen, bis die beiden Mädchen zusammen genauso alt sind wie ihr Vater?

(**A**) 12 (**B**) 11 (**C**) 10 (**D**) 20 (**E**) 21

Lösung: Die beiden Töchter sind zusammen 21 Jahre alt. Ihnen fehlen 12 Jahre zum Alter des Vaters. Also müssen 12 Jahre vergehen, in denen die Summe der Lebensalter der beiden Mädchen um 24, das Alter des Vaters um 12 wächst, damit dann beide übereinstimmen $(10+12)+(11+12)=33+12$.
Bei dieser Aufgaben können die Zahlvorgaben auch gut ausprobiert werden. Man muss nur daran denken, die entsprechende Zahl von Jahren für *jedes* der Mädchen zu zählen.

16. Ali hat für seine Schwester Ida eine Sparbüchse gebaut, mit einem Sicherheitsschloss mit 3 Knöpfen, wie bei einem Tresor. Jeden der 3 Knöpfe kann Ida in jede der 3 Stellungen ▲, ■ oder ● drehen. Ida soll festlegen, welches Zeichen die einzelnen Knöpfe fürs Öffnen zeigen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 18 (**D**) 27 (**E**) 30

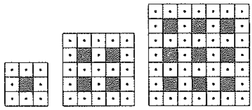
Lösung: Jeder der 3 Knöpfe kann jede der 3 Stellungen einnehmen. Dabei ist die Stellung eines jeden Knopfes unabhängig davon, welche Stellung die anderen beiden haben. Daher kann zu jeder der drei Stellungen ▲, ■ bzw. ● des ersten Knopfes jede des zweiten hinzutreten, so dass es $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten sind. Beim dritten Knopf, der wiederum unabhängig von den beiden anderen gedreht werden kann, können zu den bisherigen dessen drei Stellungen ▲, ■ und ● kombiniert werden, so dass es dann insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ Möglichkeiten sind. – Bei dieser Aufgabe war es auch gut möglich, sich alle Varianten, die Ida sich aussuchen konnte, aufzuzeichnen oder aufzuschreiben. Allerdings nimmt das bei 27 Möglichkeiten schon eine ganze Menge Zeit in Anspruch.

17. Eine Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet, heißt Palindromzahl. So sind z. B. 116611 und 707 Palindromzahlen. Wie groß ist der Unterschied zwischen der Palindromzahl 191 und der nächstgrößeren Palindromzahl?

(**A**) 10 (**B**) 101 (**C**) 21 (**D**) 210 (**E**) 11

Lösung: Ein recht kurzer Weg, um das Kreuz an die richtige Stelle zu setzen, ist es, zur gegebenen Palindromzahl 191 die als Lösung vorgeschlagenen Zahlen zu addieren und zu gucken, welche Summe dann eine Palindromzahl ist. Aber Vorsicht! Die Summe $191+21$ ist die Palindromzahl 212, und trotzdem ist 21 nicht die Lösung, denn mit 11 gibt es eine kleinere Zahl, so dass $191+11$ ebenfalls eine Palindromzahl ist. Es wäre also vernünftig, das Testen mit der kleinsten Lösungsvariante zu beginnen.
Ein zweiter Weg, um die nächstgrößere Palindromzahl zu finden, besteht darin, einfach von 191 an weiterzählen.
Schließlich geben wir noch eine Lösung durch Überlegung an: Wir suchen eine Zahl Z, die wir zu 191 addieren wollen, um die nächstgrößere Palindromzahl zu erhalten. Da eine Änderung der Einerstelle eine Änderung der 100er Stelle nach sich zieht, hoffen wir zuerst, mit einer Änderung allein der Zehnerstelle um 1, was die Addition von $Z=10$ bedeutet, die Lösung zu finden. Das scheitert allerdings daran, dass auf der Zehnerstelle von 191 eine 9 steht, womit die Addition von 10 breits zu einer Änderung der 100er-Stelle führt. Das Ergebnis ist $191+10=201$. Nun ist aber klar, dass wir nur noch 1 addieren müssen, um wieder eine Palindromzahl zu erhalten: $191+11=202$.

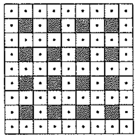
18. Nach seiner ersten Schlossbesichtigung träumt Caspar: Er geht durch eine alte Burg, die Zimmer werden von einem zum nächsten immer größer, und auf jeder der weißen Kacheln des Kachelfußbodens liegt ein Goldstück. Im ersten Zimmer sind es 8, im zweiten 21, im dritten 40 (s. Zeichnung). Da wird er wach und fragt sich, wie viele Goldstücke er im nächstgrößeren Zimmer gefunden hätte.



8 21 40

(A) 75 (B) 49 (C) 65 (D) 70 (E) 63

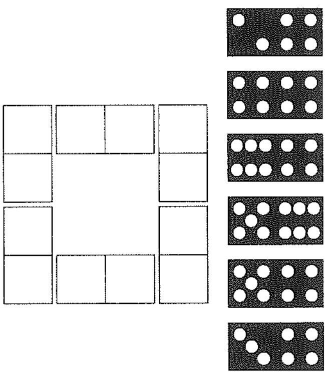
Lösung: Das nächstgrößere Zimmer hat einen Fußboden aus $9 \cdot 9 = 81$ Kacheln, wovon $4 \cdot 4 = 16$ dunkel sind. Der Rest, $81 - 16 = 65$, ist weiß – mit einem Goldstück darauf. Das lässt sich auch gut zeichnen:



19. Janek, Jens, Jim, John und Justus stehen am Rand des Schwimmbeckens und springen dann alle, einer nach dem anderen, ins Wasser. Janek ist nach Jim gesprungen. Jens hüpfte vor Janek hinein, und zwar unmittelbar nach John. John war vor Jim im Wasser, ist aber nicht als Erster hineingesprungen. Als wievielter sprang Justus?

(A) als Erster (B) als Zweiter (C) als Dritter
(D) als Vierter (E) als Letzter

Lösung: Indem wir das $<$-Zeichen verwenden, um zu beschreiben, dass jemand *vor* einem anderen ins Wasser gesprungen ist, versuchen wir, Ordnung in die 5er-Gruppe zu bekommen. Die Aussage „Janek springt nach Jim" beschreiben wir als Jim $<$ Janek. Als nächstes wissen wir, dass auch Jens $<$ Janek ist sowie, dass John $<$ Jens, und niemand ist zwischen John und Jens hineingesprungen. Die beiden letzten Aussagen ergeben zusammengefasst: John $<$ Jens $<$ Janek. Der nächste Satz aus der Aufgabenstellung („John war vor Jim im Wasser...") ergibt John $<$ Jim. Mit den früheren Ergebnissen – Jim $<$ Janek und John $<$ Jens $<$ Janek – und dem Wissen, dass Jens direkt nach John an der Reihe war, können wir schlussfolgern, dass John $<$ Jens $<$ Jim $<$ Janek sein muss. Das sind schon vier der Jungen. Da nun John nicht als Erster gesprungen ist, bleibt dies für Justus übrig. Er war der Erste.



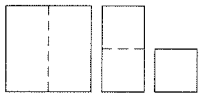
Ordne die sechs Dominosteine so in das vorgezeichnete Quadrat ein, dass die Summe der Punkte auf jeder der Quadratseiten 17 ist.

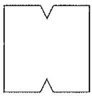
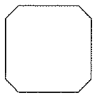
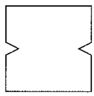
20. Beim Stadtfest gibt es in diesem Jahr auch ein kleines altertümliches Karussell. Die Gondeln sind in gleichen Abständen zueinander im Kreis angeordnet und fortlaufend mit 1, 2, 3... nummeriert. Tilli und ihre Freundin Elli fahren damit und sitzen sich direkt gegenüber, Tilli sitzt in der Gondel Nr. 11, Elli in der Nr. 4. Wie viele Gondeln hat das Karussell insgesamt?

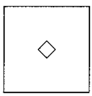
(**A**) 13 (**B**) 14 (**C**) 16 (**D**) 17 (**E**) 22

Lösung: Da sich die Gondeln von Tilli und Elli genau einander gegenüber befinden, sind auf beiden Seiten zwischen ihnen gleich viele Gondeln, und zwar so viele, wie es natürliche Zahlen zwischen 4 und 11 gibt. Das sind 6. Dann hat das Karussell also $2 \cdot 6 + 1 + 1 = 14$ Gondeln.

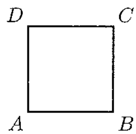
21. Ich falte ein quadratisches Stück Papier zweimal (s. Zeichnung). Dann schneide ich eine der vier Ecken ab und falte das Papier wieder auseinander. Wie sieht das „Deckchen" nun aus?

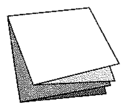


(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) alle abgebildeten Deckchen sind möglich

Lösung: Die Ecken des doppelt zusammengefalteten Papierquadrats $ABCD$ unterscheiden sich voneinander. Um die Unterschiede deutlich zu machen, ist das Papier in der Zeichnung unten nicht fest gefaltet, sondern lässt einen Blick zu, wie die 4 Papierschichten aufeinanderliegen. Schneiden wir die Ecke D ab, erhalten wir das Deckchen, das bei (**D**) abgebildet ist, denn D ist der Mittelpunkt des ursprünglichen Quadrates. Schneiden wir die Ecke A oder die Ecke C ab, bekommen wir (**A**) oder (**C**) – in den beiden Eckpunkten fallen jeweils die Mittelpunkte von einander gegenüberliegenden Seiten des ursprünglichen Quadrates zusammen. Und schneiden wir die Ecke B ab, dann sieht das Deckchen wie bei (**B**) aus – in diesem Eckpunkt des doppelt gefalteten Quadrats fallen die vier Eckpunkte des ursprünglichen Quadrats zusammen. Alle Varianten sind also möglich.





Wer auf die Idee kommt, die unter (**A**) bis (**D**) gezeichneten Deckchen in Gedanken zusammenzufalten, merkt schnell, dass jedes zum Abschneiden einer Ecke des zusammengefalteten Papiers gehört.

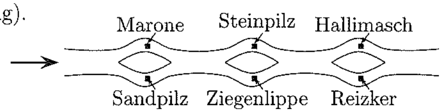
Als die Großmutter gefragt wird, wie viele Faschingspfannkuchen sie mit Senf gefüllt habe, antwortet sie: „Wüsstet ihr die Zahl der mit Senf gefüllten Pfannkuchen und würdet zu dieser Zahl 9 addieren, diese Summe dann mit 9 multiplizieren, so wäre dies um 9 größer als 99.
Wie viele Pfannkuchen sind mit Senf gefüllt?

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 3 und 4 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Antwort	D	C	B	E	C	E	B
Aufgabe	8	9	10	11	12	13	14
Antwort	A	E	C	D	E	B	B
Aufgabe	15	16	17	18	19	20	21
Antwort	A	D	E	C	A	B	E

Klassenstufen 5 und 6

1. Beim Waldspaziergang entdecken wir am Wegesrand Pilze, die wir im Vorbeilaufen einsammeln (s. Zeichnung).

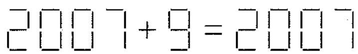


Wenn wir immer vorwärts laufen, welche 3 Pilze können dann nicht im Korb sein?

(**A**) Sandpilz, Steinpilz, Reizker (**B**) Marone, Ziegenlippe, Reizker
(**C**) Marone, Steinpilz, Hallimasch (**D**) Sandpilz, Ziegenlippe, Hallimasch
(**E**) Sandpilz, Steinpilz, Ziegenlippe

Lösung: Da wir vorwärts laufen sollen, dürfen keine Pilze in unserem Korb landen, die auf unterschiedlichen Seiten der Hindernisse innerhalb des Weges stehen, da es gewiss erforderlich wäre, dafür ein Stück zurück zu gehen. Von den fünf vorgeschlagenen Körbcheninhalten enthält nur einer, nämlich (**E**) zwei Pilze, die beiderseits desselben Hindernisses stehen, und zwar Steinpilz und Ziegenlippe. Alle anderen Korbinhalte könnte man im Vorwärtsgehen sammeln.

2007-Knobelei - 3



Die aus 50 gleich langen Hölzchen gelegte Gleichung ist offenbar falsch. Wer schafft es, diese Gleichung zu berichtigen, und zwar durch Umlegen von

a) einem Hölzchen, b) zwei Hölzchen, c) drei Hölzchen, d) vier Hölzchen?

2. Max, Meta, Mia, Morten und Myriam stehen im Kreis, Willi in der Mitte. Er zählt – bei Max beginnend, dann folgen Meta, Mia, Morten und Myriam in dieser Reihenfolge – mit dem 13-stelligen Abzählreim „Ene–mene–mink–mank–pink–pank–ene–mene–acka–dacka–eia–weia–weg“ ab, ohne sich selbst mitzuzählen. Wer ist zuerst „weg“?

(**A**) Max (**B**) Meta (**C**) Mia (**D**) Morten (**E**) Myriam

Lösung: Die Namen lassen sich abzählen, indem man hintereinander mit dem Finger darauf tippt, als würde man auf die Kinder beim Abzählen tippen. Mia ist dann als Erste „weg“.
Eine mathematische Methode herauszufinden, wer „weg“ ist, gibt es aber auch. Wenn wir einen n-stelligen Abzählvers haben und k Kinder „abgezählt“ werden, so beginnt das Abzählen mit dem ersten Kind, geht die Reihe durch und ist beim ersten Kind wieder, nachdem k-mal abgezählt wurde, dann wieder nach $2k$-mal usw. Letztlich ist *das* Kind „weg“, das auf dem Platz steht, der gleich dem Rest ist, den n bei Division durch k lässt. In unserem Fall ist $13 : 5 = 2$ Rest 3 – und Mia steht auch richtig auf dem dritten Platz.

3. Wie oft steht die 5 in der Rechnung $5 + 5 + \cdots + 5$, wenn $125 = 5^3$ das Ergebnis ist?

(A) 125-mal (B) 3-mal (C) 25-mal (D) 100-mal (E) 50-mal

Lösung: Es ist $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5$, also muss man 25-mal die 5 addieren.

4. Die kernigen Kängurus aus Canberra brauchen nur 6 Sekunden, wenn sie hintereinander 4 Riesensprünge machen. Wie viele Sekunden brauchen sie, wenn sie hintereinander 10 solche Riesensprünge machen?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 20

Lösung: Da 10 Sprünge zweieinhalbmal so viele wie 4 Sprünge sind, brauchen die kernigen Kängurus also zweieinhalbmal so viel Zeit wie für 4 Sprünge, d. h. 15 Sekunden.

5. $2007 : (2 + 0 + 0 + 7) - (2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 7) =$

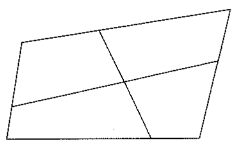
(A) 323 (B) 322 (C) 232 (D) 223 (E) 233

Lösung: Zuerst rechnen wir Summe bzw. Produkt in den Klammern aus: $2+0+0+7 = 9$ ist die Summe, und das Produkt ist, da ein Faktor (sogar zwei) 0 ist, natürlich 0. Damit erhalten wir $2007 : 9 = 223$.

6. Im alten Schulhaus gibt es quadratische Schiebefenster, jedes 95 cm × 95 cm groß. Ich habe ausprobiert, dass ich die Scheibe maximal um 80 cm nach links schieben kann, wo sie in der Wand verschwindet. Wie groß ist dann die Fläche des Teils der Fensterscheibe, der noch aus der Wand herausguckt?

(A) 1425 cm^2 (B) 1550 cm^2 (C) 1575 cm^2 (D) 1625 cm^2 (E) 1775 cm^2

Lösung: Von den ursprünglich 95 cm Breite ragt ein 95 cm − 80 cm = 15 cm breiter und 95 cm hoher Teil heraus. Es handelt sich um eine Rechtecksfläche; folglich ist der Flächeninhalt 15 cm · 95 cm = 1425 cm^2.



Wie viele Vierecke erkennst du in der Zeichnung?

7. Jimmy ist ein knappes Jahr älter als Jonny, nämlich nur genau einen Tag weniger als ein ganzes Jahr. Welches Geburtsdatum hat Jonny, wenn Jimmy am Neujahrstag des Jahres 2001 geboren wurde ?

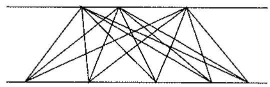
(A) 31.12.2003 (B) 2.1.2003 (C) 31.12.2002 (D) 2.1.2001 (E) 31.12.2001

Lösung: Wenn Jimmy 1 Jahr minus 1 Tag älter als Jonny ist, bedeutet dies, dass Jonny – bei der besonderen Lage des Geburtstages von Jimmy – im selben Jahr wie dieser, und zwar am letzten Tag des Jahres, dem 31.12.2001, zur Welt kam.

8. Ich zeichne zwei parallele Geraden und markiere auf der einen 5, auf der anderen 3 Punkte. Nun verbinde ich jeden der 5 Punkte auf der einen mit jedem der 3 Punkte auf der anderen Parallelen. Wie viele Strecken muss ich zeichnen?

(**A**) 8 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 25

Lösung: Von jedem der fünf Punkte auf der einen Parallele zeichne ich drei Strecken – zu jedem der drei Punkte auf der anderen Parallelen genau eine. Das sind insgesamt $5 \cdot 3 = 15$.

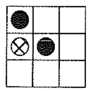


9. Ein Würfel der Kantenlänge 10 cm besteht aus kleinen, lückenlos aufeinander geschichteten Würfeln der Kantenlänge 1 cm. Ließen sich alle kleinen Würfel – einer über dem anderen – zu einem Turm aufschichten, wie hoch wäre dieser Turm?

(**A**) 10 cm (**B**) 100 cm (**C**) 10 m (**D**) 100 m (**E**) 1 km

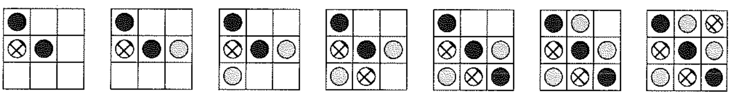
Lösung: Der große Würfel mit der Kantenlänge 10 cm besteht aus 10 völlig gleichen Schichten kleiner Würfel, in jeder dieser Schichten sind $10 \cdot 10 = 100$ kleine Würfel. Da es 10 solche Schichten gibt, haben wir insgesamt $10 \cdot 100 = 1000$ kleine Würfel. Jeder dieser Würfel bringt 1 cm Turmhöhe. Dann wäre der Turm also 1000 cm = 10 m hoch.

10. In einem 3×3-Feld will ich mit drei Sorten Steinen ● ◎ ⊗ ein solches Muster legen, dass alle Steine einer jeden Reihe und alle Steine einer jeden Spalte voneinander verschieden sind. Wenn drei Steine schon so liegen wie in der Zeichnung, wie viele Möglichkeiten gibt es dann, das Feld ganz auszulegen?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Bei der Überlegung, wie die Steine anzuordnen sind, ergibt sich zwingend genau eine Möglichkeit für das fertige Feld. Man kann z. B. wie folgt herangehen: Da in der mittleren Reihe des Feldes bereits 2 Steine liegen, gibt es für den freien Platz nur genau eine Möglichkeit, nämlich einen grauen Stein zu legen. Ebenso ist in der 1. Spalte nur ein Feld frei, auf das gleichfalls ein grauer Stein gelegt werden *muss*. Wollen wir nun die untere Reihe auffüllen, so können wir neben den grauen Stein nur einen gemusterten legen, denn in der mittleren Spalte ist bereits ein schwarzer. Damit ergibt sich auch der Rest der Belegung ohne Alternative.



11. Agnes ist jetzt 10 Jahre alt; ihr Vater Horst viermal so alt wie sie. Wie alt wird Horst sein, wenn Agnes doppelt so alt ist wie jetzt?

(**A**) 48 (**B**) 50 (**C**) 56 (**D**) 60 (**E**) 80

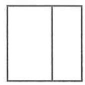
Lösung: Agnes ist, da sie gerade 10 Jahre alt ist, in 10 Jahren doppelt so alt wie jetzt. Ihr Vater, zur Zeit viermal so alt wie Agnes, also 40 Jahre alt, ist dann $40 + 10 = 50$.

12. Schreiben wir eine 2-stellige Zahl zweimal nebeneinander, so entsteht eine 4-stellige Zahl. Wievielmal so groß wie die 2-stellige Zahl ist diese 4-stellige Zahl?

(**A**) 100-mal (**B**) 1000-mal (**C**) 11-mal (**D**) 101-mal (**E**) 1001-mal

Lösung: Wer wollte, konnte bei dieser Aufgabe mit Beispielzahlen rechnen, also z. B. als 2-stellige Zahl die 23 wählen. Die zugehörige 4-stellige Zahl ist dann 2323, und das Ergebnis der Division 2323 : 23 mit 101 schnell gefunden. (Dasselbe Ergebnis gibt es natürlich auch mit der einfachsten 2-stelligen Beispielzahl 10.)
Die Lösung lässt sich auch allgemein in ähnlicher Weise leicht herleiten: Ist z die Ausgangszahl, so ist $100\,z+z$ die vierstellige Zahl. Da $100\,z+z = 101\,z$ ist, so ist die vierstellige Zahl 101-mal so groß wie die Ausgangszahl.

13. Ein Quadrat von 20 cm Umfang ist in zwei Rechtecke geteilt. Der Umfang des einen Rechtecks misst 16 cm. Wie lang ist der Umfang des anderen?



(**A**) 8 cm (**B**) 9 cm (**C**) 10 cm (**D**) 12 cm (**E**) 14 cm

Lösung: Da der Umfang des Quadrats 20 cm beträgt, misst seine Seitenlänge 20 cm : 4 = 5 cm. Das Rechteck mit dem Umfang 16 cm hat 2 Seiten, die die Länge der Quadratseite haben, zusammen also 10 cm lang sind. Die anderen beiden Seiten sind demzufolge zusammen 6 cm lang, also jede 3 cm. Damit hat das andere Rechteck neben den beiden Seiten, die wieder die Länge einer Quadratseite haben, 2 Seiten der Länge 5 cm − 3 cm = 2 cm. Der Umfang ist folglich $2 \cdot 5$ cm + $2 \cdot 2$ cm = 14 cm.

2007-Knobelei - 4

$\frac{6}{26}$ $\frac{7}{153}$ $\frac{10}{810}$

$\frac{11}{1141}$ $\frac{12}{1538}$ $\frac{13}{x}$

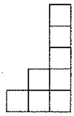
Die Abbildung zeigt sechs gebrochene Zahlen, bei denen Zähler und Nenner jeweils nach der gleichen Gesetzmäßigkeit miteinander zusammenhängen. Wie muss demnach der Nenner x lauten?

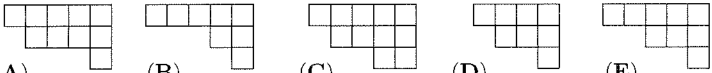
14. Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sollen so in 2 Gruppen zu je 4 Zahlen aufgeteilt werden, dass die Summen in beiden Gruppen gleich sind. Ich habe eine Einteilung gefunden, bei der die Zahlen 1 und 3 in derselben Gruppe sind. Welche Zahl gehört noch in diese Gruppe?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Da die Summe in beiden Gruppe gleich sein soll, muss sie gleich der Hälfte der Summe aller 8 Zahlen, also $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{2} = 18$ sein. Wenn nun in einer der Gruppen die Zahlen 1 und 3 sind, so ist die Summe der beiden verbleibenden $18 - (1+3) = 14$. Damit kommen nur 6 und 8 in Frage, wovon jedoch nur die 6, unter (**D**), in der Auswahl ist.

15. Welches der unten abgebildeten Flächenstücke lässt sich mit dem rechts abgebildeten Flächenstück lückenlos zu einem Rechteck zusammenfügen?





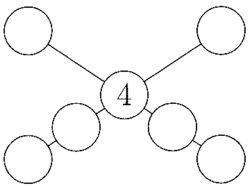
(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Wer ein sehr gutes Vorstellungsvermögen hat, mag schnell erkennen, dass (**A**) die richtige Lösung ist. Wer Mühe hat, sich auszumalen, wie er welches Teil drehen muss, damit es sich mit dem Musterteil zu einem Rechteck zusammenfügen lässt, kann auch so vorgehen, wie es bei der sehr ähnlichen Aufgabe 13 in der Klassenstufe 3/4 beschrieben ist.

16. Max lässt seine Brieftaube um 7:30 Uhr mit einer wichtigen Nachricht zu Moritz losfliegen. Die Brieftaube, von der wir wissen, dass sie so schnell ist, dass sie bis zum 4 km entfernten Haus von Max' Freundin genau 5 Minuten braucht, lässt die Nachricht um 9:10 Uhr bei Moritz aus ihrem Schnabel fallen. Wie weit wohnen Max und Moritz auseinander ?

