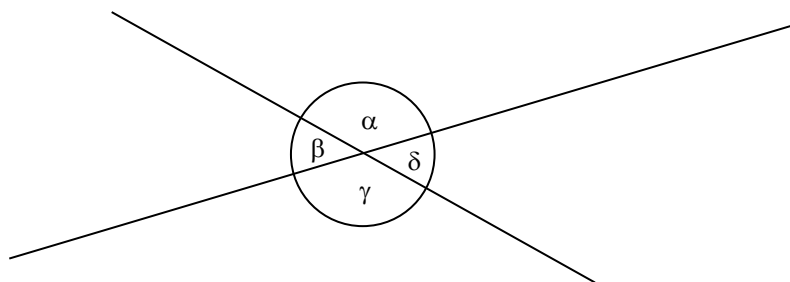


F Winkelsätze

1 Nebenwinkel und Scheitelwinkel

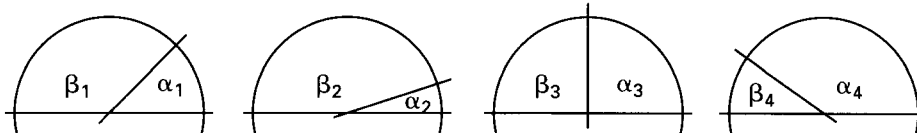
Zwei nicht parallele Geraden bilden stets vier Schnittwinkel. Dabei unterscheidet man zwischen Scheitel- und Nebenwinkeln.

Beispiel :



Nebenwinkel

Nebenwinkel liegen nebeneinander und ergänzen sich zu 180° .



$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$$

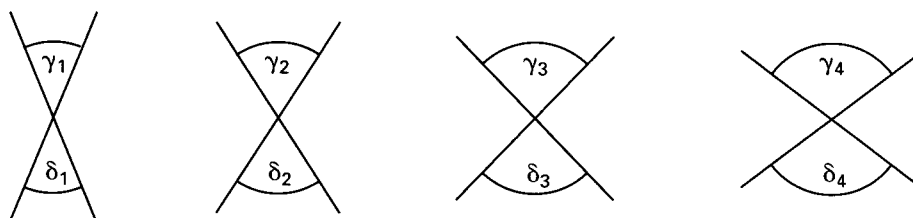
$$\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$$

$$\alpha_4 + \beta_4 = 180^\circ$$

Scheitelwinkel

Scheitelwinkel liegen sich gegenüber und sind gleich gross.



$$\gamma_1 = \delta_1$$

$$\gamma_2 = \delta_2$$

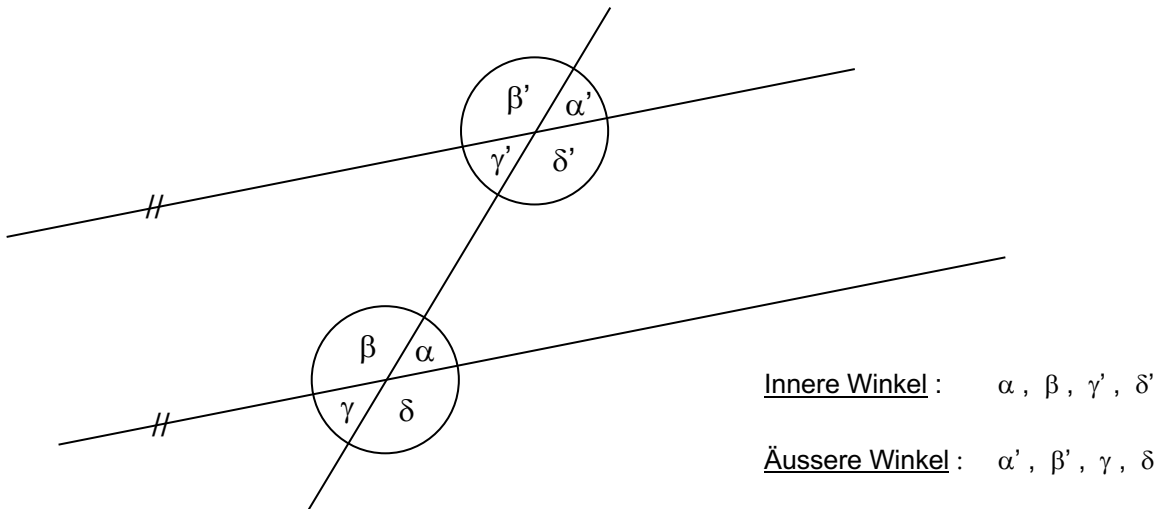
$$\gamma_3 = \delta_3$$

$$\gamma_4 = \delta_4$$

2 Fundamentale Sätze über Winkel und Winkelsummen

Werden zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten, entstehen 8 Schnittwinkel.

