Terme mit einer Variable umformen

Der Flächeninhalt der u-förmigen Figur soll bestimmt werden.
Dafür sind fünf Terme vorgeschlagen.

Welche Terme beschreiben den Flächeninhalt der Figur richtig?

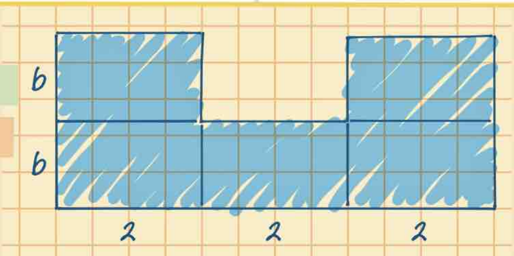
A $5 \cdot (b \cdot 2)$

B $b \cdot 2 + b \cdot 2 + 3 \cdot (b \cdot 2)$

C $b \cdot 2 + b \cdot 6 + b \cdot 2$

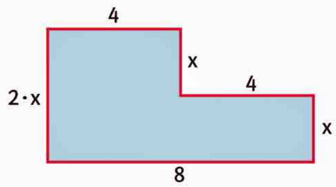
D $6 \cdot (b + b) - 2 \cdot b$

E $6 \cdot (2 \cdot b)$



Im Folgenden wird gezeigt, wie man mit Termen rechnen kann, die außer Zahlen auch Variablen enthalten.

Den Umfang des nebenstehenden Flächenstücks kann man auf verschiedene Arten berechnen. Die Variable x beschreibt hier eine unbekannte Streckenlänge.
Möglichkeit 1: $2 \cdot x + 4 + x + 4 + x + 8$
Möglichkeit 2: $2 \cdot (2 \cdot x) + 2 \cdot 8$



Wählt man $x = 3$, erhält man für den Umfang nach den Möglichkeiten 1 bzw. 2:
$2 \cdot 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 8 = 28$ bzw. $2 \cdot (2 \cdot 3) + 2 \cdot 8 = 28$.
Mit beiden Termen erhält man für $x = 3$ also denselben Wert 28.

Man kann zeigen, dass beide Terme für beliebige Werte von x jeweils denselben Wert liefern. Dazu reicht es nicht, einige Zahlen einzusetzen. Man muss die **Gleichwertigkeit** beider Terme durch Umformungen zeigen. Da für die Variable Zahlen eingesetzt werden, kann man die Terme nach den Rechengesetzen und Rechenregeln für rationale Zahlen umformen:

Erinnerung:
Rechengesetze:
Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz.
Rechenregeln:
1. Klammern zuerst
2. Potenzen vor Punkt- und Strichrechnung
3. Punkt- vor Strichrechnung

Möglichkeit 1:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot x + 4 + x + 4 + x + 8 \\ = \; & 2 \cdot x + x + x + 4 + 4 + 8 \\ = \; & 4 \cdot x + 16 \end{aligned}$$

Möglichkeit 2:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (2 \cdot x) + 2 \cdot 8 \\ = \; & (2 \cdot 2) \cdot x + 2 \cdot 8 \\ = \; & 4 \cdot x + 16 \end{aligned}$$

Beide Umformungen liefern denselben Term. Die ursprünglichen Terme sind demnach **gleichwertig**, d.h. **äquivalent**.
Also gilt: $2 \cdot x + 4 + x + 4 + x + 8 = 2 \cdot (2 \cdot x) + 2 \cdot 8$.
Um zu zeigen, dass Terme nicht äquivalent sind, genügt die Angabe eines einzigen Gegenbeispiels (also eine Variableneinsetzung), die die Nicht-Äquivalenz beweist.

aequus (lat.): gleich
valens (lat.): wertig

Umformen von Termen mit einer Variable
Wenn man einen Term mit einer Variable mithilfe der bekannten Rechengesetze für rationale Zahlen umformt, erhält man einen **gleichwertigen Term**.

Beim Umformen von Termen mit einer Variable kann man so vorgehen:
1. Man ordnet die Summanden mit und die ohne Variable.
2. Man fasst die Summanden mit Variable und die Zahlen jeweils zusammen.

z. B.:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot x + 4 + 2 \cdot x + 1 \\ = \; & 3 \cdot x + 2 \cdot x + 4 + 1 \\ = \; & 5 \cdot x + 5 \end{aligned}$$

Man nutzt Umformungen, um gleichwertige Terme zu erkennen oder einen möglichst einfachen Term zu erhalten.

Im Folgenden sind einige Rechengesetze und Rechenregeln zusammengefasst und anhand einer Beispielrechnung mit Variable vorgeführt.

