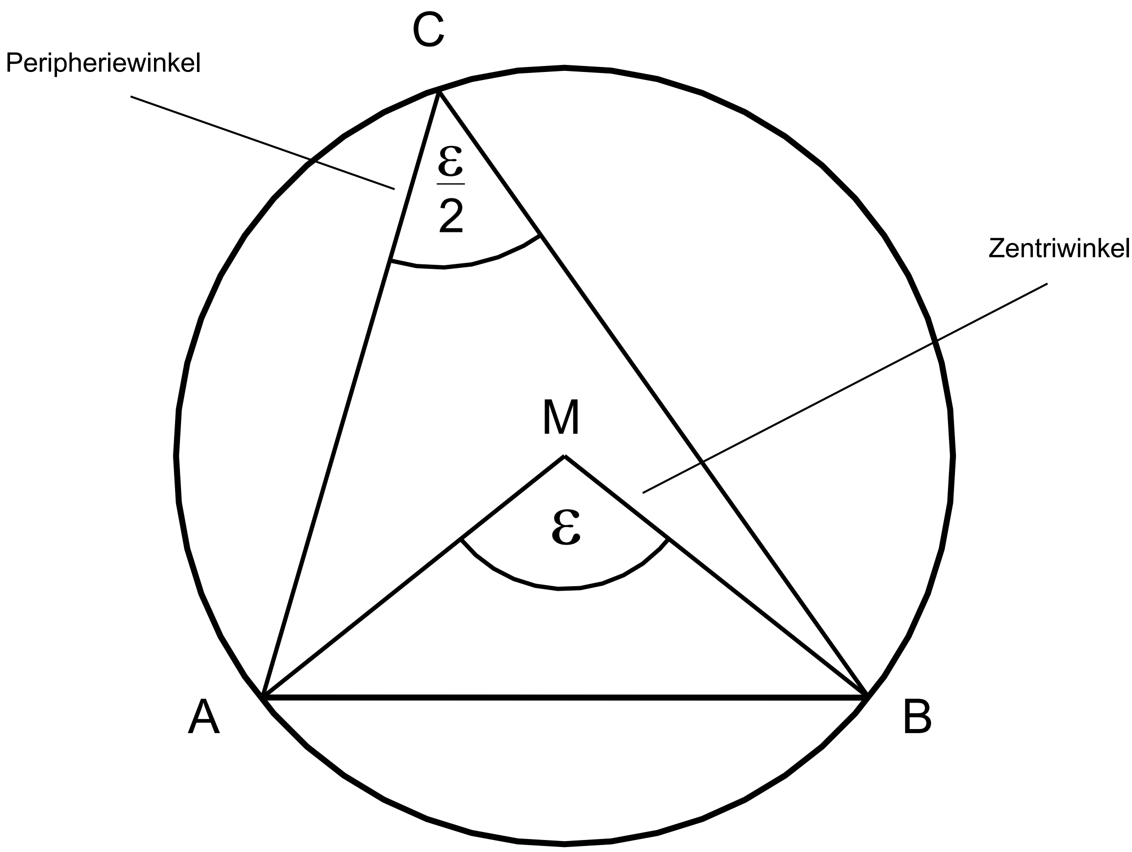
E Winkel am Kreis

1 Peripheriewinkel, Zentriwinkel, Sehnentangentenwinkel

Ein Winkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte einer *Sehne* gehen und dessen Scheitel auf der Peripherie des gleichen Kreisbogens liegt, heisst *Peripheriewinkel* (auch Umfangswinkel).

