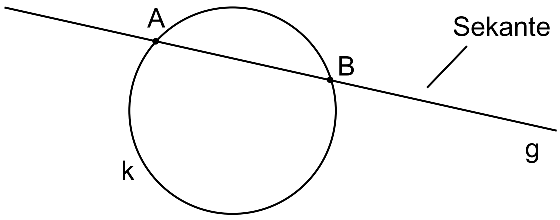
G Dreiecke und Kreise

1 Kreis und Gerade

Eine *Sekante* ist eine *Gerade*, die einen *Kreis in zwei Punkten schneidet*.

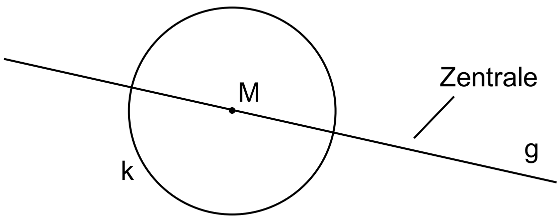
Beispiel: $g \cap k = \{A, B\}$



Die Strecke $\overline{AB}$ heisst *Sehne*.

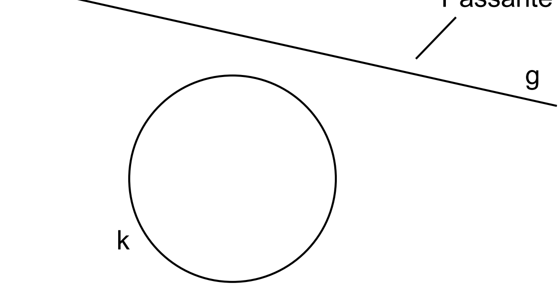
Eine *Zentrale* ist eine *Gerade*, die durch den *Mittelpunkt eines Kreises verläuft*.

Beispiel:



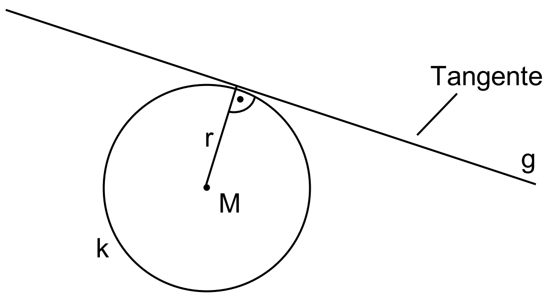
Eine *Passante* ist eine *Gerade*, die mit einem *Kreis keinen Punkt gemeinsam hat*.

Beispiel: $g \cap k = \{\ \}$



Eine *__Tangente__* ist eine *__Gerade__*, die einen *__Kreis in einem Punkt berührt__*.
Diesen Punkt nennt man *__Berührpunkt__*.
__Eine Tangente steht im Berührpunkt immer senkrecht zum Kreisradius__.

__Beispiel__:



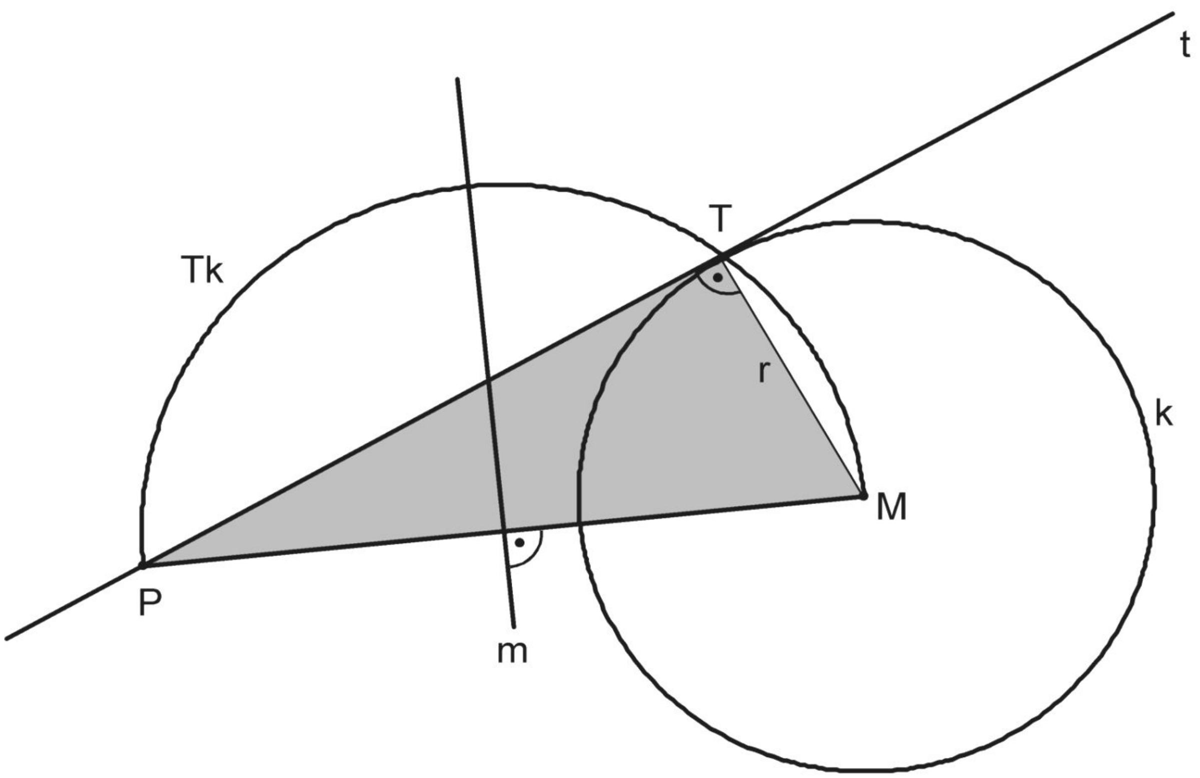
__Konstruktion der Tangente durch einen Punkt P an einen Kreis k__

