F Der Satz des Pythagoras

1 Die Quadratwurzel

Die *Quadratwurzel* aus der Zahl a (man schreibt: $\sqrt{a}$) ist diejenige positive Zahl b, die mit sich selbst multipliziert wieder a ergibt.

Es gilt also:

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \rightarrow \quad b \cdot b = a}$$

Die Zahl unter dem Wurzelzeichnen nennt man *Radikand*.

Beispiele:

$\sqrt{4} = 2 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 2 = 4$

$\sqrt{9} = 3 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 3 = 9$

$\sqrt{36} = 6 \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 6 = 36$

$\sqrt{x^2} = x \quad \rightarrow \quad x \cdot x = x^2$

$\sqrt{25s^2} = 5s \quad \rightarrow \quad 5s \cdot 5s = 25s^2$

$\sqrt{z^{10}} = z^5 \quad \rightarrow \quad z^5 \cdot z^5 = z^{10}$

$\sqrt{49y^{12}} = 7y^6 \quad \rightarrow \quad 7y^6 \cdot 7y^6 = 49y^{12}$

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

$\sqrt{0{,}01k^6} = 0{,}1k^3 \quad \rightarrow \quad 0{,}1k^3 \cdot 0{,}1k^3 = 0{,}01k^6$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{4a^2}{25}} = \frac{2a}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{2a}{5} \cdot \frac{2a}{5} = \frac{4a^2}{25}$$

$$\sqrt{\frac{m^8}{100}} = \frac{m^4}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{m^4}{10} \cdot \frac{m^4}{10} = \frac{m^8}{100}$$

Rationale und irrationale Zahlen

Gemeine Brüche lassen sich immer in Dezimalbrüche verwandeln, doch entstehen *verschiedene Formen*. Es gibt drei Fälle:

1 Der entstehende Dezimalbruch ist *endlich* (bricht ab).

Beispiel: $\frac{1}{8} = 0{,}125$

2 Der entstehende Dezimalbruch ist *unendlich* (bricht nicht ab) und *periodisch* (sich regelmässig wiederholende Ziffernfolge).

Beispiele: $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$, $\frac{1}{11} = 0{,}090909... = 0{,}\overline{09}$

3 Der entstehende Dezimalbruch ist *unendlich* und *erst von einer gewissen Stelle an periodisch*.

Beispiele: $\frac{1}{6} = 0{,}1666... = 0{,}1\overline{6}$, $\frac{1}{12} = 0{,}08333... = 0{,}08\overline{3}$

Dezimalbrüche die durch Umwandlung eines gemeinen Bruches entstanden sind gehören zu den *rationalen Zahlen* (Bruchzahlen).

Es gibt nun aber auch Dezimalbrüche, die *nicht abbrechend* und *nicht periodisch* sind!
Diese Dezimalbrüche entstehen sehr häufig bei der Berechnung von Quadratwurzeln.

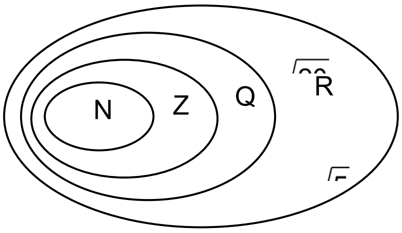
Beispiele: $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964091736687312 8 ...$

$\sqrt{20} = 4{,}4721359549995793928183473374625 5 ...$

$\rightarrow$ Die entstehenden Dezimalbrüche sind weder abbrechend noch periodisch!

Dezimalbrüche die nicht abbrechend und nicht periodisch sind gehören zu den sogenannten *irrationalen Zahlen*!