(**A**) 20 km (**B**) 40 km (**C**) 50 km (**D**) 60 km (**E**) 80 km

Lösung: Die Brieftaube ist von 7:30 Uhr bis 9:10 Uhr unterwegs, das sind 100 Minuten. Wenn die Brieftaube in 5 Minuten 4 km bewältigt, so fliegt sie in 100 Minuten die $100 : 5 = 20$-fache Strecke, also $20 \cdot 4$ km $= 80$ km.



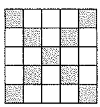
Die Zahlen 3, 5, 6, 7, 8 und 9 sollen so in die freien Kreisflächen eingetragen werden, dass die Summe auf jeder Geraden gleich ist.

17. Auf Kästchenpapier habe ich den Rand eines größeren Quadrats mit Rotstift markiert und alle Kästchen auf den beiden Diagonalen dieses Quadrats rot ausgemalt. Wenn ich insgesamt 9 Kästchen ausgemalt habe, wie viele Kästchen groß ist dann das Quadrat?

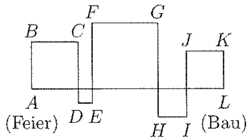
(**A**) 3×3 (**B**) 4×4 (**C**) 5×5 (**D**) 8×8 (**E**) 9×9

Lösung: Die Diagonale hat ebenso viele Kästchen, wie es Kästchen in der Länge bzw. Breite des Quadrates gibt. Ist die Anzahl der Kästchen in der Breite eine gerade Zahl, so ist die Anzahl der Kästchen auf beiden Diagonalen eine gerade Zahl, nämlich das Doppelte der Anzahl der Kästchen in der Breite. Hat das Quadrat eine ungerade Anzahl von Kästchen als Seitenlänge, so gehört das kleine Kästchen in der Mitte zu beiden Diagonalen, die Anzahl der Kästchen auf beiden Diagonalen ist hier eine ungerade Zahl, nämlich das Doppelte der Anzahl der Kästchen in der Breite vermindert um 1.

Da 9 Kästchen ausgemalt wurden, liegt der Fall vor, dass es sich um ein Quadrat mit ungerader Zahl von Kästchen in der Breite handelt, und die Anzahl ist entsprechend dem eben Gesagten $(9 + 1) : 2 = 5$. Das Quadrat hat also das Format 5×5.



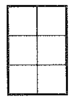
18. Vater Igel hat gefeiert und leckere vergorene Äpfel genascht. Nun kann er den geraden Weg zum Bau nicht finden. Er torkelt etwas, allerdings als ein Igel, der für Mathematik schwärmt, stets entlang von Quadratseiten. Wie lang ist sein „Quadrat"-Weg $ABCDEFGHIJKL$ im Vergleich zum direkten Weg AL?



(**A**) das Andert-halbfache (**B**) das Zwei-fache (**C**) das Zweiein-halbfache (**D**) das Drei-fache (**E**) das Dreiein-halbfache

Lösung: Von jedem der kleinen Quadrate ist genau eine seiner vier Seiten Teil der Strecke $\overline{AL}$, die anderen drei gehören zu dem Streckenzug, dessen Länge gesucht ist. Diese muss demzufolge genau dreimal so lang wie $\overline{AL}$ sein. Oder etwas anders ausgedrückt: Bei jedem Quadrat trifft zu, dass der Igel statt des eigentlichen direkten Weges (= eine Quadratseite) den dreifachen Weg (= restliche drei Quadratseiten) zurücklegt. Damit ist der Weg dreimal so lang.

19. Bert wohnt im Hochhaus, Berta schräg gegenüber, so dass sie Berts Fenster (s. Zeichnung) gut sehen kann. Sie vereinbaren, miteinander über Berts Fenster Botschaften auszutauschen. Bert will 2 der 6 Teilfenster mit 2 Lampen beleuchten. Jedem Muster, das er so erzeugt, soll eine Botschaft entsprechen. Wie viele verschiedene Botschaften sind möglich, wenn für jede stets beide Lampen angeschaltet werden sollen?



(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 30

Lösung: Die beiden Freunde haben 6 Möglichkeiten, eine der 6 Fensterscheiben mit einer Lampe zu beleuchten. Kommt eine zweite Lampe hinzu, so gibt es für *jede* der 6 Möglichkeiten 5 Varianten, die 2. Scheibe auszuwählen, das sind zusammen $6 \cdot 5 = 30$. Allerdings ist hier jede Scheibe einmal als erste und einmal als zweite gezählt worden; es muss also noch durch 2 dividiert werden. Die Anzahl der Möglichkeiten ist 15.

Ein Hotel hat 82 Ein- und Zweibettzimmer. In diesen Zimmern befinden sich insgesamt 132 Betten.
Über wie viele Ein- bzw. Zweibettzimmer verfügt dieses Hotel?

20. Isabell, Robert und Christian holen für uns am Kiosk Getränke. Sie kaufen 19 Halbliter-Flaschen – 8 mit Wasser, 7 mit Saft und 4 mit Eistee – und trinken unterwegs vor lauter Durst jedes eine Flasche leer. Was ist dann möglich?

(**A**) Es ist kein Eistee mehr da. (**B**) Es ist weniger Saft als Eistee da.

(**C**) Von jeder Sorte gibt es gleich viel. (**D**) Von genau 2 Sorten ist gleich viel da.

(**E**) Die Zahl Wasserflaschen ist größer als die der Saft- und Eisteeflaschen zusammen.

Lösung: Da jedes der drei Kinder genau eine der Flaschen leergetrunken hat, sind insgesamt 3 Flaschen leer. Damit entfallen (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**), da hier jeweils mindestens 4 Flaschen geleert werden müssten. Übrig bleibt (**D**), was auch möglich ist, wenn z. B. eine Flasche Wasser und 2 Flaschen Eistee oder wenn 2 Flaschen Wasser und eine Flasche Saft getrunken werden oder wenn sich alle drei Einkäufer über den Saft hermachen.

21. Wirft man die Münze, dann liegt nach dem Wurf entweder Zahl oder Wappen oben. Wenn eine Münze dreimal hintereinander geworfen wird, wie viele Möglichkeiten gibt es dann für die Abfolge von Zahl und Wappen?

(**A**) 3 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 15

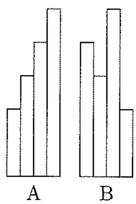
Lösung: Es gibt die folgenden Möglichkeiten, die wir alle aufschreiben, wobei wir „Zahl" mit Z und „Wappen" mit W abkürzen: ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZWW, WZW, WWZ, WWW. Das sind 8 Möglichkeiten.
Wir wollen nun noch angeben, wie dieses Ergebnis sich auch ohne die mühselige Aufstellung aller Möglichkeiten finden lässt. Bei jedem Wurf gibt es genau 2 Möglichkeiten für den Fall der Münze. Da die Würfe voneinander unabhängig sind, kann also beim zweiten Wurf zu jeder Möglichkeit des ersten Wurfes jede des zweiten hinzutreten, so dass es $2 \cdot 2 = 2^2$ Möglichkeiten der Abfolge gibt. Beim dritten Wurf, der wiederum von den beiden vorhergehenden unabhängig ist, können zu jedem der bereits vorhandenen die neuen beiden Möglichkeiten hinzukommen, womit es $2^2 \cdot 2 = 2^3$ sind. Es ist klar, dass sich dies auch für weitere Würfe so ausrechnen lässt, dass es also bei 4 Würfen 2^4, bei 5 Würfen 2^5 usw., und allgemein bei n Würfen 2^n Möglichkeiten für die Abfolge von Zahl und Wappen gibt.

22. In unserer kleinen Schulbibliothek mit insgesamt 180 Büchern haben wir Abenteuer-, Märchen- und Sachbücher. Pablo, in dieser Woche der Bibliothekar, hat gezählt, dass 18 Abenteuer-, 24 Sach- und 12 Märchenbücher ausgeliehen worden sind. Vergnügt stellt er fest, dass er nun von jeder Sorte dieselbe Anzahl in der Bibliothek hat. Wie viele der 180 Bücher sind Sachbücher?

(**A**) 72 (**B**) 56 (**C**) 63 (**D**) 48 (**E**) 66

Lösung: Pablo hat festgestellt, dass von den 180 Büchern insgesamt $18+24+12 = 54$ ausgeliehen sind. Es blieben also $180 - 54 = 126$ zurück. Da nun alle Sorten in derselben Anzahl übrig sind, sind genau ein Drittel davon, also $126 : 3 = 42$ Sachbücher noch da. Mit den entliehenen 24 sind das $42 + 24 = 66$ Sachbücher insgesamt.

23. Der kürzeste von vier Streifen gleicher Breite ist 10 cm lang; jeder weitere Streifen ist um 7 cm länger als der nächstkürzere. Die Streifen werden auf unterschiedliche Weise zusammengeschoben (s. Zeichnung). Wie viele Zentimeter ist der Umfang der Figur B länger als der von Figur A?



(**A**) 14 cm (**B**) 28 cm (**C**) 0 cm (**D**) 35 cm (**E**) 20 cm

Lösung: Schauen wir die Figuren A und B genau an, so bemerken wir, dass sie sich in der Breite nicht unterscheiden, sie sind beide so breit wie 4 Streifen. In der Höhe gibt es Unterschiede: Während Figur A so hoch ist wie der längste Streifen, geht bei Figur B die doppelte Länge der Differenz zwischen der Länge des 1. und 2. Streifens in die Umfangsberechnung ein. Diese Differenz beträgt gerade 7 cm, Figur B ist also um $2 \cdot 7$ cm $= 14$ cm länger.

In einem Feriencamp erholen sich 24 Kinder. Als ein Ausflug zu einer Burg stattfindet, nehmen 16 von ihnen daran teil. Beim Besuch im Tierpark waren 9 Kinder dabei. Vier Kinder haben weder das eine noch das andere mitgemacht.
Wie viele waren sowohl auf der Burg als auch im Tierpark?

24. Ein 2,20 m langes, 1,40 m breites Tischtuch soll so oft gefaltet werden, dass es in das 40 cm $\times$ 60 cm große Fach im Wäscheschrank passt. Wie oft muss man mindestens falten?

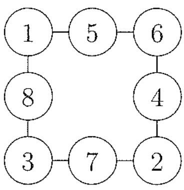
(A) 4-mal (B) 5-mal (C) 6-mal (D) 7-mal (E) 8-mal

Lösung: Falten wir zuerst so, dass sich die größere Länge halbiert, dann hat das Tischtuch nach dem ersten Falten die Größe $1,10$ m $\times$ $1,40$ m. Fahren wir in derselben Weise fort, so ist das Tischtuch nach dem 2. Falten bereits auf eine Größe von $1,10$ m$\times 0,70$ m zusammengelegt. Wir wiederholen den Prozess, wobei wir mit dem 3. Falten $0,55$ m$\times 0,70$ m und mit dem 4. Falten schließlich $0,55$ m $\times$ $0,35$ m erreichen. Nun passt das Tischtuch bequem ins Wäschefach.

25. Ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 cm und 27 cm wird durch drei Senkrechte zur längeren Seite in vier kleinere Rechtecke zerteilt. Wie lang ist die Summe der Längen der zwei Verbindungsstrecken zwischen den Mitten der beiden linken und der beiden rechten Rechtecke (s. Zeichnung)?

(A) 15 cm (B) 7,5 cm (C) 13,5 cm (D) 24 cm (E) 12 cm

Lösung: Da die vier Strecken in jedem der Teilrechtecke jeweils genau die Hälfte der Seitenlänge lang sind und sich die 4 kompletten Seitenlängen nach Voraussetzung zu 27 cm addieren, ist die gesuchte Länge gleich der Hälfte dieser Länge, also 13,5 cm.



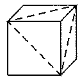
Die Summe der Zahlen sowohl in den waagerechten als auch in den senkrechten Reihen beträgt jeweils 12. Ordne die Zahlen so um, dass die Summe in jeder Reihe jeweils 13 wird.

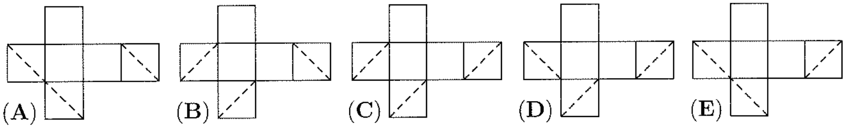
26. Als Aschenputtel die Erbsen aus der Asche lesen musste, halfen ihr die Tauben. Besonders fleißig war die erste Taube, die blitzschnell ein Viertel der Erbsen rauspickte, ehe sie fortflog. Die nächsten 3 Tauben pickten gemeinsam die Hälfte der restlichen Erbsen heraus und flogen fort. Schließlich kamen noch 48 Tauben, und jede pickte 5 Erbsen aus der Asche, dann war die Arbeit getan. Wie viele Erbsen waren zu Beginn in der Asche?

(A) 880 (B) 660 (C) 640 (D) 600 (E) 480

Lösung: Beginnen wir mit den später gekommenen 48 Tauben, die zusammen $48 \cdot 5 = 240$ Erbsen aufgepickt haben. Diese 240 Erbsen waren ebenso viele, wie die drei fleißigen, als zweite gekommenen Tauben bewältigt haben. Das heißt, bevor diese drei Tauben begonnen haben, waren noch 480 Erbsen in der Asche. Diese 480 Erbsen blieben übrig, nachdem die erste Taube von der Gesamtmenge ein Viertel entfernt hatte, die 480 Erbsen sind demnach Dreiviertel der Gesamtmenge, d. h., wir müssen den 480 Erbsen ein Drittel dieser Menge, das sind 160 Erbsen hinzufügen, um zu wissen, wie viele Erbsen ursprünglich in die Asche geschüttet worden sind. Und das waren $480+160=640$. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Informationen in einer Gleichung zu erfassen. Es sei x die Anzahl der zu Beginn vorhandenen Erbsen. Dann gilt entsprechend den Aussagen: $\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{4}\right)=48\cdot 5$, woraus wir $\frac{3}{8}x=240$ bzw. $x=640$ errechnen.

27. Auf drei benachbarten Seitenflächen eines Würfels wurde je eine Diagonale gemäß der nebenstehenden Skizze aufgemalt. Welches der Würfelnetze passt zum abgebildeten Würfel ?





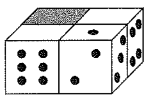
Lösung: Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Würfelnetze auszuschneiden und je zu einem Würfel zu falten.
Wer ein gutes Vorstellungsvermögen hat, kann, auch ohne dies zu tun, erkennen, dass es bei den Netzen (**A**), (**C**) und (**D**) jeweils nur zwei der gestrichelten Diagonalen eine gemeinsame Ecke haben, während sich beim Netz (**B**) die drei gestrichelten Diagonalen in einer Ecke treffen. (**E**) ist die Lösung.

28. Kurt denkt sich irgendeine natürliche Zahl und sagt sie Lea. Lea multipliziert diese Zahl entweder mit 5 oder mit 6. Nina zählt zu Leas Resultat entweder 5 oder 6 hinzu, ganz nach ihrer Laune. Patrick zieht von Ninas Resultat nun 5 oder 6 ab, wie er will. Das Ergebnis ist 73. Welche Zahl hatte sich Kurt ausgedacht?

(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 19

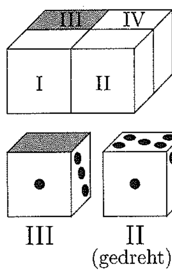
Lösung: Um die Zahl zu finden, die Kurt sich gedacht hat, müssen wir mit dem Ergebnis der längeren Rechnung, 73, starten. Patrick hat diese Zahl genannt, nachdem er von der Zahl, die ihm Nina gesagt hatte, 5 oder 6 abgezogen hat. Also kann Nina ihm $73 + 5 = 78$ oder $73 + 6 = 79$ genannt haben. Nina ihrerseits hatte zu der Zahl, die Lea ihr genannt hat, 5 oder 6 addiert. Dann kämen als Zahlen, die Nina von Lea genannt bekommen hat, also $78 - 5 = 73$ oder $78 - 6 = 72$ oder $79 - 5 = 74$ oder $79 - 6 = 73$ in Frage. Die Zahl, die Lea weitergibt, war durch Multiplikation der Kurt'schen Zahl mit 5 oder 6 entstanden. Nun befindet sich unter den 3 voneinander verschiedenen Zahlen, die Lea an Nina weitergesagt haben könnte, keine durch 5 jedoch genau eine durch 6 teilbare Zahl. Diese muss folglich diejenige sein, die nach Multiplikation der von Kurt anfangs genannten Zahl entstanden ist. Damit ist klar, dass Kurt die Zahl $72 : 6 = 12$ genannt hat.

29. Beim Spielwürfel liegt die 1 der 6, die 2 der 5, die 3 der 4 gegenüber. Es wurden 4 gänzlich gleiche Spielwürfel so zusammengelegt, dass auf den gemeinsamen Seitenflächen – d. h. jenen, wo sich zwei Würfel berühren – die Augenzahlen übereinstimmen. In der Zeichnung sind nicht alle Augenzahlen angegeben. Welche Augenzahl steht auf der grauen Seitenfläche?



(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Wir bezeichnen die Würfel mit I, II, III, und IV (s. Zeichnung) und die Seitenflächen entsprechend ihrer Lage als vorn, hinten, oben, unten, links und rechts. Vom Würfel II wissen wir, dass der 3 die 4 gegenüberliegt, und daraus folgt, dass auf der rechten Seite von Würfel I die 4 ist, und links ist die 3. Würfel I trägt hinten die 1, was demzufolge auch für Würfel III vorn zutrifft, hinten hat Würfel III dann die 6 zu stehen.



Da Würfel IV rechts eine 4 hat, trägt er links eine 3, eine 3 ist damit auch auf der rechten Seite von Würfel III. Gegenüber, auf der linken Seite von Würfel III ist die 4. Um aus diesen Kenntnissen darauf zu schließen, welche Augenzahl die obere Seite von Würfel III trägt, brauchen wir die Aussage aus der Aufgabenstellung, dass die Würfel zueinander identisch sind. Drehen wir Würfel II so, dass die 2 unten und die 1 vorn zu liegen kommt, wobei die Fläche mit der 3 rechts bleibt, erkennen wir sofort, dass die Augenzahl auf der grauen Fläche von Würfel III die 5 ist.

30. In der Multiplikationsaufgabe $\boxed{}\boxed{?}\boxed{}\times\boxed{}\boxed{} = 7632$ kommt jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal vor. Welche Ziffer gehört an die Stelle des Fragezeichens?

(A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 4 (E) 1

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass die verbleibenden Ziffern 1, 4, 5, 8 und 9 sind. Damit ist sofort klar, dass die beiden letzten Stellen entweder von 4 und 8 oder von 9 und 8 besetzt werden müssen (es ist $4 \cdot 8 = 32$ bzw. $9 \cdot 8 = 72$, und alle anderen Produkte enden nicht auf 2), woraus zumindest klar ist, dass die 8 an einer der beiden letzten Stellen steht. Klar ist auch, dass die 9 nicht an einer 1. Stelle stehen kann, denn $10 \cdot 900 = 90 \cdot 100 = 9000 > 7632$. Es können jedoch auch nicht 4 *und* 5 an den beiden 1. Stellen stehen, da wiederum $40 \cdot 500 = 50 \cdot 400 = 20000 > 7632$ ist. Dann ist klar, dass 1 an einer der beiden 1. Stellen erscheinen muss. Nun zerlegen wir 7632 in Faktoren. Es ist $7632 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 53$. 53 ist eine Primzahl, lässt sich also nicht weiter zerlegen, und kommt, da 53 weder auf 8 noch 4 noch 9 endet, nicht als der 2-stellige Faktor in Frage, muss also als Faktor in der 3-stelligen Zahl stecken. Damit die Einerziffer stimmt, könnte die 3-stellige Zahl das 3-fache (Einerziffer 9), das 6-fache (Ziffer 8) oder das 8-fache von 53 sein. Von den 3 Zahlen 159, 318 und 424 kommt nur die erste in Frage (die anderen enthalten Ziffern, die nicht zur Verfügung stehen); es muss 159 sein, die 2-stellige Zahl ist demzufolge 48, $159 \cdot 48 = 7632$, das Fragezeichen ist durch eine 5 zu ersetzen.

Während die ersten Überlegungen sicher von vielen gemacht worden sind, ist die Teilbarkeitsbetrachtung zwar sehr wirksam, wird aber sicher oft zugunsten von schnellem Probieren der wenigen Möglichkeiten, was ja hier ein durchaus legitimer Weg ist, nicht benutzt worden sein.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 5 und 6 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	C	C	C	D	A	E	B	C	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	D	E	D	A	E	C	D	C	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	E	A	A	C	C	E	B	A	C

Klassenstufen 7 und 8

1. $\dfrac{2+0+0+7-2\cdot 0\cdot 0\cdot 7}{2007} =$

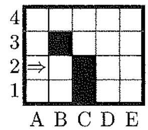
(**A**) $\dfrac{1}{30}$ (**B**) $\dfrac{1}{1003}$ (**C**) $\dfrac{1}{223}$ (**D**) $\dfrac{1}{72}$ (**E**) $\dfrac{1}{207}$

Lösung: Wir rechnen: $\dfrac{2+0+0+7-2\cdot 0\cdot 0\cdot 7}{2007} = \dfrac{9-0}{9\cdot 223} = \dfrac{1}{223}$.

2. Jemand hat von KANGAROO, dem englischen Wort für Känguru, fünf Buchstaben weggestrichen und die restlichen in umgekehrter Reihenfolge nebeneinander wieder hingeschrieben. Was kann so entstanden sein?

(**A**) RAGN (**B**) OGR (**C**) RNO (**D**) RAN (**E**) ANG

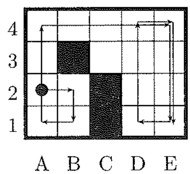
Lösung: Streichen wir 5 von 8 Buchstaben weg, bleiben 3 übrig, also kann (**A**) nicht Lösung sein. (**B**) scheidet aus, weil von hinten gelesen R vor G kommt, (**C**) scheidet aus, weil von hinten gelesen O vor R und N kommt, (**E**) scheidet aus, weil von hinten gelesen G vor N kommt. (**D**) erhält man, wenn K, A, G, O und O gestrichen werden.



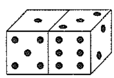
3. Eine kleine Spielzeug-Elektromaus rennt stets so lange geradeaus, bis sie an ein Hindernis kommt. Dort wendet sie sich nach rechts, rennt bis zum nächsten Hindernis, wendet sich nach rechts usw. Ich habe sie bei A2 ins Spielfeld gesetzt, wo sie in Pfeilrichtung losrennt. Der Feldrand und die dunklen Kästchen sind für die Maus ein Hindernis. Wo hält sie an?

(**A**) B2 (**B**) A1 (**C**) E4 (**D**) C3 (**E**) nirgendwo

Lösung: Wir zeichnen den Weg der Elektromaus ein:



Aus dem rechten Streifen von D1 bis E4, in den die Rennmaus mit dem 5. Schritt gerät, kommt sie nicht mehr heraus. – Praktisch endet ihr Lauf dann, wenn die Batterie leer ist.



4. Zwei Spielwürfel liegen so, dass genau 5 ihrer 12 Seitenflächen sichtbar sind (s. Abb.). Wie groß ist die Summe der Augenzahlen auf den im Bild nicht sichtbaren Seitenflächen der beiden Würfel?
Hinweis: Bei Spielwürfeln liegt die 1 der 6, die 2 der 5 und die 3 der 4 gegenüber.

(**A**) 15 (**B**) 12 (**C**) 7 (**D**) 25 (**E**) 24

Lösung: Die Gesamtaugenzahl der beiden Würfel ist $2\cdot(1+2+3+4+5+6) = 42$. Da $1+5+3+6+2 = 17$ Augen zu sehen sind, sind $42-17 = 25$ versteckt.
Den Hinweis, dass bei Spielwürfeln die 1 der 6, die 2 der 5 und die 3 der 4 gegenüberliegt, brauchen wir hier nur, um sicher zu sein, dass auf den beiden Würfeln die Augenzahlen von 1 bis 6 sämtlich vorkommen. Allerdings hätten wir die Lösung auch erhalten können, indem wir in Kenntnis der Spielwürfeleigenschaft die „unsichtbaren" Augenzahlen addiert hätten, also $(2+6+3+4)+(1+4+5) = 25$.

5. In einem x, y-Koordinatensystem sind die 5 Punkte $A = (2006; 2007)$, $B = (2007; 2006)$, $C = (-2006; -2007)$, $D = (2006; -2007)$ und $E = (2007; -2006)$ eingezeichnet. Welche der folgenden Geraden ist dann parallel zur x-Achse?

