Gleichungen und Ungleichungen

Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist. Es gibt somit **wahre Aussagen** und **falsche Aussagen**. Ist etwas weder eine wahre noch eine falsche Aussage, handelt es sich um **keine Aussage**.

Beispiele:

- Bern ist die Hauptstadt der Schweiz. (**Wahre Aussage**)
- 88 ist ganzzahlig teilbar durch 10. (**Falsche Aussage**)
- 20x ist kleiner. (**Keine Aussage**)
- $15 + 40 = 55$ (**Wahre Aussage**)
- $4 - 1 > 5$ (**Falsche Aussage**)
- $14 - 3 \cdot 2$ (**Keine Aussage**)

Eine **Aussageform** ist eine Aussage mit **Variable(n)**. Bei der Ersetzung der Variablen durch Zahlen entsteht entweder eine wahre oder falsche Aussage.

Beispiel:

		$8x - 10 = 14$	(**Aussageform**)
$x = 1$	$\rightarrow$	$8 \cdot 1 - 10 = 14$	(**Falsche Aussage**)
$x = 3$	$\rightarrow$	$8 \cdot 3 - 10 = 14$	(**Wahre Aussage**)

Lösung der Aussageform

Die Zahl, welche beim Einsetzen in die Aussageform eine wahre Aussage erzeugt, nennen wir **Lösung der Aussageform**.

Die **Grundmenge $\mathbb{G}$** einer Aussageform gibt die Zahlen an, welche für die Variable eingesetzt werden dürfen.

Beispiele:

$\mathbb{G} = \mathbb{N}$	(Grundmenge = Menge der **natürlichen** Zahlen)
$\mathbb{G} = \mathbb{Z}$	(Grundmenge = Menge der **ganzen** Zahlen)
$\mathbb{G} = \mathbb{Q}$	(Grundmenge = Menge der **rationalen** Zahlen)

Die **Lösungsmenge $\mathbb{L}$** enthält alle Lösungen der Aussageform. Sie ist eine Teilmenge der Grundmenge.

Schreibt man zwischen zwei Terme ein **Gleichheitszeichen (=)**, so entsteht eine **Gleichung**. Man bezeichnet die zwei Terme als linke und rechte Seite der Gleichung.

Schreibt man zwischen zwei Terme ein **Ungleichheitszeichen (< / >)**, so entsteht eine **Ungleichung**. Man bezeichnet die zwei Terme als linke und rechte Seite der Ungleichung.

Gleichungen und Ungleichungen sind entweder **Aussagen** (ohne Variable) oder **Aussageformen** (mit Variable).

Beispiele:			
	$12 + 8 = 20$	(**Gleichung**	/ **wahre Aussage**)
	$70 - 11 > 60$	(**Ungleichung**	/ **falsche Aussage**)
	$12 + x = 20$	(**Gleichung**	/ **Aussageform**)
	$70 - x < 60$	(**Ungleichung**	/ **Aussageform**)

Man löst eine Gleichung / Ungleichung, indem man sie **schrittweise** so weit verändert, bis die **Variable allein und nur auf einer Seite** steht. Diese Umformungsschritte, welche die Lösungsmenge einer Gleichung / Ungleichung nicht verändern, nennt man **Aequivalenzumformungen** (aequivalent = gleichwertig).

Meist sind mehrere Umformungsschritte nötig, wie zum Beispiel **Ausmultiplizieren**, **Zusammenfassen**, **Multiplizieren**, **Dividieren**, **Addieren** oder **Subtrahieren**.
Die Umformungsschritte werden **rechts von der Gleichung / Ungleichung hinter einem Hochstrich** (|) angegeben.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x + 12 &= x - 8 && \mid -x \\ 4x + 12 &= -8 && \mid -12 \\ 4x &= -20 && \mid :4 \\ \boldsymbol{x} &\boldsymbol{= -5} \end{aligned}$$

Aequivalenzumformungen

Systematisches Lösen einer Gleichung:

$7x - 4(2x - 6)$	=	$9 - x + 2(5 - 3x)$	|	**‚ausmultiplizieren'**
$7x - 8x + 24$	=	$9 - x + 10 - 6x$	|	**‚zusammenfassen'**
$-x + 24$	=	$19 - 7x$	|	**+ 7x**
$6x + 24$	=	19	|	**- 24**
$6x$	=	-5	|	**: 6**
$\mathbf{x}$	**=**	$-\frac{5}{6}$		

$\mathbb{G} = \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\ \}$ (‚leere Menge')

$\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\ \}$

$\mathbb{G} = \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\ \}$

$\mathbb{G} = \mathbb{Q} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$

Systematisches Lösen einer Ungleichung:

$15 - 2(3x - 1)$	>	$12x - 8 - 2(4x + 7)$	|	**‚ausmultiplizieren'**
$15 - 6x + 2$	>	$12x - 8 - 8x - 14$	|	**‚zusammenfassen'**
$17 - 6x$	>	$4x - 22$	|	**+ 6x**
17	>	$10x - 22$	|	**+ 22**
39	>	$10x$	|	**: 10**
3,9	**>**	**x**		

$\mathbb{G} = \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{1, 2, 3\}$

$\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0, 1, 2, 3\}$

$\mathbb{G} = \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{3, 2, 1, 0, -1, \ldots\}$

$\mathbb{G} = \mathbb{Q} \quad \rightarrow \quad \mathbb{L} = \{x \mid x < 3{,}9\}$

Zahlenrätsel

Zahlenrätsel sind in **Textform formulierte Probleme**, welche **mit Hilfe einer noch zu bestimmenden Gleichung** zu lösen sind. Solche Aufgaben sind oft nur durch logisch geordnetes Vorgehen lösbar.

Beispiel 1: „Das Dreifache einer Zahl, um 10 vermehrt, liegt ebensoviel über 90, wie die Zahl selber unter 70 liegt. Wie heisst die Zahl?“

$3x + 10 - 90$	$=$	$70 - x$	**‚zusammenfassen’**
$3x - 80$	$=$	$70 - x$	**$+ x$**
$4x - 80$	$=$	70	**$+ 80$**
$4x$	$=$	150	**$: 4$**
x	**$=$**	**$37,5$**	

Die Zahl heisst 37,5.

Beispiel 2: „Zusammen zählen Mutter und Tochter heute 33 Lebensjahre. In 18 Jahren wird die Mutter doppelt so alt sein wie die Tochter. Wie alt ist die Tochter heute?“

	Heute	In 18 Jahren	
Mutter :	x	$x + 18$	
Tochter :	$33 - x$	$33 - x + 18 = 51 - x$	= 2 ·

$x + 18$	$=$	$2 \cdot (51 - x)$	**‚ausmultiplizieren’**
$x + 18$	$=$	$102 - 2x$	**$+ 2x$**
$3x + 18$	$=$	102	**$- 18$**
$3x$	$=$	84	**$: 3$**
x	**$=$**	**28**	

Die Tochter ist heute 5 Jahre alt.