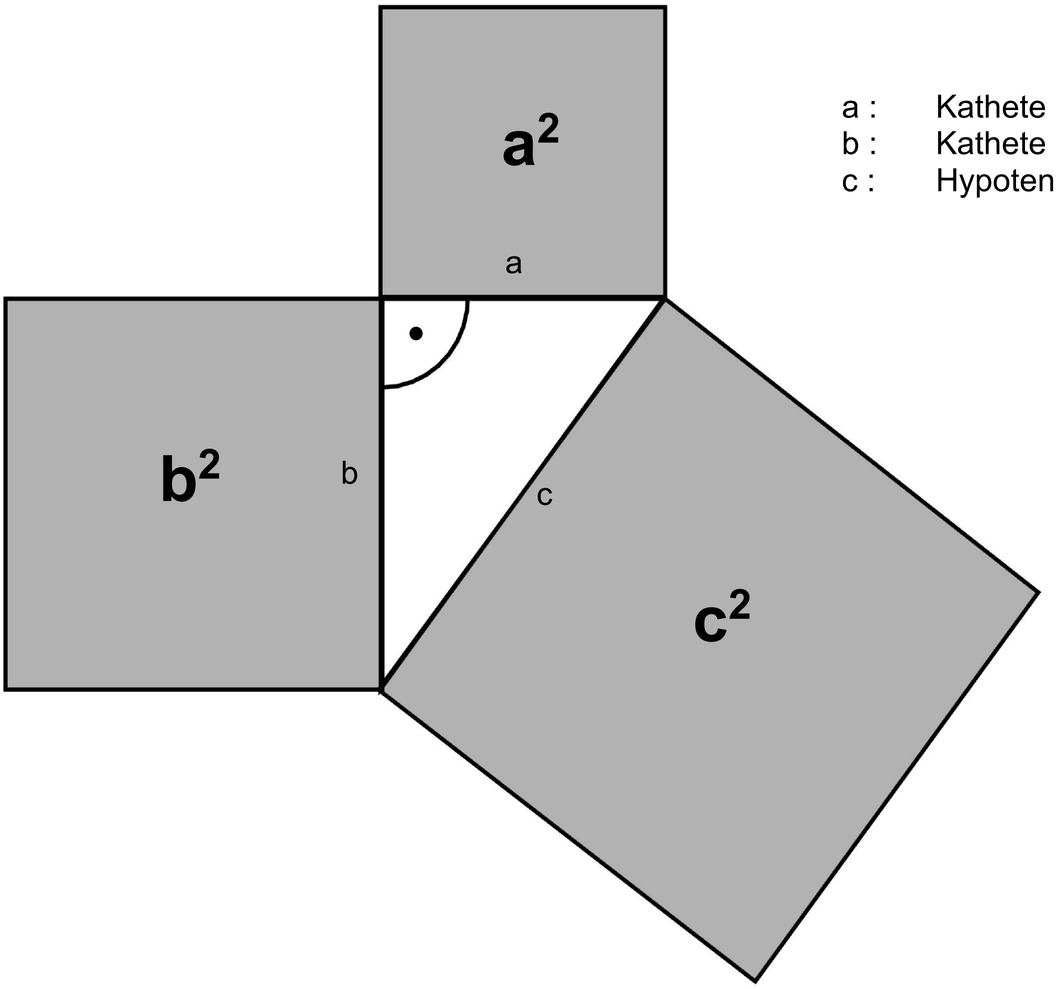
Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die *Menge der reelen Zahlen R* .



2 Der Satz des Pythagoras

Dieser berühmte Lehrsatz der Mathematik soll der Geschichtsschreibung nach von *Pythagoras von Samos* (580 – 500 v.Chr.) entdeckt worden sein.