(A) BE (B) CD (C) AE (D) BD (E) CE

Lösung: Eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, muss durch Punkte verlaufen, die in den y-Koordinaten übereinstimmen. Dies trifft unter den 5 Punkten für C und D und auch nur für diese beiden zu.

6. $2007 - 20,07 =?$

(A) 1997,83 (B) 1987,7 (C) 1888,83 (D) 1986,93 (E) 1897,93

Lösung: Bei dieser Aufgabe können wir schriftlich rechnen oder auch die Lösung durch Vergleich der Lösungsvorschläge schnell finden. Es wird eine Zahl subtrahiert, die nur wenig größer als 20 ist, also muss das Ergebnis ein bisschen kleiner als $2007 - 20 = 1987$ sein. Das trifft allein für (D) zu. Und wirklich ist auch $1986,93 + 20,07 = 2007$.

7. Wähle aus dem 3×3-Feld 3 Zahlen aus, so dass du aus jeder Zeile und jeder Spalte genau eine gewählt hast, und addiere die 3 Zahlen. Dann ist die größtmögliche Summe

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(A) 15 (B) 16 (C) 19 (D) 21 (E) 23

Lösung: Schon nach den ersten Versuchen stellen wir fest, dass wir immer wieder 15 als Summe erhalten. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich jede mögliche Summe 15 ist. Die Zahlen in der 1. Zeile des 3×3-Feldes sind $1, 1+1, 1+2$, in der 2. Zeile $4, 4+1, 4+2$ und in der 3. Zeile $7, 7+1, 7+2$. Da wir aus jeder Zeile genau eine Zahl in die Summe nehmen, ist der „Grundsockel" zunächst einmal $1+4+7$. Hinzu kommt, dass aus jeder Spalte genau ein Summand stammt, also genau ein Summand, dem zum Sockel nichts hinzugefügt werden muss, genau ein Summand, dem eine 1 und genau ein Summand, dem eine 2 hinzugefügt werden muss. Damit erhalten wir insgesamt stets $1 + 4 + 7 + 0 + 1 + 2 = 15$. Das ist dann natürlich auch die größtmögliche Summe.

2007-Knobelei – 5

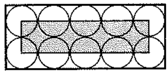
Zerlegt die Jahreszahl 2007 in eine dreigliedrige Summe, bei welcher der zweite Summand das Zweifache des ersten Summanden und der dritte Summand das Dreifache des zweiten Summanden ist. Wie sieht die gesuchte Zerlegung aus?

8. Eine Palindromzahl ist eine Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet; z. B. sind 1551 und 2207022 Palindromzahlen. Was erhalte ich, wenn ich von der größten 6-stelligen Palindromzahl die kleinste 5-stellige Palindromzahl subtrahiere?

(A) 989998 (B) 989989 (C) 98999 (D) 909990 (E) 988888

Lösung: Die größte 6-stellige Palindromzahl ist 999999. Die kleinste 5-stellige ist nicht etwa 11111, sondern 10001. Dann ist die Differenz $999999 - 10001 = 989998$.

9. In einer kleinen Manufaktur werden Bienenwachskerzen mit kreisrundem Querschnitt hergestellt und zu je 10 Stück in einen Karton mit durchsichtigem Deckel verpackt. Das Etikett zu dieser Ware soll über die Mitten aller 10 Kerzen verlaufen (s. Zeichnung). Welche Maße muss es haben, wenn der Karton für die 10 Kerzen einen Umfang von 63 hat? (Alle Angaben in cm.)



(**A**) 4×12 (**B**) $3,5 \times 14$ (**C**) $4,5 \times 18$ (**D**) $4,5 \times 22$ (**E**) $5 \times 12,5$

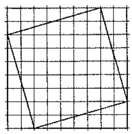
Lösung: Bezeichnen wir mit r den Radius der Kerzenquerschnittskreise, so finden wir, dass die Kiste $10r$ lang und $4r$ breit ist. Der Umfang ist demzufolge $20r + 8r = 28r = 63$, woraus folgt, dass $r = \frac{9}{4}$ ist. Das Etikett seinerseits ist $8r$ lang und $2r$ breit, d. h. $8 \cdot \frac{9}{4} = 18$ lang und $2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$ breit, hat also die Maße $18 \times 4,5$.

10. Es sei $x < -1$. Welche der folgenden Zahlen ist dann am größten?

(**A**) $x + 1$ (**B**) $2x$ (**C**) $-2x$ (**D**) $6x + 2$ (**E**) $x - 2$

Lösung: Für $x < -1$ ist $x + 1 < 0$, ist $2x < -2$, ist $6x + 2 < -4$, ist $x - 2 < -4$, während $-2x > 2$ ist. Also ist (**C**) richtig.

11. Ein kleines Quadrat ist, wie in der Zeichnung dargestellt, in ein großes einbeschrieben. Wie groß ist der Flächeninhalt des kleinen Quadrats, wenn die kleinen Kästchen einen Flächeninhalt von 1 cm^2 haben?



(**A**) 53 cm^2 (**B**) 49 cm^2 (**C**) 56 cm^2 (**D**) 45 cm^2 (**E**) 64 cm^2

Lösung: Wir zählen die Kästchen entlang einer Quadratseite – es sind 9 – und finden für die Fläche des großen Quadrats $9 \cdot 9$ cm^2 = 81 cm^2. Von dieser Fläche ist die Fläche von 4 rechtwinkligen Dreiecken zu subtrahieren. Der Flächeninhalt dieser rechtwinkligen Dreiecke ist die Hälfte des Produkts der Seitenlängen der beiden Katheten, also $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7$ cm^2 = 7 cm^2. Damit gilt für den Flächeninhalt des kleinen Quadrates:

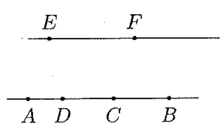
$$(81 - 4 \cdot 7)\ \text{cm}^2 = (81 - 28)\ \text{cm}^2 = 53\ \text{cm}^2.$$

12. Stell dir zwei parallele Geraden vor und auf einer dieser Geraden vier, auf der anderen zwei Punkte. Wie viele Dreiecke lassen sich zeichnen, deren Ecken mit jeweils drei dieser sechs Punkte zusammenfallen?

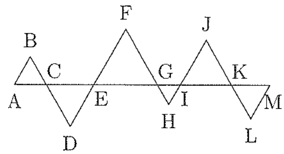
(**A**) 6 (**B**) 16 (**C**) 15 (**D**) 12 (**E**) 21

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass ein Dreieck immer dann entsteht, wenn zwei Punkte auf einer der beiden Geraden liegen und der dritte Punkt auf der anderen Geraden. Wir halten nun die Gerade mit den 4 Punkten fest. Dann gibt es zu jedem Paar, das ich aus den 4 Punkten bilden kann, mit jedem der beiden Punkte auf der zweiten Geraden ein Dreieck. Da sich genau 6 Punktepaare aus den 4 Punkten auswählen lassen, entstehen hierdurch $6 \cdot 2 = 12$ Dreiecke. Nehmen wir nun die beiden Punkte der zweiten Geraden und verbinden sie mit jedem einzelnen der 4 Punkte der ersten Geraden, so kommen noch einmal 4 Dreiecke hinzu. Damit gibt es insgesamt $12 + 4 = 16$ Dreiecke.

Wegen der noch überschaubaren Anzahl von Punkten ist es hier auch gut möglich, sich eine Skizze zu machen, die Punkte zu bezeichnen und die Dreiecke systematisch aufzulisten. Es sind: ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE, ABF, ACF, ADF, BCF, BDF, CDF, AEF, BEF, CEF, DEF.



13. Entlang der 24 cm langen Strecke von A nach M sind sechs unterschiedlich große Zacken, jeweils in Form gleichseitiger Dreiecke, aneinandergereiht. Wie lang ist der Zickzackweg von A über B, C, D usw. nach M?



(A) 96 cm (B) 72 cm (C) 48 cm (D) 56 cm (E) 106 cm

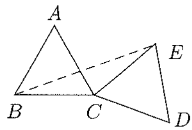
Lösung: Da es sich bei den aneinandergereihten Zacken um gleichseitige Dreiecke handelt, ist ein jeder Zacken genau doppelt so lang wie die Strecke, über der er errichtet ist, also z. B. $\overline{ABC}$ doppelt so lang wie $\overline{AC}$. Für die Gesamtstrecke gilt dementsprechend, dass sie $2 \cdot 24$ cm $= 48$ cm lang ist.

14. Die Verkaufsanalyse eines Bioladens ergab, dass 1/3 der Kunden die Tomatensorte „Gartenperle“ bevorzugt, während 2/3 die Sorte „Tafelfreude“ vorzieht. Nach einer Werbekampagne für „Gartenperle“ wechselte 1/4 der „Tafelfreude“-Kunden zu „Gartenperle“, jedoch niemand andersherum. Was trifft nun zu (Gartenperle = G, Tafelfreude = T)?

(A) 5/12 wählen G, 7/12 T. (B) 7/12 wählen G, 5/12 T. (C) 1/4 wählen G, 3/4 T.
(D) 1/2 wählen G, 1/2 T. (E) 1/3 wählen G, 2/3 T.

Lösung: Wenn die vor der Werbekampagne auf „Tafelfreude“ schwörenden $\frac{2}{3}$ der Kunden nach der Kampagne um $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{3}$, also um $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ vermehrt wurde, so beträgt diese Zahl insgesamt dann $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, womit die Richtigkeit von (D) bewiesen ist.

15. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDE$ seien gleichseitig und zueinander kongruent. Wie groß ist $\measuredangle EBA$, wenn $\measuredangle ECA = 70°$ ist?



(A) 42,5° (B) 40° (C) 35° (D) 32,5° (E) 30°

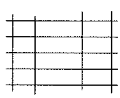
Lösung: Da Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist, ist $\measuredangle ACB = 60°$ und demzufolge $\measuredangle ECB = \measuredangle ACB + \measuredangle ECA = 60° + 70° = 130°$. Da $\overline{BC} = \overline{CE}$, ist $\triangle BCE$ gleichschenklig. Dann sind die beiden Basiswinkel $\frac{1}{2}(180° - 130°) = 25°$, woraus $\measuredangle EBA = 60° - 25° = 35°$ folgt.

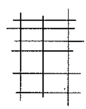
16. Betrachte alle natürlichen Zahlen $1,\ 2,\ 3, \ldots, 9999, 10\,000$. Wie viel Prozent dieser Zahlen sind Quadratzahlen?

(A) 1% (B) 10% (C) 1,5% (D) 2% (E) 1,2%

Lösung: Da $10\,000 = 100^2$ ist, sind von den 10 000 Zahlen genau 100 Quadratzahlen. Es ist $\frac{100}{10\,000} = \frac{1}{100}$, d. h. 1%.

17. Zeichnet man von 9 Geraden 5 waagerecht und 4 senkrecht, so bilden diese 12 Zellen; hätte man 6 waagerecht und die restlichen 3 senkrecht gezeichnet, wären nur 10 Zellen entstanden (s. Zeichnungen). Wie viele Zellen lassen sich maximal mit 15 Geraden bilden?



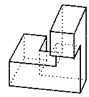


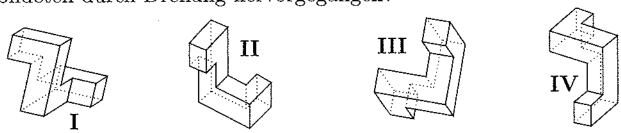
(A) 22 (B) 30 (C) 36 (D) 42 (E) 48

Lösung: Die Anzahl der Zellen, die bei einer Einteilung der 15 Geraden in zwei Gruppen entstehen, lässt sich schnell ausrechnen: Bei einer Teilung 2 : 13 entstehen $1 \cdot 12 = 12$ Zellen. Teilen wir 3 : 12, sind es $2 \cdot 11 = 22$, bei 4 : 11 entstehen $3 \cdot 10 = 30$, bei 5 : 10 schon $4 \cdot 9 = 36$, bei 6 : 9 dann $5 \cdot 8 = 40$ und bei 7 : 8 schließlich $6 \cdot 7 = 42$ Zellen.

Allgemein gilt für n Geraden, dass bei einer Teilung in $m : (n - m)$ mit $m \leq \frac{n}{2}$ genau $(m-1)\cdot(n-m-1) = mn - m^2 - m - n + m + 1 = m\cdot(n-m) - n + 1$ Zellen entstehen. In diesem Term ist der Teil $-n+1$ eine feste, nur von der Zahl der Geraden, nicht von ihrer Teilung in zwei Gruppen abhängige Zahl, während $m\cdot(n-m)$ unmittelbar von m abhängt.
Es lässt sich zeigen: Wenn n gerade ist, so ist das Produkt für $m = \frac{n}{2}$ am größten. Ist n ungerade, so ist das Produkt für $m = \frac{n-1}{2}$ am größten.

18. Welcher oder welche der unten abgebildeten Körper sind aus dem rechts abgebildeten durch Drehung hervorgegangen?

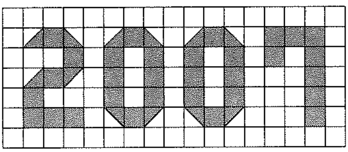




(**A**) nur II und IV (**B**) nur I und III (**C**) nur III
(**D**) I, II und IV (**E**) keiner

Lösung: Nur die beiden Körper I und III sind aus dem rechts neben dem Aufgabentext abgebildeten durch Drehung hervorgegangen. Die beiden anderen sind Spiegelbilder dieses Körpers.

2007-Knobelei - 6



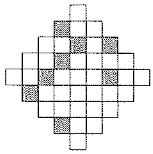
Wie viel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche beansprucht die Jahreszahl 2007?

19. Theodoras Taschenrechner ist kaputt. Die 1 lässt sich nicht eintippen. Wenn sie auf die 1 tippt, um sie einzugeben, erscheint nicht einmal eine Leerstelle. Ohne das zu bemerken, hatte ihr Banknachbar eine 6-stellige Zahl eingetippt, und auf dem Display erschien 8773. Wie viele verschiedene 6-stellige Zahlen könnte er eingegeben haben?

(**A**) 20 (**B**) 16 (**C**) 15 (**D**) 12 (**E**) 9

Lösung: Theodoras Banknachbar hat, da nur 4 Ziffern erschienen sind, zweimal eine 1 eingegeben. Das ist auf folgende Arten möglich: 118773, 181773, 187173, 187713, 187731, 811773, 817173, 817713, 817731, 871173, 871713, 871731, 877113, 877131, 877311. Das sind insgesamt 15 Möglichkeiten.
Analysieren wir die oben stehende Auflistung, so ist klar, dass sich diese Aufgabe lösen lassen würde, ohne alle Zahlen aufzuschreiben. Wir lassen die erste 1 von vorn bis zum letztmöglichen Platz in der 6-stelligen Zahl (das ist die 10er Stelle) „wandern", wobei die zweite 1 jeweils alle verbleibenden Plätze einnimmt. Dabei erhalten wir zuerst (wenn die erste 1 auf der 100 000er Stelle steht) 5, dann 4, dann 3, dann 2, schließlich eine Möglichkeit für die zweite 1, so dass sich als gesuchte Anzahl $5+4+3+2+1 = 15$ ergibt.

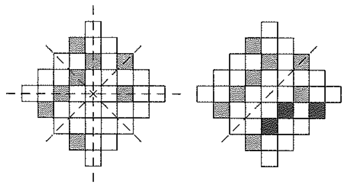
20. Wie viele der weißen Kästchen müssen mindestens noch geschwärzt werden, damit eine Figur entsteht, die eine Symmetrieachse besitzt?



(**A**) 6 (**B**) 5 (**C**) 4 (**D**) 3 (**E**) 2

Lösung: Für die Figur aus der Aufgabe sind vier Symmetrieachsen denkbar; entweder – jeweils durch den Mittelpunkt der Figur – in der Waagerechten und Senkrechten oder durch die Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes (s. Abb. links).

Damit die Figur symmetrisch bzgl. der Waagerechten wird, müssten 4 Kästchen geschwärzt werden. Für die Senkrechte wären es sogar 5 Kästchen, ebenso wie für die von links oben nach rechts unten verlaufende Winkelhalbierende. Für die von rechts oben nach links unten verlaufende allerdings brauchten wir nur 3 Kästchen zu schwärzen (s. Abb. rechts).



21. Stell dir vor, du hast die Summe der Ziffern des Quadrates einer Zahl auszurechnen, die größer ist als 2007. Welches ist der kleinstmögliche Wert dieser Summe?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 13 (**D**) 27 (**E**) 32

Lösung: Da unter den Zahlen, die größer als 2007 sind, auch 10 000 ist und $10\,000^2 = 100\,000\,000$ mit der Quersumme 1 ist, haben wir damit die Lösung gefunden, denn eine kleinere Zahl kommt dafür nicht in Frage.

> *Wenn Fritz und Frieda zusammen 10 Gulden, Fritz und Franz zusammen 19 Gulden und Frieda und Franz zusammen 23 Gulden haben, wie viele Gulden hat dann Frieda, wie viele Fritz und wie viele Franz?*

22. Alex, Benno, Clara, Delia, Elise und Franz wippen auf dem Spielplatz. Alex und Benno sind zusammen leichter als Clara und Delia, Clara und Elise leichter als Franz und Benno. Welche der folgenden Aussagen stimmt dann *gewiss*?

(**A**) Alex und Elise sind zusammen leichter als Franz und Delia.

(**B**) Delia und Elise sind zusammen schwerer als Clara und Franz.

(**C**) Delia und Franz sind zusammen schwerer als Alex und Clara.

(**D**) Alex und Benno sind zusammen leichter als Clara und Franz.

(**E**) Alex, Benno und Clara sind zusammen genauso schwer wie Delia, Elise und Franz.

Lösung: Wir bezeichnen mit a das Gewicht von Alex, mit b das von Benno usw. Dann entnehmen wir der Schilderung, dass die Ungleichungen $a + b < c + d$ und $c + e < f + b$ gelten. Daraus folgern wir (Addition der beiden Ungleichungen), dass $a + b + c + e < c + d + f + b$ bzw. nach Subtraktion von $b + c$ auf beiden Seiten der Ungleichung $a + e < d + f$ sicher gilt, das heißt, dass Alex und Elise zusammen leichter sind als Delia und Franz. Das ist gerade der Inhalt von (**A**). Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden.

23. Wenn man 36 zu 37 addiert, erhält man 73, die Addition von 36 hat also ein Vertauschen der beiden Ziffern der Zahl 37 bewirkt. Wie viele 2-stellige Zahlen gibt es, für die die Zahl, die beim Vertauschen der beiden Ziffern entsteht, die Summe aus dieser gewählten Zahl und 36 ist?

(**A**) 11 (**B**) 10 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 5

Lösung: Gesucht sind alle Paare $(a;\, b)$ ganzzahliger Lösungen der folgenden Gleichung: $10a + b + 36 = 10b + a$. Wir formen um $9b - 9a = 9\,(b - a) = 36$. Folglich müssen wir alle die Paare ganzer Zahlen $(a; b)$ mit $1 \leq a, b \leq 9$ in die nähere Wahl ziehen, für die $b - a = 4$ ist. Das führt uns zu den Paaren (5; 9), (4; 8), (3; 7), (2; 6) und (1; 5). Wie wir nachrechnen können, haben 59, 48, 37, 26 und 15 tatsächlich die beschriebene Vertauschungseigenschaft.

24. Zwei Quadrate mit den Seitenlängen 7 cm bzw. 24 cm sind geschickt zerschnitten worden, so dass sich aus den Teilen ein neues, größeres Quadrat zusammensetzen lässt. Welche Seitenlänge hat dieses Quadrat?

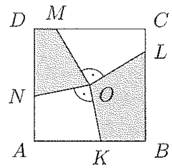
(**A**) 27 cm (**B**) 30 cm (**C**) 31 cm (**D**) 25 cm (**E**) 32 cm

Lösung: Der Flächeninhalt des zusammengesetzten Quadrates beträgt (in cm^2) $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Folglich ist die Seitenlänge 25 cm.

25. Nachdem wir im Geometrieunterricht eine Pyramide gebaut hatten, habe ich die Anzahl der Ecken, der Kanten und der Flächen dieser Pyramide addiert. Es kam irgendeine Zahl zwischen 20 und 24 heraus. Welche?

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

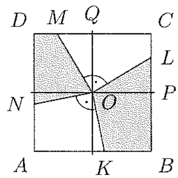
Lösung: Eine Pyramide ist dadurch charakterisiert, dass sie eine vieleckige Grundfläche hat, von der aus Kanten zu einer gemeinsamen Spitze führen. Falls die Anzahl der Ecken der Grundfläche e ist, so ist die Anzahl der Ecken der Pyramide $e + 1$. Die Anzahl der Kanten ergibt sich aus der Anzahl von Kanten, die zur Grundfläche gehören – das sind e Stück – und der Anzahl der zur Spitze führenden Kanten – ebenfalls e Stück. Sie ist also gleich der doppelten Eckenzahl. An Flächen finden wir außer der Grundfläche zu jeder Kante, die zur Grundfläche gehört genau eine, nämlich das Dreieck, das diese Kante zusammen mit der Spitze bildet. Fassen wir zusammen, so ergibt sich für die Summe aus Ecken $(e + 1)$, Kanten $(2e)$ und Flächen $(1 + e)$ nun $4e + 2$. Also muss die Anzahl bei Division durch 4 den Rest 2 lassen. Das trifft unter den angegebenen Zahlen zwischen 20 und 24 nur auf 22 zu.
Bei den relativ kleinen Zahlen $20, \ldots, 24$ war es natürlich auch möglich, schnell auszurechnen, wie groß die Summe aus Ecken,- Kanten- und Flächenzahl für die wohlbekannten Pyramiden – das Tetraeder und die vierseitige Pyramide – ist. Beim Tetraeder haben wir 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Flächen, die Summe ist 14; bei der vierseitigen Pyramide 5 Ecken, 8 Kanten und 5 Flächen mit der Summe 18, was noch zu klein ist. Stellen wir uns nun die 5-seitige Pyramide vor, so erhalten wir 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen, also 22 als Summe – und damit sind wir auch fertig. Allerdings haben wir wahrscheinlich nicht die interessante Erkenntnis, dass diese Summe *stets* eine gerade, aber nicht durch 4 teilbare Zahl ist!



26. Es sei O der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$. Die Punkte K, L, M und N auf den Quadratseiten liegen so, dass $\overline{OL} \perp \overline{OM}$ und $\overline{OK} \perp \overline{ON}$ ist (s. Abb.). Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Gebietes, wenn die Seitenlänge des Quadrats 2 ist?

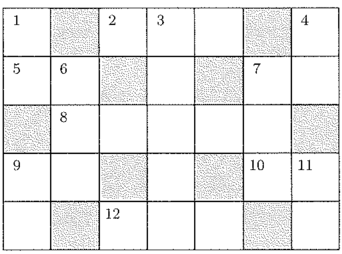
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 2,5 (**D**) 2,25 (**E**) hängt von der Lage von K und L ab

Lösung: Wir denken uns die Diagonale DB und die Strecke AO eingezeichnet. Die Dreiecke $\triangle NAO$ und $\triangle KBO$ sind zueinander kongruent, denn $\overline{AO} = \overline{BO}$ (halbe Diagonale), $\measuredangle NAO = \measuredangle KBO = 45°$ und $\measuredangle NOA = \measuredangle KOB = \measuredangle NOB - 90°$. Dann ist jedoch – unterhalb der Diagonale – der Flächeninhalt des grauen Gebietes gleich dem des hellen. Da sich für die oberhalb der Diagonale liegende Hälfte des Quadrates dieselben Überlegungen machen lassen, gilt, dass das gesamte graue Gebiet den halben Flächeninhalt des Quadrates, also 2, hat.



Ein zweiter Lösungsweg: Die Horizontale durch O schneidet BC in P, die Vertikale durch O schneidet CD in Q. Da $\triangle OPL \cong \triangle OQM$, so ist der Flächeninhalt von $OLCM$ gleich einem Viertel des Quadrats. Analog gilt dies für den Flächeninhalt von $ONAK$. Also ist der Inhalt der grauen Flächenstücke gleich dem Inhalt der weißen Flächenstücke, nämlich 2.