Die Winkel innerhalb der Parallelen heissen innere Winkel, die Winkel ausserhalb der Parallelen heissen äussere Winkel.

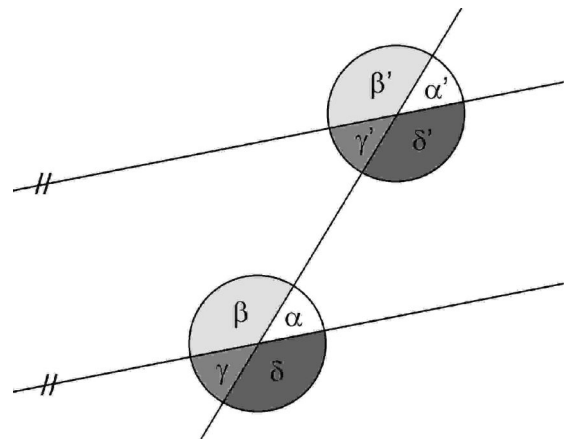


Stufenwinkel

Einen inneren und einen äusseren Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden nennt man Stufenwinkel. Sie sind gleich gross.

$$\alpha = \alpha' \quad , \quad \beta = \beta' \quad ,$$

$$\gamma = \gamma' \quad , \quad \delta = \delta'$$

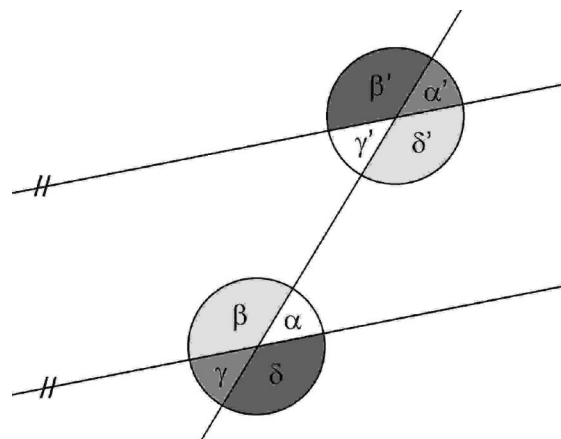


Wechselwinkel

Zwei innere oder zwei äussere Winkel auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden heissen Wechselwinkel. Sie sind gleich gross.

$$\alpha = \gamma' \quad , \quad \beta = \delta' \quad ,$$

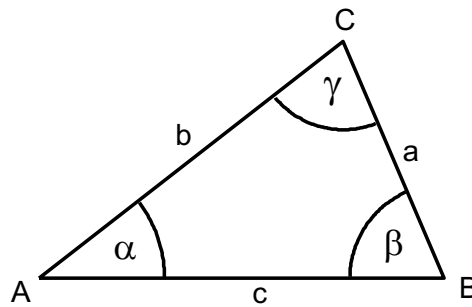
$$\gamma = \alpha' \quad , \quad \delta = \beta'$$



Winkelsumme im Dreieck

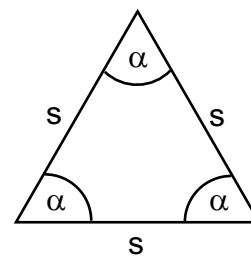
Es gilt für jedes Dreieck:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

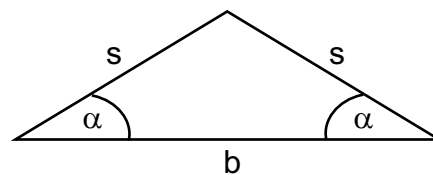


Besondere Dreiecke

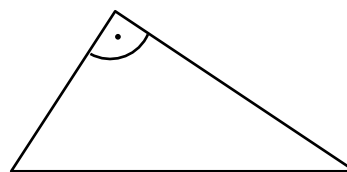
- Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleich lange Seiten und drei gleich grosse Winkel (je 60°).



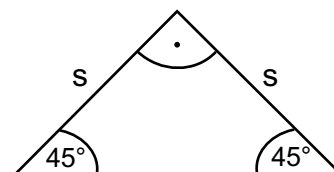
- Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleich lange Seiten (Schenkel) und zwei gleich grosse Winkel (Basiswinkel).



- Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Winkel von 90° .



- Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck hat einen rechten Winkel, zwei gleich lange Seiten und die Basiswinkel sind je 45° .

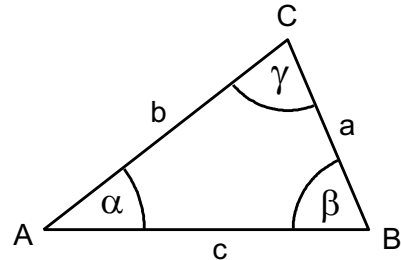


3 Winkelsummen von Vielecken (n-Ecken)

Um die Innenwinkelsumme, abgekürzt Winkelsumme, eines beliebigen n-Eckes zu bestimmen, greift man auf die Winkelsumme des Dreiecks zurück.

Es gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



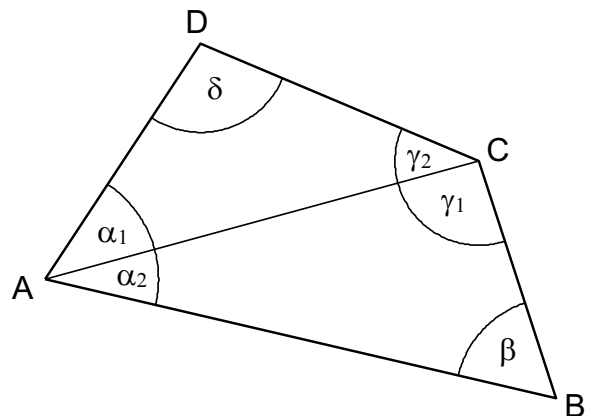
Durch die Unterteilung eines n-Eckes in Teildreiecke lässt sich dessen Winkelsumme auf einfache Weise bestimmen.

Beispiele:

Innenwinkelsumme im Viereck =

$$(\alpha_1 + \gamma_2 + \delta) + (\alpha_2 + \beta + \gamma_1) =$$

$$2 \cdot 180^\circ = \underline{360^\circ}$$

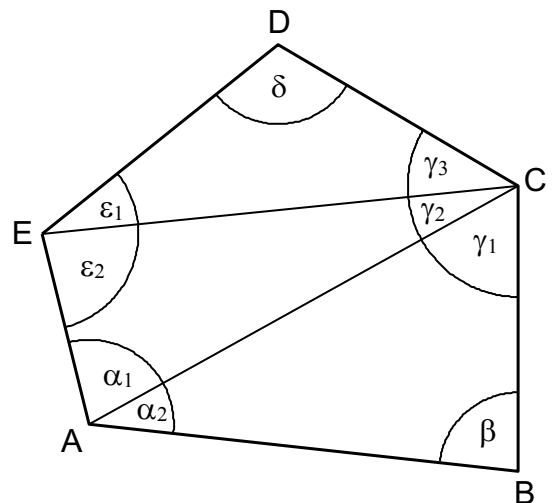


Innenwinkelsumme im Fünfeck =

$$(\varepsilon_1 + \gamma_3 + \delta) + (\alpha_1 + \gamma_2 + \varepsilon_2) +$$

$$(\alpha_2 + \beta + \gamma_1) =$$

$$3 \cdot 180^\circ = \underline{540^\circ}$$



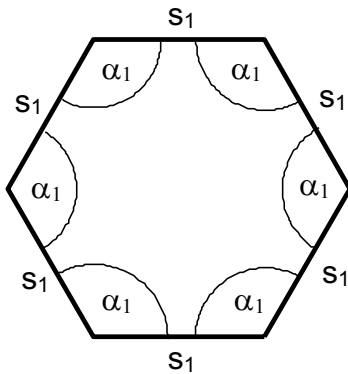
Es gilt:

$$\text{Innenwinkelsumme im n-Eck} = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

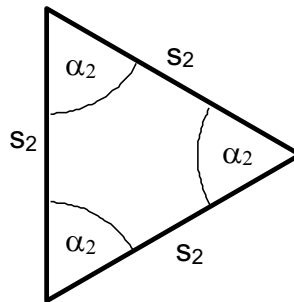
Regelmässige Vielecke (regelmässige n-Ecke)

Bei regelmässigen Vielecken sind alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich gross.