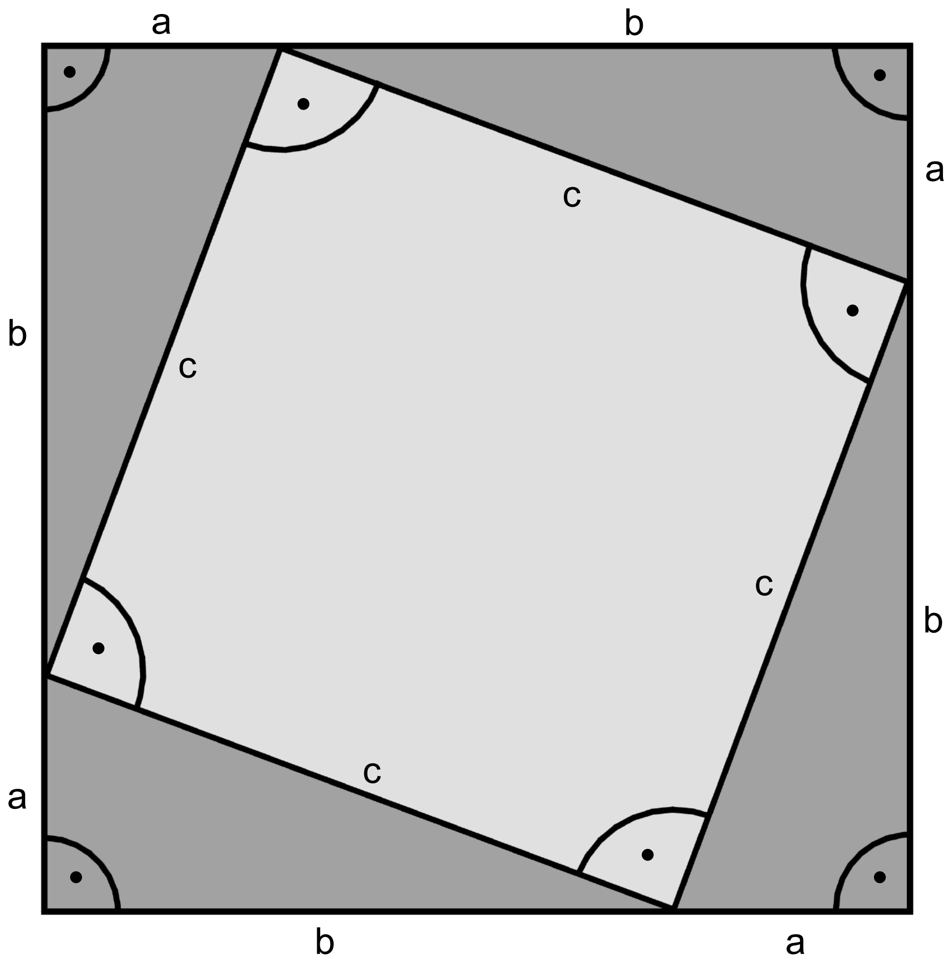
Der Satz besagt, dass in einem *rechtwinkligen Dreieck* die *Summe der beiden Katheten-Quadrate* gleich dem *Quadrat der Hypotenuse* ist.



a : Kathete
b : Kathete
c : Hypotenuse

Es gilt also: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Beweis:



Die Fläche des grossen Quadrates lässt sich auf zwei Arten berechnen:

1 $A_1 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$= \underline{a^2 + 2ab + b^2}$

2 A_2 = kleines Quadrat + 4 Dreiecke

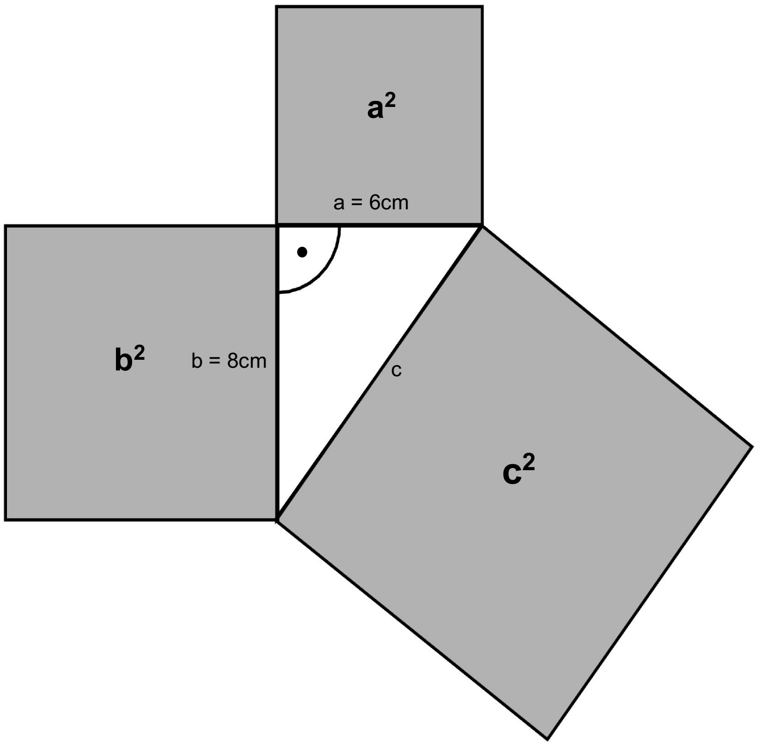
$= c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \underline{c^2 + 2ab}$