__Konstruktionsbericht__:

1. Thaleskreis (Tk) über $\overline{PM}$

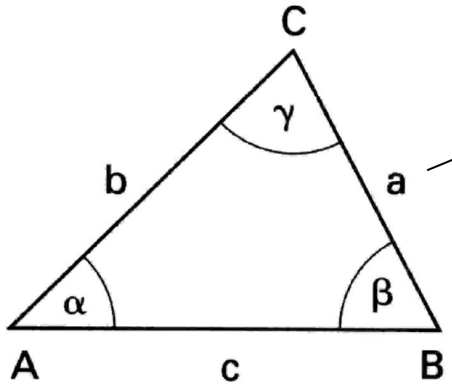
2. $Tk \cap k = \{ T \}$

3. $PT = t$



2 Seiten und Winkel am Dreieck

Beschriftung eines Dreiecks



Seite a liegt *gegenüber* des Eckpunktes A , etc.

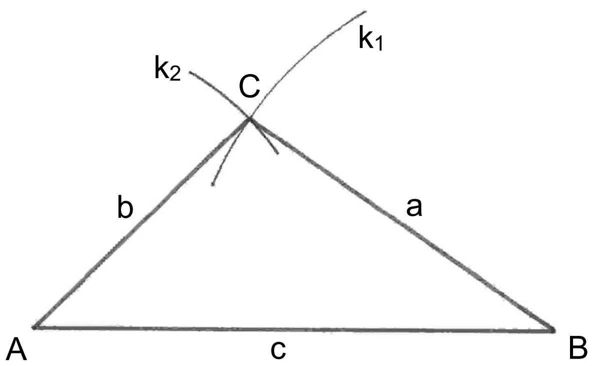
Beschriftung der Eckpunkte, Seiten und Winkel erfolgt im *Gegenuhrzeigersinn*!

Dreieckskonstruktionen aus Seiten und Winkeln

Dreiecke lassen sich *eindeutig konstruieren*, wenn einer der vier folgenden Fälle gegeben ist:

1 Gegeben sind alle *drei Seiten* (sss).

Beispiel: $a = 5cm$, $b = 4cm$, $c = 7cm$

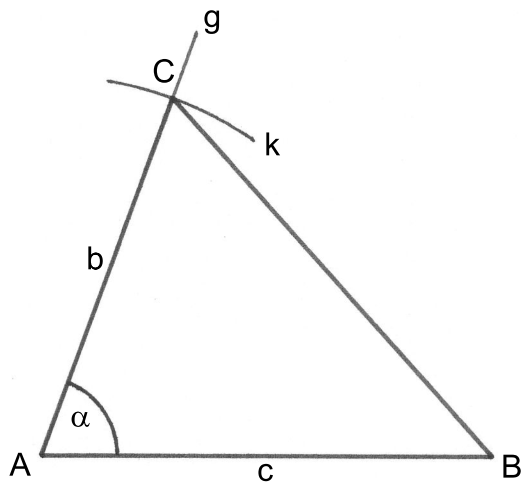


Konstruktionsbericht :

1. $c = \overline{AB}$
2. $k_1 (B, a) \cap k_2 (A, b) = \{ C \}$

2 Gegeben sind *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel* (sws).

Beispiel: $c = 6cm$, $b = 5cm$, $\alpha = 70°$

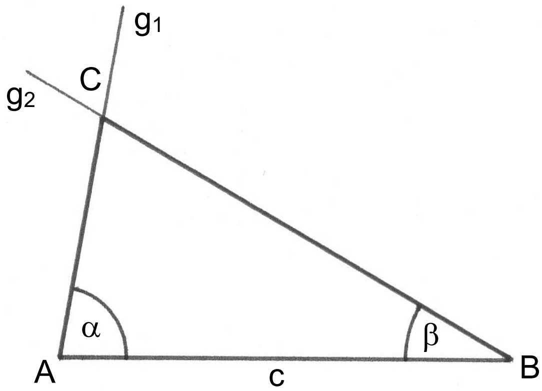


Konstruktionsbericht :

1. $c = \overline{AB}$
2. $< \alpha$ in A an c $\rightarrow$ g
3. $k(A, b) \cap g = \{ C \}$

