Bruchterme

Bruchterme sind Brüche, welche Zahlen **und** Buchstaben enthalten.

Beispiele: $\frac{3x}{4}$, $\frac{5}{a}$, $\frac{12xy}{a}$, $\frac{4x^2}{x-1}$, $\frac{(x+2)^2}{5}$.

Der Begriff **Formänderung** meint, dass bei einem Bruchterm die **Form (‚*Aussehen*')**, **aber nicht der Wert verändert wird** .

Beispiele: $$\frac{3x \overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{4 \underset{\cdot 2}{\curvearrowright}} = \frac{6x}{8}$$ (dieser Vorgang heisst **Erweitern** und ist eine Formänderung)

$$\frac{4x^3 \overset{:4x}{\curvearrowright}}{8x \underset{:4x}{\curvearrowright}} = \frac{x^2}{2}$$ (dieser Vorgang heisst **Kürzen** und ist eine Formänderung)

⇒ **Erweitern** heisst, Zähler **und** Nenner mit demselben Ausdruck zu multiplizieren.

⇒ **Kürzen** heisst, Zähler **und** Nenner durch denselben Ausdruck zu dividieren.

Für die Variable(n) eines **Bruchtermes** können Zahlen eingesetzt werden, so dass der **Wert des Termes** berechnet werden kann.

Beispiel: Berechne den Wert des Bruchtermes $T = \frac{2x+7}{y-2}$ für $x = 7$ und $y = -1$.

$$T = \frac{2 \cdot 7 + 7}{-1-2} = \frac{14+7}{-3} = \frac{21}{-3} = \underline{\underline{-7}} .$$

Kürzungsregeln anhand von Beispielen

1. $\frac{6x}{10}=\frac{3x}{5}$

2. $\frac{10}{20y}=\frac{1}{2y}$

3. $\frac{24xy}{8x}=\frac{3y}{1}=3y$

4. $\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$

5. $\frac{12x^2y}{20xy^2}=\frac{3x}{5y}$

6. $\frac{(2x)^3}{4x^2}=\frac{8x^3}{4x^2}=\frac{2x}{1}=2x$

7. $\frac{(4x^2)^3}{(6x)^3}=\frac{64x^6}{216x^3}=\frac{8x^3}{27}$

8. $\frac{-8a^2b}{12ab^2}=\frac{-2a}{3b}=-\frac{2a}{3b}$

9. $\frac{(-2a)^4}{4a^2}=\frac{16a^4}{4a^2}=\frac{4a^2}{1}=4a^2$

10. $\frac{(-2a)^3}{4a^2}=\frac{-8a^3}{4a^2}=\frac{-2a}{1}=-2a$

11. $\frac{-xa^2}{(-x)^3a}=\frac{-xa^2}{-x^3a}=\frac{a}{x^2}$

12. $\frac{-(ax^2)^2}{(-a^2x)^2}=\frac{-a^2x^4}{a^4x^2}=\frac{-x^2}{a^2}=-\frac{x^2}{a^2}$

13. $\frac{7x^2}{5}\cdot\frac{10}{14x}=\frac{7x^2\cdot10}{5\cdot14x}=\frac{x\cdot2}{1\cdot2}=\frac{x}{1}=x$

14. $\frac{-5a}{3}\cdot\frac{12}{a^2}=\frac{-5\cdot4}{1\cdot a}=\frac{-20}{a}=-\frac{20}{a}$

15. $\frac{(-2x)^3}{5a}\cdot\frac{15a^2}{-6x}=\frac{-8x^3}{5a}\cdot\frac{15a^2}{-6x}=\frac{4x^2\cdot3a}{1\cdot3}=\frac{4x^2\cdot a}{1}=4ax^2$

16. $\frac{x+1}{x+1}=\frac{1}{1}=1$

17. $\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}=\frac{2}{1}=2$

18. $\dfrac{x-1}{1-x} = \dfrac{(-1)\cdot(-x+1)}{1-x} = \dfrac{-1(1-x)}{1-x} = \dfrac{-1}{1} = -1$