Distributivgesetz
Ausmultiplizieren:
$4 \cdot (3 \cdot x - 5) = 4 \cdot 3 \cdot x - 4 \cdot 5$

Ausklammern:
$12 \cdot x - 24 = 12 \cdot x - 12 \cdot 2 = 12 \cdot (x - 2)$ oder $4 \cdot p - 4 = 4 \cdot p - 4 \cdot 1 = 4 \cdot (p - 1)$

Divisionen mit dem Klammerterm als Dividend
Wenn man eine Division wie $(6 \cdot x + 8) : 2$ als Multiplikation mit einem Bruch schreibt, kann man das Distributivgesetz anwenden: $(6 \cdot x + 8) : 2 = (6 \cdot x + 8) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot x + 4$

Minusklammerregel
Wie bei den rationalen Zahlen gilt die Minusklammerregel:
$3 - (-4 \cdot x + 5) = 3 + 4 \cdot x - 5 = 4 \cdot x - 2$ oder $-(-4 \cdot x + 5) = 4 \cdot x - 5$

Beispiel 1 Terme vereinfachen

Vereinfache den angegebenen Term so weit wie möglich.
a) $a + a + 6 \cdot a + 6 + a + 12$
b) $37 \cdot t + 45 + 26 \cdot t + 7 \cdot t$
c) $3 \cdot v \cdot 5 - 3 \cdot (4 + 2 \cdot v)$

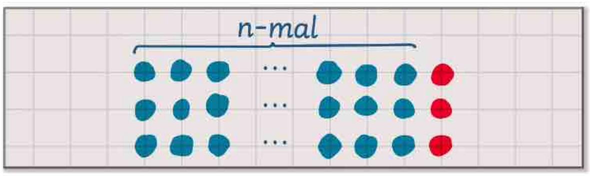
Lösung

a) 1. *Ordnen:* $a + a + 6 \cdot a + 6 + a + 12 = a + a + 6 \cdot a + a + 6 + 12$
2. *Zusammenfassen:* $= 9 \cdot a + 18$

b) 1. *Ordnen:* $37 \cdot t + 45 + 26 \cdot t + 7 \cdot t = 37 \cdot t + 26 \cdot t + 7 \cdot t + 45$
2. *Zusammenfassen:* $= 70 \cdot t + 45$

c) 1. *Erstes Vereinfachen* $3 \cdot v \cdot 5 - 3 \cdot (4 + 2 \cdot v) = 3 \cdot 5 \cdot v + (-3) \cdot (4 + 2 \cdot v)$
2. *Klammern auflösen/ Ausmultiplizieren* $= 3 \cdot 5 \cdot v + (-3) \cdot 4 + (-3) \cdot 2 \cdot v$
$= 15 \cdot v - 12 - 6 \cdot v$
3. *Ordnen* $= 15 \cdot v - 6 \cdot v - 12$
4. *Zusammenfassen* $= 9 \cdot v - 12$

Beispiel 2 Gleichwertigkeit begründen

a) Überprüfe, ob die Terme $x + 4 + x$ und $4 \cdot x + 2$ gleichwertig sind.
b) 

Begründe, dass die Terme $3 \cdot (n + 1)$ und $3 \cdot n + 3$ zur Berechnung der Anzahl aller Punkte verwendet werden können und zeige, dass die Terme gleichwertig sind.

Lösung

a) 1. *Möglichkeit: Umformen*
$x + 4 + x = x + x + 4 = 2 \cdot x + 4$
$2 \cdot x + 4 \neq 4 \cdot x + 2$
Da man den Term $x + 4 + x$ durch Umformen nicht in $4 \cdot x + 2$ überführen kann, sind sie nicht gleichwertig.

2. *Möglichkeit: Gegenbeispiel finden*
$x = 1$ liefert $1 + 4 + 1 = 6$ bzw. $4 \cdot 1 + 2 = 6$
$x = 2$ liefert $2 + 4 + 2 = 8$ bzw. $4 \cdot 2 + 2 = 10$
Die Terme liefern für $x = 2$ verschiedene Werte, sind also nicht gleichwertig.

b) In einer Reihe sind $n + 1$ Punkte. Davon gibt es 3 Reihen. Also gibt es $3 \cdot (n + 1)$ Punkte. Es gibt drei Reihen mit je n blauen Punkten (also $3 \cdot n$) und zusätzlich drei einzelne rote Punkte, also insgesamt $3 \cdot n + 3$ Punkte.
$3 \cdot (n + 1) = 3 \cdot n + 3 \cdot 1 = 3 \cdot n + 3$. Also sind die Terme gleichwertig.