Permutation / Variation / Kombination

Permutation

⇨ alle Elemente einer Menge werden entnommen

Ohne Wiederholung (von Elementen)

Unter einer Permutation versteht man die Anordnung von n unterscheidbaren Elementen in einer bestimmten Reihenfolge. Wenn keine Wiederholungen auftreten, ist die Anzahl der möglichen Permutationen aus n Elementen:

$$n! \quad = \quad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Beispiel:

Drei Stifte (n=3) in den Farben rot, schwarz und blau werden zufällig an drei Personen verteilt. Dann gibt es dafür

$3!=6$

verschiedene Möglichkeiten.

Mit Wiederholung (von Elementen)

Bei Permutationen mit Wiederholungen sind nicht alle Elemente unterscheidbar. Hat man n Elemente, von denen m identisch sind, so ist die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Anordnungen geringer:

$$\frac{n!}{m!} \quad = \quad \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \quad = \quad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Beispiel:

Hat man von den drei Stiften (n=3) zwei in den Farben schwarz und einen in rot und möchte sie auf drei Personen verteilen, so gibt es somit m=2 identische Objekte und man erhällt nur noch

$$\frac{3!}{2!} \quad = \quad \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot 3}{\cancel{1} \cdot \cancel{2}} \quad = \quad 3$$

mögliche unterschiedliche Anordnungen.

Variation

⇨ nur ein Teil der Elemente einer Menge wird entnommen

⇨ die Reihenfolge ist von Bedeutung

Ohne Wiederholung (von Elementen)

Eine Variation aus k von n Elementen ist eine **Teilmenge**. Sind alle Elemente voneinander unterscheidbar, spricht man von einer Variation **ohne Wiederholung von Elementen** (die Reihenfolge der Anordnung spielt also eine Rolle) und die Anzahl unterschiedlicher Variationen von k aus n Elementen beträgt:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ldots\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ldots\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

Beispiel:

In einen 6-er Veloständer werden zwei unterschiedliche Fahrräder gestellt.

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$$\frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 6\cdot 5 = 30$$

Mit Wiederholung (von Elementen)

Betrachtet man dagegen Variationen aus k von n Elementen der Grundmenge mit Wiederholungen, werden also die beim ersten Durchgang entnommenen Elemente wieder zurückgelegt, so gibt es jetzt identische Elemente. Das beim ersten Durchgang entnommene Element könnte schliesslich auch beim zweiten Durchgang gezogen werden. Bei jedem der k Entnahmen aus der Grundmenge könnte jetzt jedes der n Elemente ausgewählt werden.

Daher ist die Anzahl unterschiedlicher Variationen von k aus n Elementen:

$$n^k$$

Beispiel:

Mit einem gewöhnlichen Spielwürfel wird zweimal gewürfelt.

Wie viele verschiedene Zahlenpaare gibt es?

$$6^2 = 36$$

Kombination

⇨ nur ein Teil der Elemente einer Menge wird entnommen

⇨ die Reihenfolge ist nicht von Bedeutung

Ohne Wiederholung (von Elementen)

Bei einer Kombination aus k von n Elementen einer Menge ist ***im Gegensatz zur Variation die Reihenfolge der Anordnung nicht von Bedeutung***.

Sind alle Elemente voneinander unterscheidbar, spricht man von einer Kombination ohne Wiederholung. Dann beträgt die Anzahl unterschiedlicher Kombinationen von k aus n Elementen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$ (gelesen als : n tief k)

Beispiel:

Aus einer Gruppe von 6 Personen wird eine 2-er-Gruppe ausgewählt.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

Mit Wiederholung (von Elementen)

Es kann sein, dass es bei der Kombination aus k von n Elementen ***identische Elemente*** gibt.

Dann beträgt die Anzahl der Kombinationen von k aus n Elementen mit Wiederholungen:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Beispiel:

In einer Urne befinden sich fünf verschiedenfarbige Kugeln. Es sollen drei Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$$\binom{5+3-1}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 35$$