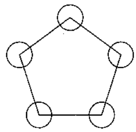
2007-Knobelei - 7



Bei diesem Kreuzzahlrätsel kommt es darauf an, die Ergebniszahlen in einer geeigneten Reihenfolge zu ermitteln:

Waagerecht: 2) Primzahl zwischen 400 und 500, 5) Vielfaches der kleinsten zweistelligen Primzahl, 7) Quadratzahl, 8) Zweierpotenz, 9) Primzahl mit der Quersumme 8, 10) natürliche Zahl mit gleichen Grundziffern, 12) Primzahl zwischen 200 und 300 mit der Quersumme 7.
Senkrecht: 1) Primzahl mit der Quersumme 4, 3) das 58-fache der kleinsten vierstelligen Primzahl, 4) Vielfaches der größten einstelligen Primzahl, 6) Primzahl zwischen 300 und 400, 7) Vorgänger der Zahl 370, 9) Quadratzahl, 11) Primzahl. Wie lautet das Neunfache der in 12-waagerecht stehenden Zahl?

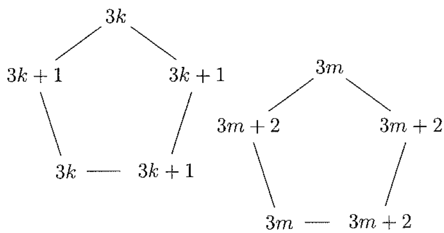
27. In den Ecken eines Fünfecks stehen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Weder die Summe von zwei auf dem Fünfeck aufeinander folgenden Zahlen noch die Summe von drei auf dem Fünfeck aufeinander folgenden Zahlen ist durch 3 teilbar. Wie viele der fünf „Eckzahlen“ sind durch 3 teilbar?



(**A**) keine (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) das hängt von den 5 Zahlen ab

Lösung: Da die Summe von zwei auf aufeinander folgenden Fünfecksecken stehenden Zahlen nicht durch 3 teilbar sein darf, dürfen nicht mehr als 2 Zahlen durch 3 teilbar sein (denn bei 3 oder mehr durch 3 teilbaren Zahlen müsste es unter ihnen zwei geben, die aufeinander folgen). Angenommen, es ist keine oder nur eine Zahl durch 3 teilbar. Dann gibt es in beiden Fällen (mindestens) 4 aufeinander folgende Zahlen, von denen keine durch 3 teilbar ist. Dabei dürfen keine Zahlen nebeneinander stehen, von denen die eine bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2 lässt, da sonst deren Summe durch 3 teilbar ist.

Also müssen alle 4 Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest – entweder 1 oder 2 – lassen. In beiden Fällen ist dann die Summe dreier Zahlen durch 3 teilbar. Also kann es nur so sein, dass genau 2 Zahlen durch 3 teilbar sind. Dann gibt es auch tatsächlich mögliche Belegungen des Fünfecks mit 5 Zahlen, die hier abgebildet sind.



28. Ein Wanderer ist insgesamt 2 Stunden unterwegs. Zuerst wandert er auf einem ebenen Wegabschnitt, dann muss er hochsteigen. Nach der Umkehr geht es andersherum, erst abwärtssteigen, dann folgt der ebene Weg. Stolz teilt er mit, dass er auf dem ebenen Abschnitt mit 4 km/h unterwegs war und dass er mit immerhin 3 km/h aufwärts und mit 6 km/h abwärts gewandert ist. Aber wie lang war seine Tour?

(**A**) nicht ermittelbar (**B**) 6 km (**C**) 7,5 km (**D**) 8 km (**E**) 13 km

Lösung: Wir bezeichnen mit s_e das ebene und mit s_k das Kletterstück des Weges. Dann ist die Zeit, die der Wanderer für das ebene Stück braucht, bei Hin- wie Rückweg jeweils $\frac{s_e}{4\text{ km/h}}$. Die Zeit für das Kletterstück setzt sich aus Hin- und Rückweg zusammmen, ist also $\frac{s_k}{3\text{ km/h}} + \frac{s_k}{6\text{ km/h}} = \frac{3s_k}{6\text{ km/h}}$. Da die Gesamtzeit 2 h betrug, erhalten wir nun

$$\frac{2s_e}{4\text{ km/h}} + \frac{3s_k}{6\text{ km/h}} = \frac{s_e}{2\text{ km/h}} + \frac{s_k}{2\text{ km/h}} = 2\text{ h},$$

woraus $s_e + s_k = 4$ km folgt. Also war die Wanderstrecke insgesamt 8 km lang. – Übrigens ist es für die Aufgabe ohne jeden Belang, ob aufwärts, abwärts oder auf ebenem Terrain gelaufen wird. In die Berechnung geht ausschließlich die Geschwindigkeit ein.

29. Wie viele 3-stellige Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Ziffern um 9 größer ist als die Summe der Ziffern der durch 9 dividierten Zahl?

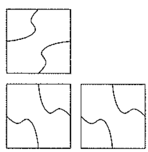
(A) 5 (B) 1 (C) 11 (D) 8 (E) 3

Lösung: Wir schreiben die 3-stellige Zahl z als $z = 100a + 10b + c$, worin a, b und c Ziffern sind und $a \neq 0$. Nun soll $a+b+c = 9+Q(100a+10b+c)/9)$ sein; dabei bezeichnet $Q(x)$ die Quersumme von x, also die Summe der Ziffern von x. Da von der Quersumme der durch 9 dividierten Zahl z gesprochen wird, ist z offenbar durch 9 teilbar. Wie wir von der Teilbarkeitsregel der 9 wissen, ist $a + b + c$ auch durch 9 teilbar. Dann ist jedoch auch die Quersumme der durch 9 geteilten Zahl z durch 9 teilbar, was bedeutet, dass z durch $9 \cdot 9 = 81$ teilbar ist.
Wir suchen nun die durch 81 teilbaren 3-stelligen Zahlen und prüfen, für welche gilt, dass ihre Quersumme um 9 größer ist als die Quersumme der durch 9 geteilten Zahl. Wir stellen diese Zahlen in einer kleinen Tabelle zusammen, wobei wir bei denen, deren Quersumme 9 ist, nicht weiterrechnen, da die um 9 verminderte Quersumme ja 0 wäre, was keinen Sinn hat:

z	$Q(z)$	$\frac{z}{9}$	$Q\left(\frac{z}{9}\right)$
162	9		
243	9		
324	9		
405	9		
486	18	54	9
567	18	63	9
648	18	72	9
729	18	81	9
810	9		
891	18	99	18
972	18	108	9

Es gibt also genau die 5 Zahlen 486, 567, 648, 729 und 972, die die in der Aufgabe beschriebene Eigenschaft besitzen.

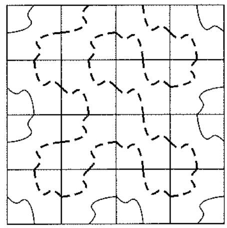
30. Als wir im Keller ein 80 cm × 80 cm großes Wandstück über einem Wasserhahn fliesen wollen, finden wir noch genügend 20 cm × 20 cm große Fliesen derselben Sorte. Jede Fliese verzieren zwei Kurvenstücke, die die Mitten benachbarter Seiten der Fliesen miteinander verbinden. Legt man die Fliesen geeignet aneinander – dabei dürfen die Fliesen auch um 90° gedreht werden – ergibt sich ein längerer Kurvenzug (s. Abb.). Wie viele Kurvenstücke lassen sich maximal in dem fertigen 80 cm × 80 cm großen Stück zu einem durchgängigen Kurvenzug verbinden?



(A) 16 (B) 18 (C) 19 (D) 21 (E) 22

Lösung: Zuerst überlegen wir uns, dass von den Fliesen, die am Rand des 80 cm×80 cm großen Stückes liegen, stets maximal – vom Anfang und Ende des Kurvenzuges abgesehen – eines der beiden Kurvenstücken für den langen Kurvenzug benutzt werden kann, weil stets eines der beiden Stückchen nach außen geht.

Damit ist der Kurvenzug ganz gewiss nicht länger als die Summe aus der doppelten Anzahl der „Innen“-Fliesen und der Anzahl der „Außen“-Fliesen, vermehrt um 2 (für Anfang und Ende des Kurvenzuges), also $2 \cdot 4 + 12 + 2 = 22$. Finden wir einen solchen Kurvenzug, haben wir die Aufgabe gelöst. Die nebenstehende Abbildung gibt einen möglichen Kurvenzug, der aus 22 Stückchen besteht, an.



In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 7 und 8 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	E	D	B	D	A	A	C	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	B	C	D	C	A	D	B	C	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	A	E	D	C	B	C	D	A	E

Lösungen zu den 7 Känguru-Knobeleien zum Jahr 2007

(1)

Solch ein Weg von A nach B muss wegen der Primfaktorzerlegung $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$ genau zweimal die 3 und einmal die 223 enthalten, außerdem kann er beliebig oft die 1 enthalten. Es gibt 5 solche direkten Wege:

A–1–3–223–1–1–3–B A–1–1–223–1–3–3–B A–3–1–223–1–1–3–B
A–3–1–1–223–1–3–B A–3–3–1–223–1–1–B

(2)

Aus der linearen Gleichung $5 \cdot (380x - 21) = 1901 - 107x$ ergibt sich als Lösung die gesuchte gebrochene Zahl $x = \frac{2006}{2007}$.

(3)

a) 2007 + 0 = 2007

b) 2004 + 3 = 2007

c) 2007 − 5 = 2002

d) 2007 − 2 = 2005

(4)

Wenn z der Zähler und n der Nenner einer solchen Zahl ist, so gilt $n = z^3 - 190$. Folglich gilt $x = 13^3 - 190 = 2007$.

(5)

Es ist $2007 = x + 2x + 3(2x) = 9x$, woraus $x = 223$ folgt. Die gesuchte Zerlegung lautet also $2007 = 223 + 446 + 1338$.

(6)

Die Rechteckfläche besteht aus $119 = 17 \cdot 7$ Rasterquadraten. Die Jahreszahl 2007 nimmt 37 Rasterquadrate ein, das sind wegen $37/119 \approx 0{,}3109$ rund $31{,}09$ Prozent der Rechteckfläche.

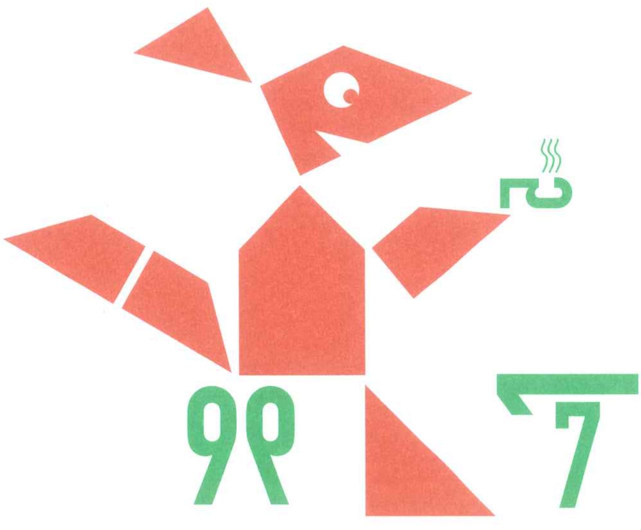
(7)

Waagerecht:
2) 457, 5) 33 ($= 3 \cdot 11$), 7) 36 ($= 6^2$), 8) 65536 ($= 2^{16}$), 9) 17, 10) 99, 12) 223.
Senkrecht:
1) 13, 3) 58522 ($= 58 \cdot 1009$), 4) 56 ($= 8 \cdot 7$), 6) 367, 7) 369, 9) 16 ($= 4^2$), 11) 97.
Das Neunfache der in 12-waagerecht stehenden Zahl 223 lautet **2007**.
(Eine mögliche Lösungsreihenfolge ist: 7s, 7w, 4s, 8w, 3s, 2w, 12w, 6s, 5w, 1s, 10w, 11s, 9w, 9s.)

^{1}1		^{2}4	^{3}5	7		^{4}5
^{5}3	^{6}3		8		^{7}3	6
	^{8}6	5	5	3	6	
^{9}1	7		2		^{10}9	^{11}9
6		^{12}2	2	3		7

www.mathe-kaenguru.de

2007 Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13



Känguru der Mathematik

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Känguru der Mathematik 2007!

Im Jahre 2007 haben in Deutschland mehr als eine halbe Million und in der Schweiz genau 10 138 Schülerinnen und Schüler aus über 5 500 bzw. 74 Schulen am Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ teilgenommen und sich an den von der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières“ erarbeiteten und ausgewählten Aufgaben versucht. Unerwartet wird dabei für manchen der Teilnehmenden die Vielfalt der Aufgabenstellungen gewesen sein. Aber mathematische Methoden finden eben an den unterschiedlichsten Stellen Anwendung, nicht nur, wenn es ans Rechnen geht. Logisches Denken, Strukturieren, Kombinieren, geometrisches Vorstellungsvermögen, Schätzen, das Berücksichtigen von Wahrscheinlichkeiten – all das sind Dinge, die besonders im Mathematikunterricht gelernt und geübt werden und die im täglichen Leben überall eine Rolle spielen. Die Mitglieder und Freunde des „Mathematikwettbewerb Känguru e. V.“ hoffen, dass die Teilnehmenden sich mit Freude den mathematischen Wettbewerbsaufgaben zugewandt und Lust auf weitere bekommen haben.

In der vorliegenden Broschüre sind die Aufgaben sowie Hinweise zu den Lösungen zusammengestellt worden. Dazu noch einige Bemerkungen: In der tiefsten Klassenstufe 3/4 wurden 21 Aufgaben gestellt, die Teilnehmer aus den höheren Klassenstufen hatten 30 Aufgaben zu lösen. Für das erste Drittel der 21 bzw. 30 Aufgaben konnten jeweils 3, für das zweite Drittel jeweils 4 und für das letzte Drittel der Aufgaben jeweils 5 Punkte erreicht werden. Bei einer falschen Antwort gab es Punktabzug, und zwar wurden bei einer falsch gelösten 3-Punkte-Aufgabe 0.75 Punkte abgezogen, bei einer falsch gelösten 4-Punkte-Aufgabe wurde 1 Punkt abgezogen und bei einer falsch gelösten 5-Punkte-Aufgabe betrug der Punktabzug 1.25 Punkte. Wenn keine Antwort angekreuzt war, gab es 0 Punkte. Auch wenn mehr als eine Antwort angekreuzt war – was nicht erlaubt ist – gab es 0 Punkte. Jeder Teilnehmer bekam 21 bzw. 30 Punkte als Grundpunktzahl; auf diese Weise kann es eine negative Gesamtpunktzahl nicht geben, und die Höchstpunktzahl beträgt 105 bzw. 150 Punkte.

Die Organisation für die Schweiz wurde auch in diesem Jahr von der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK) übernommen. Die deutsche Übersetzung der Aufgaben, die ja zunächst in englischer Sprache vorliegen, wurde gemeinsam entwickelt, so dass schliesslich einmal mehr eine Version entstand, die mit dem gleichen Wortlaut sowohl in Deutschland als auch in der Schweiz verwendet werden konnte.

Viel Freude mit Mathematik wünscht euch

Monika Noack
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Die Lösungshinweise wurden von Dr. M. Noack unter Mithilfe von Dr. A. Noack, Dr. D. Vigerske, Hj. Stocker und A. Vogelsanger erarbeitet. Autor der Känguru-Knobeleien ist Dr. R. Mildner.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin
www.mathe-kaenguru.de

Umschlaggestaltung: Peperoni Werbeagentur GmbH

Druck: Lussi Druck AG, Offsetdruck, 6370 Stans

Deutschschweizerische Mathematikkommission: www.vsmp.ch/dmk

Klassenstufen 7 und 8

1. $\dfrac{2+0+0+7-2\cdot 0\cdot 0\cdot 7}{2007} =$

(A) $\dfrac{1}{30}$ (B) $\dfrac{1}{1003}$ (C) $\dfrac{1}{223}$ (D) $\dfrac{1}{72}$ (E) $\dfrac{1}{207}$

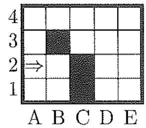
Lösung: Wir rechnen: $\dfrac{2+0+0+7-2\cdot 0\cdot 0\cdot 7}{2007} = \dfrac{9-0}{9\cdot 223} = \dfrac{1}{223}$.

2. Jemand hat von KANGAROO, dem englischen Wort für Känguru, fünf Buchstaben weggestrichen und die restlichen in umgekehrter Reihenfolge nebeneinander wieder hingeschrieben. Was kann so entstanden sein?

(A) RAGN (B) OGR (C) RNO (D) RAN (E) ANG

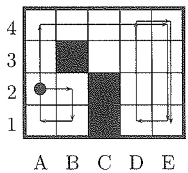
Lösung: Streichen wir 5 von 8 Buchstaben weg, bleiben 3 übrig, also kann (**A**) nicht Lösung sein. (**B**) scheidet aus, weil von hinten gelesen R vor G kommt, (**C**) scheidet aus, weil von hinten gelesen O vor R und N kommt, (**E**) scheidet aus, weil von hinten gelesen G vor N kommt. (**D**) erhält man, wenn K, A, G, O und O gestrichen werden.

3. Eine kleine Spielzeug-Elektromaus rennt stets so lange geradeaus, bis sie an ein Hindernis kommt. Dort wendet sie sich nach rechts, rennt bis zum nächsten Hindernis, wendet sich nach rechts usw. Ich habe sie bei A2 ins Spielfeld gesetzt, wo sie in Pfeilrichtung losrennt. Der Feldrand und die dunklen Kästchen sind für die Maus ein Hindernis. Wo hält sie an?



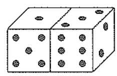
(A) B2 (B) A1 (C) E4 (D) C3 (E) nirgendwo

Lösung: Wir zeichnen den Weg der Elektromaus ein:



Aus dem rechten Streifen von D1 bis E4, in den die Rennmaus mit dem 5. Schritt gerät, kommt sie nicht mehr heraus. – Praktisch endet ihr Lauf dann, wenn die Batterie leer ist.

4. Zwei Spielwürfel liegen so, dass genau 5 ihrer 12 Seitenflächen sichtbar sind (s. Abb.). Wie groß ist die Summe der Augenzahlen auf den im Bild nicht sichtbaren Seitenflächen der beiden Würfel?



Hinweis: Bei Spielwürfeln liegt die 1 der 6, die 2 der 5 und die 3 der 4 gegenüber.

(A) 15 (B) 12 (C) 7 (D) 25 (E) 24

Lösung: Die Gesamtaugenzahl der beiden Würfel ist $2\cdot(1+2+3+4+5+6) = 42$. Da $1+5+3+6+2 = 17$ Augen zu sehen sind, sind $42-17 = 25$ versteckt.
Den Hinweis, dass bei Spielwürfeln die 1 der 6, die 2 der 5 und die 3 der 4 gegenüberliegt, brauchen wir hier nur, um sicher zu sein, dass auf den beiden Würfeln die Augenzahlen von 1 bis 6 sämtlich vorkommen. Allerdings hätten wir die Lösung auch erhalten können, indem wir in Kenntnis der Spielwürfeleigenschaft die „unsichtbaren" Augenzahlen addiert hätten, also $(2+6+3+4)+(1+4+5) = 25$.

5. In einem x, y-Koordinatensystem sind die 5 Punkte $A = (2006; 2007)$, $B = (2007; 2006)$, $C = (-2006; -2007)$, $D = (2006; -2007)$ und $E = (2007; -2006)$ eingezeichnet. Welche der folgenden Geraden ist dann parallel zur x-Achse?

(**A**) BE (**B**) CD (**C**) AE (**D**) BD (**E**) CE

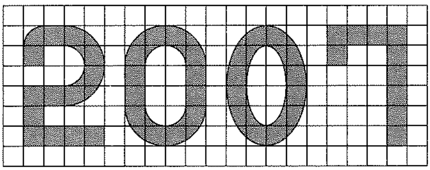
Lösung: Eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, muss durch Punkte verlaufen, die in den y-Koordinaten übereinstimmen. Dies trifft unter den 5 Punkten für C und D und auch nur für diese beiden zu.

6. $2007 - 20,07 =?$

(**A**) 1997,83 (**B**) 1987,7 (**C**) 1888,83 (**D**) 1986,93 (**E**) 1897,93

Lösung: Bei dieser Aufgabe können wir schriftlich rechnen oder auch die Lösung durch Vergleich der Lösungsvorschläge schnell finden. Es wird eine Zahl subtrahiert, die nur wenig größer als 20 ist, also muss das Ergebnis ein bisschen kleiner als $2007 - 20 = 1987$ sein. Das trifft allein für (**D**) zu. Und wirklich ist auch $1986,93 + 20,07 = 2007$.

2007-Knobelei - 1



Wieviel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche beansprucht die Jahreszahl 2007?

Hinweise zu den krummlinigen Begrenzungen: Zwei-Figur (2 Halbkreise, 1 Viertelkreis), erste Null-Figur (4 Halbkreise), zweite Null-Figur (2 konzentrische Ellipsen).

7. Wähle aus dem 3×3-Feld 3 Zahlen aus, so dass du aus jeder Zeile und jeder Spalte genau eine gewählt hast, und addiere die 3 Zahlen. Dann ist die größtmögliche Summe

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 23

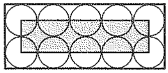
Lösung: Schon nach den ersten Versuchen stellen wir fest, dass wir immer wieder 15 als Summe erhalten. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich jede mögliche Summe 15 ist. Die Zahlen in der 1. Zeile des 3×3-Feldes sind $1, 1+1, 1+2$, in der 2. Zeile $4, 4+1, 4+2$ und in der 3. Zeile $7, 7+1, 7+2$. Da wir aus jeder Zeile genau eine Zahl in die Summe nehmen, ist der „Grundsockel" zunächst einmal $1+4+7$. Hinzu kommt, dass aus jeder Spalte genau ein Summand stammt, also genau ein Summand, dem zum Sockel nichts hinzugefügt werden muss, genau ein Summand, dem eine 1 und genau ein Summand, dem eine 2 hinzugefügt werden muss. Damit erhalten wir insgesamt stets $1 + 4 + 7 + 0 + 1 + 2 = 15$. Das ist dann natürlich auch die größtmögliche Summe.

8. Eine Palindromzahl ist eine Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet; z. B. sind 1551 und 2207022 Palindromzahlen. Was erhalte ich, wenn ich von der größten 6-stelligen Palindromzahl die kleinste 5-stellige Palindromzahl subtrahiere?

(A) 989998 (B) 989989 (C) 98999 (D) 909990 (E) 988888

Lösung: Die größte 6-stellige Palindromzahl ist 999999. Die kleinste 5-stellige ist nicht etwa 11111, sondern 10001. Dann ist die Differenz $999999 - 10001 = 989998$.

9. In einer kleinen Manufaktur werden Bienenwachskerzen mit kreisrundem Querschnitt hergestellt und zu je 10 Stück in einen Karton mit durchsichtigem Deckel verpackt. Das Etikett zu dieser Ware soll über die Mitten aller 10 Kerzen verlaufen (s. Zeichnung). Welche Maße muss es haben, wenn der Karton für die 10 Kerzen einen Umfang von 63 hat? (Alle Angaben in cm.)



(A) 4×12 (B) $3,5 \times 14$ (C) $4,5 \times 18$ (D) $4,5 \times 22$ (E) $5 \times 12,5$

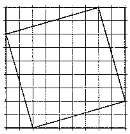
Lösung: Bezeichnen wir mit r den Radius der Kerzenquerschnittskreise, so finden wir, dass die Kiste $10r$ lang und $4r$ breit ist. Der Umfang ist demzufolge $20r + 8r = 28r = 63$, woraus folgt, dass $r = \frac{9}{4}$ ist. Das Etikett seinerseits ist $8r$ lang und $2r$ breit, d. h. $8 \cdot \frac{9}{4} = 18$ lang und $2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$ breit, hat also die Maße $18 \times 4,5$.

10. Es sei $x < -1$. Welche der folgenden Zahlen ist dann am größten?

(A) $x + 1$ (B) $2x$ (C) $-2x$ (D) $6x + 2$ (E) $x - 2$

Lösung: Für $x < -1$ ist $x + 1 < 0$, ist $2x < -2$, ist $6x + 2 < -4$, ist $x - 2 < -4$, während $-2x > 2$ ist. Also ist (C) richtig.

11. Ein kleines Quadrat ist, wie in der Zeichnung dargestellt, in ein großes einbeschrieben. Wie groß ist der Flächeninhalt des kleinen Quadrats, wenn die kleinen Kästchen einen Flächeninhalt von 1 cm^2 haben?



