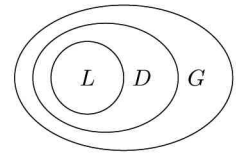


# Grundmenge , Definitionsmenge , Lösungsmenge

Bei **Gleichungen** und **Ungleichungen** unterscheiden wir zwischen der **Grundmenge**, der **Definitionsmenge** und der **Lösungsmenge**.



- Die **Grundmenge**  $G$  enthält alle Zahlen, die für die Variable  $x$  vorgesehen sind.
- Die **Definitionsmenge**  $D$  ist eine **Teilmenge** der Grundmenge. Sie enthält nur jene Zahlen der Grundmenge, für die alle Terme der Gleichung definiert sind. Zum Beispiel ist der Term  $\frac{1}{x-2}$  *nicht* definiert, wenn wir für  $x$  die Zahl 2 einsetzen. Der Term  $\sqrt{2 \cdot x - 6}$  ist *nicht* definiert, wenn  $x$  kleiner als 3 ist.
- Die **Lösungsmenge**  $L$  ist eine Teilmenge der Definitionsmenge. Sie enthält nur jene Zahlen der Definitionsmenge, die **Lösungen** der Gleichung sind.

Bei einer **Bruchgleichung** tritt die gesuchte Variable im Nenner eines Bruchs auf.

Wir lösen die Bruchgleichung  $\frac{4}{x+2} = -2$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

i) Da die Variable  $x$  in einem Nenner vorkommt, ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge:

Wenn  $x + 2 = 0$ , also  $x = -2$  gilt, dann ist der Bruch  $\frac{4}{x+2}$  *nicht* definiert. Division durch 0

Die Zahl  $-2$  kann damit auch keine Lösung der Bruchgleichung sein.

Die Definitionsmenge  $D$  besteht somit aus **allen reellen Zahlen außer  $-2$** , kurz:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

ii) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge  $L$ , indem wir die Bruchgleichung nach  $x$  umformen.

$$\frac{4}{x+2} = -2 \quad | \cdot (x+2)$$

$$4 = -2 \cdot (x+2)$$

$$4 = -2 \cdot x - 4 \quad | +4$$

$$8 = -2 \cdot x \quad | : (-2)$$

$$x = -4$$

Die Multiplikation mit  $(x+2)$  ist für jede Zahl in der Definitionsmenge eine **Äquivalenzumformung**.

Die unterste Gleichung ist genau dann wahr, wenn wir für  $x$  die Zahl  $-4$  einsetzen.

Da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben, stimmen auch alle vorherigen Gleichungen genau dann, wenn wir für  $x$  die Zahl  $-4$  einsetzen.

Für die Lösungsmenge  $L$  dieser Bruchgleichung gilt also:  $L = \{-4\}$

Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge hängen von der angegebenen Grundmenge ab.

Trage jeweils die Definitionsmenge und die Lösungsmenge von  $\frac{4}{x+2} = -2$  in die Tabelle ein.

Grundmenge $G$	Definitionsmenge $D$	Lösungsmenge $L$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$\{-4\}$
$\mathbb{Q}$		
$\mathbb{Z}$		
$\mathbb{N}$		