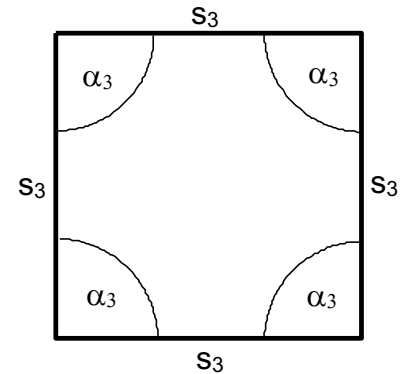
Beispiele:



Regelmässiges Sechseck



Regelmässiges Dreieck
(gleichseitiges Dreieck)



Regelmässiges Viereck
(Quadrat)

Die Grösse des Innenwinkels α im regelmässigen Vieleck lässt sich aus der Innenwinkelsumme und der Anzahl Eckpunkte berechnen.

Es gilt:

$$\text{Innenwinkel } \alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

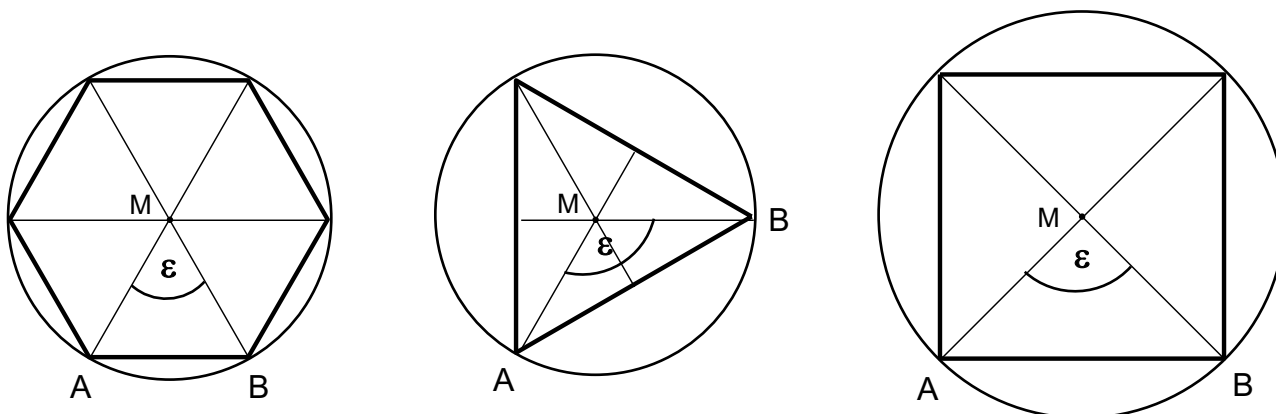
Beispiel:

Im regelmässigen Sechseck beträgt ein Innenwinkel somit:

$$\alpha = \frac{(6 - 2) \cdot 180^\circ}{6} = \frac{720^\circ}{6} = \underline{120^\circ} .$$

Allen regelmässigen Vielecken ist gemeinsam, dass deren Eckpunkte auf einer Kreislinie liegen.

Beispiele:



Verbindet man die Endpunkte einer Seite (z.B. A und B) des regelmässigen Vielecks mit dem Mittelpunkt M des Kreises, so entsteht mit diesem als Scheitelpunkt ein sogenannter Mittelpunktswinkel ε.

Die Grösse des Zentriwinkels ε im regelmässigen Vieleck lässt sich aus der Grösse des Vollwinkels (360°) und der Anzahl Eckpunkte berechnen.

Es gilt:

$$\text{Zentriwinkel } \varepsilon = \frac{360^\circ}{n}$$

Beispiel:

Im regelmässigen Sechseck beträgt ein Zentriwinkel somit:

