

E Kongruenzabbildungen

1 Über Abbildungen in der Geometrie

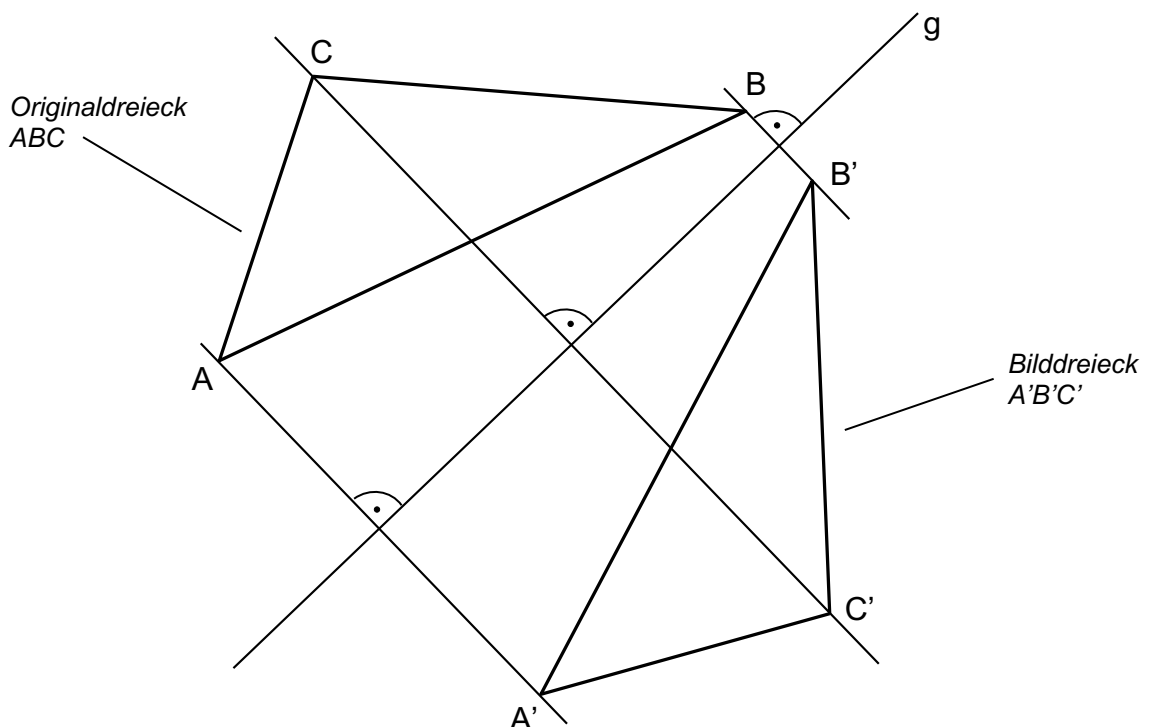
Eine geometrische Abbildung ordnet jedem Punkt einer Originalfigur eindeutig einen Punkt der entsprechenden Bildfigur zu.

Sind Original- und Bildfigur kongruent (deckungsgleich), nennt man die entsprechende Abbildung Kongruenzabbildung.

Folgende Abbildungen sind Kongruenzabbildungen:

- Achsen- oder Geradenspiegelung
- Rotation (Drehung)
- Translation (Parallelverschiebung)
- Punktspiegelung