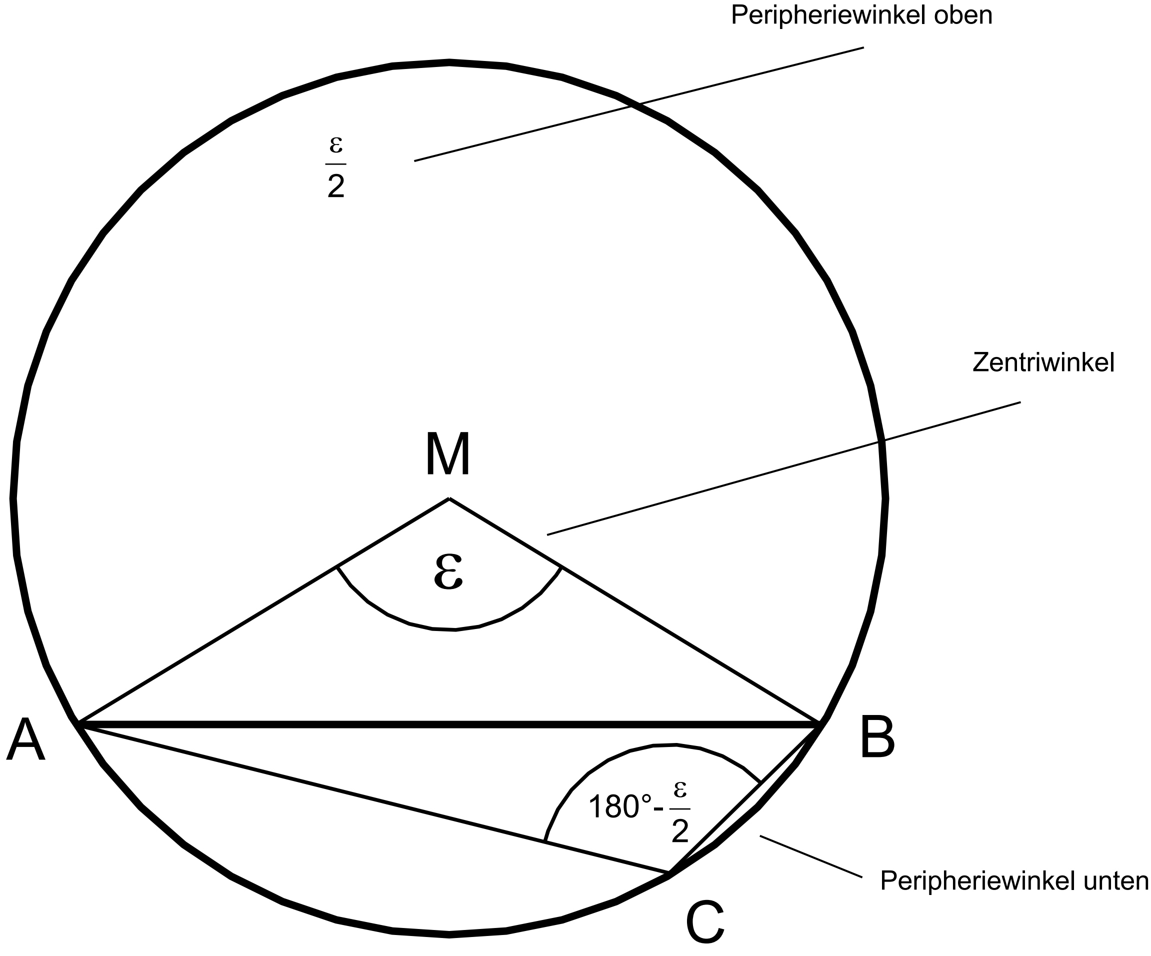
Ein Winkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte einer Sehne gehen und dessen Scheitel das Kreiszentrum ist, heisst *Zentriwinkel* (auch Mittelpunktswinkel).



Ein Peripheriewinkel hat die *halbe Weite* des Zentriwinkels über dem gleichen Bogen!

Zu der Sehne $\overline{AB}$ gibt es *zwei verschiedene Arten von Peripheriewinkel*.
Ihre Scheitel liegen entweder

- *auf der Seite von M* (→ „Peripheriewinkel oben“) oder
- *auf der entgegengesetzten Seite von M* (→ „Peripheriewinkel unten“) .