3 $A_1 = A_2$

$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$

$\underline{a^2 + b^2 = c^2}$

Beispiel: „Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Längen der beiden Katheten a und b. Es sei a=6cm und b=8cm. Berechne die Länge der Hypotenuse c.“



Gemäss Satz des Pythagoras gilt:

- $c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow \quad c^2 = (6cm)^2 + (8cm)^2$

$= 36cm^2 + 64cm^2$

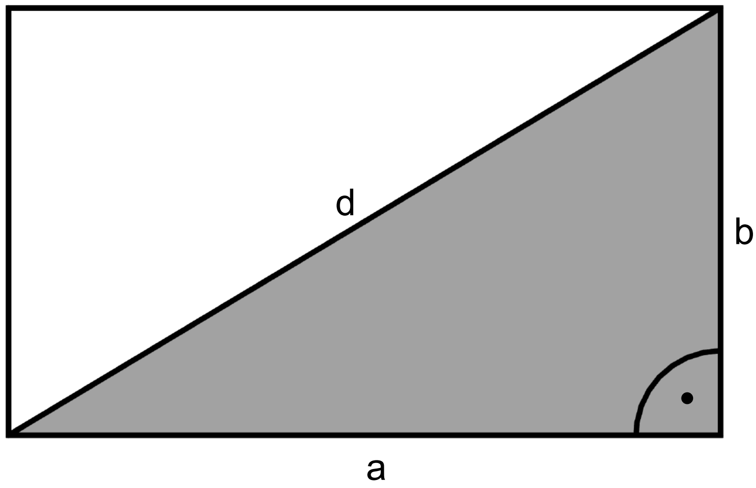
$= 100cm^2$

$\rightarrow \quad c = \sqrt{100cm^2} = \underline{\underline{10cm}}$

Erste Anwendungen

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras kann zum Beispiel in einem *Rechteck* aus den Seitenlängen die *Diagonale* , oder in einem *gleichschenkligen Dreieck* aus den Seitenlängen die *Höhe* berechnet werden.

Beispiel 1: „Berechne die Diagonale d eines Rechteckes mit a = 20cm und b = 15cm."



1 $$d^2 = a^2 + b^2$$

2 $$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + 15^2}$$

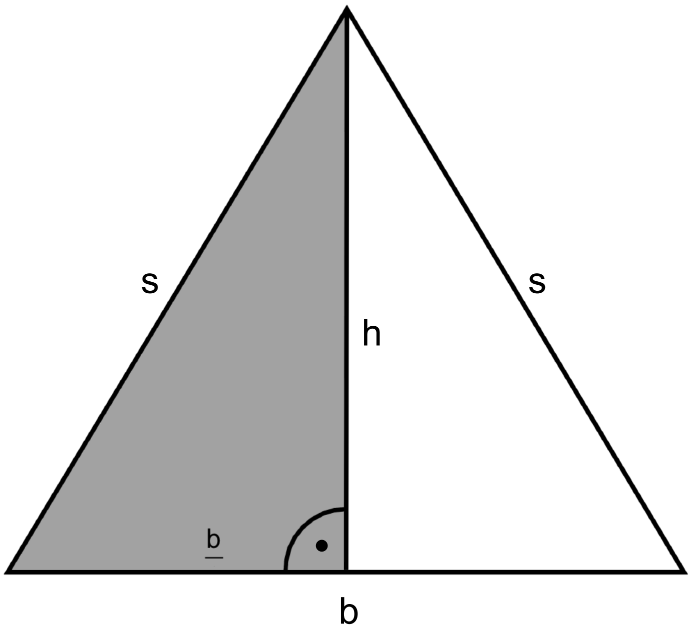
$$= \sqrt{400 + 225}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$= \underline{\underline{25\text{cm}}}$$

Achtung: Die Masseinheiten werden unter dem Wurzelzeichen nicht notiert !

Beispiel 2: „Berechne die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks mit $s = 10cm$ und $b = 12cm$.“



1 $$s^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$$

2 $$h^2 = s^2 - \frac{b^2}{4}$$

3 $$h = \sqrt{s^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$= \sqrt{10^2 - \frac{12^2}{4}}$$

$$= \sqrt{100 - \frac{144}{4}}$$

$$= \sqrt{100 - 36}$$

$$= \sqrt{64}$$

$$= \underline{\underline{8cm}}$$

3 Umformen von Wurzeltermen

Im Zusammenhang mit dem *Satz des Pythagoras* ist es in vielen Aufgaben wichtig, dass korrekt mit *Wurzeltermen* operiert werden kann.