3 Gegeben sind *eine Seite und die beiden anliegenden Winkel* (wsw).

Beispiel: $c = 6cm$, $\alpha = 80°$, $\beta = 30°$

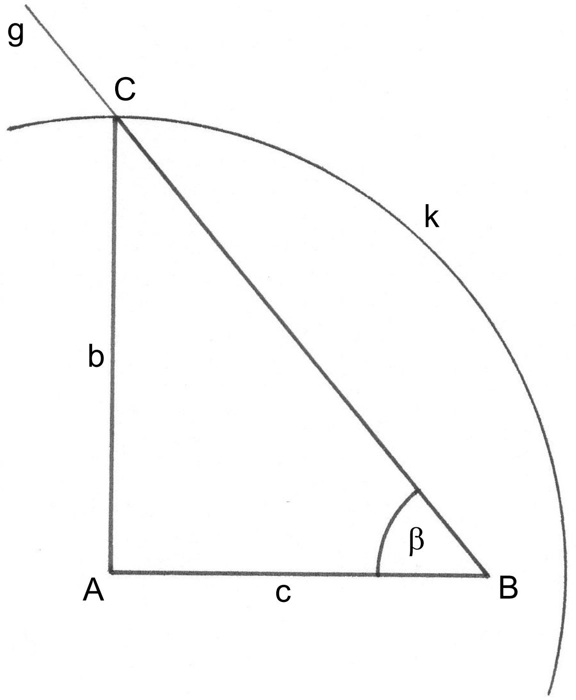


Konstruktionsbericht :

1. $c = \overline{AB}$
2. $< \alpha$ in A an c $\rightarrow$ g_1
3. $< \beta$ in B an c $\rightarrow$ g_2
4. $g_1 \cap g_2 = \{ C \}$

4 Gegeben sind *zwei Seiten und der Winkel, der der grösseren Seite gegenüber liegt* (Ssw).

Beispiel: $c = 5cm$, $b = 6cm$, $\beta = 50°$



Konstruktionsbericht :

1. $c = \overline{AB}$
2. $< \beta$ in B an c $\rightarrow$ g
3. $k(A, b) \cap g = \{C\}$

Kongruenzsätze

Kongruenzsätze geben *Bedingungen* an, dass *geometrische Figuren kongruent sind*. Besonders wichtig sind die *Kongruenzsätze für Dreiecke*.

1. Kongruenzsatz (sss) :	Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen der drei Seiten übereinstimmen.
2. Kongruenzsatz (sws) :	Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in der Grösse des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.
3. Kongruenzsatz (wsw) :	Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und der Grösse der der Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen.
4. Kongruenzsatz (Ssw) :	Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und der Grösse des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.

3 Dreieckskonstruktionen mit Höhen

Die Höhen im Dreieck

Die *Höhen im Dreieck* sind Geraden, welche durch einen *Eckpunkt* verlaufen und *rechtwinklig zur gegenüberliegenden Seite* stehen.

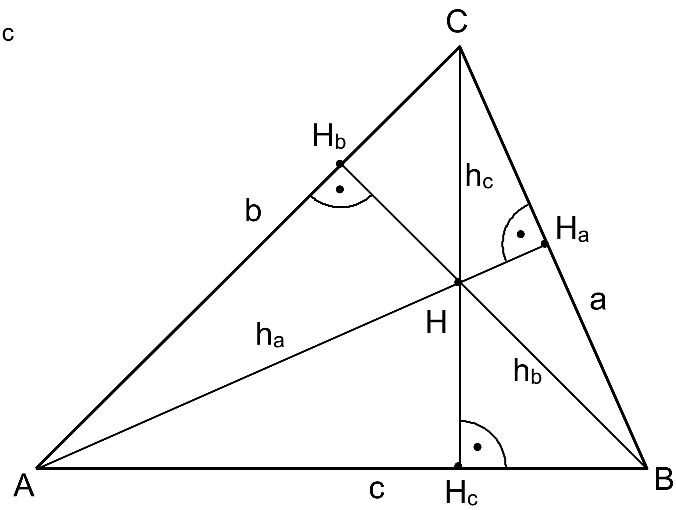
Jedes Dreieck besitzt *drei Höhen* : h_a , h_b und h_c .

Häufig wird der Begriff *Höhe* für die *Strecken* $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$ und $\overline{CH_c}$ verwendet.
H_a , H_b und H_c sind die *Höhenfusspunkte*.

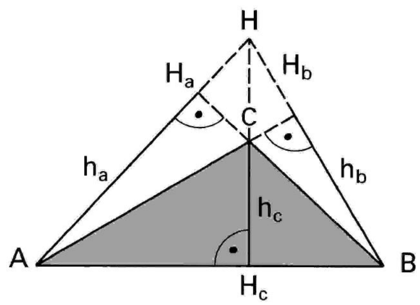
Die Bezeichnungen h_a , h_b und h_c stehen dann auch für die Strecken bzw. deren Längen.

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich immer in einem Punkt, dem sogenannten *Höhenschnittpunkt H*.

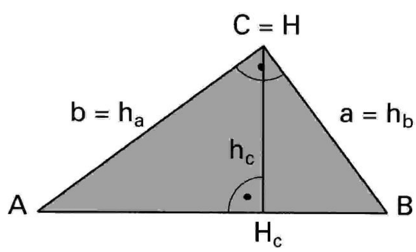
Der Höhenschnittpunkt H liegt bei *spitzwinkligen Dreiecken innerhalb des Dreiecks*.



Bei *stumpfwinkligen Dreiecken* liegt der Höhenschnittpunkt H *ausserhalb des Dreiecks*.