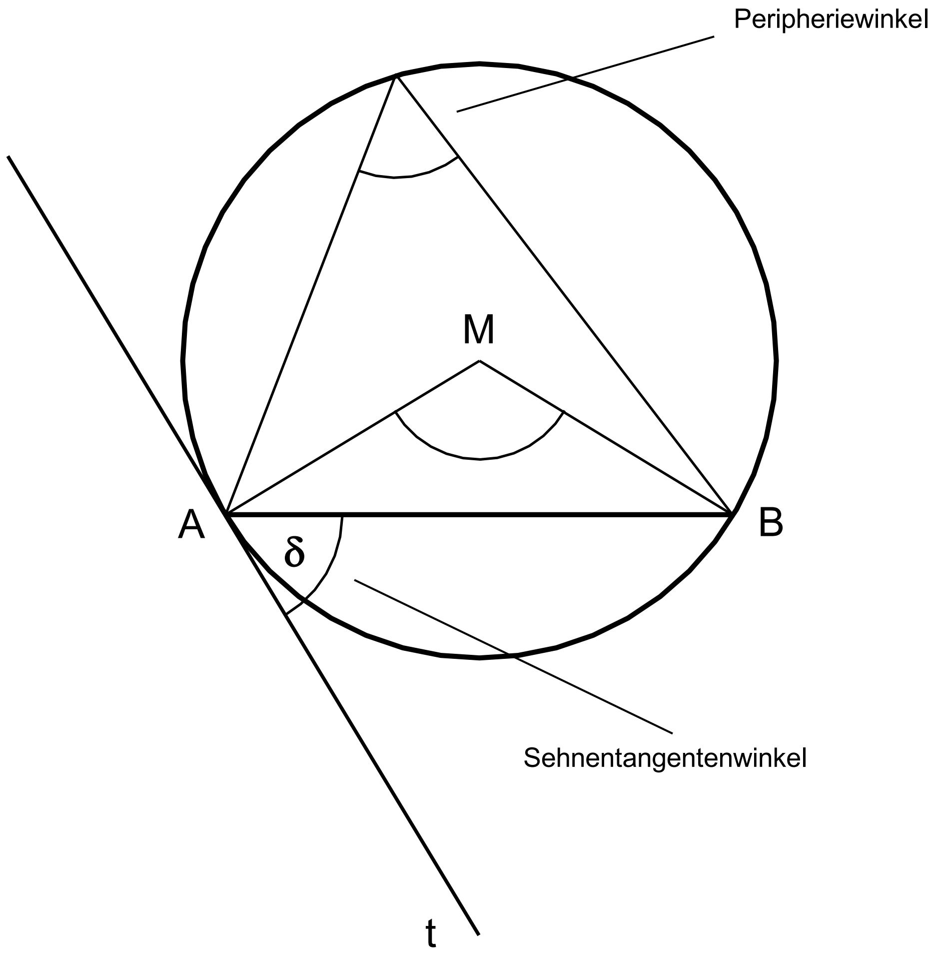


Der Peripheriewinkel, der auf der *entgegengesetzten Seite von M* liegt, hat die Weite $180° - \frac{\varepsilon}{2}$.

Er ergänzt sich mit dem anderen Peripheriewinkel auf *180°* !

Der Sehnentangentenwinkel

Zeichnet man in einem der beiden Endpunkte der Sehne $\overline{AB}$ die *Tangente t an den Kreis*, so entsteht der sogenannte *Sehnentangentenwinkel*.



Der Sehnentangentenwinkel hat *dieselbe Weite* wie der Peripheriewinkel über demselben Bogen!

Der Ortsbogen

Der *Ortsbogen* ist ein *Kreisbogen*, von dessen Punkten aus eine *Strecke* unter einem *vorgegebenen Winkel* gesehen wird.