Beispiel: Achsen- oder Geradenspiegelung

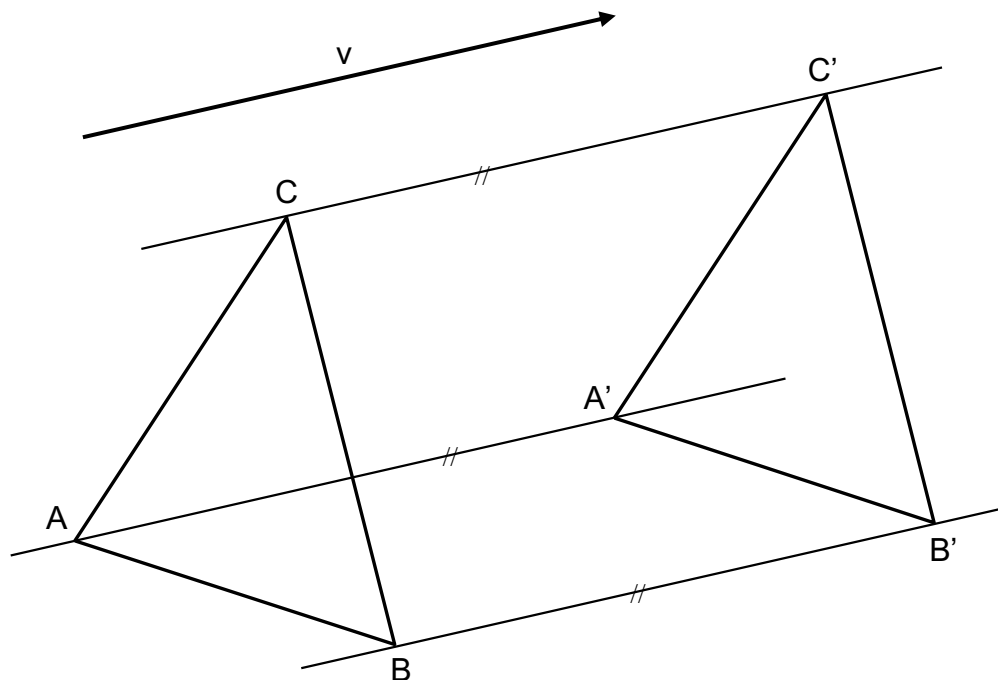


2 Die Translation (Parallelverschiebung)

Eine geometrische Abbildung, bei der alle Punkte der Originalfigur um denselben Betrag in dieselbe Richtung verschoben werden, heisst Translation oder Parallelverschiebung.

Eine Translation kann beschrieben werden durch den sogenannten Verschiebungspfeil v . Dessen Länge gibt die Distanz, die Pfeilspitze die Richtung der Verschiebung an.

Beispiel:



- Die Verschiebungsrichtungen AA' , BB' und CC' sind parallel.
- Die Verschiebungsbeträge $|AA'|$, $|BB'|$ und $|CC'|$ sind gleich gross.

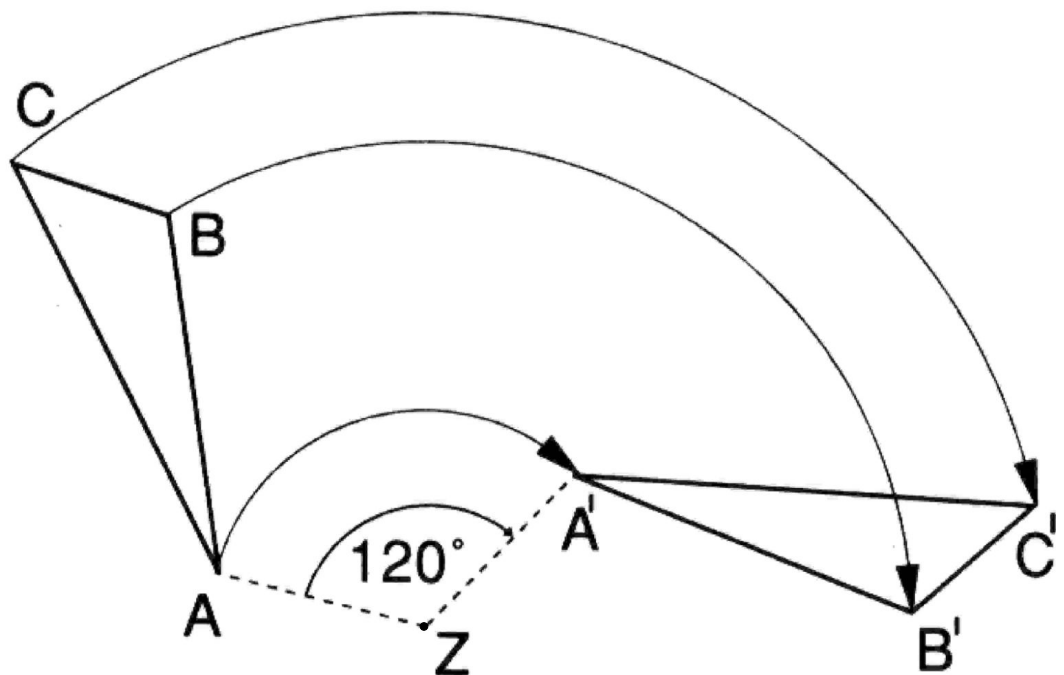
3 Die Rotation (Drehung)

Werden sämtliche Punkte einer Figur um denselben Winkel um einen Punkt Z gedreht, so nennt man diese Abbildung eine Rotation oder Drehung.