(A) 53 cm^2 (B) 49 cm^2 (C) 56 cm^2 (D) 45 cm^2 (E) 64 cm^2

Lösung: Wir zählen die Kästchen entlang einer Quadratseite – es sind 9 – und finden für die Fläche des großen Quadrats $9 \cdot 9\ \text{cm}^2 = 81\ \text{cm}^2$. Von dieser Fläche ist die Fläche von 4 rechtwinkligen Dreiecken zu subtrahieren. Der Flächeninhalt dieser rechtwinkligen Dreiecke ist die Hälfte des Produkts der Seitenlängen der beiden Katheten, also $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7\ \text{cm}^2 = 7\ \text{cm}^2$. Damit gilt für den Flächeninhalt des kleinen Quadrates:

$$(81 - 4 \cdot 7)\ \text{cm}^2 = (81 - 28)\ \text{cm}^2 = 53\ \text{cm}^2.$$

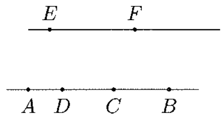
12. Stell dir zwei parallele Geraden vor und auf einer dieser Geraden vier, auf der anderen zwei Punkte. Wie viele Dreiecke lassen sich zeichnen, deren Ecken mit jeweils drei dieser sechs Punkte zusammenfallen?

(A) 6 (B) 16 (C) 15 (D) 12 (E) 21

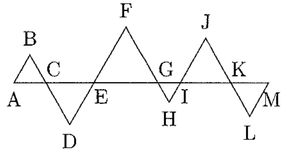
Lösung: Zuerst bemerken wir, dass ein Dreieck immer dann entsteht, wenn zwei Punkte auf einer der beiden Geraden liegen und der dritte Punkt auf der anderen Geraden. Wir halten nun die Gerade mit den 4 Punkten fest. Dann gibt es zu jedem Paar, das ich aus den 4 Punkten bilden kann, mit jedem der beiden Punkte auf der zweiten Geraden ein Dreieck. Da sich genau 6 Punktepaare aus den 4 Punkten auswählen lassen, entstehen hierdurch $6 \cdot 2 = 12$ Dreiecke.

Nehmen wir nun die beiden Punkte der zweiten Geraden und verbinden sie mit jedem einzelnen der 4 Punkte der ersten Geraden, so kommen noch einmal 4 Dreiecke hinzu. Damit gibt es insgesamt $12 + 4 = 16$ Dreiecke.

Wegen der noch überschaubaren Anzahl von Punkten ist es hier auch gut möglich, sich eine Skizze zu machen, die Punkte zu bezeichnen und die Dreiecke systematisch aufzulisten. Es sind: ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE, ABF, ACF, ADF, BCF, BDF, CDF, AEF, BEF, CEF, DEF.



13. Entlang der 24 cm langen Strecke von A nach M sind sechs unterschiedlich große Zacken, jeweils in Form gleichseitiger Dreiecke, aneinandergereiht. Wie lang ist der Zickzackweg von A über B, C, D usw. nach M?



(**A**) 96 cm (**B**) 72 cm (**C**) 48 cm (**D**) 56 cm (**E**) 106 cm

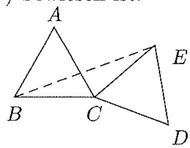
Lösung: Da es sich bei den aneinandergereihten Zacken um gleichseitige Dreiecke handelt, ist ein jeder Zacken genau doppelt so lang wie die Strecke, über der er errichtet ist, also z. B. $\overline{ABC}$ doppelt so lang wie $\overline{AC}$. Für die Gesamtstrecke gilt dementsprechend, dass sie $2 \cdot 24$ cm $= 48$ cm lang ist.

14. Die Verkaufsanalyse eines Bioladens ergab, dass 1/3 der Kunden die Tomatensorte „Gartenperle“ bevorzugt, während 2/3 die Sorte „Tafelfreude“ vorzieht. Nach einer Werbekampagne für „Gartenperle“ wechselte 1/4 der „Tafelfreude“-Kunden zu „Gartenperle“, jedoch niemand andersherum. Was trifft nun zu (Gartenperle = G, Tafelfreude = T)?

(**A**) 5/12 wählen G, 7/12 T. (**B**) 7/12 wählen G, 5/12 T. (**C**) 1/4 wählen G, 3/4 T.
(**D**) 1/2 wählen G, 1/2 T. (**E**) 1/3 wählen G, 2/3 T.

Lösung: Wenn die vor der Werbekampagne auf „Tafelfreude“ schwörenden $\frac{2}{3}$ der Kunden nach der Kampagne um $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{3}$, also um $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ vermehrt wurde, so beträgt diese Zahl insgesamt dann $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, womit die Richtigkeit von (**D**) bewiesen ist.

15. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDE$ seien gleichseitig und zueinander kongruent. Wie groß ist $\measuredangle EBA$, wenn $\measuredangle ECA = 70°$ ist?



(**A**) $42{,}5°$ (**B**) $40°$ (**C**) $35°$ (**D**) $32{,}5°$ (**E**) $30°$

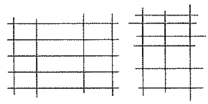
Lösung: Da Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist, ist $\measuredangle ACB = 60°$ und demzufolge $\measuredangle ECB = \measuredangle ACB + \measuredangle ECA = 60° + 70° = 130°$. Da $\overline{BC} = \overline{CE}$, ist $\triangle BCE$ gleichschenklig. Dann sind die beiden Basiswinkel $\frac{1}{2}(180° - 130°) = 25°$, woraus $\measuredangle EBA = 60° - 25° = 35°$ folgt.

16. Betrachte alle natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9999, 10\,000$. Wie viel Prozent dieser Zahlen sind Quadratzahlen?

(**A**) 1% (**B**) 10% (**C**) 1,5% (**D**) 2% (**E**) 1,2%

Lösung: Da $10\,000 = 100^2$ ist, sind von den 10 000 Zahlen genau 100 Quadratzahlen. Es ist $\frac{100}{10\,000} = \frac{1}{100}$, d. h. 1%.

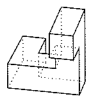
17. Zeichnet man von 9 Geraden 5 waagerecht und 4 senkrecht, so bilden diese 12 Zellen; hätte man 6 waagerecht und die restlichen 3 senkrecht gezeichnet, wären nur 10 Zellen entstanden (s. Zeichnungen). Wie viele Zellen lassen sich maximal mit 15 Geraden bilden?

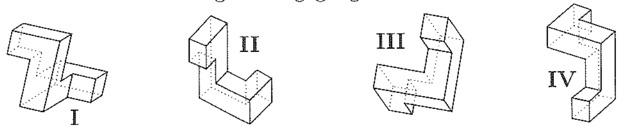


(A) 22 (B) 30 (C) 36 (D) 42 (E) 48

Lösung: Die Anzahl der Zellen, die bei einer Einteilung der 15 Geraden in zwei Gruppen entstehen, lässt sich schnell ausrechnen: Bei einer Teilung $2:13$ entstehen $1 \cdot 12 = 12$ Zellen. Teilen wir $3:12$, sind es $2 \cdot 11 = 22$, bei $4:11$ entstehen $3 \cdot 10 = 30$, bei $5:10$ schon $4 \cdot 9 = 36$, bei $6:9$ dann $5 \cdot 8 = 40$ und bei $7:8$ schließlich $6 \cdot 7 = 42$ Zellen.
Allgemein gilt für n Geraden, dass bei einer Teilung in $m:(n-m)$ mit $m \leq \frac{n}{2}$ genau $(m-1)\cdot(n-m-1) = mn - m^2 - m - n + m + 1 = m \cdot (n-m) - n + 1$ Zellen entstehen.
In diesem Term ist der Teil $-n+1$ eine feste, nur von der Zahl der Geraden, nicht von ihrer Teilung in zwei Gruppen abhängige Zahl, während $m \cdot (n-m)$ unmittelbar von m abhängt.
Es lässt sich zeigen: Wenn n gerade ist, so ist das Produkt für $m = \frac{n}{2}$ am größten. Ist n ungerade, so ist das Produkt für $m = \frac{n-1}{2}$ am größten.

18. Welcher oder welche der unten abgebildeten Körper sind aus dem rechts abgebildeten durch Drehung hervorgegangen?





(A) nur II und IV (B) nur I und III (C) nur III
(D) I, II und IV (E) keiner

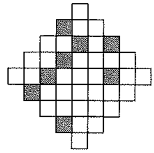
Lösung: Nur die beiden Körper I und III sind aus dem rechts neben dem Aufgabentext abgebildeten durch Drehung hervorgegangen. Die beiden anderen sind Spiegelbilder dieses Körpers.

19. Theodoras Taschenrechner ist kaputt. Die 1 lässt sich nicht eintippen. Wenn sie auf die 1 tippt, um sie einzugeben, erscheint nicht einmal eine Leerstelle. Ohne das zu bemerken, hatte ihr Banknachbar eine 6-stellige Zahl eingetippt, und auf dem Display erschien 8773. Wie viele verschiedene 6-stellige Zahlen könnte er eingegeben haben?

(A) 20 (B) 16 (C) 15 (D) 12 (E) 9

Lösung: Theodoras Banknachbar hat, da nur 4 Ziffern erschienen sind, zweimal eine 1 eingegeben. Das ist auf folgende Arten möglich: 118773, 181773, 187173, 187713, 187731, 811773, 817173, 817713, 817731, 871173, 871713, 871731, 877113, 877131, 877311. Das sind insgesamt 15 Möglichkeiten.
Analysieren wir die oben stehende Auflistung, so ist klar, dass sich diese Aufgabe lösen lassen würde, ohne alle Zahlen aufzuschreiben. Wir lassen die erste 1 von vorn bis zum letztmöglichen Platz in der 6-stelligen Zahl (das ist die 10er Stelle) „wandern", wobei die zweite 1 jeweils alle verbleibenden Plätze einnimmt. Dabei erhalten wir zuerst (wenn die erste 1 auf der 100 000er Stelle steht) 5, dann 4, dann 3, dann 2, schließlich eine Möglichkeit für die zweite 1, so dass sich als gesuchte Anzahl $5+4+3+2+1 = 15$ ergibt.

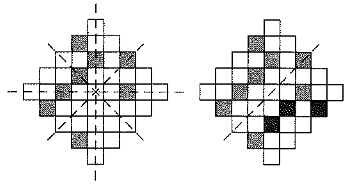
20. Wie viele der weißen Kästchen müssen mindestens noch geschwärzt werden, damit eine Figur entsteht, die eine Symmetrieachse besitzt?



(**A**) 6 (**B**) 5 (**C**) 4 (**D**) 3 (**E**) 2

Lösung: Für die Figur aus der Aufgabe sind vier Symmetrieachsen denkbar; entweder – jeweils durch den Mittelpunkt der Figur – in der Waagerechten und Senkrechten oder durch die Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes (s. Abb. links).

Damit die Figur symmetrisch bzgl. der Waagerechten wird, müssten 4 Kästchen geschwärzt werden. Für die Senkrechte wären es sogar 5 Kästchen, ebenso wie für die von links oben nach rechts unten verlaufende Winkelhalbierende. Für die von rechts oben nach links unten verlaufende allerdings brauchten wir nur 3 Kästchen zu schwärzen (s. Abb. rechts).



21. Stell dir vor, du hast die Summe der Ziffern des Quadrates einer Zahl auszurechnen, die größer ist als 2007. Welches ist der kleinstmögliche Wert dieser Summe?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 13 (**D**) 27 (**E**) 32

Lösung: Da unter den Zahlen, die größer als 2007 sind, auch 10 000 ist und $10\,000^2 = 100\,000\,000$ mit der Quersumme 1 ist, haben wir damit die Lösung gefunden, denn eine kleinere Zahl kommt dafür nicht in Frage.

2007-Knobelei – 2

Man finde alle geordneten Paare (x, y) nichtnegativer ganzer Zahlen x und y mit $x < y$, welche der Gleichung $xy+x+y = 2007$ genügen.

22. Alex, Benno, Clara, Delia, Elise und Franz wippen auf dem Spielplatz. Alex und Benno sind zusammen leichter als Clara und Delia, Clara und Elise leichter als Franz und Benno. Welche der folgenden Aussagen stimmt dann *gewiss*?

(**A**) Alex und Elise sind zusammen leichter als Franz und Delia.

(**B**) Delia und Elise sind zusammen schwerer als Clara und Franz.

(**C**) Delia und Franz sind zusammen schwerer als Alex und Clara.

(**D**) Alex und Benno sind zusammen leichter als Clara und Franz.

(**E**) Alex, Benno und Clara sind zusammen genauso schwer wie Delia, Elise und Franz.

Lösung: Wir bezeichnen mit a das Gewicht von Alex, mit b das von Benno usw. Dann entnehmen wir der Schilderung, dass die Ungleichungen $a + b < c + d$ und $c + e < f + b$ gelten. Daraus folgern wir (Addition der beiden Ungleichungen), dass $a + b + c + e < c+d+f+b$ bzw. nach Subtraktion von $b+c$ auf beiden Seiten der Ungleichung $a+e < d+f$ sicher gilt, das heißt, dass Alex und Elise zusammen leichter sind als Delia und Franz. Das ist gerade der Inhalt von (**A**). Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden.

23. Wenn man 36 zu 37 addiert, erhält man 73, die Addition von 36 hat also ein Vertauschen der beiden Ziffern der Zahl 37 bewirkt. Wie viele 2-stellige Zahlen gibt es, für die die Zahl, die beim Vertauschen der beiden Ziffern entsteht, die Summe aus dieser gewählten Zahl und 36 ist?

(A) 11 (B) 10 (C) 8 (D) 6 (E) 5

Lösung: Gesucht sind alle Paare $(a;\, b)$ ganzzahliger Lösungen der folgenden Gleichung: $10a + b + 36 = 10b + a$. Wir formen um $9b - 9a = 9\,(b - a) = 36$. Folglich müssen wir alle die Paare ganzer Zahlen $(a; b)$ mit $1 \leq a, b \leq 9$ in die nähere Wahl ziehen, für die $b - a = 4$ ist. Das führt uns zu den Paaren (5; 9), (4; 8), (3; 7), (2; 6) und (1; 5). Wie wir nachrechnen können, haben 59, 48, 37, 26 und 15 tatsächlich die beschriebene Vertauschungseigenschaft.

24. Zwei Quadrate mit den Seitenlängen 7 cm bzw. 24 cm sind geschickt zerschnitten worden, so dass sich aus den Teilen ein neues, größeres Quadrat zusammensetzen lässt. Welche Seitenlänge hat dieses Quadrat?

(A) 27 cm (B) 30 cm (C) 31 cm (D) 25 cm (E) 32 cm

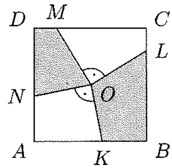
Lösung: Der Flächeninhalt des zusammengesetzten Quadrates beträgt (in cm^2) $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Folglich ist die Seitenlänge 25 cm.

25. Nachdem wir im Geometrieunterricht eine Pyramide gebaut hatten, habe ich die Anzahl der Ecken, der Kanten und der Flächen dieser Pyramide addiert. Es kam irgendeine Zahl zwischen 20 und 24 heraus. Welche?

(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

Lösung: Eine Pyramide ist dadurch charakterisiert, dass sie eine vieleckige Grundfläche hat, von der aus Kanten zu einer gemeinsamen Spitze führen. Falls die Anzahl der Ecken der Grundfläche e ist, so ist die Anzahl der Ecken der Pyramide $e + 1$. Die Anzahl der Kanten ergibt sich aus der Anzahl von Kanten, die zur Grundfläche gehören – das sind e Stück – und der Anzahl der zur Spitze führenden Kanten – ebenfalls e Stück. Sie ist also gleich der doppelten Eckenzahl. An Flächen finden wir außer der Grundfläche zu jeder Kante, die zur Grundfläche gehört genau eine, nämlich das Dreieck, das diese Kante zusammen mit der Spitze bildet. Fassen wir zusammen, so ergibt sich für die Summe aus Ecken $(e + 1)$, Kanten $(2e)$ und Flächen $(1 + e)$ nun $4e + 2$. Also muss die Anzahl bei Division durch 4 den Rest 2 lassen. Das trifft unter den angegebenen Zahlen zwischen 20 und 24 nur auf 22 zu.

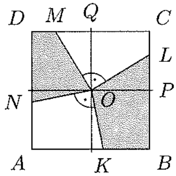
Bei den relativ kleinen Zahlen 20,…, 24 war es natürlich auch möglich, schnell auszurechnen, wie groß die Summe aus Ecken,- Kanten- und Flächenzahl für die wohlbekannten Pyramiden – das Tetraeder und die vierseitige Pyramide – ist. Beim Tetraeder haben wir 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Flächen, die Summe ist 14; bei der vierseitigen Pyramide 5 Ecken, 8 Kanten und 5 Flächen mit der Summe 18, was noch zu klein ist. Stellen wir uns nun die 5-seitige Pyramide vor, so erhalten wir 6 Ecken, 10 Kanten und 6 Flächen, also 22 als Summe – und damit sind wir auch fertig. Allerdings haben wir wahrscheinlich nicht die interessante Erkenntnis, dass diese Summe *stets* eine gerade, aber nicht durch 4 teilbare Zahl ist!



26. Es sei O der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$. Die Punkte K, L, M und N auf den Quadratseiten liegen so, dass $\overline{OL} \perp \overline{OM}$ und $\overline{OK} \perp \overline{ON}$ ist (s. Abb.). Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Gebietes, wenn die Seitenlänge des Quadrats 2 ist?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 2,5 (**D**) 2,25 (**E**) hängt von der Lage von K und L ab

Lösung: Wir denken uns die Diagonale DB und die Strecke AO eingezeichnet. Die Dreiecke $\triangle NAO$ und $\triangle KBO$ sind zueinander kongruent, denn $\overline{AO} = \overline{BO}$ (halbe Diagonale), $\measuredangle NAO = \measuredangle KBO = 45°$ und $\measuredangle NOA = \measuredangle KOB = \measuredangle NOB - 90°$. Dann ist jedoch – unterhalb der Diagonale – der Flächeninhalt des grauen Gebietes gleich dem des hellen. Da sich für die oberhalb der Diagonale liegende Hälfte des Quadrates dieselben Überlegungen machen lassen, gilt, dass das gesamte graue Gebiet den halben Flächeninhalt des Quadrates, also 2, hat.

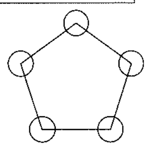


Ein zweiter Lösungsweg: Die Horizontale durch O schneidet BC in P, die Vertikale durch O schneidet CD in Q. Da $\triangle OPL \cong \triangle OQM$, so ist der Flächeninhalt von $OLCM$ gleich einem Viertel des Quadrats. Analog gilt dies für den Flächeninhalt von $ONAK$. Also ist der Inhalt der grauen gleich dem Inhalt der weißen Flächenstücke, nämlich 2.

2007-KNOBELEI – 3

Z	W	E	I	T	A	U	S	E	N	D	U	N	D	S
W	E	I	T	A	U	S	E	N	D	U	N	D	S	I
E	I	T	A	U	S	E	N	D	U	N	D	S	I	E
I	T	A	U	S	E	N	D	U	N	D	S	I	E	B
T	A	U	S	E	N	D	U	N	D	S	I	E	B	E
A	U	S	E	N	D	U	N	D	S	I	E	B	E	N

Wie viele verschiedene Lesemöglichkeiten – stets waagerecht oder senkrecht zu einem benachbarten Buchstaben fortschreitend – gibt es in der abgebildeten Buchstaben-Matrix für den Begriff ZWEITAUSENDUNDSIEBEN?

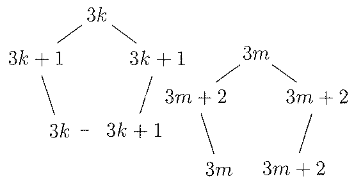


27. In den Ecken eines Fünfecks stehen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Weder die Summe von zwei auf dem Fünfeck aufeinander folgenden Zahlen noch die Summe von drei auf dem Fünfeck aufeinander folgenden Zahlen ist durch 3 teilbar. Wie viele der fünf „Eckzahlen" sind durch 3 teilbar?

(**A**) keine (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) das hängt von den 5 Zahlen ab

Lösung: Da die Summe von zwei auf aufeinanderfolgenden Fünfecksecken stehenden Zahlen nicht durch 3 teilbar sein darf, dürfen nicht mehr als 2 Zahlen durch 3 teilbar sein (denn bei 3 oder mehr durch 3 teilbaren Zahlen müsste es unter ihnen zwei geben, die aufeinander folgen). Angenommen, es ist keine oder nur eine Zahl durch 3 teilbar. Dann gibt es in beiden Fällen (mindestens) 4 aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine durch 3 teilbar ist. Dabei dürfen keine Zahlen nebeneinanderstehen, von denen die eine bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2 lässt, da sonst deren Summe durch 3 teilbar ist.

Also müssen alle 4 Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest – entweder 1 oder 2 – lassen. In beiden Fällen ist dann die Summe dreier Zahlen durch 3 teilbar. Also kann es nur so sein, dass genau 2 Zahlen durch 3 teilbar sind. Dann gibt es auch tatsächlich mögliche Belegungen des Fünfecks mit 5 Zahlen, die hier abgebildet sind.



28. Ein Wanderer ist insgesamt 2 Stunden unterwegs. Zuerst wandert er auf einem ebenen Wegabschnitt, dann muss er hochsteigen. Nach der Umkehr geht es andersherum, erst abwärtssteigen, dann folgt der ebene Weg. Stolz teilt er mit, dass er auf dem ebenen Abschnitt mit 4 km/h unterwegs war und dass er mit immerhin 3 km/h aufwärts und mit 6 km/h abwärts gewandert ist. Aber wie lang war seine Tour?

(A) nicht ermittelbar (B) 6 km (C) 7,5 km (D) 8 km (E) 13 km

Lösung: Wir bezeichnen mit s_e das ebene und mit s_k das Kletterstück des Weges. Dann ist die Zeit, die der Wanderer für das ebene Stück braucht, bei Hin- wie Rückweg jeweils $\frac{s_e}{4\text{ km/h}}$. Die Zeit für das Kletterstück setzt sich aus Hin- und Rückweg zusammmen, ist also $\frac{s_k}{3\text{ km/h}} + \frac{s_k}{6\text{ km/h}} = \frac{3s_k}{6\text{ km/h}}$. Da die Gesamtzeit 2 h betrug, erhalten wir nun

$$\frac{2s_e}{4\text{ km/h}} + \frac{3s_k}{6\text{ km/h}} = \frac{s_e}{2\text{ km/h}} + \frac{s_k}{2\text{ km/h}} = 2\text{ h},$$

woraus $s_e + s_k = 4$ km folgt. Also war die Wanderstrecke insgesamt 8 km lang. – Übrigens ist es für die Aufgabe ohne jeden Belang, ob aufwärts, abwärts oder auf ebenem Terrain gelaufen wird. In die Berechnung geht ausschließlich die Geschwindigkeit ein.

29. Wie viele 3-stellige Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Ziffern um 9 größer ist als die Summe der Ziffern der durch 9 dividierten Zahl?

(A) 5 (B) 1 (C) 11 (D) 8 (E) 3

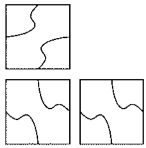
Lösung: Wir schreiben die 3-stellige Zahl z als $z = 100a + 10b + c$, worin a, b und c Ziffern sind und $a \neq 0$. Nun soll $a+b+c = 9+Q(100a+10b+c)/9)$ sein; dabei bezeichnet $Q(x)$ die Quersumme von x, also die Summe der Ziffern von x.

Da von der Quersumme der durch 9 dividierten Zahl z gesprochen wird, ist z offenbar durch 9 teilbar. Wie wir von der Teilbarkeitsregel der 9 wissen, ist $a + b + c$ auch durch 9 teilbar. Dann ist jedoch auch die Quersumme der durch 9 geteilten Zahl z durch 9 teilbar, was bedeutet, dass z durch $9 \cdot 9 = 81$ teilbar ist. Wir suchen nun die durch 81 teilbaren 3-stelligen Zahlen und prüfen, für welche gilt, dass ihre Quersumme um 9 größer ist als die Quersumme der durch 9 geteilten Zahl. Wir stellen diese Zahlen in einer kleinen Tabelle zusammen, wobei wir bei denen, deren Quersumme 9 ist, nicht weiterrechnen, da die um 9 verminderte Quersumme ja 0 wäre, was keinen Sinn hat:

z	$Q(z)$	$\frac{z}{9}$	$Q\left(\frac{z}{9}\right)$
162	9		
243	9		
324	9		
405	9		
486	18	54	9
567	18	63	9
648	18	72	9
729	18	81	9
810	9		
891	18	99	18
972	18	108	9

Es gibt also genau die 5 Zahlen 486, 567, 648, 729 und 972, die die in der Aufgabe beschriebene Eigenschaft besitzen.