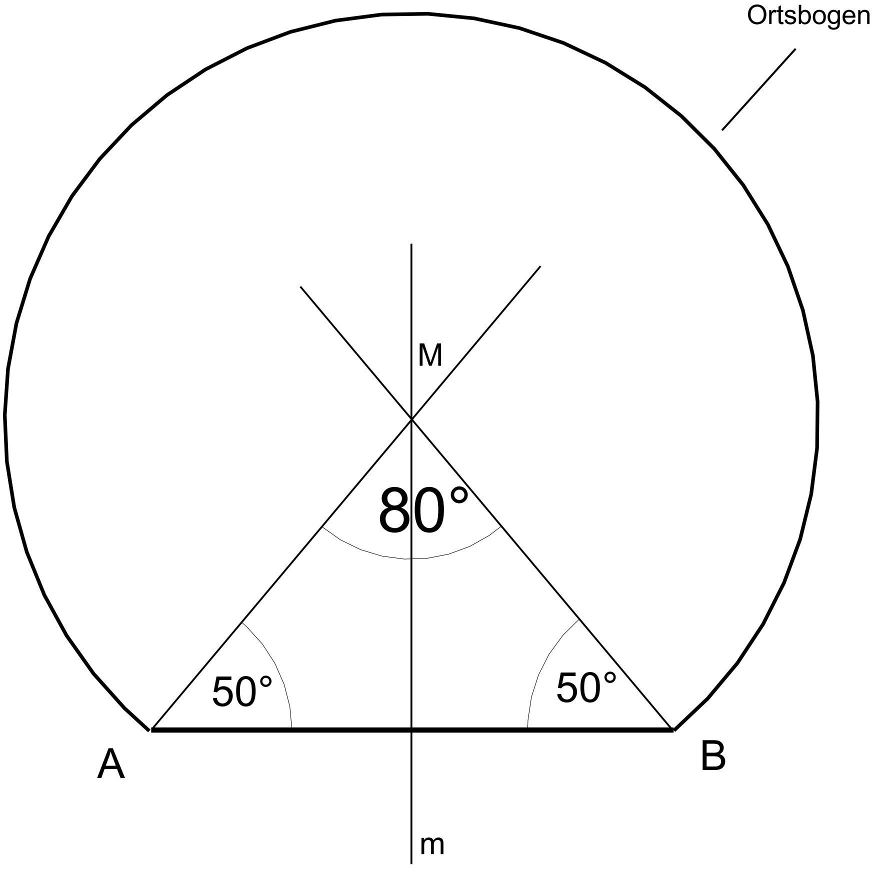
Beispiel: „Konstruiere über einer Strecke IABI = 7cm den *Ortsbogen* für *Umfangswinkel / Peripheriewinkel von 40°*."

→ Gesucht ist ein Kreisbogen. Von dessen Punkten aus wird die Strecke $\overline{AB}$ unter einem Winkel von 40° gesehen.

1. Peripheriewinkel 40° ⟶ Zentriwinkel 80°

2. Gleichschenkliges Dreieck ABM mit Zentriwinkel 80° und Basiswinkel 50°
   (denn: 50° + 50° + 80° = 180°)

3. Kreisbogen über $\overline{AB}$ = Ortsbogen



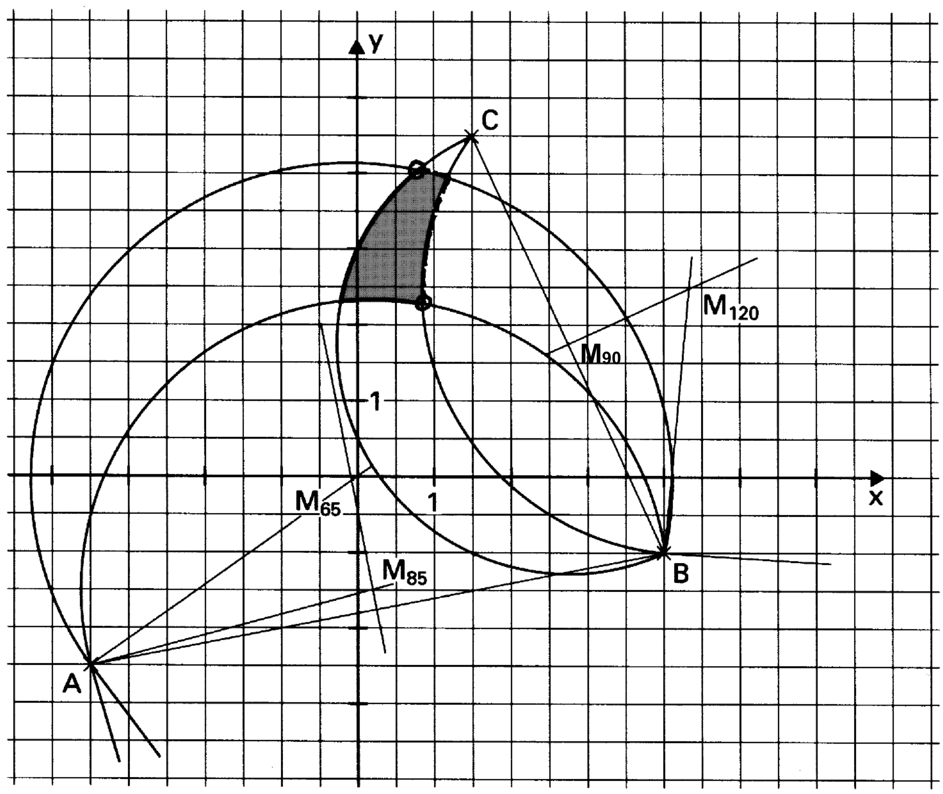
Beachten : Der bezüglich $\overline{AB}$ *symmetrische Ortsbogen* (unten) wäre auch eine Lösung !