19. $\dfrac{4x^2-4x^3}{1-x} = \dfrac{4x^2(1-x)}{1-x} = \dfrac{4x^2}{1} = 4x^2$

20. $\dfrac{12x-20}{-8} = \dfrac{4(3x-5)}{-8} = \dfrac{3x-5}{-2} = -\dfrac{3x-5}{2}$

21. $\dfrac{12x-20}{3x-5} = \dfrac{4(3x-5)}{3x-5} = \dfrac{4}{1} = 4$

22. $\dfrac{12x-20}{5-3x} = \dfrac{4(3x-5)}{(-1)(3x-5)} = \dfrac{4}{-1} = -4$

23. $\dfrac{8-24a}{30a-10} = \dfrac{8(1-3a)}{10(3a-1)} = \dfrac{-8(3a-1)}{10(3a-1)} = \dfrac{-8}{10} = -\dfrac{4}{5}$

24. $\dfrac{x^2a-x^3}{x^2-ax} = \dfrac{x^2(a-x)}{x(x-a)} = \dfrac{x(a-x)}{1(x-a)} = \dfrac{x(a-x)}{-1(a-x)} = \dfrac{x}{-1} = -x$

25. $\dfrac{a^2-1}{a-1} = \dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1} = \dfrac{a+1}{1} = a+1$

26. $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{x^2(x^2-1)}{(x+1)(x+1)} = \dfrac{x^2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)} = \dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$

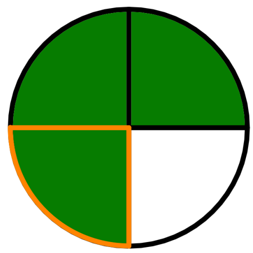
Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Der **Nenner** ‚nennt' die Grösse eines Bruches, der **Zähler** ‚zählt' die Anzahl.

Beispiel: $\dfrac{3}{4}$

Zähler (Anzahl: Drei)

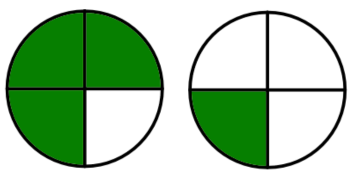
Nenner (Grösse: Viertel)



Brüche, die **addiert** oder **subtrahiert** werden, müssen **gleichnamig** sein, d.h. den **gleichen Nenner** besitzen. Dann werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel: $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$

gleichnamig



Sind Brüche **ungleichnamig** (besitzen sie **nicht** den gleichen Nenner), müssen sie durch **Erweitern** gleichnamig gemacht werden. Man bestimmt in diesem Falle den sogenannten **Hauptnenner**. Der Hauptnenner ist das **kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches)** der einzelnen Nenner. Dann addiert bzw. subtrahiert man die Zähler der erweiterten Brüche.

Beispiele:

$$\underbrace{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}_{\text{ungleichnamig}}=\underbrace{\frac{15}{20}+\frac{12}{20}}_{\text{Hauptnenner (kgV)}}=\frac{27}{20}$$

$$\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-\frac{7}{12}}_{\text{ungleichnamig}}=\underbrace{\frac{16}{24}+\frac{15}{24}-\frac{14}{24}}_{\text{Hauptnenner (kgV)}}=\frac{17}{24}$$

Das Vorgehen bei der Addition bzw. Subtraktion von **Bruchtermen** ist identisch mit dem vorher geschilderten Verfahren bei Brüchen. Bruchterme, die addiert oder subtrahiert werden, müssen **gleichnamig** sein, d.h. den **gleichen Nenner** besitzen.

Beispiele:

$$\frac{3x}{4}+\frac{5x}{4}=\frac{8x}{4}=2x$$

$$\frac{2}{3a}+\frac{1}{3a}=\frac{3}{3a}=\frac{1}{a}$$

Sind Bruchterme **ungleichnamig** (besitzen sie **nicht** den **gleichen Nenner**), müssen sie **gleichnamig gemacht werden**. Man bestimmt ebenfalls den **Hauptnenner** und addiert bzw. subtrahiert die Zähler der erweiterten Brüche.