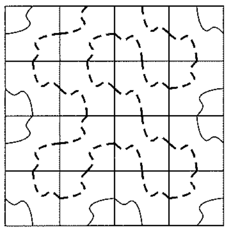
30. Als wir im Keller ein 80 cm × 80 cm großes Wandstück über einem Wasserhahn fliesen wollen, finden wir noch genügend 20 cm × 20 cm große Fliesen derselben Sorte. Jede Fliese verzieren zwei Kurvenstücke, die die Mitten benachbarter Seiten der Fliesen miteinander verbinden. Legt man die Fliesen geeignet aneinander – dabei dürfen die Fliesen auch um 90° gedreht werden – ergibt sich ein längerer Kurvenzug (s. Abb.). Wie viele Kurvenstücke lassen sich maximal in dem fertigen 80 cm × 80 cm großen Stück zu einem durchgängigen Kurvenzug verbinden?



(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 22

Lösung: Zuerst überlegen wir uns, dass von den Fliesen, die am Rand des 80 cm×80 cm großen Stückes liegen, stets maximal – vom Anfang und Ende des Kurvenzuges abgesehen – eines der beiden Kurvenstücken für den langen Kurvenzug benutzt werden kann, weil stets eines der beiden Stückchen nach außen geht.

Damit ist der Kurvenzug ganz gewiss nicht länger als die Summe aus der doppelten Anzahl der „Innen"-Fliesen und der Anzahl der „Außen"-Fliesen, vermehrt um 2 (für Anfang und Ende des Kurvenzuges), also $2 \cdot 4 + 12 + 2 = 22$. Finden wir einen solchen Kurvenzug, haben wir die Aufgabe gelöst. Die nebenstehende Abbildung gibt einen möglichen Kurvenzug, der aus 22 Stückchen besteht, an.

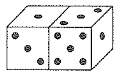


In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 7 und 8 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	E	D	B	D	A	A	C	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	B	C	D	C	A	D	B	C	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	A	E	D	C	B	C	D	A	E

Klassenstufen 9 und 10

1. Zwei Spielwürfel liegen so, dass genau 5 ihrer 12 Seitenflächen sichtbar sind (s. Abb.). Wie groß ist die Summe der Augenzahlen der im Bild nicht sichtbaren Seitenflächen der beiden Würfel? *Hinweis: Bei Spielwürfeln liegt der 1 die 6, der 2 die 5, der 3 die 4 gegenüber.*



(A) 15 (B) 9 (C) 27 (D) 29 (E) eine andere Zahl

Lösung: Die Gesamtaugenzahl der beiden Würfel ist $2 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 42$. Da $1+3+3+5+1 = 13$ Augen zu sehen sind, sind $42-13 = 29$ versteckt.
Die Information zur Lage der Punkte auf einem Spielwürfel ist übrigens nur notwendig, um zu wissen, dass auf den beiden Würfeln die Augenzahlen von 1 bis 6 *sämtlich* vorkommen, also von der Gesamtpunktzahl eines Würfels von 21 auszugehen ist.

2. Anna, Ben und Clea haben zusammen 30 Kaugummis. Gäbe Ben der Clea 5, Clea der Anna 4 und Anna dem Ben 2 Kaugummis, so hätten alle drei gleich viele. Wie viele Kaugummis hat Anna?

(A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

Lösung: Wenn alle gleich viele hätten, hätte jeder 10 Kaugummis. Da Anna vor diesem Zustand, bei dem alle gleich viel haben, 4 Kaugummis bekommt und 2 Kaugummis weggibt, hat sie also zu Beginn $10-4+2 = 8$ Kaugummis.

3. Im Mathecamp gibt es eine Lotterie. Allerdings gewinnen dort von den gezogenen Losen nur diejenigen, deren Nummer mindestens 5-stellig ist und bei denen sich unter den Ziffern höchstens 3 finden, die größer sind als 2. Wie viele der nachfolgenden Lose sind demnach Gewinnlose? $\boxed{1022}$ $\boxed{22222}$ $\boxed{102334}$ $\boxed{213343}$ $\boxed{3042531}$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Die Zahl 1022 scheidet aus, da sie nur 4-stellig ist und die Zahlen 213343 und 3042531 scheiden aus, da sie jeweils 4 Ziffern enthalten, die größer als 2 sind. Die beiden Gewinnzahlen sind 22222 und 102334 – die erste ist 5-, die zweite 6-stellig, die erste enthält *keine* Ziffer die größer als 2 ist, die andere genau 3.

4. Um wie viel Prozent ist B größer als A, wenn A um 20% kleiner ist als B?

(A) um 22,5% (B) um 27,5% (C) um 20% (D) um 25% (E) um 30%

Lösung: Dass A um 20% kleiner ist als B, bedeutet, dass $A = B - \frac{20}{100}B = B - \frac{1}{5}B = \frac{4}{5}B$ ist. Damit ist wegen $B : \frac{4}{5}B = \frac{5}{4}B = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 25}B = \frac{125}{100}B = B + \frac{25}{100}B$ also B um 25% größer als A.

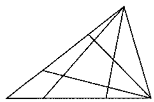
5. Die nebenstehende Tafel ist mit Sternchen und Herzen zu füllen, und zwar sollen in jeder Zeile und in jeder Spalte zwei ★ und zwei ♡ zu liegen kommen. Welche Symbole müssen an die Stellen X und Y gesetzt werden?

★		★	
		★	
	X		♡
	Y		

(**A**) X = ★; Y = ★ (**B**) X = ★; Y = ♡ (**C**) X = ♡; Y = ★
(**D**) X = ♡; Y = ♡ (**E**) nicht eindeutig bestimmt

Lösung: Da in der dritten Spalte bereits 2 Sterne sind, müssen dort 2 Herzen ergänzt werden. Dann befinden sich in der 3. Zeile 2 Herzen, so dass das Feld X und das andere noch leere Feld mit Sternchen belegt werden müssen. Nun befinden sich in der 1. Spalte 2 Sterne; es sind folglich 2 Herzen zu ergänzen. Dadurch haben wir nun in der 4. Zeile 2 Herzen, müssen also 2 Sterne eintragen, insbesondere auch auf dem Feld Y. Die Felder X und Y müssen also beide mit Sternchen belegt werden. Wie man sich leicht überzeugen kann, lässt sich die Tafel so weiter vollständig unter Einhaltung der Regel ausfüllen.

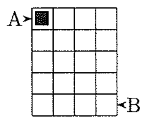
6. Werden in einem Dreieck von 2 Eckpunkten aus je 2 Linien zu den gegenüberliegenden Seiten gezeichnet, so zerlegen diese das Dreieck in 9 Teilflächen (s. Abb.). Wie viele Teilflächen würden entstehen, wenn man von 2 Eckpunkten aus je 4 Linien zu den gegenüberliegenden Seiten zeichnen würde?



(**A**) 16 (**B**) 25 (**C**) 36 (**D**) 42 (**E**) 49

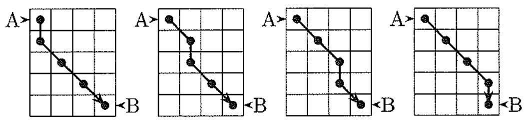
Lösung: Zeichne ich 4 Linien von einem Eckpunkt des Dreiecks aus zur gegenüberliegenden Seite, so wird das Dreieck damit in 5 Teile zerlegt. Nehmen wir nun die 4 Linien von dem zweiten Eckpunkt dazu, so zerlegt jede dieser Linien jedes der bereits vorhandenen 5 Teildreiecke in 5 Teilfiguren, so dass es schließlich $5 + 4 \cdot 5 = 25$ Teilfiguren sind. In völlig analoger Weise würden zweimal k Linien das Dreieck in $(k+1)^2$ Teile zerlegen.

7. Wie viele Wege mit *minimaler* Anzahl Schritte gibt es, um eine Spielfigur von A nach B zu bewegen, wenn sich die Figur bei jedem Schritt in eines ihrer Nachbarfelder (horizontal, vertikal oder diagonal) bewegen darf?



(**A**) 35 (**B**) 20 (**C**) 16 (**D**) 7 (**E**) 4

Lösung: Das Feld B befindet sich 4 Schritte in senkrechter und 3 Schritte in waagerechter Richtung vom Feld A entfernt. Bei einem waagerechten bzw. einem senkrechten Schritt der Spielfigur von A in Richtung B wird entsprechend *genau eine* der Zahlen 4 oder 3 um 1 vermindert. Bei einem diagonalen Schritt vermindern sich *beide* gleichzeitig um 1. Die Anzahl der Schritte kann demzufolge nicht kleiner als $3 + 1 = 4$ sein, wobei sich die Gesamtbewegung dann aus 3 diagonalen und einem senkrechten Schritt zusammensetzt. Der senkrechte Schritt kann als erster, als zweiter, als dritter oder als vierter erfolgen. Es gibt also insgesamt genau 4 verschiedene Wege mit minimaler Schrittzahl.



8. Für das Nüssesammeln in ihrem Garten schenkt die Großmutter den drei beteiligten Enkeln Adrian, Florian und Fabian je die gleiche Summe Geldes zum Dank. Adrian, der nur kurzzeitig mitgemacht hat, gibt dem Hauptakteur Fabian 2/3 seines Geldes. Die Beträge, die Adrian und Fabian nun haben, verhalten sich dann zueinander wie

(**A**) 1 : 2 (**B**) 1 : 3 (**C**) 2 : 3 (**D**) 1 : 5 (**E**) 3 : 2

Lösung: Wir nehmen an, dass der Betrag, den jeder Enkel erhält, b ist. Dann hat Adrian nach der Abgabe von zwei Dritteln von b an Fabian noch $\frac{1}{3}b$, während Fabian nun $b + \frac{2}{3}b = \frac{5}{3}b$ hat. Das Verhältnis der Beträge ist folglich $\frac{1}{3} : \frac{5}{3} = 1 : 5$.

9. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. Welches ist der kleinste Wert, der mit der mehrfachen Subtraktion 2007 − KAN − GA − ROO gebildet werden kann?

(**A**) 100 (**B**) 109 (**C**) 110 (**D**) 119 (**E**) 129

Lösung: Um die kleinstmögliche Differenz zu erhalten, muss der Subtrahend KAN + GA + ROO möglichst groß sein. Die größten beiden Ziffern 9 und 8 setzen wir an die Hunderterstellen – an welche, ist dabei gleich, also z. B. K = 9 und R = 8. Für die drei Zehnerstellen haben wir 7, 6 und 5 zur Verfügung. Da wir sowohl bei der Wahl A = 7 als auch bei der Wahl O = 7 jeweils gleich auch noch an eine Einerstelle mit einer 7 bekommen, ist es klar, dass wir nicht G = 7 setzen, jedoch bei A und O egal, welche Wahl wir treffen, also z. B. A = 7 und O = 6. Für G bleibt dann die 5 und für N die 4. Die Differenz ist $2007 - 974 - 57 - 866 = 110$.

2007-Knobelei - 4

Es seien die folgenden drei Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} 7x - 17 &= 13 - 3x && (1)\\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && (2)\\ x^3 - 220x^2 - 667x - 446 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Man ermittle nun sämtliche Lösungen einer jeden Gleichung und bilde danach das Produkt $P = x_1x_2x_3$, wobei x_i die jeweils positive Lösung der Gleichung (i) für $i = 1, 2, 3$ ist.

10. Unsere Schülerzeitung hat zur Zeit 64 Abonnenten. Kristin aus unserer Klasse ist neue Chefin der Zeitung und sehr aktiv. Sie hat sich vorgenommen, in den kommenden Monaten die Abonnentenzahl pro Monat um 25% zu steigern. Wie viele Abonnenten hat die Zeitung in einem Vierteljahr, falls ihr dies gelingt?

(**A**) 182 (**B**) 142 (**C**) 125 (**D**) 96 (**E**) 80

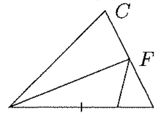
Lösung: Vorausgesetzt, Kristin ist erfolgreich, dann hat die Zeitung nach dem 1. Monat $\frac{125}{100} \cdot 64$, nach dem 2. Monat $\frac{125}{100} \cdot \frac{125}{100} \cdot 64 = \left(\frac{125}{100}\right)^2 \cdot 64$, und nach dem 3. Monat schließlich $\left(\frac{125}{100}\right)^3 \cdot 64 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot 64 = \frac{125}{64} \cdot 64 = 125$ Abonnenten.

11. Die Buchstabenfolge KANGAROOKANGAROO... KANGAROO besteht 20-mal aus dem englischen Wort für Känguru. Aus dieser Folge werden alle Buchstaben mit ungerader Positionsnummer herausgestrichen. Bei der übrig bleibenden Buchstabenfolge werden wiederum alle mit ungerader Positionsnummer gestrichen, und dies wird so lange fortgesetzt, bis nur noch ein Buchstabe übrig bleibt. Welcher ist es?

(**A**) K (**B**) A (**C**) N (**D**) G (**E**) O

Lösung: Kangaroo hat 8 Buchstaben, die lange Buchstabenfolge also 160. Wir stellen uns die Buchstaben hintereinander hingeschrieben vor und streichen sukzessive. Nachdem beim ersten Streichen alle Buchstaben mit ungerader Platzziffer durchgestrichen sind (also alle K und N – A und O gibt es ja noch auf weiteren Plätzen), folgen beim zweiten Streichen die Buchstaben, die zu Platzziffern, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind, gehören, (also die Buchstaben A und R), beim dritten Streichen die zu durch 4, aber nicht durch 8 teilbaren Platzziffern gehörigen Buchstaben (also der Buchstabe G) usw. Es ist allein der Buchstabe O übrig, der dann natürlich letzter verbleibender Buchstabe ist. (Es wäre die Streichung auf den Plätzen mit durch 8, aber nicht durch 16 teilbarer Platzziffer gefolgt usw., dann durch 16, aber nicht durch 32; durch 32, aber nicht durch 64; und der Buchstabe an der 64. Stelle ist der letzte.)
Übrigens ließ sich diese Aufgabe auch gut durch Ausstreichen aus der Buchstabenfolge im Aufgabentext lösen. Schon nach dem 3. Ausstreichen blieben allein „O's" übrig.

12. In einem Dreieck $\triangle ABC$ ist D Mittelpunkt der Strecke AB, E Mittelpunkt der Strecke DB und F Mittelpunkt der Strecke BC. Wenn der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ 96 cm^2 beträgt, wie groß ist dann der Flächeninhalt von $\triangle AEF$?



(A) 16 cm^2 **(B)** 48 cm^2 **(C)** 24 cm^2 **(D)** 32 cm^2 **(E)** 36 cm^2

Lösung: Der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ kann als Hälfte des Produkts der Länge von $\overline{AB}$ und der Länge der Höhe von C auf AB angegeben werden. Die Länge der Grundlinie des Dreiecks $\triangle AEF$ ist genau $\frac{3}{4}$ der Länge von $\overline{AB}$ und die Höhe von F auf AE ist genau halb so lang wie die Höhe von C auf AB.
Damit ist der Flächeninhalt $A_{AEF} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_{ABC} = \frac{3}{8} \cdot 96 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$.

13. Sammy Schneck fordert Susi Schnecke zu einem Rennen heraus. Er schafft als Wettkampfleistung über die Gesamtdistanz 1,8 m/h, Susi schafft 60 cm/h weniger. Als Gentleschneck räumt er Susi ein, 1 h 40 min vor ihm loszukriechen. Das Rennen endet an einer Hausmauer, die beide exakt zeitgleich erreichen. Über welche Distanz wurde das Rennen ausgetragen?

(A) 0,9 m **(B)** 3 m **(C)** 2,5 m **(D)** 6 m **(E)** 4,5 m

Lösung: Wir beginnen mit der Umrechnung auf einheitliche Maßeinheiten; es sind $1,8 \text{ m/h} = 180 \text{ cm/h} = 3 \text{ cm/min}$ und $(180 - 60) \text{ cm/h} = 2 \text{ cm/min}$. Dann hat Susi also in den 100 min, bevor sich auch Sammy ins Rennen stürzt, 200 cm zurückgelegt. Bezeichnen wir mit t die Zeit, die beide von diesem Moment an bis zur Hausmauer brauchen, so gilt $3 \text{ cm/min} \cdot t = 2 \text{ cm/min} \cdot t + 200 \text{ cm}$, woraus wir t ausrechnen können. Es ist $t = \frac{200 \text{ cm}}{1 \text{ cm/min}} = 200$ min. Und in dieser Zeit bewältigt Sammy genau $3 \cdot 200 = 600$ cm, d. h. 6 m.

14. Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist gleich der Summe der drei anschließenden aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Dann ist die größte der 8 Zahlen

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 12

Lösung: Wir bezeichnen die dritte der fünf aufeinanderfolgenden Zahlen mit a. Dann gilt $(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2) = (a+3)+(a+4)+(a+5)$, bzw. $5a = 3a+12$, woraus $a = 6$ folgt. Die größte der 8 Zahlen ist demzufolge $6 + 5 = 11$.

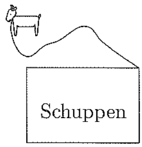
15. Mit welchem Exponenten muss man 4^4 potenzieren, um 8^8 zu erhalten?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 16

Lösung: Wir formen den Term 8^8 um, wobei wir jeden einzelnen Schritt anführen: Es ist

$$8^8 = (2 \cdot 4)^8 = 2^8 \cdot 4^8 = 2^{2 \cdot 4} \cdot 4^8 = (2^2)^4 \cdot 4^8 = 4^4 \cdot 4^8 = 4^{4+8} = 4^{12} = 4^{4 \cdot 3} = (4^4)^3.$$

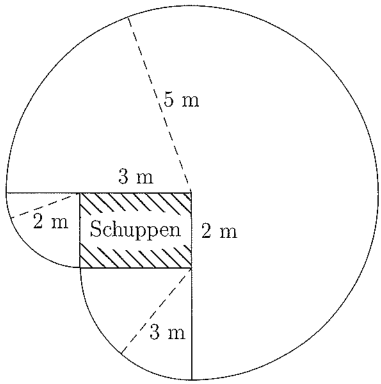
16. Zora hat ihre Ziege mit einer 5 m langen Leine an die Ecke des 2 m × 3 m großen Schuppens gebunden (s. Zeichnung). Wie groß ist die Fläche, die die Ziege dort abgrasen kann? (*Die Fläche f eines Kreises mit dem Radius r ist durch $f = \pi r^2$ gegeben. – Die Größe der Ziege soll vernachlässigt werden.*)



(**A**) 10π m^2 (**B**) 20π m^2 (**C**) 22π m^2 (**D**) 40π m^2 (**E**) 88π m^2

Lösung: Die Fläche, die die angeseilte Ziege erreichen kann, setzt sich aus Teilen unterschiedlicher Kreise zusammen.

Das sind im einzelnen ein Dreiviertelkreis mit dem Radius 5 m, der eine Fläche von $\frac{3}{4}\pi \cdot 25$ m^2 hat, ein Viertelkreis mit dem Radius 2 m und dem dementsprechenden Flächeninhalt $\frac{1}{4}\pi \cdot 4$ m^2 und einem Viertelkreis mit dem Radius 3 m, der den Flächeninhalt $\frac{1}{4}\pi \cdot 9$ m^2 hat.



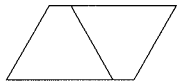
Das ergibt insgesamt einen Flächeninhalt von $\frac{3 \cdot 25 + 4 + 9}{4}\pi$ m$^2 = \frac{88}{4}\pi$ m$^2 = 22\pi$ m^2.

2007-Knobelei – 5

Ermittelt alle (im Dezimalsystem) vierstelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden drei Eigenschaften:

1. *Das Siebenfache der ersten Ziffer ist gleich der Differenz aus dem Doppelten der vierten Ziffer und der dritten Ziffer.*
2. *Das Quadrat der dritten Ziffer ist gleich der Summe aus der zweiten und der dritten Ziffer.*
3. *Das Quadrat der ersten Ziffer ist gleich der um 3 verminderten vierten Ziffer.*

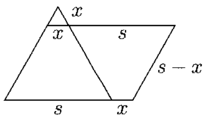
17. Fügen wir einem Trapez, das aus einem gleichseitigen Dreieck $\mathcal{D}$ durch Abschneiden einer Ecke entstanden ist, ein dazu kongruentes an, entsteht ein Parallelogramm (s. Abb.). Wie groß ist der Umfang des Dreiecks $\mathcal{D}$, wenn der des Parallelogramms um 10 cm länger ist?



(**A**) 10 cm (**B**) 30 cm (**C**) 40 cm (**D**) 60 cm (**E**) mit diesen Angaben nicht lösbar

Lösung: Da es sich um zwei gleichseitige Dreiecke handelt, aus denen die Trapeze bzw. das Parallelogramm hervorgegangen sind, können wir folgendermaßen vorgehen:

Mit x wird die Seitenlänge des abgeschnittenen, ebenfalls gleichseitigen Dreiecks bezeichnet, s ist die des Ausgangsdreiecks. Dann ist der Umfang des Parallelogramms $s + x + s - x + s + x + s - x = 4s$. Da der Umfang des Ausgangsdreiecks, $3s$, um 10 cm geringer ist, gilt also $4s - 3s = s = 10$ cm. Damit beträgt der Umfang von $\mathcal{D}$ $3 \cdot 10$ cm $= 30$ cm.



18. Heinz bucht einen Flug von Zürich nach Singapore und erhält von seinem Reisebüro folgende Übersicht:

Abflug (Ortszeit)			Ankunft (Ortszeit)		
12. März	17:00	Zürich	13. März	11:00	Singapore
6. April	23:00	Singapore	7. April	06:00	Zürich

Wenn bekannt ist, dass die Flugzeit für Hin- und Rückflug dieselbe ist und dass in der Schweiz am 25. März 2007 die Sommerzeit beginnt (Vorstellen der Uhren um 1 Stunde), lässt sich ausrechnen, wie lange der Flug von Zürich nach Singapore dauert. Er dauert

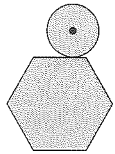
(**A**) 11 h 30 min (**B**) 12 h 20 min (**C**) 12 h 40 min (**D**) 13 h (**E**) 12 h

Lösung: Da die Flugdauer bei Hin- und Rückflug gleich ist, werden die durch die Zeitverschiebung auf dem Hinflug hinzukommenden Stunden (in Singapore ist die Sonne ja eher aufgegangen als in Zürich, die Ortszeit also um einige Stunden der von Zürich voraus) beim Rückflug wieder abgezogen. Gäbe es nicht die Änderungen durch die Sommerzeit in Zürich, wäre die Gesamtflugdauer für eine Strecke einfach die Hälfte der Summe aus den beiden Differenzen zwischen Ankunfts- und Abflugzeit. Nach „alter" Zeit wäre es in Zürich allerdings nicht 6:00 Uhr, sondern 5:00 Uhr. Also kommen wir hier zu: $18\text{ h} + (5+1)\text{ h} = 24\text{ h}$, d. h., die Dauer eines Fluges, z. B. des Fluges Zürich-Singapore, beträgt 12 h.

19. Die Familien Kurz und Klein, jeweils aus Mutter, Vater und zwei Kindern bestehend, sind begeisterte Tischtennisspieler. Es wird ein Turnier im Doppel ausgetragen, bei dem jedes mögliche Paar der Familie Kurz gegen jedes mögliche Paar der Familie Klein antritt. Wie viele Spiele hat jedes einzelne Familienmitglied zu absolvieren?

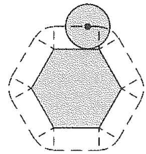
(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 24

Lösung: Aus den 4 Familienmitgliedern lassen sich in beiden Familien $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Paare bilden (Wer die Formel nicht kennt, findet die Anzahl auch sehr schnell durch Aufschreiben aller möglichen Paare.). Dabei ist jedes der Familienmitglieder in genau 3 Paaren „enthalten", hat also insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Spiele zu absolvieren.



20. Eine Münze mit Durchmesser 1 rollt auf einem regelmäßigen Sechseck mit Seitenlänge 1 ein einziges Mal außen herum. Wie lang ist der Weg, den der Mittelpunkt der Münze dabei zurücklegt? Alle Längenangaben sind in cm. (*Der Umfang u eines Kreises mit dem Radius r beträgt $u = 2\pi r$.*)

(A) $6 + \frac{\pi}{2}$ (B) $12 + \pi$ (C) $6 + \pi$ (D) $6 + 2\pi$ (E) $12 + 2\pi$



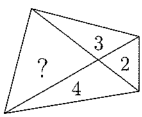
Lösung: Der Weg, den der Mittelpunkt der Münze beschreibt, setzt sich aus Parallelen zu den 6 Sechseckseiten und 6 Sechsteln eines vollen Kreises mit dem Durchmesser der Münze, also 1, zusammen. Er ist folglich $6 + \pi \cdot 1 = 6 + \pi$ lang.