2 Anwendungen

Beispiel 1: „Gegeben sind die drei Punkte A (-3,5/-2,5) , B (4/-1) und C (1,5/4,5) .

Bestimme die Menge aller Punkte P, von denen aus die Strecke $\overline{AB}$ unter dem Winkel γ und die Strecke $\overline{BC}$ unter dem Winkel α gesehen wird, wobei gilt:

$90° \leq \alpha < 120°$ und $65° < \gamma \leq 85°$."



Lösungshergang :

1. Ortsbögen 65° und 85° über $\overline{AB}$
   → Punkte P liegen zwischen den beiden Ortsbögen („Sichel 1")

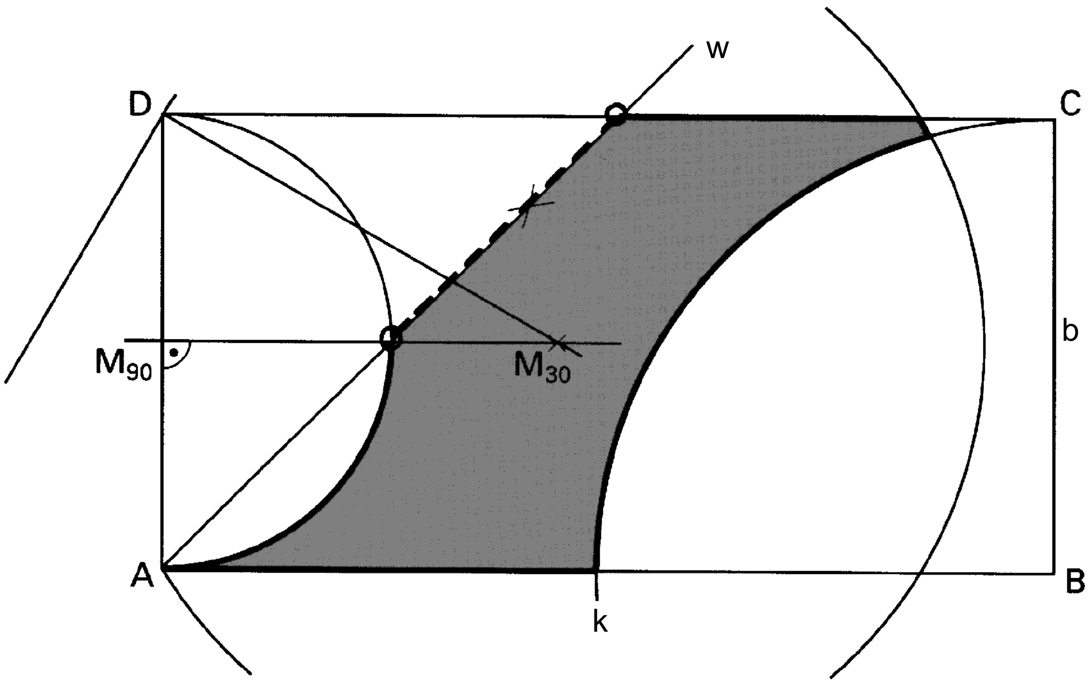
2. Ortsbögen 90° und 120° über $\overline{BC}$
   → Punkte P liegen zwischen den beiden Ortsbögen („Sichel 2")