Eine Rotation ist festgelegt durch den Drehpunkt Z und den Drehwinkel α . Die Drehrichtung wird dabei wie folgt definiert:

- $D_{Z, +60^\circ}$: Drehung um 60° im Gegenuhreigersinn um Z.
- $D_{Z, -60^\circ}$: Drehung um 60° im Uhrzeigersinn um Z.

Beispiel: $D_{Z, -120^\circ}$

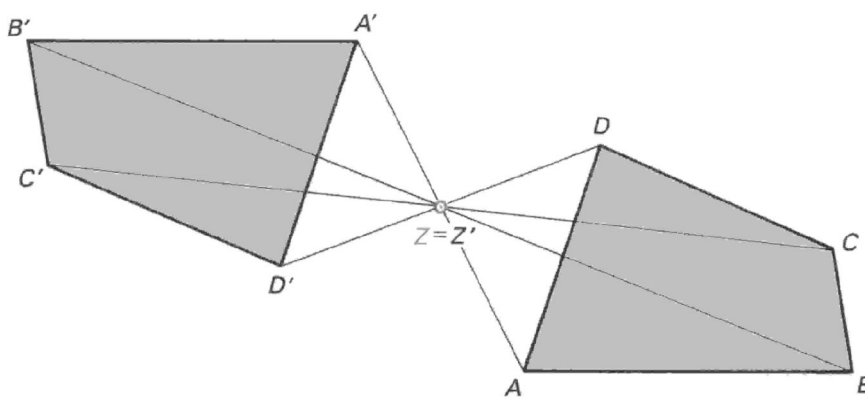


4 Die Punktspiegelung

Werden sämtliche Punkte einer Figur um 180° um einen Punkt Z gedreht, so nennt man diese Abbildung eine Punktspiegelung.

Der Begriff ergibt sich aus der Tatsache, dass Original-, Bild- und Drehpunkt auf einer Geraden liegen, und die Strecke vom Original- zum Bildpunkt durch den Drehpunkt halbiert wird.

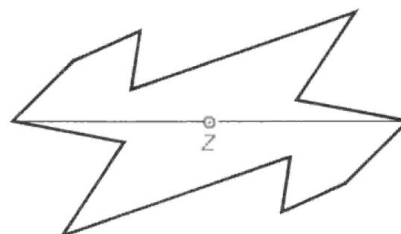
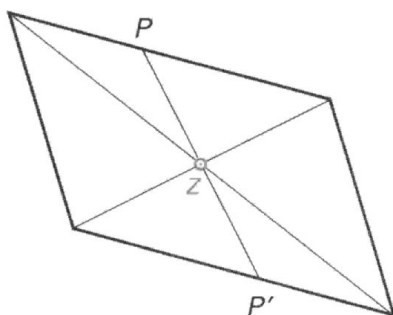
Beispiel:



Punktsymmetrie

Eine geometrische Figur, welche durch eine Drehung um 180° um einen Punkt Z mit sich selber zur Deckung gebracht werden kann, heisst punktsymmetrisch. Der Punkt Z ist das Symmetriezentrum.

Beispiele:



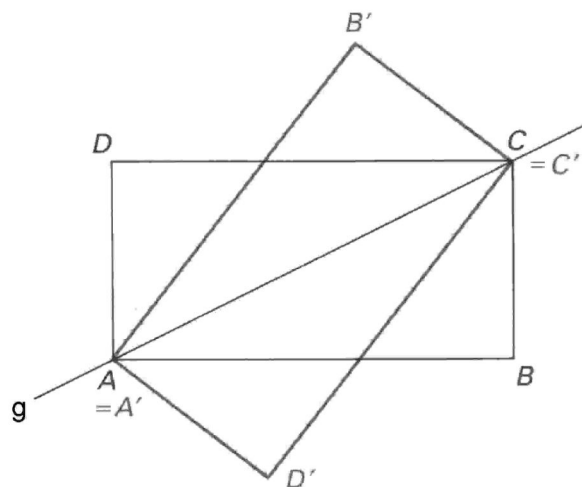
5 Kongruenzabbildungen : Übersicht und Zusammenfassung

