$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Ein Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, stammt von Euklid von Alexandria, der von ungefähr 360 bis 280 vor Christus gelebt hat.

Dabei nimmt man zunächst an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, und folgert dann, dass dies zu einem Widerspruch führt („Widerspruchsbeweis“).

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, so kann man sie als vollständig gekürzten Bruch schreiben ($p, q \in \mathbb{N}$): p und q haben also keine gemeinsamen Teiler mehr.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Man quadriert beide Seiten:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Durch Umformung erhält man:

$$2 \cdot q^2 = p^2$$
$$2 \cdot q^2 = p \cdot p$$

Da $2 \cdot q^2$ durch 2 teilbar ist, ist auch $p \cdot p$ durch 2 teilbar. Also ist p gerade und es gilt:

$$\mathbf{p = 2 \cdot k} \ (k \in \mathbb{N})$$

Dann gilt also:

$$2 \cdot q^2 = (2 \cdot k)^2$$
$$\mathbf{q^2 = 2 \cdot k^2}$$

Auf die gleiche Weise zeigt man, dass auch q durch 2 teilbar ist.

Damit sind p und q durch 2 teilbar. Folglich ist $\frac{p}{q}$ aber kein vollständig gekürzter Bruch. Widerspruch!

Demzufolge ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl, da sie sich nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ aus zwei natürlichen Zahlen p und q darstellen lässt.

- Übertrage die Umformungen in dein Heft und beschreibe sie mit eigenen Worten.
- Zeige auf gleiche Weise, dass $\sqrt{3}$ ebenfalls eine irrationale Zahl ist.