Bei *rechtwinkligen Dreiecken* fällt der Höhenschnittpunkt H mit dem *Eckpunkt* zusammen, wo der *rechte Winkel* liegt.

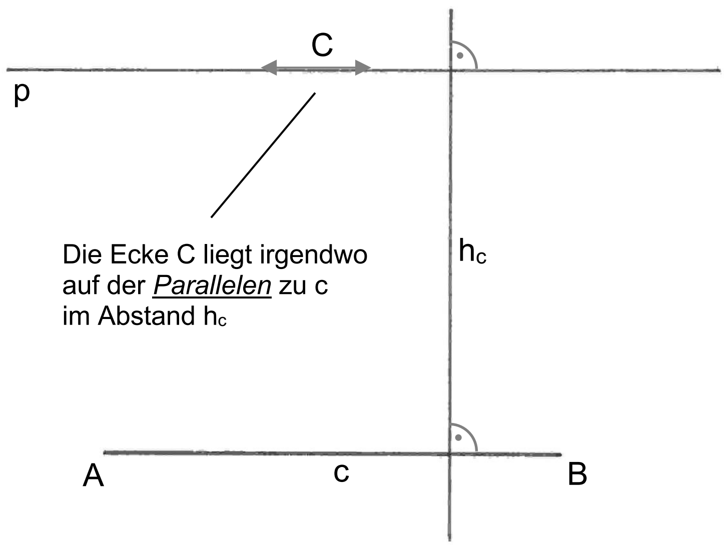


Dreieckskonstruktionen mit Höhen

Werden für Dreieckskonstruktionen *Höhen* vorgegeben, so sind meistens *Parallelen* als Ortslinien von Bedeutung.

Beispiel :

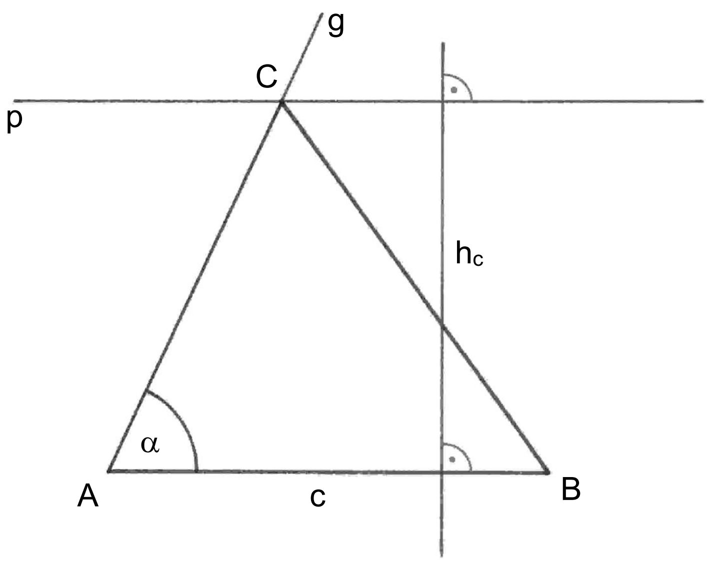
Konstruiere Dreiecke, für welche gilt : $c = 6cm$, $h_c = 5cm$.



Konstruktionsbericht :

1. $c = \overline{AB}$
2. $p \parallel c$ im Abstand h_c
3. $C \in p$

Konstruiere ein Dreieck, für welches gilt : $c = 6cm$, $h_c = 5cm$ und $\alpha = 65°$.



Konstruktionsbericht :

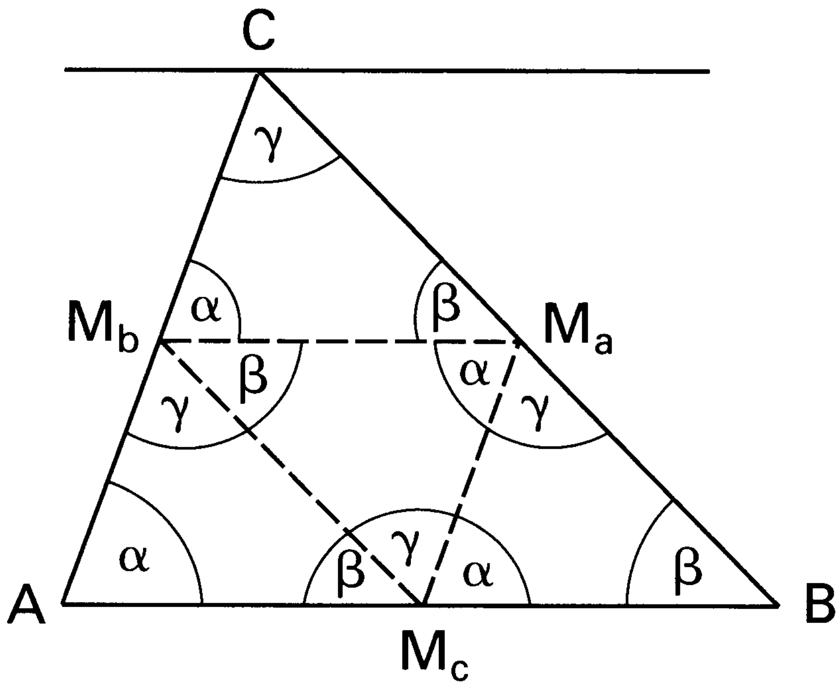
1. $c = \overline{AB}$
2. $p \parallel c$ im Abstand h_c
3. $< \alpha$ in A an c $\rightarrow$ g
4. $g \cap p = \{C\}$

Das Mittendreieck

Verbindet man in einem Dreieck ABC die *drei Seitenmitten* M_a, M_b und M_c miteinander, entsteht das sogenannte *Mittendreieck*.