21. Es ist 21 Uhr, und ich fahre mit einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h. Wenn ich diese Geschwindigkeit beibehalte, reicht das Benzin nur für 80 km. Die nächste Tankstelle ist 100 km entfernt. Der Benzinverbrauch pro Kilometer ist proportional zur Geschwindigkeit. Um welche Zeit kann ich die Tankstelle frühestmöglich erreichen, wenn ich mit konstanter Geschwindigkeit fahren will?

(A) um 22:12 (B) um 22:15 (C) um 22:20 (D) um 22:25 (E) um 22:30

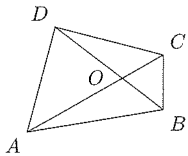
Lösung: Die Menge Benzin, die um 21:00 Uhr im Auto ist, sei B. Da ich mit B bei 100 km/h gerade 80 km weit kommen würde, brauchte ich die $\frac{5}{4}$-fache Menge bei dieser Geschwindigkeit. Oder ich drossle die Geschwindigkeit auf das $\frac{4}{5}$-fache der jetzigen, wodurch der Brennstoffverbrauch ebenfalls auf das $\frac{4}{5}$-fache fällt, was genau das Ausreichen von B bedeutet. Die Geschwindigkeit wäre in diesem Fall 80 km/h, und für die zu bewältigenden 100 km brauchte ich 1 h 15 min, bin also um 22:15 Uhr an der Tankstelle.

22. Die Diagonalen zerlegen die Fläche des Vierecks in vier Dreiecke. Von drei Dreiecken ist der Flächeninhalt bekannt (s. Zeichnung). Welchen Flächeninhalt hat das vierte Dreieck?



(A) 5 (B) 6 (C) $4\sqrt{2}$ (D) 7 (E) $7\sqrt{2}$

Lösung: Um die Lösung möglichst übersichtlich zu machen, bezeichnen wir die für uns wichtigen Punkte des Vierecks.



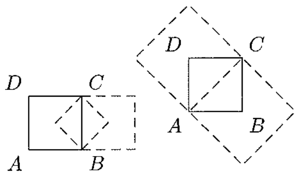
Da die beiden Dreiecke $\triangle ABO$ und $\triangle BCO$ dieselbe Höhe haben, verhalten sich ihre Grundlinien wie ihre Flächeninhalte, d. h. $\overline{AO} : \overline{OC} = 4 : 2$. Aus analogen Gründen verhalten sich dann die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADO$ und $\triangle CDO$ wie $4 : 2$. Daraus folgt sofort, dass $A_{ADO} = 6$ ist.

23. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Dann ist die Anzahl der Quadrate, von deren Eckpunkten genau zwei mit Eckpunkten von $ABCD$ zusammenfallen, gleich

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 16

Lösung: Zur Lösung überlegen wir uns Folgendes: Aus den 4 Eckpunkten des Quadrates lassen sich $\binom{4}{2} = 6$ Punktepaare bilden (Wie bei Aufgabe 19 findet man, wenn die Formel nicht bekannt ist, die Anzahl auch schnell durch Auszählen aller Paare.). Jedes Punktepaar kann auf einer Quadratseite oder der Diagonale eines Quadrates liegen. Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

Für die 4 Paare von aufeinanderfolgenden Punkten des Ausgangsquadrates, also $\{A;B\}$, $\{B;C\}$, $\{C;D\}$, und $\{D;A\}$, erhalten wir je 2 Quadrate (s. linke Zeichnung) – je einmal sind die Punkte Eckpunkte derselben Seite, einmal Endpunkte einer Diagonale. Für die 2 Paare einander gegenüberliegender Punkte $\{A;C\}$ und $\{B;D\}$ erhalten wir ebenfalls je 2 Quadrate, die in der rechten Zeichnung dargestellt wurden – diesmal bestimmt jedes Punktpaar 2 Seiten. Insgesamt sind es 12 Quadrate.



24. Zum geistigen Aufwärmen beginnt der Unterricht bisweilen mit Rechnen. Einmal war eine gegebene 4-stellige Zahl zu jener 4-stelligen Zahl zu addieren, die entsteht, wenn die 1. Ziffer der gegebenen Zahl „nach hinten", d. h. an die Einerstelle, gesetzt wird. Wir kriegten bei der schnellen Rechnerei 5 verschiedene Ergebnisse. Eines davon war richtig. Welches?

(**A**) 4587 (**B**) 4597 (**C**) 5587 (**D**) 4497 (**E**) 4577

Lösung: Nehmen wir an, die vorgegebene Zahl ist $1000a + 100b + 10c + d$, worin a, b, c und d Ziffern sind und $a \neq 0$ ist. Die „verschobene" Zahl ist $1000b + 100c + 10d + a$, und die Summe ist $1001a + 1100b + 110c + 11d = 11(91a + 100b + 10c + d)$. Wir bemerken, dass die Summe durch 11 teilbar ist. Betrachten wir nun die 5 möglichen Ergebnisse, so stellen wir fest, dass nur die bei (**A**) stehende Zahl 4587 durch 11 teilbar ist.
Übrigens bleibt die Teilbarkeit durch 11 auch dann noch „Erkennungszeichen", wenn eine der Ziffern 0 ist. Das liegt daran, dass in die Summe nur Summanden eingehen, die ihrerseits durch 11 teilbar sind. Allerdings könnte dann nicht in jedem Fall von 4-stelligen Zahlen gesprochen werden.
Die vorgegebene Zahl lässt sich nicht eindeutig bestimmen. So könnte z. B. 2245 vorgegeben gewesen sein, denn $2235 + 2352 = 4587$. Aber auch 1326 und 3144 kommen in Frage, denn $1326 + 3261 = 3144 + 1443 = 4587$.

25. Wir denken uns eine von Schurken und Rittern bewohnte Insel. Schurken lügen immer, Ritter sprechen immer die Wahrheit. Eines Tages kommen 12 Inselbewohner zusammen, unter denen mindestens ein Ritter und mindestens ein Schurke ist. 2 von ihnen sagen: *Genau 2 von uns 12 sind Schurken.* 4 der Verbleibenden sagen: *Genau 4 unter uns 12 sind Schurken.* Und die verbleibenden 6 sagen: *Genau 6 unter uns 12 sind Schurken.* Wie viele dieser 12 sind tatsächlich Schurken?

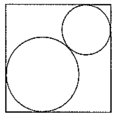
(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 11

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass in jeder der kleinen Gruppen von 2, 4 oder 6 Inselbewohnern, die eine Aussage machen, jeweils entweder nur Ritter oder nur Schurken sind, denn sie äußern sich jeweils mit derselben Aussage zum selben Gegenstand. Angenommen nun, die beiden aus der Zweiergruppe wären Ritter, ihre Aussage wäre also wahr. Dann wären genau zwei der restlichen 10 Insulaner Schurken, die anderen Ritter, was nicht möglich ist, da sie einander ausschließende Aussagen machen. Also besteht die Zweiergruppe aus Schurken.
Mit genau derselben Argumentation finden wir, dass die Vierergruppe aus lauter Schurken besteht. Die Annahme, dass auch die Sechsergruppe aus lauter Schurken besteht, würde nach sich ziehen, dass es gar keine Ritter gibt, was jedoch laut Aufgabenstellung ausgeschlossen ist. Dass die Sechsergruppe aus lauter Rittern besteht, ist dagegen möglich, (**C**) also die Lösung.

26. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$ seien a und b. Welchen Wert hat $a^3 + b^3$?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 24

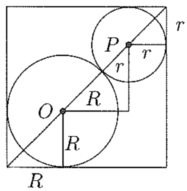
Lösung: Wenn a und b Lösungen sind, so ist nach dem Satz von Vieta $a + b = 3$ und $ab = 1$. Dann gilt $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, woraus wir ausrechnen, dass $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 18$ ist.
Die Aufgabe lässt sich ebenso lösen – allerdings mit mehr Rechenaufwand –, indem man die quadratische Gleichung unter Verwendung der bekannten Lösungsformel löst, die beiden Lösungen in die dritte Potenz erhebt und addiert.



27. Zwei sich von außen berührende Kreise sind einem Quadrat mit Seitenlänge 1 einbeschrieben. Wie groß ist die Summe der Radien der beiden Kreise?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $2 - \sqrt{2}$ (E) vom Verhältnis der Kreisradien abhängig

Lösung: Wir bemerken, dass sich die Diagonale d des Quadrats auf zweierlei Weise – beide Male unter Anwendung des Satzes von Pythagoras – darstellen lässt: Einmal ist



$$d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

und zum anderen

$$d = \sqrt{R^2 + R^2} + R + r + \sqrt{r^2 + r^2} = R\sqrt{2} + R + r + r\sqrt{2}.$$

Damit können wir $R + r$ ausrechnen: $(R + r)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}$, woraus

$$R + r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 - \sqrt{2}$$

folgt.

28. Es sei a die kleinste natürliche Zahl derart, dass $10a$ eine Quadratzahl und $6a$ eine Kubikzahl ist. Wie viele Teiler hat die Zahl a?

(A) 72 (B) 36 (C) 60 (D) 45 (E) 108

Lösung: Damit $10a$ eine Quadratzahl ist, sind notwendigerweise 2 und 5 je in ungerader Potenz in a enthalten. Damit $6a$ eine Kubikzahl ist, muss dann 2 in einer Potenz in a enthalten sein, die sowohl ungerade ist als auch bei Division durch 3 den Rest 2 lässt. Weiter muss 5 in a sowohl in ungerader Potenz als auch in durch 3 teilbarer Potenz enthalten sein. Schließlich muss 3 – wie vorher schon 2 – in einer Potenz in a enthalten sein, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt. Und da $10a$ Quadratzahl sein soll, muss außerdem 3 in gerader Potenz in a enthalten sein. – Die kleinste Potenz, in der 2 in a stecken kann, ist 5 (denn 5 ist die kleinste ungerade Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt). Die kleinste Potenz, in der 5 in a stecken kann, ist 3. Und die kleinste Potenz, in der 3 in a stecken kann, ist offenbar 2. Damit wäre $a = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ – und damit ist sicher $10a = 2^6 \cdot 5^4 \cdot 3^2$ Quadratzahl und $6a = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 3^3$ Kubikzahl. Die Zahl a hat $(5 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (2 + 1) = 72$ Teiler.

29. Als ich mit meinen vier Freunden nach dem Erledigen der Hausaufgaben in die Stube zurückkehrte, wussten wir nicht mehr sicher, wer welches unserer 5 herumstehenden Trinkgläser benutzt hatte. Nun überlegten wir uns, auf wie viele Arten es möglich ist, dass keiner von uns fünf sein eigenes Glas bekommt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

(**A**) 5 (**B**) 20 (**C**) 44 (**D**) 57 (**E**) 125

Lösung: Wir beginnen die Lösung, indem wir uns überlegen, wie es wäre, wenn wir nur zu zweit gewesen wären. Dann gibt es genau eine Möglichkeit (von insgesamt zweien), bei der jeder ein „falsches" Trinkglas bekommt. Wären wir drei, so würden von den insgesamt $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ Möglichkeiten der Reihenfolge, in der sich die Gläser befinden, neben der ursprünglichen Reihenfolge auch all jene nicht der „totalen Vertauschung" zuzurechnen sein, bei denen ein Glas am Ausgangsplatz verbleibt und die anderen beiden vertauscht sind, womit sich $6 - 3 \cdot 1 - 1 = 2$ für die gesuchte Anzahl ergibt. Wären wir nun vier, so kämen wiederum zur Ausgangssituation all jene hinzu, bei denen genau ein Glas am Ausgangsplatz verbleibt und alle anderen vertauscht sind sowie jene, bei denen genau zwei Gläser am Ausgangsplatz verbleiben, während die beiden anderen vertauscht sind. Das ergibt

$$4! - \left[4 \cdot 2 + \binom{4}{2} \cdot 1 + 1\right] = 9.$$

Und für den gesuchten Fall, dass wir zu fünft sind, rechnen wir analog, ziehen also von der Gesamtzahl der möglichen Vertauschungen alle jene ab, bei denen genau ein Glas am Ausgangsplatz verbleibt, bei denen genau zwei Gläser am Ausgangsplatz verbleiben und bei denen genau drei Gläser am Ausgangsplatz verbleiben sowie die Ausgangssituation. Das ergibt nun

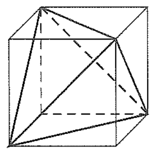
$$5! - \left[5 \cdot 9 + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{3} \cdot 1 + 1\right] = 120 - (45 + 20 + 10 + 1) = 44.$$

30. Der Abstand zweier räumlich gegenüberliegender Kanten eines regulären Tetraeders betrage 6 cm. Wie groß ist sein Volumen?

(**A**) 18 cm^3 (**B**) 36 cm^3 (**C**) 48 cm^3 (**D**) 72 cm^3 (**E**) 144 cm^3

Lösung: Für die Lösung lassen wir die Angabe der Maßeinheit der Kürze halber weg. Wir stellen uns eine Ebene durch eine der Kanten des Tetraeders und senkrecht zur gegenüberliegenden Kante vor. Die Schnittfigur ist ein gleichschenkliges Dreieck, das eine Tetraederkante als Grundseite und als Schenkel zwei Höhen in *den* beiden Tetraederseiten hat, die die gegenüberliegende Kante erzeugen. Die Höhe auf die Grundseite dieses gleichschenkligen Dreiecks ist der Abstand der beiden einander gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders. Bezeichnen wir die Kantenlänge des Tetraeders mit a, so hat die Grundseite des gleichschenkligen Dreiecks die Seitenlänge a, und die Schenkel haben je die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{3}a$. Nach dem Satz des Pythagoras können wir a aus folgender Gleichung berechnen: $6^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}$, woraus $a^2 = 72$ bzw. $a = 6\sqrt{2}$ folgt. Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 6\sqrt{2}$ ist $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$. Damit ist der Flächeninhalt F der Grundfläche des Tetraeders $F = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} = 18\sqrt{3}$.

Als nächstes berechnen wir die Höhe h_T des Tetraeders. Dabei benutzen wir, dass die Höhe im regelmäßigen Tetraeder von der Spitze zum Schwerpunkt der Grundseite verläuft. Sie kann demzufolge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus der folgenden Gleichung bestimmt werden: $h_T^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a\right)^2$, woraus $h_T = \sqrt{\frac{2}{3}}a$ und, wenn wir für a den errechneten Wert einsetzen, $h_T = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ folgt. Nun rechnen wir das Volumen V aus: $V = \frac{1}{3}Fh_T = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 18 \cdot 4 = 72.$



Wir geben nun noch eine zweite, sehr kurze Lösung an: Jedes regelmäßige Tetraeder lässt sich so in einen Würfel einbeschreiben, dass die 6 Tetraederkanten die Diagonalen der 6 Würfelseiten sind. Dann ist der Abstand der räumlich einander gegenüberliegenden Tetraederkanten gleich der Seitenlänge des Würfels, also 6. Das Tetraeder lässt sich dann aus dem Würfel durch Abschneiden von 4 kongruenten Pyramiden erzeugen, deren Volumen sich leicht berechnen lässt.

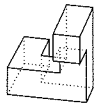
Stellen wir uns nämlich ein solches „abgeschnittenes“ Tetraeder auf eine der 3 Seiten gestellt vor, die gleichzeitig Teil der Oberfläche des Würfels sind, so ist der Flächeninhalt des rechteckigen Dreiecks, das Grundfläche des Tetraeders ist, $\frac{1}{2} \cdot 6^2$, und die Höhe eines jeden der 4 Tetraeder hat ebenfalls die Länge 6. Daher ist das Volumen des Tetraeders aus der Aufgabe $V = 6^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}6^2 \cdot 6\right) = 6^2 \cdot (6 - 4) = 72.$

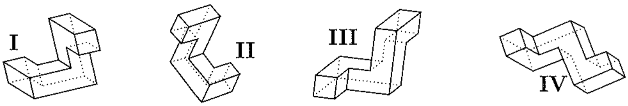
In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 9 und 10 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	A	B	D	A	B	E	D	C	C
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	E	D	D	A	C	B	E	D	C
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	B	D	A	C	D	D	A	C	D

Klassenstufen 11 bis 13

1. Welcher oder welche der unten abgebildeten Körper sind aus dem rechts abgebildeten durch Drehung hervorgegangen?





(**A**) nur I und IV (**B**) nur I und III (**C**) nur IV
(**D**) nur I, II und III (**E**) nur I

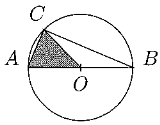
Lösung: Nur der Körper I ist aus dem rechts neben dem Aufgabentest abgebildeten durch Drehung hervorgegangen. Die anderen sind Spiegelbilder dieses Körpers.

2. Meine drei Brüder besitzen zusammen 57 „Herr der Ringe"-Sammelkarten. Beim Tausch gibt Matti 7 seiner Karten an Nico, Nico gibt 4 seiner Karten an Ole und Ole 6 der seinen an Matti. Nun hat jeder gleich viele. Wie viele Karten hatte Ole zu Beginn?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 18 (**D**) 21 (**E**) 23

Lösung: In der Situation, in der sie gleich viele Karten besitzen, hat jeder $57 : 3 = 19$. Da Ole im Verlauf der Tauscherei 4 Karten bekommen und 6 abgegeben hat, hatte er zu Beginn $19 - 4 + 6 = 21$.

3. Der Inhalt des Dreiecks AOC, wobei O Mittelpunkt des Kreises ist, beträgt $\sqrt{3}$. Dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC



(**A**) $2\sqrt{3}$ (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 4 (**E**) $4\sqrt{3}$

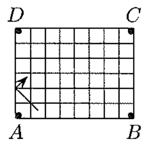
Lösung: Da $\overline{AO} = \overline{OB}$, ist die Grundlinie $\overline{AB}$ im Dreieck $\triangle ABC$ doppelt so lang wie die im grauen Dreieck; die Höhe stimmt bei beiden überein. Also ist der Flächeninhalt doppelt so groß wie der im Dreieck $\triangle AOC$, d. h. $2\sqrt{3}$.

4. Just an dem Tage, als ihr Vater 20 Jahre alt wurde, erblickte Gisa das Licht der Welt. Neulich fragte sie ihn verschmitzt: Wie oft ist – seit meiner Geburt – mein Alter ein Teiler deines Alters, wenn wir beide ausreichend lang leben? Die richtige Antwort ist:

(**A**) 4-mal (**B**) 5-mal (**C**) 6-mal (**D**) 7-mal (**E**) 8-mal

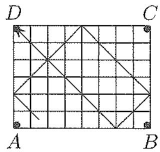
Lösung: Wenn Gisa 1 Jahr alt ist, ist ihr Vater 21 und die Teilereigenschaft zum ersten Mal erfüllt. Es folgen 2 – 22; 4 – 24; 5 – 25; 10 – 30 und 20 – 40; insgesamt ist Gisas Alter also sechsmal ein Teiler des Alters ihres Vaters.

5. Eine Billardkugel trifft die erste Bande AD exakt unter einem Winkel von 45°. Der bärenstarke Bruno hat sie mit enormer Wucht in Bewegung gesetzt. In welches Loch wird sie fallen?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) In keines der Löcher

Lösung: Da der Winkel, mit dem die Kugel reflektiert wird, ebenfalls 45° beträgt, verläuft die Bahn der Kugel stets entlang von Diagonalen der kleinen Quadrate. Der Verlauf ist auf der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Bruno trifft ins Loch D.



6. Wie viele Hamster müssen mindestens in einem Käfig sein, damit die folgende Aussage zutrifft: Es gibt mindestens zwei Männchen oder mindestens zwei Weibchen, die im selben Monat geboren wurden?

(**A**) 13 (**B**) 16 (**C**) 25 (**D**) 32 (**E**) 48

Lösung: Zu jedem der 12 Monate könnte es jeweils ein Hamstermännchen und ein Hamsterweibchen geben, die in diesem Monat geboren sind, also insgesamt 24 Hamster. Haben wir 25 Hamster, so gibt es unter den 12 Monaten (mindestens) einen, in dem drei Hamster Geburtstag haben. Und von drei Hamstern haben gewiss zwei dasselbe Geschlecht

7. $\dfrac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ} =$

(**A**) 0 (**B**) $\tan 1^\circ$ (**C**) $\cot 1^\circ$ (**D**) $\dfrac{1}{89}$ (**E**) 1

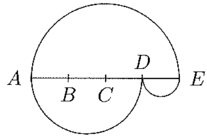
Lösung: Es ist $\cos 89^\circ = \sin(90^\circ - 89^\circ) = \sin 1^\circ$, womit der Quotient gleich 1 ist.

8. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern; keine Ziffer darf 0 sein. Welcher größte Wert kann mit der mehrfachen Subtraktion 2007 – KA – ENG – URU gebildet werden?

(**A**) 1572 (**B**) 1863 (**C**) 1573 (**D**) 1865 (**E**) 1574

Lösung: Für eine möglichst große Differenz muss der Subtrahend KA + ENG + URU möglichst klein sein. Dazu müssen die Hunderterstellen so klein wie möglich gesetzt werden, also die eine 1, die andere 2, wobei zu beachten ist, dass U zweimal auftritt, so dass es notwendig ist, U = 1 zu setzen, denn würde E = 1 gesetzt, wäre der Subtrahend um 1 größer. Es folgen die voneinander und auch zu allen sonstigen Buchstaben verschiedenen K, N und R der Zehnerstellen, die also in beliebiger Reihenfolge 3, 4 bzw. 5 zu setzen sind, und für die verbleibenden Einerstellen müssen 6 und 7 – wieder in beliebiger Zuordnung – gewählt werden.
Die Differenz ist $2007 - 36 - 247 - 151 = 1573$.

9. B, C und D zerlegen die Strecke AE in vier gleichlange Teilstrecken. AE, AD und DE sind Durchmesser von Halbkreisen. Entlang dieser Halbkreise gibt es zwei Wege von A nach E (s. Abb.). Das Verhältnis aus der Länge des oberen und der Länge des unteren Weges ist gleich



(**A**) 1 : 2 (**B**) 2 : 3 (**C**) 2 : 1 (**D**) 3 : 2 (**E**) 1 : 1

Lösung: Wir setzen die Länge der Gesamtstrecke $\overline{AE}$ gleich 4. Die Länge der oberen Halbkreislinie ist dann 2π und die der unteren $\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi$, folglich stimmen die Längen überein, das Verhältnis ist 1 : 1.

10. Seit jeher züchtet die Frühlingsfee Schmetterlinge. Dies Jahr – so versichert sie ihrer Freundin – schlüpfen mindestens 80% der Schmetterlingspuppen. Bei dem Wetter! Es sind auch schon aus 10 der Puppen prächtige Falter geschlüpft. Als sie jedoch 5 vertrocknete Puppen findet, ist ihr klar, dass sie die 80% nur noch erreichen kann, wenn alle übrigen Puppen zu Schmetterlingen werden. Wie viele Schmetterlingspuppen hatte sie insgesamt?

(**A**) 20 (**B**) 25 (**C**) 30 (**D**) 35 (**E**) 40

Lösung: Bezeichnen wir die Gesamtzahl der Schmetterlingspuppen mit n, dann wissen wir, dass 5 genau 20% bzw. $\frac{1}{5}$ der Schmetterlingspuppen sind. Folglich ist $n = 5+4\cdot 5 = 25$.

11. Welchen größten Wert kann der Quotient aus einer dreistelligen Zahl und der Summe ihrer Ziffern annehmen?

(**A**) 99 (**B**) 100 (**C**) 109 (**D**) 110 (**E**) 111

Lösung: Der Quotient kann 100 sein, z. B. für die Zahlen 100 oder 400. Er kann nicht größer als 100 sein, denn offenbar ist $100a + 10b + c \leq 100a + 100b + 100c$ bzw. $\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} \leq 100$.

12. Bei einer Bilanzrechnung zeigt sich: Der Ertrag β ist um 5 % kleiner als der Ertrag γ und um 10 % größer als der Ertrag α. Dann ist γ um x größer als α, und es ist x

(**A**) ca. 50% (**B**) gleich 7,5% (**C**) ca. 2% (**D**) gleich 25% (**E**) knapp 16%

Lösung: Dass β um 5% kleiner als γ ist, lässt sich auch so ausdrücken: $\beta = 0,95\gamma$. Dass β um 10% größer als α ist, besagt, dass $\beta = 1,1\alpha$ ist. Setzen wir gleich, erhalten wir, $0,95\gamma = 1,1\alpha$ oder $\gamma = \frac{1,1}{0,95}\alpha$.
Dann ist der gesuchte Prozentsatz $110 : 0,95 = 11000 : 95 \approx 115,8$, also ist (**E**) richtig.