Wurzelterme müssen so umgeformt werden können, dass das *Wurzelzeichen* entweder ganz *wegfällt* , oder der *Wurzelausdruck* zumindest *vereinfacht* wird.

Es gelten folgende Umformungsregeln:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{a:b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ *oder* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Beispiele:

1 $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$, denn: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

2 $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$, denn: $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$
$\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

3 $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$, denn: $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$
$\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$

4 $\sqrt{144:4} = \sqrt{144} : \sqrt{4}$, denn: $\sqrt{144:4} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt{144} : \sqrt{4} = 12 : 2 = 6$

Wurzelterme umformen

1 $10'000 = 10^4 \rightarrow \sqrt{10000} = \sqrt{10^4} = 10^2$

$1'000 = 10^3 \rightarrow \sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10 \cdot 10^2} = \sqrt{10} \cdot 10$

$100 = 10^2 \rightarrow \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$

$10 = 10^1 \rightarrow \sqrt{10} = \sqrt{10^1} = \sqrt{10}$

$1 = 10^0 \rightarrow \sqrt{1} = \sqrt{10^0} = 1$

2 $0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1} \rightarrow \sqrt{0{,}1} = \sqrt{10^{-1}}$

$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \rightarrow \sqrt{0{,}01} = \sqrt{10^{-2}} = 10^{-1} = 0{,}1$

$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \rightarrow \sqrt{0{,}001} = \sqrt{10^{-3}} =$

$\sqrt{10^{-1} \cdot 10^{-2}} =$

$\sqrt{10^{-1}} \cdot 10^{-1} = \sqrt{10^{-1}} \cdot 0{,}1$

$0{,}0001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \rightarrow \sqrt{0{,}0001} = \sqrt{10^{-4}} =$

$10^{-2} = 0{,}01$

3 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$

$\sqrt{9{,}8} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9{,}8 \cdot 5} = \sqrt{49} = 7$

$\sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{3{,}2} = \sqrt{0{,}2 \cdot 3{,}2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

4 $\sqrt{32} : \sqrt{8} = \sqrt{32 : 8} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{150} : \sqrt{6} = \sqrt{150 : 6} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{0{,}24} : \sqrt{0{,}06} = \sqrt{0{,}24 : 0{,}06} = \sqrt{4} = 2$

$\frac{\sqrt{115{,}2}}{\sqrt{7{,}2}} = \sqrt{\frac{115{,}2}{7{,}2}} = \sqrt{16} = 4$

Wurzelreduktion

Häufig können Wurzelterme nicht so umgeformt werden, dass das Wurzelzeichen wegfällt.

Zerlegt man aber den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in ein *Produkt*, kann *von einzelnen Faktoren die Wurzel gezogen werden*.

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen wird dadurch *reduziert* (verkleinert). Sie sollte letztendlich möglichst klein sein!

Dieses Vorgehen nennt man *Wurzelreduktion* !

Beispiele:

1 $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2}$

2 $\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3}$

3 $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x \cdot \sqrt{x}$

4 $\sqrt{108x^3} = \sqrt{36x^2 \cdot 3x} = \sqrt{36x^2} \cdot \sqrt{3x} = 6x \cdot \sqrt{3x}$

5 $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

6 $\sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{32}} = \frac{3}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{3}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{2}}$

7 $\sqrt{\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$

8 $\sqrt{\frac{2a^3}{25}} = \frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot 2a}}{5} = \frac{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2a}}{5} = \frac{a \cdot \sqrt{2a}}{5}$

9 $\sqrt{\frac{18x^5}{75y}} = \frac{\sqrt{18x^5}}{\sqrt{75y}} = \frac{\sqrt{9x^4 \cdot 2x}}{\sqrt{25 \cdot 3y}} = \frac{\sqrt{9x^4} \cdot \sqrt{2x}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{3y}} = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{2x}}{5 \cdot \sqrt{3y}}$

4 Weitere Anwendungen

Bei der Berechnung fehlender Strecken in Figuren oder Körpern liefern vielfach *rechtwinklige Dreiecke* die Lösungsgrundlage, da an diesen Dreiecken der *Satz des Pythagoras* angewendet werden kann.