Beispiele:

$$\frac{3z}{4}+\frac{3z}{5}=\frac{15z}{20}+\frac{12z}{20}=\frac{27z}{20}$$

$$\frac{2}{3b}+\frac{5}{8b}-\frac{7}{12b}=\frac{16}{24b}+\frac{15}{24b}-\frac{14}{24b}=\frac{17}{24b}$$

$$\frac{2x}{5y}+\frac{7x}{8y}-\frac{3x}{10y}=\frac{16x}{40y}+\frac{35x}{40y}-\frac{12x}{40y}=\frac{39x}{40y}$$

$$\frac{2}{5a}+\frac{5}{6b}=\frac{12b}{30ab}+\frac{25a}{30ab}=\frac{12b+25a}{30ab}$$

$$\frac{3b}{2a^2}+\frac{3}{4ab}=\frac{6b^2}{4a^2b}+\frac{3a}{4a^2b}=\frac{6b^2+3a}{4a^2b}$$

Bestimmung des Hauptnenners bei Summen

Die Bestimmung des Hauptnenners wird anspruchsvoller, sobald im Nenner **Summen** vorkommen. In diesem Falle müssen die **Summen** – falls möglich – durch **Faktorisieren** in Produkte zerlegt werden.

Beispiele:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot(x-1)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot(x-1)}+\frac{1\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}=\frac{1+x-1}{x\cdot(x-1)}=\frac{x}{x\cdot(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

‚Faktorisieren'

‚Klammern setzen wegen negativen Operations-/Vorzeichens'

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}-\frac{(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b-a\overset{!}{-}b}{(a+b)(a-b)}=$$

$$\frac{-2b}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{(a+b)(a-b)}$$

Multiplikation und Division von Bruchtermen

Zwei Brüche werden miteinander **multipliziert**, indem man die **beiden Zähler miteinander multipliziert** und die **beiden Nenner miteinander multipliziert**.
Statt nach dem Multiplizieren **kürzt man besser vor dem Multiplizieren**!

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{1}{2}$ **besser:** $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1}{2}$

Zwei Brüche werden durcheinander **dividiert**, indem man **den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert.**

Den **Kehrwert** eines Bruches erhält man, wenn man **Zähler und Nenner miteinander vertauscht !** Der Kehrwert von $\frac{a}{b}$ ist folglich $\frac{b}{a}$.

Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{1} = \frac{3}{2}$ **es gilt:** $\boxed{: \frac{1}{2} = \cdot \frac{2}{1}}$

Kehrwert von $\frac{1}{2}$

Bruchterme multiplizieren und dividieren

Das Vorgehen bei der Multiplikation bzw. Division von **Bruchtermen** ist identisch mit dem vorher geschilderten Verfahren bei Brüchen.

Beispiele:

1 $$\frac{27xy}{28uvw}\cdot\frac{35uv}{81xy}=\frac{5z}{12w}$$

2 $$\frac{-3a}{2b}\cdot\frac{4b}{5a}\cdot\frac{25c}{9d}=-\frac{10c}{3d}$$

3 $$16x^2\cdot\frac{x+1}{8x^2}=\frac{16x^2}{1}\cdot\frac{x+1}{8x^2}=2(x+1)$$

4 $$\frac{(v+1)s}{t^2}\cdot\frac{(t+1)t}{rs}=\frac{(v+1)(t+1)}{rt}$$

5 $$-a^2\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{-d}=\frac{-a^2}{1}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{-d}=\frac{a^3}{d}$$

6 $$\frac{5x}{7x+7y}\cdot(x^2+2xy+y^2)=\frac{5x}{7(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x+y)}{1}=\frac{5x(x+y)}{7}$$

7 $$\frac{3a}{5b}:\frac{9ab}{25c}=\frac{3a}{5b}\cdot\frac{25c}{9ab}=\frac{5c}{3b^2}$$

8 $$\frac{3x+1}{2x-2}:\frac{-y}{x-1}=\frac{3x+1}{2(x-1)}\cdot\frac{x-1}{-y}=-\frac{3x+1}{2y}$$

9 $$a^3:\frac{a^2}{b}=\frac{a^3}{1}\cdot\frac{b}{a^2}=ab$$

10 $$\frac{a^2(a^2-4)}{a^2+2a}:(a^2-2a)=\frac{a^2(a+2)(a-2)}{a(a+2)}\cdot\frac{1}{a(a-2)}=1$$