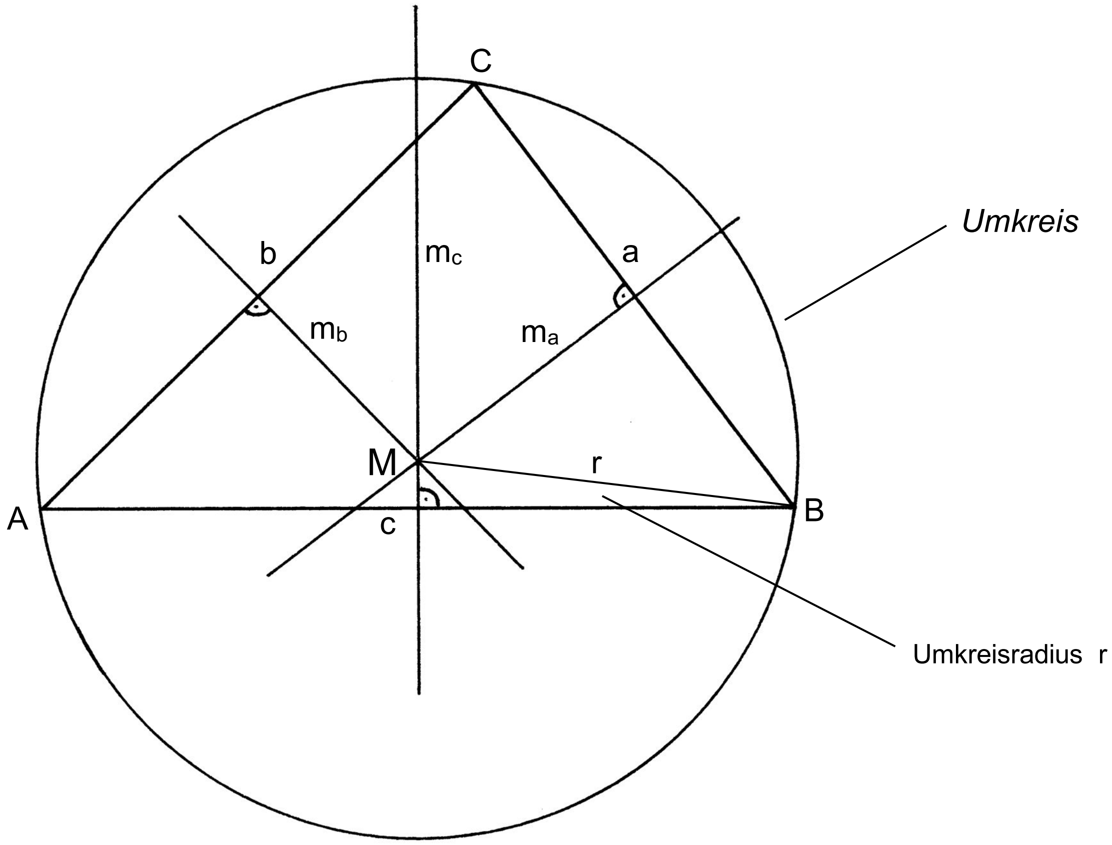
Es gelten folgende Beziehungen:

- Die *Seiten des Dreiecks ABC* sind *parallel* zu den *Seiten des Mittendreiecks*.
- Die *Seiten des Dreiecks ABC* sind *doppelt so lang* wie die *Seiten des Mittendreiecks*.
- Das *Mittendreieck* und das *Dreieck ABC* sind *ähnlich* (form-, aber nicht flächengleich).
- Das *Mittendreieck* und die *drei Teildreiecke* sind *kongruent* (form- und flächengleich).
- Der *Flächeninhalt des Dreiecks ABC* ist *viermal grösser* als der *Flächeninhalt des Mittendreiecks*.



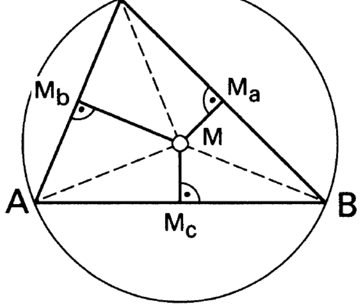
4 Dreieck und Kreis

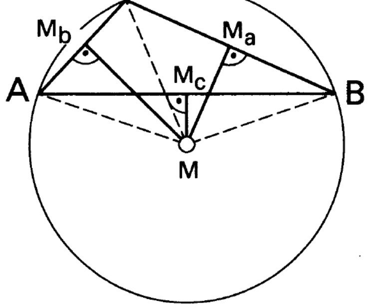
Die *Mittelsenkrechten* m_a, m_b und m_c eines Dreiecks schneiden sich immer in *einem* Punkt, dem sogenannten *Umkreismittelpunkt M*.