2007-Knobelei – 6

Gesucht sind alle Lösungen (x_1, x_2, x_3, x_4) des nachfolgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

13. Gegeben ist die Gleichung $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, wobei x und y ganzzahlig sind. Dann ist x gleich

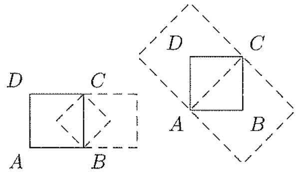
(**A**) 3 (**B**) 2 (**C**) 1 (**D**) 0 (**E**) −1

Lösung: Wegen $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ und $3^{y+2} = 3^2 \cdot 3^y$ können wir $2^x(2+1) = 3^y(9-1)$ schreiben bzw. $2^{x-3} = 3^{y-1}$. Da 2 und 3 Primzahlen sind, ergibt sich hieraus sofort, dass $x - 3 = y - 1 = 0$, also insbesondere $x = 3$ ist.

14. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge 1. Welches ist die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate, die mit $ABCD$ genau 2 Eckpunkte gemeinsam haben?

(A) 14 (B) 12 (C) 6 (D) 17 (E) 10

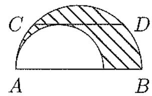
Lösung: Zur Lösung überlegen wir uns Folgendes: Aus den 4 Eckpunkten des Quadrates lassen sich $\binom{4}{2} = 6$ Punktepaare bilden. Jedes Punktepaar bestimmt eine Seite oder eine Diagonale eines möglichen Quadrates. Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:



Für die 4 Paare von aufeinanderfolgenden Punkten des Ausgangsquadrates, also $\{A;B\}$, $\{B;C\}$, $\{C;D\}$, und $\{D;A\}$, erhalten wir je 2 Quadrate, wie der linken Zeichnung zu entnehmen ist. Für die 2 Paare einander gegenüberliegender Punkte $\{A;C\}$ und $\{B;D\}$ erhalten wir ebenfalls je 2 Quadrate, die in der rechten Zeichnung dargestellt wurden. Insgesamt sind das 12 Quadrate.

Die Summe der Flächeninhalte beträgt nun $4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 14$.

15. Das schraffierte Gebiet wird durch zwei Halbkreise begrenzt (s. Abb.). Die Sehne CD ist parallel zum Durchmesser AB des größeren Halbkreises, berührt den kleineren Halbkreis und hat die Länge 4. Dann ist der Inhalt des schraffierten Gebiets



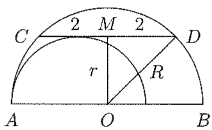
(A) π (B) $1,5\pi$ (C) 2π (D) 3π (E) $2,5\pi$

Lösung: Wir bezeichnen den Radius des kleinen Kreises mit r, den des großen mit R. Der Abstand von AB zu CD beträgt r. Es sei O der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, M Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Dann ist das Dreieck OMD rechtwinklig und hat die Seitenlängen r, R und 2.

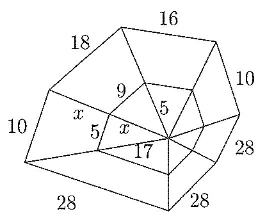
Nach dem Satz von Pythagoras gilt $R^2 - r^2 = 2^2 = 4$. Der Flächeninhalt F_s des schraffierten Gebietes ist die Differenz der Flächeninhalte der beiden Halbkreise, also

$$F_s = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(R^2 - r^2)$$

und durch Einsetzen des Wertes von $R^2 - r^2$ finden wir $F_s = 2\pi$.



16. Eine mathematisch besonders begabte Spinne webt ein Netz mit Netzstücken ganzzahliger Länge (s. Abb.). Auch die Länge x ist eine ganze Zahl. Wie lang ist x? (*Abb. ist nicht maßstabsgerecht.*)



(A) 5 (B) 9 (C) 13 (D) 14 (E) 16

Lösung: Zur Lösung benutzen wir, dass in jedem Dreieck die Dreiecksungleichung gilt, d. h., dass die Summe der Längen zweier Seiten stets größer ist als die Länge der dritten Seite. So gilt im Dreieck mit den Seitenlängen 5, 17 und x, dass $5 + x > 17$ bzw. $x > 12$ ist. Im Dreieck mit den Seitenlängen 5, 9 und x gilt, dass $5 + 9 > x$ bzw. $x < 14$ ist. Daraus folgt wegen der für x geforderten Ganzzahligkeit, dass $x = 13$ ist.

17. Der Wert der Summe $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 358° + \cos 359°$ ist gleich

(**A**) 1 (**B**) π (**C**) 0 (**D**) -1 (**E**) 10

Lösung: Da allgemein $\cos x = -\cos(180°+x)$ gilt, lassen sich die Summanden geeignet zusammenfassen, so dass wir $(\cos 1° + \cos 181°) + (\cos 2° + \cos 182°) \cdots + (\cos 179° + \cos 359°) + \cos 180° = \cos 180° = -1$ erhalten.

18. Eine ferne Insel wird von lügnerischen Lumpen (LL), die stets die Unwahrheit, und wahrheitsliebenden Weisen (WW), die stets die Wahrheit sprechen, bewohnt. Ein junger Mathematiker, dem dieses Phänomen wohlbekannt ist, strandet auf der Insel, und sein Blick fällt auf zwei am Strand weilende Schöne, eine groß, die andere klein. An näherer Bekanntschaft interessiert, fragt er die Kleine, die sein Herz am meisten bewegt, zu welcher der Gruppen sie gehört, worauf sie ihm antwortet: „Mindestens eine von uns beiden gehört zu den lügnerischen Lumpen.“ Welcher der folgenden Sätze ist dann wahr?

(**A**) Die Kleine kann diesen Satz nicht aussprechen, weil sie sonst weder zu den LL noch zu den WW gehören würde.

(**B**) Beide sind LL.

(**C**) Beide sind WW.

(**D**) Die Kleine gehört zu den LL, die Große zu den WW.

(**E**) Die Große gehört zu den LL, die Kleine zu den WW.

Lösung: Die Annahme, dass die Kleine zu den LL gehört, führt zum Widerspruch, denn falls die Große auch zu den LL gehören würde, wäre die Aussage der Kleinen ebenso wahr wie im Falle, dass die Große zu den WW gehören würde – die Kleine müsste aber lügen. Dagegen ist die Aussage der Kleinen möglich, wenn sie zu den WW gehört. Und zwar beinhaltet sie dann, dass die Große zu den LL gehört. Antwort (**E**) gilt.

19. Wie viele ganzzahlige Tripel $(x; y; z)$ sind Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$? *Anmerkung: Den Lösungen entsprechen im kartesischen Koordinatensystem Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 3.*

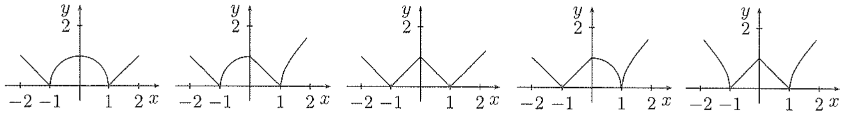
(**A**) 30 (**B**) 24 (**C**) 12 (**D**) 6 (**E**) 3

Lösung: Falls $(x; y; z)$ ein Lösungstripel ist, so gilt sicher für alle drei Zahlen, dass ihr Betrag höchstens gleich 3 ist. Folglich kommen nur die Werte $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$ in Frage. Ist eine der Zahlen dem Betrage nach 3, so sind die beiden anderen 0. Die entsprechenden Lösungstripel sind: $(3; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$, $(0; 0; 3)$, $(-3; 0; 0)$, $(0; -3; 0)$, $(0; 0; -3)$. Falls eine der Zahlen dem Betrage nach gleich 2 ist, so muss die Summe der Quadrate der beiden anderen – ganzen – Zahlen $9 - 4 = 5$ sein. Das ist jedoch nur möglich, wenn eine weitere der drei Zahlen dem Betrage nach 2 und die dritte dem Betrage nach 1 ist. Die entsprechenden Lösungstripel sind

$$\begin{array}{cccc}
(2;2;1) & (2;2;-1) & (2;-2;1) & (2;-2;-1) \\
(-2;2;1) & (-2;2;-1) & (-2;-2;1) & (-2;-2;-1) \\
(2;1;2) & (2;1;-2) & (2;-1;2) & (2;-1;-2) \\
(-2;1;2) & (-2;1;-2) & (-2;-1;2) & (-2;-1;-2) \\
(1;2;2) & (1;2;-2) & (1;-2;2) & (1;-2;-2) \\
(-1;2;2) & (-1;2;-2) & (-1;-2;2) & (-1;-2;-2)
\end{array}$$

Eine andere Aufteilung ist nun offenbar nicht mehr möglich. Wir haben insgesamt 30 Tripel gefunden.

20. Welcher Graph gehört zur Funktion $y = \sqrt{|(1+x)(1-|x|)|}$?

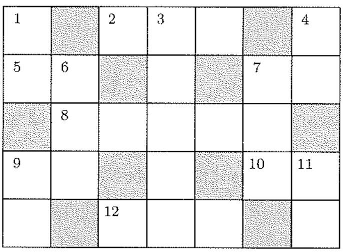


(A) (B) (C) (D) (E)

Lösung: Da in der Funktion Beträge auftauchen, zerlegen wir den Definitionsbereich so, dass sich diese Beträge jeweils einheitlich auflösen lassen. Sei also $x \leq -1$. Dann ist $y = \sqrt{|(1+x)^2|} = |1+x| = -1-x$, das ist eine Geradengleichung. Damit kommt Lösungsvorschlag (**E**) nicht mehr in Frage. Im Bereich $-1 < x < 0$ ist wieder $y = |1+x|$, die Auflösung führt dann allerdings zu $y = 1+x$, wiederum einer Geradengleichung, womit (**C**) und (**D**) noch in der Auswahl sind, die beiden anderen Darstellungen gehören gewiss zu anderen Funktionen. Im Bereich $0 \leq x \leq 1$ ist $y = \sqrt{(1+x)(1-x)}$ bzw. $y^2 = 1-x^2$ oder $x^2 + y^2 = 1$, Gleichung eines Kreises mit Radius 1. Damit ist klar, dass nur (**D**) die Lösung sein kann. Wir vergewissern uns, dass der Graph auch für den Bereich $1 < x$ richtig sein kann. In diesem Teil des Definitionsbereiches ist $y = \sqrt{|1-x^2|} = \sqrt{x^2-1}$ bzw. $x^2 - y^2 = 1$, das ist die Gleichung einer Hyperbel, und das passt zum Aussehen des Graphen bei (**D**)

2007-Knobelei – 7

Bei diesem Kreuzzahlrätsel kommt es darauf an, die Ergebniszahlen in einer geeigneten Reihenfolge zu ermitteln:



Waagerecht: *2) Primzahl zwischen 300 und 400, 5) natürliche Zahl, 7) Kubikzahl, 8) Produkt von drei Mersenneschen Primzahlen, 9) Primzahl mit der Quersumme 4, 10) Mersennesche Primzahl, 12) Primzahl zwischen 400 und 500.*

Senkrecht: *1) vollkommene natürliche Zahl, 3) Fermatsche Primzahl, 4) Primzahl mit dem Querprodukt 21, 6) Primzahl zwischen 200 und 300 mit der Quersumme 7, 7) größte Primzahl, die kleiner als 300 ist, 9) Fermatsche Primzahl, 11) durch 7 teilbare natürliche Zahl. Wie lautet das Neunfache der in 6-senkrecht stehenden Zahl?*

21. Welche der folgenden Zahlen lässt sich *nicht* in der Form $x + \sqrt{x}$ schreiben, wobei x eine ganze Zahl bezeichnet?

(A) 870 (B) 110 (C) 90 (D) 60 (E) 30

Lösung: Damit die Darstellung $x + \sqrt{x}$ für eine natürliche Zahl gilt, muss x Quadratzahl sein, also ist eine solche Zahl gesucht, die sich nicht als $y^2 + y = y \cdot (y+1)$ darstellen lässt. Schauen wir uns die Primzahlzerlegungen der 5 zur Wahl stehenden Zahlen an, so finden wir, dass $870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 29 \cdot 30$ sich in der beschriebenen Weise darstellen lässt. Auch $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 10 \cdot 11$, $90 = 9 \cdot 10$ und $30 = 5 \cdot 6$ haben diese Eigenschaft. Allein $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ kann nicht auf diese Weise in zwei Faktoren zerlegt werden.

22. Es gilt: $f(x) = \dfrac{2x}{3x+4}$. Wenn $f(g(x)) = x$ gelten soll, dann ist $g(x)$ gleich

(A) $\dfrac{4x}{2-3x}$ (B) $\dfrac{3x}{2x+4}$ (C) $\dfrac{2x+4}{4x}$ (D) $\dfrac{3x+4}{2x}$ (E) $\dfrac{3x}{2x-4}$

Lösung: Wir setzen ein und rechnen: $\dfrac{2g(x)}{3g(x)+4} = x$. Dann gilt $2g(x) = x \cdot 3g(x) + 4x$ bzw. $g(x)(2-3x) = 4x$, woraus dann $g(x) = \dfrac{4x}{2-3x}$ folgt, sofern $2 - 3x \neq 0$ ist.

23. Ann, Belinda und Charles werfen nacheinander einen Würfel. Ann gewinnt, wenn sie eine 1, 2 oder 3 wirft. Belinda gewinnt, wenn sie eine 4 oder eine 5 wirft. Charles gewinnt, wenn er eine 6 wirft. Ann beginnt und gibt den Würfel an Belinda, diese gibt ihn an Charles, Charles gibt ihn an Ann usw., solange, bis jemand zum ersten Mal gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der offenbar benachteiligte Charles gewinnt?

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{3}{23}$ (C) $\dfrac{1}{11}$ (D) $\dfrac{3}{38}$ (E) $\dfrac{1}{13}$

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, dass Charles bei seinem ersten Würfeln gewinnt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ann keine 1 oder 2 oder 3 würfelt, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass Belinda keine 4 oder 5 würfelt, und der Wahrscheinlichkeit, dass Charles dann eine 6 würfelt, also $P(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$. Hinzuzufügen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Charles bei seinem zweiten Würfeln gewinnt, also $P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ usw. Wir finden für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 6}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{5}{18}}{(1 - \frac{5}{18})} = \frac{1}{13}$$

Wir geben eine 2. Lösung: Charles gewinnt, wenn er das erste Mal an der Reihe ist, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$; mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$ wirft er keine „6“, und die Würfelei beginnt von vorn. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P gilt also die folgende Gleichung:

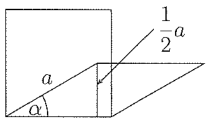
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} P = \frac{1}{18} + \frac{5}{18} P$$

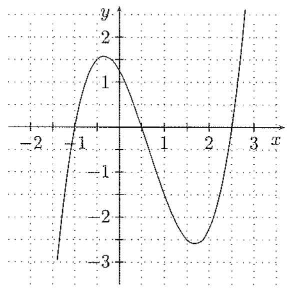
mit der Lösung $P = \dfrac{1}{13}$.

24. Wie groß ist der spitze Winkel eines Rhombus (auch Raute genannt), dessen Seite gleich dem geometrischen Mittel seiner Diagonalen ist?
Hinweis: Das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen a und b ist $\sqrt{a \cdot b}$.

(A) 15° (B) 22,5° (C) 30° (D) 37,5° (E) 45°

Lösung: Da der Flächeninhalt des Rhombus $\frac{1}{2}ef$ und gleichzeitig aus der Bedingung der Aufgabe $\sqrt{ef} = a$ bzw. $ef = a^2$ ist, hat der Rhombus, dessen spitzen Winkel wir suchen, den halben Flächeninhalt des Quadrats mit derselben Seitenlänge.
Da jetzt der Abstand der Rhombusseiten gleich der halben Seitenlänge ist, können wir den Sinus des spitzen Winkels des Rhombus ausrechnen:
$\sin\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}a}{a} = \dfrac{1}{2}$, also misst der Winkel 30°.





25. Die Figur zeigt einen Ausschnitt des Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.
Dann gilt: $b \approx$

(A) −4 (B) −2 (C) 0 (D) 0,5 (E) 2,5

Lösung: Wir bezeichnen mit x_1, x_2 und x_3 die Nullstellen der Funktion. Nach dem Satz von Vieta ist nun $b = -(x_1 + x_2 + x_3)$. Die Nullstellen der Funktion lassen sich am Graphen gut ablesen, somit ist $b \approx -(-1 + 0,5 + 2,5)$, also $b \approx -2$.

> *Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, das die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.*
>
> Jean Lerond d' Alembert
>
> JEAN LEROND D' ALEMBERT, (1717-1783), französischer Mathematiker mit bedeutenden Beiträgen zur Analysis

26. Bestimme die Anzahl der verschiedenen Werte für a so, dass die quadratische Gleichung $x^2 + ax + 2007 = 0$ zwei ganzzahlige Lösungen für x hat.

(A) 3 (B) 4 (C) 8 (D) 6 (E) 0

Lösung: Angenommen, es existiert ein ganzzahliges Lösungspaar der Gleichung $x^2 + ax + 2007 = 0$. Mit $(x_1; x_2)$ sei ein solches Lösungspaar bezeichnet. Dann gilt nach dem Satz von Vieta $x_1 \cdot x_2 = 2007$. Zerlegen wir nun 2007 in Primfaktoren, so finden wir $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$. Damit sind die ganzzahligen Lösungspaare klar. Es sind $(-1; -2007)$, $(-3; -669)$, $(-9; -223)$, $(1; 2007)$, $(3; 669)$, $(9; 223)$, und dazu gehören die 6 Werte für a: 2008, 672, 232, −2008, −672, −232.

27. Teilen wir eine dreistellige Zahl durch die Summe ihrer Ziffern (Quersumme), so entsteht bei dieser Division in der Regel ein Rest. Wie groß ist der größtmögliche Rest?

(**A**) 20 (**B**) 22 (**C**) 24 (**D**) 25 (**E**) 26

Lösung: Da der größtmögliche Rest bei einer Division stets Divisor minus 1 ist, kann der im Falle der vorliegenden Aufgabe mögliche größte Rest nie größer als 26 – dies im Falle der Quersumme $9 + 9 + 9 = 27$ – sein. Wenn die Quersumme allerdings 27 ist, gibt es nur eine mögliche dreistellige Zahl hierzu, nämlich 999, und diese Zahl ist durch 27 ohne Rest teilbar. Zur nächstkleineren Quersumme 26 gehören 3 verschiedene Zahlen 998, 989 und 899. Die bei Division durch 26 entstehenden Reste sind 10, 1 bzw. 15, und es ist zu erwarten, dass dies nicht die kleinstmöglichen sind. Gehen wir zur nächstkleineren Quersumme, 25, so heißen die zugehörigen Zahlen 997, 979, 799 ... und hier können wir bereits abbrechen, denn der Rest, den 799 bei Division durch 25 lässt, ist 24 und das ist nicht zu übertreffen.

28. Nach ihrem anstrengenden Lauf-Training ziehen die 5 Sportler ihre Trikots aus, werfen sie auf einen Haufen und stürzen unter die Dusche. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass bei zufälligem Aufteilen der Trikots keiner der 5 sein eigenes zurück erhält?

(**A**) 16 (**B**) 44 (**C**) 57 (**D**) 64 (**E**) 125

Lösung: Wir beginnen die Lösung, indem wir uns überlegen, wie es wäre, wenn es nur 2 Sportler gewesen wären. Dann gäbe es genau eine Möglichkeit (von insgesamt zweien), bei der jeder ein „falsches“ Trikot bekommt. Wären es 3 Läufer, so gäbe es insgesamt $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ Möglichkeiten der Reihenfolge, in der die Trikots liegen könnten. Neben der ursprünglichen Reihenfolge würden dabei auch all jene nicht der „totalen Vertauschung“ zuzurechnen sein, bei denen ein Trikot am Ausgangsplatz verbleibt und die anderen beiden vertauscht sind, womit sich $6 - 3 \cdot 1 - 1 = 2$ für die gesuchte Anzahl ergibt. Wären es 4 Sportler, so kämen wiederum zur Ausgangssituation all jene hinzu, bei denen genau ein Trikot am Ausgangsplatz verbleibt und alle anderen vertauscht sind und jene, bei denen genau zwei Trikots am Ausgangsplatz verbleiben, während die beiden anderen vertauscht sind. Das ergibt $4! - \left(4 \cdot 2 + \binom{4}{2} \cdot 1 + 1\right) = 9$. Und für den gesuchten Fall, dass 5 Läufer vom Lauf-Training kommen, rechnen wir analog, ziehen also von der Gesamtzahl der möglichen Vertauschungen, $5! = 120$, alle jene ab, bei denen genau ein Trikot am Ausgangsplatz verbleibt, bei denen genau zwei Trikots am Ausgangsplatz verbleiben und bei denen genau drei Trikots am Ausgangsplatz verbleiben sowie die Ausgangssituation. Das ergibt nun $5! - \left(5 \cdot 9 + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{3} \cdot 1 + 1\right) = 120 - (45 + 20 + 10 + 1) = 44$. – Diese Aufgabe stimmt in ihrem mathematischen Gehalt übrigens mit Aufgabe 29 in Klassenstufe 9/10 überein.

29. $\dfrac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} =$

(**A**) $\dfrac{9}{10}$ (**B**) $\dfrac{99}{100}$ (**C**) $\dfrac{999}{1000}$ (**D**) 9 (**E**) 1

Lösung: Jeder einzelne der Summanden lässt sich folgendermaßen zerlegen:

$$\frac{1}{(k+1) \cdot \sqrt{k} + k \cdot \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Mit dieser Kenntnis sehen wir sofort, dass

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+-\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\text{ ist.}$$

Wer diese schöne Idee nicht hatte, konnte nach kurzem Probieren zu der Vermutung kommen, dass die Summe der ersten n Summanden gleich $1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ ist, die sich zwar mit einiger Rechnung, aber ohne große Mühe mit der Methode der vollständigen Induktion beweisen lässt.

30. Die wachsende Zahlenfolge 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... $(=3^0, 3^1, 3^0+3^1, 3^2, 3^0+3^2, 3^1+3^2, 3^0+3^1+3^2, \ldots)$ besteht aus den Potenzen der Zahl 3 sowie aus allen möglichen Summen verschiedener solcher Potenzen. Dann ist die hundertste Zahl der Folge gleich

(A) 1008 (B) 977 (C) 729 (D) 981 (E) 3^9

Lösung: Wir untersuchen, wie viele Glieder die Folge zwischen zwei aufeinanderfolgenden Dreierpotenzen hat. 3^0 steht auf Platz 1, 3^1 auf Platz 2. Bis zur nächstfolgenden Dreierpotenz kommt 3^1+3^0 dazwischen, 3^2 steht auf Platz 4. Da alle vor dem 4. Platz stehenden Dreierpotenzen bzw. Summen von Dreierpotenzen zu 3^2 addiert werden, bevor 3^3 in der Folge auftaucht, folgen auf 3^2 also drei Elemente, bevor auf dem 8. Platz 3^3 erscheint. Dies setzt sich fort, es gibt 8+7 Elemente, bevor auf dem 16. Platz 3^4 zu schreiben ist, 16+15 vor dem 32. Platz für 3^5 usw. Mit der Methode der vollständigen Induktion ließe sich exakt zeigen, dass stets auf den Plätzen mit Zweierpotenzindex die reinen Dreierpotenzen anzutreffen sind und auch innerhalb der Intervalle zwischen aufeinanderfolgenden Dreierpotenzen die Reihenfolge wie zu Beginn sich immer von Neuem wiederholt. Für das 100. Element müssen wir folglich zusammensetzen: $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$, d. h. das Element ist $3^6+3^5+3^2=729+243+9=981$.

Wesentlich eleganter ist die folgende Darstellung: Die Zahlen der Folge aus der Aufgabe lassen sich bezüglich der Basis 3 allein mit den Ziffern 1 und 0 schreiben: 1; 10; 11; 100; 101; 110; 111; .... Diese Zahlen lassen sich als Zahlen bezüglich der Basis 2 auffassen. Dann lautet die Frage: Welches ist die Darstellung von 100 im Zahlensystem zur Basis 2? Und da $100=64+32+4$ ist, ist die Darstellung der 100 im Positionssystem zur Basis 2: 1100100. Dies ist im Positionssystem zur Basis 3 die Zahl $3^6+3^5+3^2=729+243+9=981$.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 11 bis 13 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	D	A	C	D	C	E	C	E	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	E	A	A	C	C	D	E	A	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	A	E	C	B	D	C	B	A	D

www.mathe-kaenguru.de