Solche Berechnungen erfordern zwingend ein *systematisches Vorgehen*:

1 Eine *Skizze* der gegebenen Figur bzw. des gegebenen Körpers (→ *Schrägbild* !) erstellen.

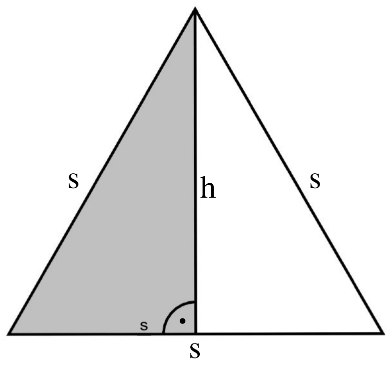
2 Die Figur bzw. den Körper korrekt *beschriften.*

3 Die gegebenen und gesuchten Strecken *eintragen*.

4 *Rechtwinklige Dreiecke* mit den gesuchten Strecken bestimmen.

5 Gleichung gemäss dem *Satz des Pythagoras* aufstellen und auflösen.

Beispiel: „Berechne in einem gleichseitigen Dreieck die Höhe h, wenn die Seitenlänge s = 3x ist.“



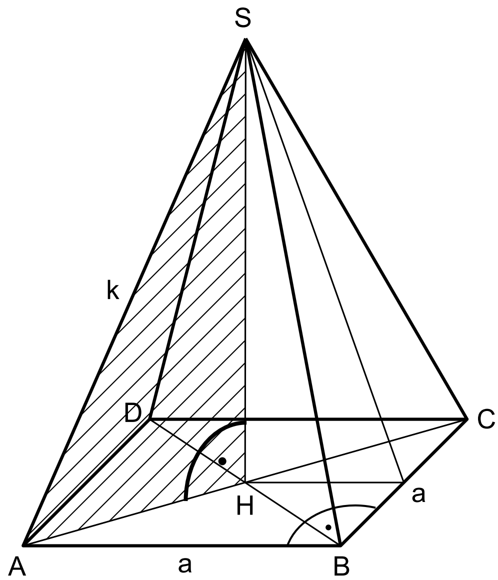
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{s^2}{4} \quad \Big| -\frac{s^2}{4}$$

$$\frac{3s^2}{4} = h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot s}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3x}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3}\cdot 1{,}5x}}$$

Bei Berechnungen an Körpern tritt die zusätzliche Schwierigkeit auf, dass die *rechten Winkel* aufgrund der Darstellung im Schrägbild *verzerrt* sein können. Es ist zwingend erforderlich, die auftretenden rechten Winkel in Körpern zu erkennen, auch wenn sie im Schrägbild als spitze oder stumpfe Winkel erscheinen.

Beispiel: „Berechne in der nebenstehenden Pyramide mit quadratischem Grundriss die Fläche des schraffierten Dreiecks, wenn gilt: $a = 5x$ und $k = 8x$."



Fläche des Dreiecks: $A = \frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{HS}}{2}$

Grundlinie: $\overline{AH} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 5x}{2} = \underline{\sqrt{2} \cdot 2{,}5x}$

Höhe: $k^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HS}^2$

$$\overline{HS} = \sqrt{k^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(8x)^2 - (\sqrt{2} \cdot 2{,}5x)^2}$$
$$= \sqrt{64x^2 - 12{,}5x^2} = \sqrt{51{,}5x^2} = \underline{\sqrt{51{,}5} \cdot x}$$