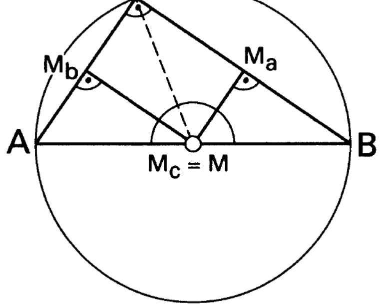


Die Lage des Umkreismittelpunktes ist durch die Form des Dreiecks vorgegeben:

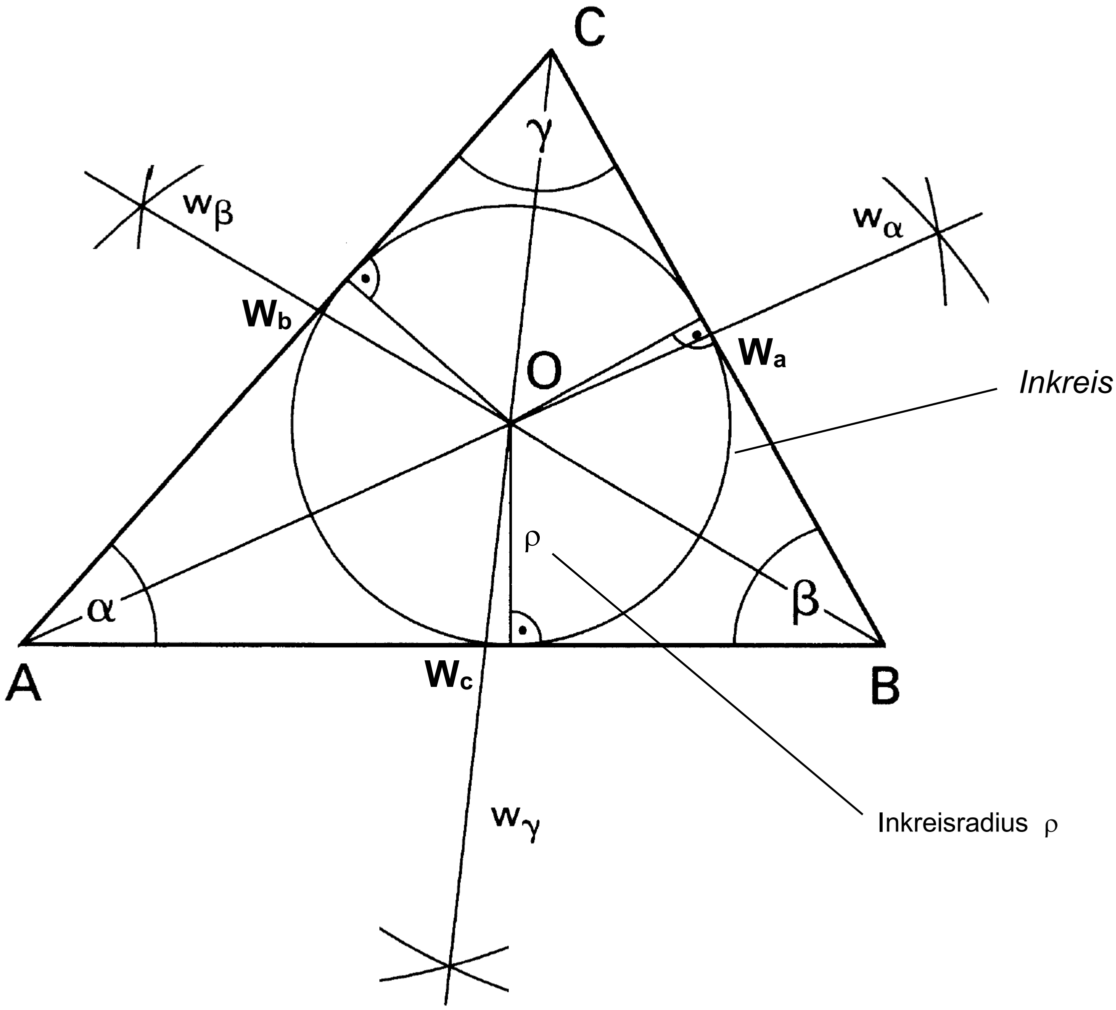
- Bei *spitzwinkligen Dreiecken* liegt der Umkreismittelpunkt *innerhalb des Dreiecks*.
- Bei *stumpfwinkligen Dreiecken* liegt der Umkreismittelpunkt *ausserhalb des Dreiecks*.
- Bei *rechtwinkligen Dreiecken* liegt der Umkreismittelpunkt *in der Mitte der Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt* (Thaleskreis !).







Die *Winkelhalbierenden* w_α, w_β und w_γ eines Dreiecks schneiden sich immer in *einem* Punkt, dem sogenannten *Inkreismittelpunkt O*.



Beachte:	Die Punkte W_a, W_b und W_c kennzeichnen die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ mit den Dreiecksseiten a, b und c !
	Es sind *nicht* die Inkreisberührpunkte!