3. Lösungsmenge = Schnittmenge der beiden „Sicheln"

Achtung : Grenzlinien die zur Lösungsmenge gehören werden ausgezogen gezeichnet, Grenzlinien die *nicht zur Lösungsmenge* gehören werden *gestrichelt* gezeichnet, *Schnittpunkte von ausgezogenen und gestrichelten Grenzlinien* werden mit einem *Kreislein* versehen!

<u>Beispiel 2</u>: „Bestimme die Menge aller Punkte Q, für welche gilt:

- $Q \in$ Viereck ABCD ,
- der Abstand der Punkte Q sei von a kleiner als von d ,
- $\overline{BQ} \geq b$,
- $30° \leq \sphericalangle DQA \leq 90°$. “



<u>Lösungshergang</u> :

1. Punkte Q liegen im Rechteck (inkl. Begrenzungslinie!)

2. Winkelhalbierende w
   → Punkte Q liegen unterhalb der Winkelhalbierenden w

3. Kreis k(B, r=b)
   → Punkte Q liegen ausserhalb des Kreises k

4. Ortsbögen 30° und 90° über $\overline{AD}$
   → Punkte Q liegen zwischen den beiden Ortsbögen („Sichel“)

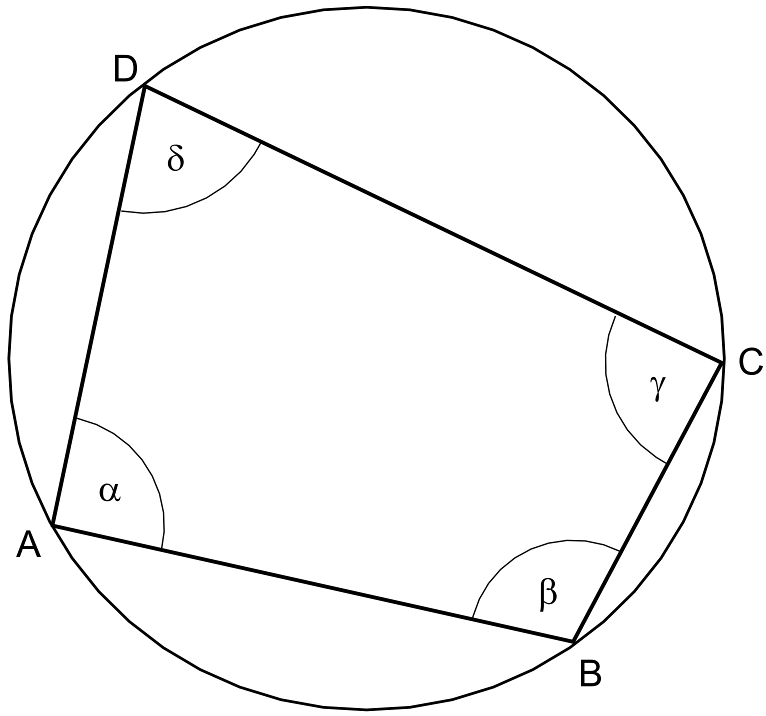
5. Lösungsmenge = Schnittmenge aller Punktemengen

3 Sehnenvierecke und Tangentenvierecke

Im *Sehnenviereck* beträgt die *Summe der Gegenwinkel immer 180°*.