$$\varepsilon = \frac{360^\circ}{6} = \underline{60^\circ} .$$

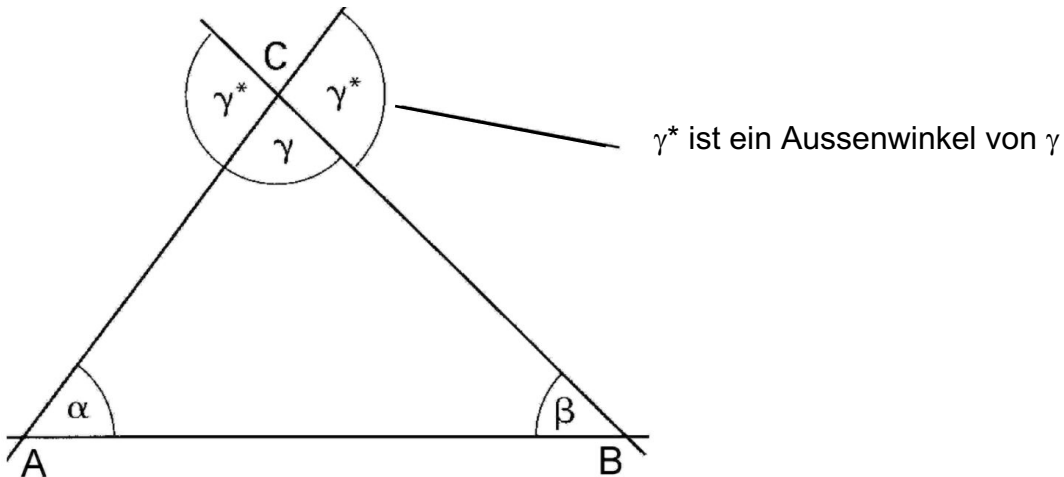
Für Innenwinkel und Zentriwinkel eines regelmässigen Vieleckes gilt folgende Gesetzmässigkeit:

$$\alpha + \varepsilon = 180^\circ$$

4 Einige Anwendungen

Aussenwinkel

Ein Aussenwinkel ist der Winkel zwischen einer Seite und der Verlängerung der Nachbarseite.



Es gilt :

<i>Innenwinkel</i>	+	<i>Aussenwinkel</i>	=	180°
α	+	α^*	=	180°
β	+	β^*	=	180°
γ	+	γ^*	=	180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha^* = 180^\circ$$

$$\rightarrow \beta + \gamma = \alpha^*$$

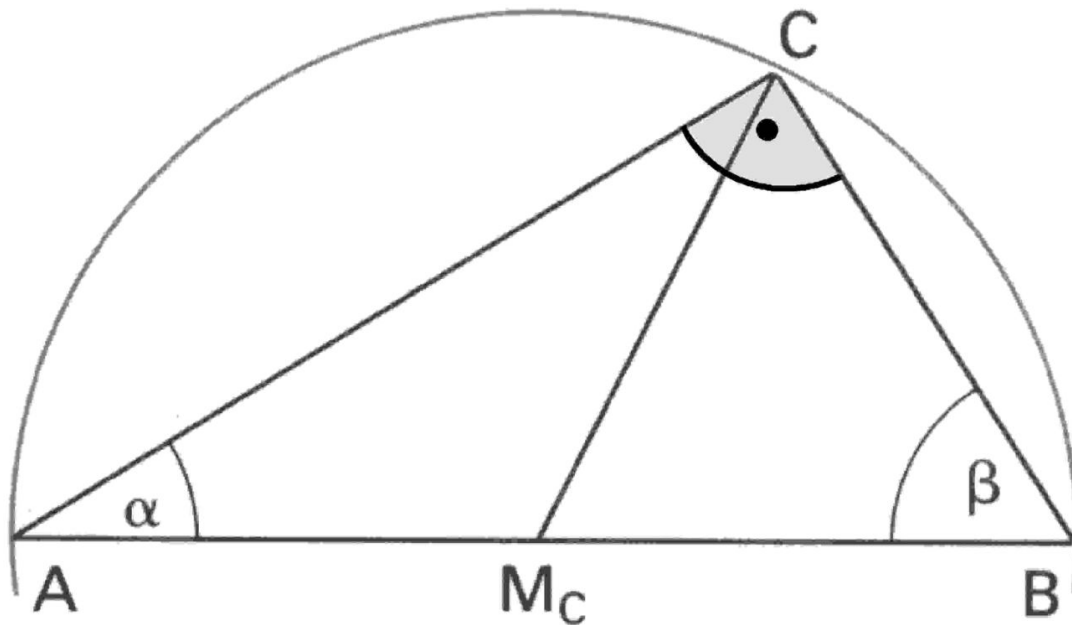
sowie:

$$\rightarrow \alpha + \beta = \gamma^*$$

$$\rightarrow \alpha + \gamma = \beta^*$$

Der Satz des Thales

Werden in einem Kreis die beiden Endpunkte eines Durchmessers geradlinig mit einem beliebigen anderen Punkt der Peripherie verbunden, entsteht ein rechter Winkel.



Beweis:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$\underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