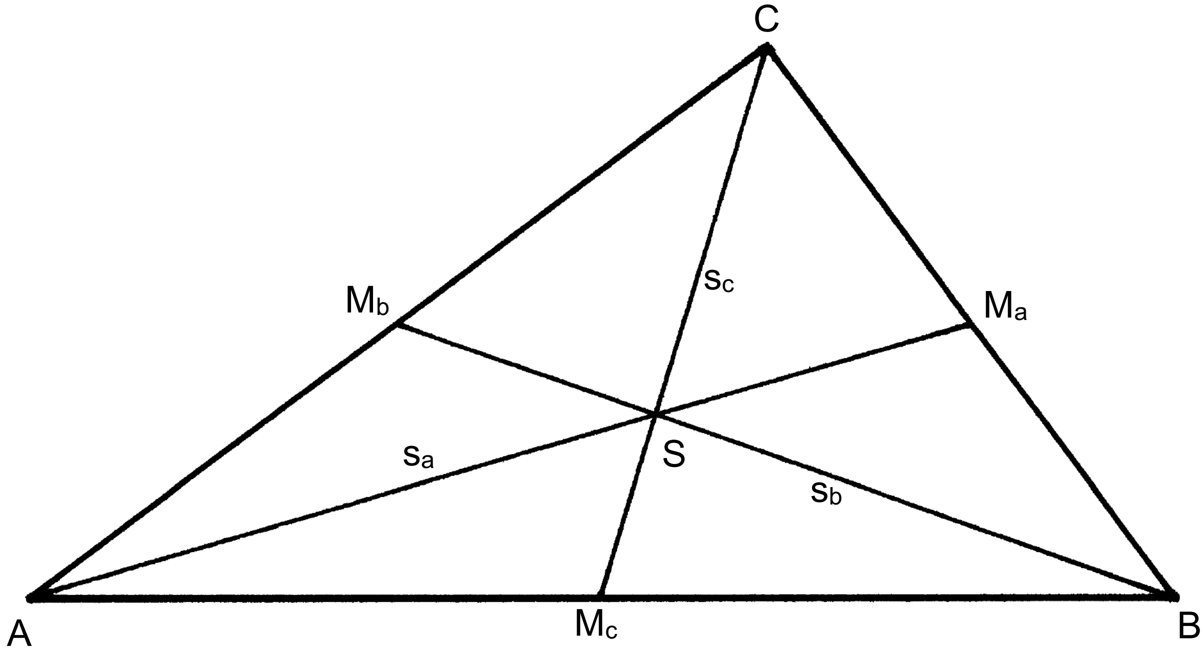
5 Schwerelinien im Dreieck

Geraden, die in einem Dreieck durch die *Mitte einer Seite* und den *gegenüberliegenden Eckpunkt* führen, nennt man *Seitenhalbierende* oder *Schwerelinien* s_a, s_b und s_c.

Meistens wird der Begriff ‚Seitenhalbierende' für die *Strecken* $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ und $\overline{CM_c}$ verwendet.
Die Bezeichnungen s_a, s_b und s_c stehen dann für die Strecken bzw. deren Längen.

Die drei Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c eines Dreiecks schneiden sich immer in einem Punkt, dem sogenannten *Schwerpunkt S*.

Der Schwerpunkt S teilt jede der drei Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c im *Verhältnis 2 : 1*. Die Teilstrecke von S zum Eckpunkt ist immer doppelt so lang, wie diejenige von S zum Mittelpunkt der Dreiecksseite.



6 Vom Dreieck zum Viereck

Verbindet man vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, durch einen geschlossenen Streckenzug ohne Überschneidungen, so entsteht ein *Viereck*.

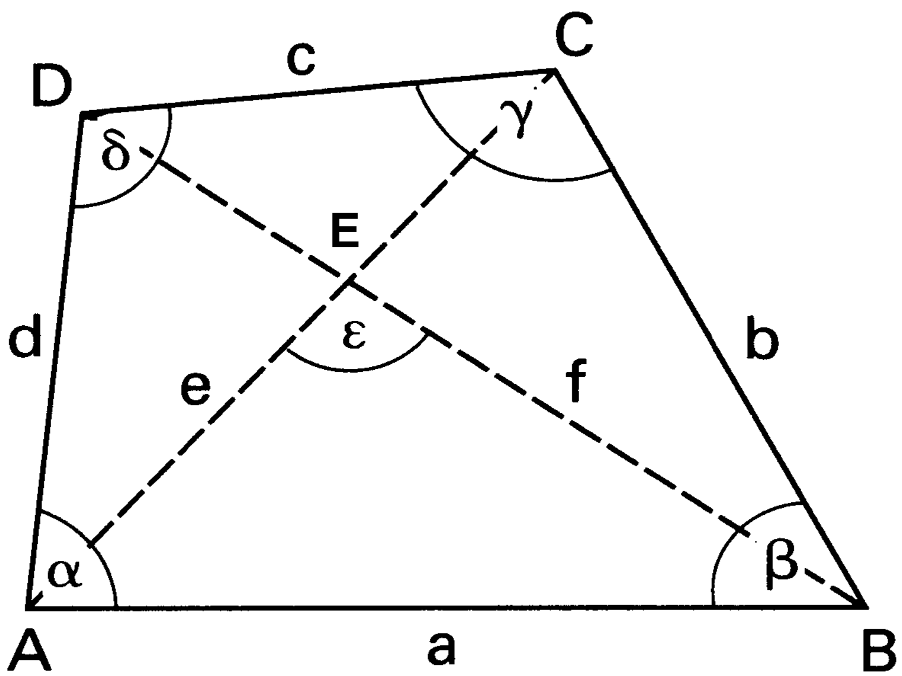
In Bezug auf die *Beschriftung* eines Viereckes gilt:

- Die *Ecken* werden wie bei allen ebenen Vielecken mit grossen Buchstaben A, B, C und D bezeichnet.