Fixpunkte und Fixgeraden

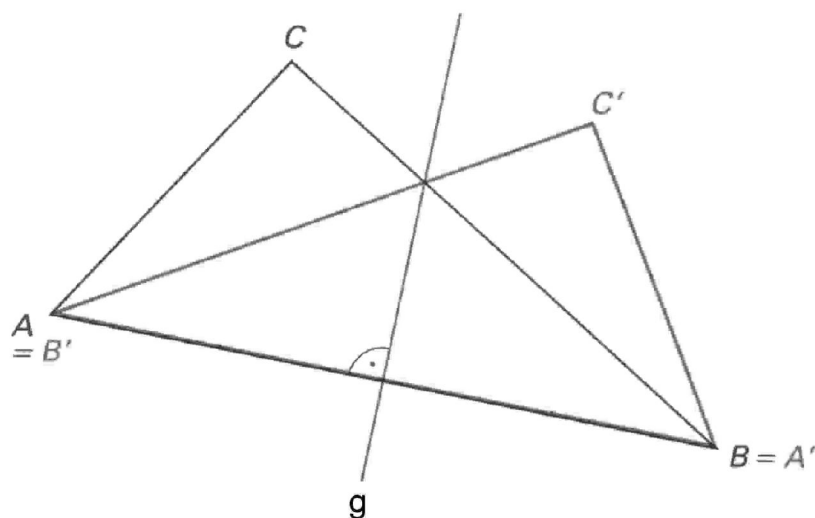
Punkte, die bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet werden, heissen Fixpunkte.

Geraden, die bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet werden, heissen Fixgeraden.

Beispiele:



Die Punkte A und C sind Fixpunkte. Sie werden bei der Achsenspiegelung an g auf sich selbst abgebildet. Es gilt deshalb: $A = A'$ und $C = C'$.



Die Gerade AB ist eine Fixgerade. Sie wird bei der Achsenspiegelung an g auf sich selbst abgebildet. Es gilt deshalb: $AB = A'B'$.

Kongruenzabbildungen

- Abbildungen, welche die Streckenlängen der Originalfigur unverändert lassen, nennen wir längentreu.
- Abbildungen, welche die Winkelgrößen nicht verändern, nennen wir winkeltreu.
- Abbildungen, welche den Orientierungssinn beibehalten, nennen wir orientierungstreu.

Die uns bekannten Abbildungen Geradenspiegelung, Translation, Rotation und Punktspiegelung sind alle längentreu und winkeltreu. Ausser der Geradenspiegelung sind auch alle orientierungstreu

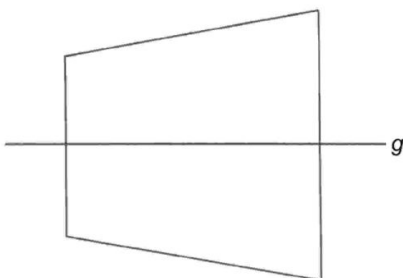
Da eine längentreue Abbildung die Form und Grösse einer Figur nicht verändert, sind Original- und Bildfigur bei den erwähnten Abbildungen kongruent (lat. *congruens* = übereinstimmend).

Man nennt diese Abbildungen deshalb Kongruenzabbildung.

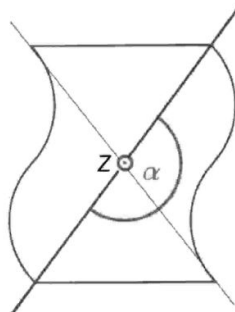
Symmetrien

- Wir nennen eine Figur achsensymmetrisch (geradensymmetrisch), wenn sie bei der Spiegelung an einer Achse g auf sich selbst abgebildet wird.
- Wir nennen eine Figur punktsymmetrisch, wenn sie bei der Spiegelung an einem Symmetriezentrum Z auf sich selbst abgebildet wird.
- Wir nennen eine Figur drehsymmetrisch, wenn sie bei der Drehung um einen Punkt D und um den Winkel α auf sich selber abgebildet wird.

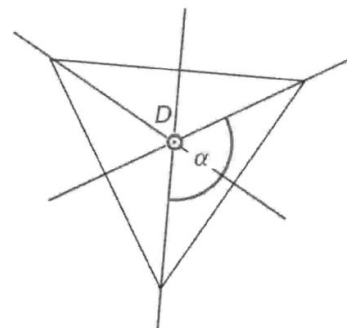
Beispiele:



achsensymmetrische Figur



punktsymmetrische Figur



drehsymmetrische Figur