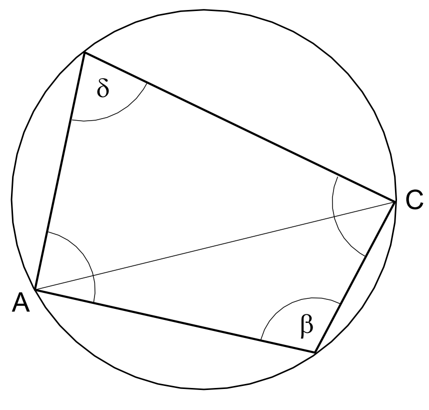
Es gilt folglich : $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$

$$\rightarrow \qquad \boxed{\alpha + \gamma = \beta + \delta}$$



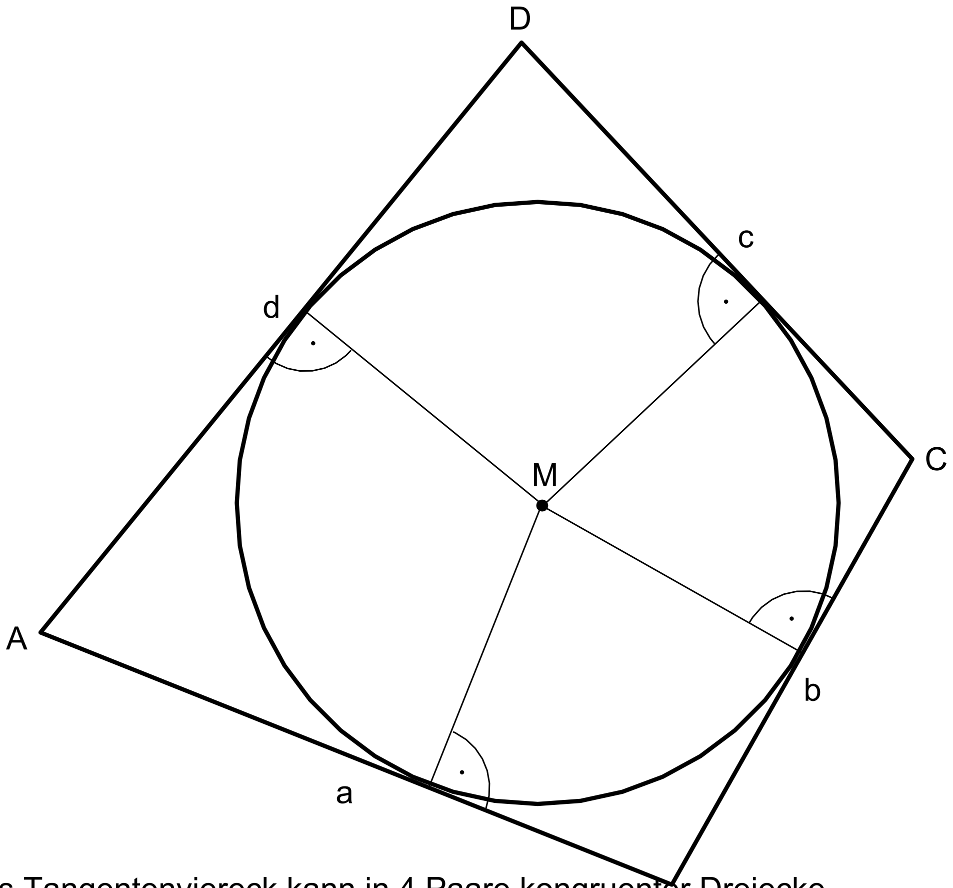
Beweis: Die Winkel β und δ sind die *Peripheriewinkel* über der Sehne $\overline{AC}$.
Für dieses Winkelpaar gilt bekanntlich : $\beta + \delta = 180°$!

Die Beweisführung für
$\alpha + \gamma = 180°$ erfolgt analog.



Im <u>*Tangentenviereck*</u> ist die <u>*Summe der Gegenseiten immer gleich gross*</u>.

Es gilt folglich : $\boxed{a + c = b + d}$



<u>Beweis</u>: Das Tangentenviereck kann in 4 Paare kongruenter Dreiecke unterteilt werden. Bei jedem Dreiecks-Paar sind die beiden Aussenseiten gleich lang (x_1, x_2, x_3, x_4).

Die Summen der gegenüberliegenden Seiten ergeben folgende Gleichung:

$$x_4 + x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Daraus folgt:

$$a + c = b + d .$$