- Die *Seiten* erhalten die Namen der zugehörigen Strecken oder werden mit kleinen Buchstaben benannt.
  Dabei gilt für alle Vierecke - *im Gegensatz zum Dreieck*:
  $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{AD}$.

- Die *Winkel* werden durch kleine griechische Buchstaben gekennzeichnet:
  α bei A, ß bei B, γ bei C und δ bei D.

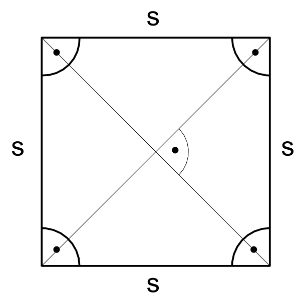
- Jedes Viereck hat zwei *Diagonalen* (Strecke zwischen zwei nicht benachbarten Punkten). Es gilt für jedes Viereck: $e = \overline{AC}$, $f = \overline{BD}$.
  Der *Schnittpunkt der beiden Diagonalen* wird mit E bezeichnet.



Eigenschaften spezieller Vierecke

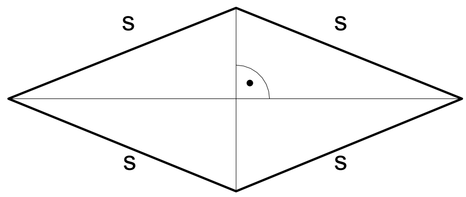
Quadrat:

- Alle vier Seiten sind gleich lang.
- Alle vier Winkel sind rechte Winkel (90°).
- Die Diagonalen stehen senkrecht zueinander.
- Die Diagonalen sind gleich lang.
- Die Diagonalen halbieren einander.



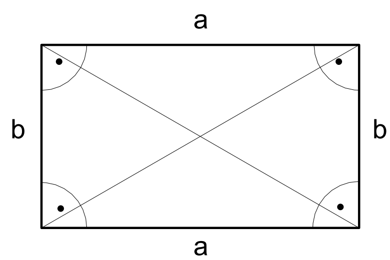
Rhombus:

- Alle vier Seiten sind gleich lang.
- Die Gegenseiten sind parallel.
- Die Diagonalen stehen senkrecht zueinander.
- Die Diagonalen halbieren einander.



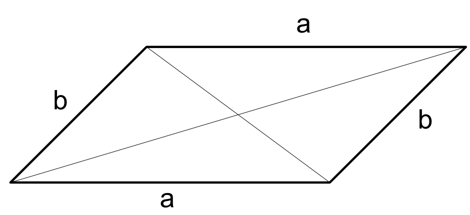
Rechteck:

- Die Gegenseiten sind gleich lang.
- Alle vier Winkel sind rechte Winkel.
- Die Diagonalen sind gleich lang.
- Die Diagonalen halbieren einander.



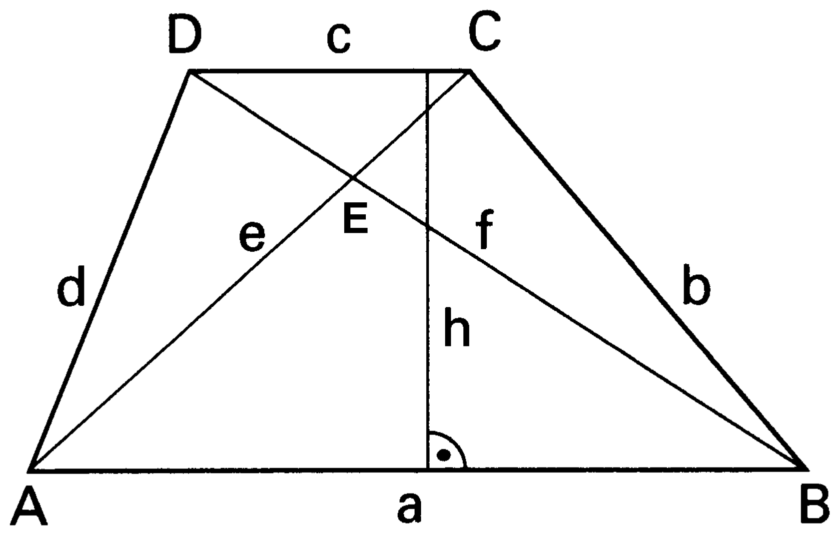
Parallelogramm:

- Die Gegenseiten sind gleich lang.
- Die Gegenseiten sind parallel.
- Die Diagonalen halbieren einander.



<u>Das Trapez</u>

Ein *<u>Trapez</u>* hat stets *<u>zwei parallele Seiten</u>*.



Für die *<u>Fläche eines Trapezes</u>* gilt folgende Formel:

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h = m \cdot h$$