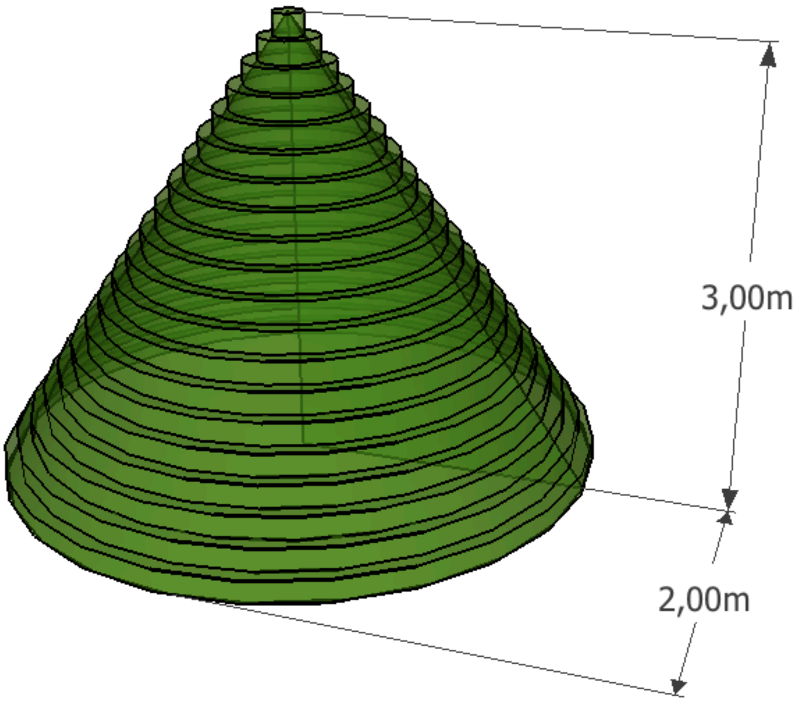
Volumenformel Kegel

Wir stellen einen Kegel als *Turm von **Zylinderscheiben*** dar.



Dabei seien *all diese Zylinder **gleich hoch***, und an ihrer unteren Kreisfläche sollen sie mit dem dortigen Radius des Kegels übereinstimmen.

Gehen wir aus von ***20*** *solcher gleich hoher Zylinderscheiben*, beträgt die ***Höhe einer jeden solchen Zylinderscheibe einen Zwanzigstel der Kegelhöhe***.
Die ***Radien der Zylinderscheiben*** werden nach oben immer um ***einen Zwanzigstel kleiner***.

Gehen wir aus von ***200*** *solcher gleich hoher Zylinderscheiben*, beträgt die ***Höhe einer jeden solchen Zylinderscheibe einen Zweihundertstel der Kegelhöhe***.
Die ***Radien der Zylinderscheiben*** werden nach oben immer um ***einen Zweihundertstel kleiner***.

Gehen wir aus von ***2’000*** *solcher gleich hoher Zylinderscheiben*, beträgt die ***Höhe einer jeden solchen Zylinderscheibe einen Zweitausendstel der Kegelhöhe***.
Die ***Radien der Zylinderscheiben*** werden nach oben immer um ***einen Zweitausendstel kleiner***.

20 ‚Zylinderscheiben'

$$
\begin{aligned}
V &= (20dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (19dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (18dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm \\
&+ (17dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (16dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (15dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm \\
&+ (14dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (13dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (12dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm \\
&+ (11dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (10dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (9dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm \\
&+ (8dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (7dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (6dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm \\
&+ (2dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm + (1dm)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}15dm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (20^2 + 19^2 + 18^2 + 17^2 + 16^2 + 15^2 + 14^2 + 13^2 + 12^2 + 11^2 + 10^2 + \\
&\quad 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2)dm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5dm
\end{aligned}
$$

$\underline{\text{Summe Quadratzahlen}}$: $\dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \dfrac{20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20+1)}{6}$

$$= \left(\frac{20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20+1)}{6}\right)dm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5dm$$

$$= 2'870dm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5dm \cong \underline{13'525dm^3} = \underline{\underline{13{,}525m^3}}$$

200 ‚Zylinderscheiben'

$$V = (200^2 + 199^2 + 198^2 + 197^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2)cm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5cm$$

$$= \left(\frac{200 \cdot (200+1) \cdot (2 \cdot 200+1)}{6}\right)cm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5cm$$

$$= 2'686'700cm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5cm$$

$$\cong \underline{12'660'775cm^3} = \underline{\underline{12{,}660775m^3}}$$

2000 ‚Zylinderscheiben'

$$V = (2'000^2 + 1'999^2 + 1'998^2 + 1'997^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2)mm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5mm$$

$$= \left(\frac{2'000 \cdot (2'000+1) \cdot (2 \cdot 2'000+1)}{6}\right)mm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5mm$$

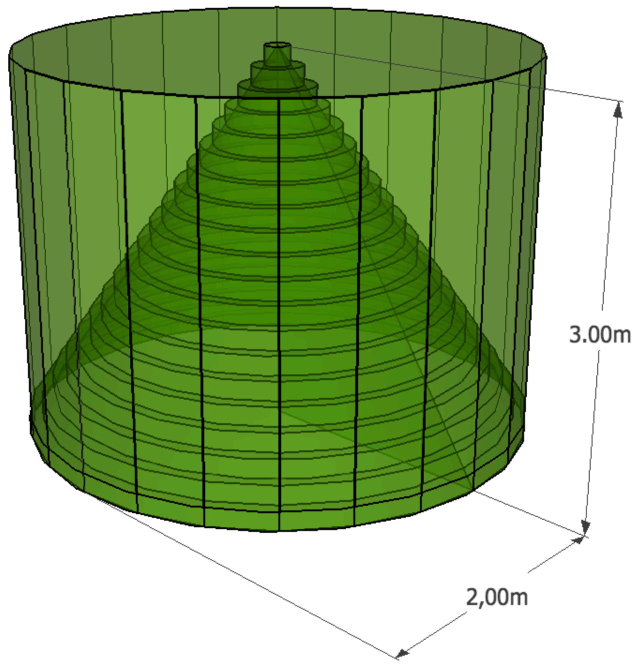
$$= 2'668'667'000mm^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5mm$$

$$\cong \underline{12'575'796'960cm^3} = \underline{\underline{12{,}575796960m^3}}$$

1 umhüllender Zylinder

$$V = (2m)^2 \cdot \pi \cdot 3m$$

$$\cong \underline{37{,}7m^3}$$



Es gilt somit:

$$V_{Kegel} \cong \underline{12{,}6m^3}$$

$$V_{Zylinder} \cong \underline{37{,}7m^3}$$

und:

$$12{,}6m^3 \cong \frac{1}{3} \cdot 37{,}7m^3$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot V_{Zylinder}}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h}$$