Die Quadratwurzel

Die *Quadratwurzel* aus der Zahl a (man schreibt: $\sqrt{a}$) ist diejenige positive Zahl b, die mit sich selbst multipliziert wieder a ergibt.

Es gilt also: $\boxed{\sqrt{a} = b \quad \rightarrow \quad b \cdot b = a}$

Die Zahl unter dem Wurzelzeichnen nennt man *Radikand*.

Beispiele:

$\sqrt{4} = 2 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 2 = 4$

$\sqrt{9} = 3 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 3 = 9$

$\sqrt{36} = 6 \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 6 = 36$

$\sqrt{x^2} = x \quad \rightarrow \quad x \cdot x = x^2$

$\sqrt{25s^2} = 5s \quad \rightarrow \quad 5s \cdot 5s = 25s^2$

$\sqrt{z^{10}} = z^5 \quad \rightarrow \quad z^5 \cdot z^5 = z^{10}$

$\sqrt{49y^{12}} = 7y^6 \quad \rightarrow \quad 7y^6 \cdot 7y^6 = 49y^{12}$

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

$\sqrt{0{,}01k^6} = 0{,}1k^3 \quad \rightarrow \quad 0{,}1k^3 \cdot 0{,}1k^3 = 0{,}01k^6$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{4a^2}{25}} = \frac{2a}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{2a}{5} \cdot \frac{2a}{5} = \frac{4a^2}{25}$$

$$\sqrt{\frac{m^8}{100}} = \frac{m^4}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{m^4}{10} \cdot \frac{m^4}{10} = \frac{m^8}{100}$$

Umformen von Wurzeltermen

Im Zusammenhang mit dem *Satz des Pythagoras* ist es in vielen Aufgaben wichtig, dass korrekt mit *Wurzeltermen* operiert werden kann.

Wurzelterme müssen so umgeformt werden können, dass das *Wurzelzeichen* entweder ganz *wegfällt* , oder der *Wurzelausdruck* zumindest *vereinfacht* wird.

Es gelten folgende Umformungsregeln:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ *oder* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Beispiele:

1 $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$, denn: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

2 $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$, denn: $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$
$\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

3 $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$, denn: $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$
$\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$

4 $\sqrt{144 : 4} = \sqrt{144} : \sqrt{4}$, denn: $\sqrt{144 : 4} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt{144} : \sqrt{4} = 12 : 2 = 6$

Wurzelterme umformen

1 $10'000 = 10^4 \rightarrow \sqrt{10000} = \sqrt{10^4} = 10^2$

$1'000 = 10^3 \rightarrow \sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10 \cdot 10^2} = \sqrt{10} \cdot 10$

$100 = 10^2 \rightarrow \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$

$10 = 10^1 \rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{10^1} = \sqrt{10}$

$1 = 10^0 \rightarrow \sqrt{1} = \sqrt{10^0} = 1$

2 $0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1} \rightarrow \sqrt{0{,}1} = \sqrt{10^{-1}}$

$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \rightarrow \sqrt{0{,}01} = \sqrt{10^{-2}} = 10^{-1} = 0{,}1$

$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \rightarrow \sqrt{0{,}001} = \sqrt{10^{-3}} =$

$\sqrt{10^{-1} \cdot 10^{-2}} =$

$\sqrt{10^{-1}} \cdot 10^{-1} = \sqrt{10^{-1}} \cdot 0{,}1$

$0{,}0001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \rightarrow \sqrt{0{,}0001} = \sqrt{10^{-4}} =$

$10^{-2} = 0{,}01$

3 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$

$\sqrt{9{,}8} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9{,}8 \cdot 5} = \sqrt{49} = 7$

$\sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{3{,}2} = \sqrt{0{,}2 \cdot 3{,}2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

4 $\sqrt{32} : \sqrt{8} = \sqrt{32 : 8} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{150} : \sqrt{6} = \sqrt{150 : 6} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{0{,}24} : \sqrt{0{,}06} = \sqrt{0{,}24 : 0{,}06} = \sqrt{4} = 2$

$\frac{\sqrt{115{,}2}}{\sqrt{7{,}2}} = \sqrt{\frac{115{,}2}{7{,}2}} = \sqrt{16} = 4$

Wurzelreduktion

Häufig können Wurzelterme nicht so umgeformt werden, dass das Wurzelzeichen wegfällt.

Zerlegt man aber den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in ein *Produkt*, kann *von einzelnen Faktoren die Wurzel gezogen werden*.

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen wird dadurch *reduziert* (verkleinert).
Sie sollte letztendlich möglichst klein sein!

Dieses Vorgehen nennt man *Wurzelreduktion* !

Beispiele:

1 $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2}$

2 $\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3}$

3 $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x \cdot \sqrt{x}$

4 $\sqrt{108x^3} = \sqrt{36x^2 \cdot 3x} = \sqrt{36x^2} \cdot \sqrt{3x} = 6x \cdot \sqrt{3x}$

5 $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

6 $\sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{32}} = \frac{3}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{3}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{2}}$

7 $\sqrt{\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$

8 $\sqrt{\frac{2a^3}{25}} = \frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot 2a}}{5} = \frac{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2a}}{5} = \frac{a \cdot \sqrt{2a}}{5}$

9 $\sqrt{\frac{18x^5}{75y}} = \frac{\sqrt{18x^5}}{\sqrt{75y}} = \frac{\sqrt{9x^4 \cdot 2x}}{\sqrt{25 \cdot 3y}} = \frac{\sqrt{9x^4} \cdot \sqrt{2x}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{3y}} = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{2x}}{5 \cdot \sqrt{3y}}$