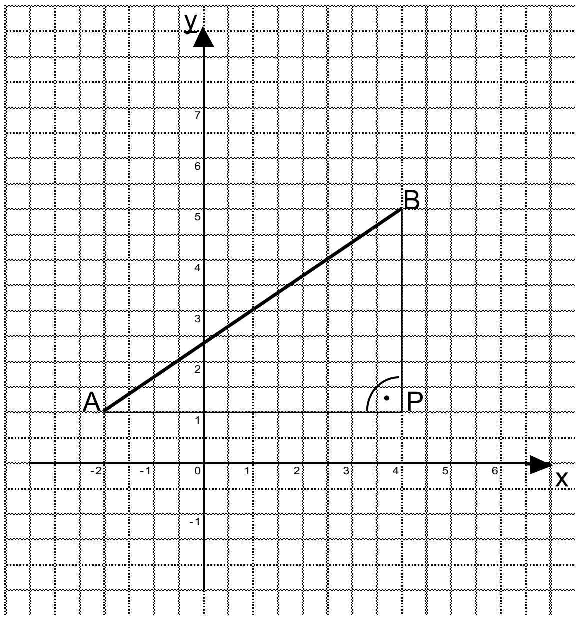
$\rightarrow$ $A = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{HS}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2{,}5x \cdot \sqrt{51{,}5} \cdot x}{2}$

$$= \sqrt{2} \cdot 1{,}25 \cdot \sqrt{51{,}5} \cdot x^2 = \underline{\underline{\sqrt{103} \cdot 1{,}25x^2}}$$

5 Berechnungen im Koordinatensystem

Im *Koordinatensystem* lassen sich *Streckenlängen* aufgrund der Koordinaten berechnen.
Dabei bedient man sich eines *rechtwinkligen Hilfsdreieckes*, an dem der *Satz des Pythagoras* angewandt werden kann.

Beispiel: "Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$ mit A(-2/1) und B(4/5)."



1. $|AP| = |-2e| + |4e| = \underline{6e}$

   $|BP| = |4e| = \underline{4e}$

2. $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$

   $|AB| = \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2}$

   $|AB| = \sqrt{(6e)^2 + (4e)^2} = \sqrt{36e^2 + 16e^2}$

   $= \sqrt{52e^2} = \underline{\underline{\sqrt{52} \cdot e}}$

6 Berechnungen an geometrischen Körpern

Wir unterscheiden *zwei Gruppen von Körpern*:

→ *Prismen* , *Zylinder*

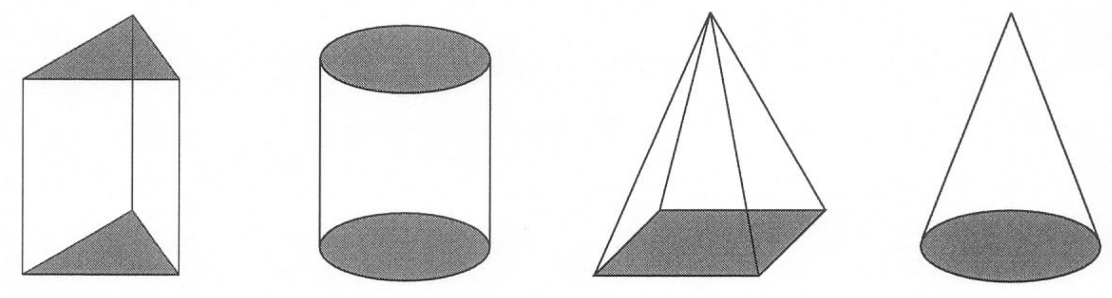
Ein *Prisma* ist ein Körper, der von zwei *kongruenten* und *parallelen* *Vielecken* begrenzt wird.
Die zwei Vielecksflächen nennt man *Grund*- und *Deckfläche*.

Ein *Zylinder* ist ein Körper, der von zwei *kongruenten* und *parallelen* *Kreisen* begrenzt wird.

→ *Pyramiden* , *Kegel*

Eine *Pyramide* ist ein Körper mit einem *Vieleck* als *Grundfläche* und *dreieckigen Seitenflächen*, welche in einer *Spitze* zusammenlaufen.

Ein *Kegel* ist ein Körper mit einem *Kreis* als *Grundfläche*. Die in eine *Spitze* zulaufende *Mantelfläche* wird von einem *Kreissektor* gebildet.



Prisma Zylinder Pyramide Kegel

Es ist wichtig, von diesen vier Körpern die *Formeln* für das *Volumen V* und die *Oberfläche O* zu kennen.

	Prisma	Zylinder	Pyramide	Kegel
Volumen	$V = G \cdot h$	$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$	$V = \frac{G \cdot h}{3}$	$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$
Oberfläche	$O = G + D + M$	$O = G + D + M = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$		