D Symmetrien

1 Symmetrie-Eigenschaften

Der Begriff *Symmetrie* stammt aus dem griechischen und bedeutet sinngemäss *Spiegelgleichheit* (gr. *symmetros* = gleichmässig).

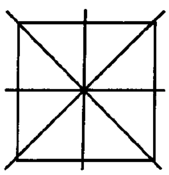
Es gibt drei Arten von Symmetrien:
- *Achsensymmetrie*
- *Drehsymmetrie*
- *Punktsymmetrie* .

Figuren, welche eine oder mehrere dieser Symmetrien aufweisen, nennt man entsprechend *achsensymmetrisch*, *drehsymmetrisch* oder *punktsymmetrisch*.

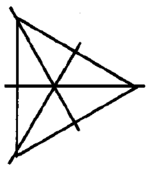
Achsensymmetrische Figuren

Bei *achsensymmetrischen Figuren* lassen sich eine oder mehrere *Symmetrieachsen* so einzeichnen, dass die Figuren bei einer *Achsenspiegelung* jeweils *auf sich selbst abgebildet werden*.

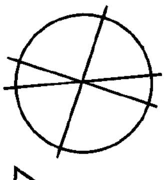
Beispiele:



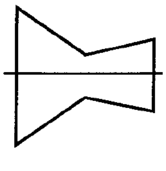
Quadrat : 4 Symmetrieachsen



Gleichseitiges Dreieck : 3 Symmetrieachsen



Kreis : Unendlich viele Symmetrieachsen

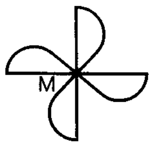


„Figur“ : 1 Symmetrieachse

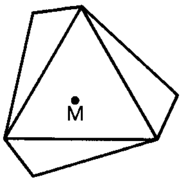
Drehsymmetrische Figuren

Drehsymmetrische Figuren haben die Eigenschaft, dass sie bei *Drehungen um einen bestimmten Punkt* auch bei Drehwinkeln ≠ 360° *auf sich selbst abgebildet werden*.

Beispiele:



„Figur 1" : 4-strahlig drehsymmetrisch (90°, 180°, 270°, 360°)

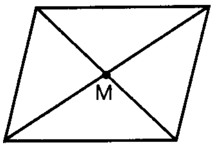


„Figur 2" : 3-strahlig drehsymmetrisch (120°, 240°, 360°)

Punktsymmetrische Figuren

Punktsymmetrische Figuren haben die Eigenschaft, dass sie bei Drehungen um einen bestimmten Punkt *nur bei einem Drehwinkel = 180° bzw 360° auf sich selbst abgebildet werden*.

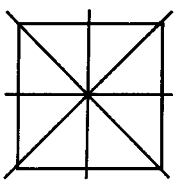
Beispiel:



Parallelogramm : punktsymmetrisch (180°, 360°)

Oft weisen geometrische Figuren zwei oder sogar drei Symmetrien auf.

Beispiel:

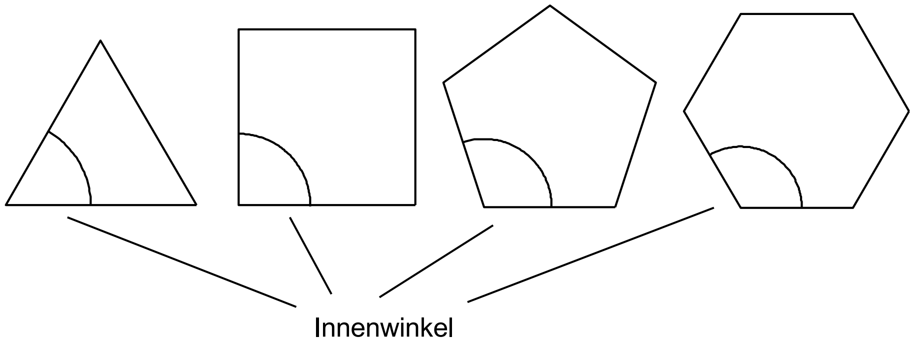


Quadrat :
- 4-fach achsensymmetrisch
- 4-strahlig drehsymmetrisch
- punktsymmetrisch

Regelmässige n-Ecke

Bei *regelmässigen n-Ecken* sind *alle Seiten gleich lang* und *alle Innenwinkel gleich gross*.

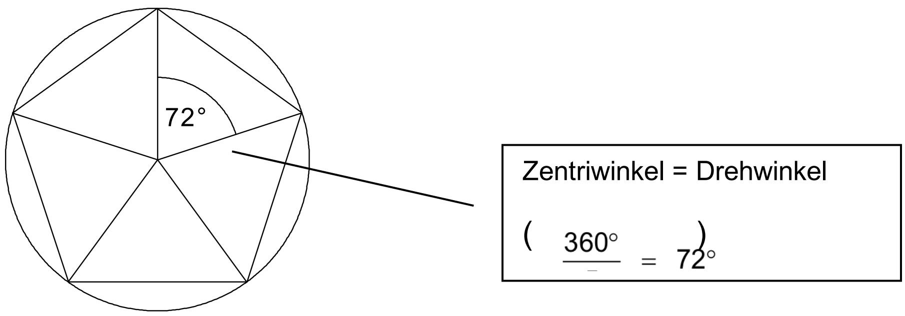
Beispiele:



Regelmässige n-Ecke sind *n-fach drehsymmetrisch*!

Der *Drehwinkel* beträgt $\frac{360^\circ}{n}$ und entspricht dem *Zentriwinkel* des n-Ecks.

Beispiel: Regelmässiges 5-Eck.



Jedes regelmässige n-Eck besitzt einen *Umkreis* (und einen Inkreis) !

Zur Bestimmung der _Grösse des Innenwinkels_ benötigt man vorerst die _Innenwinkelsumme_.
Diese berechnet sich für ein n-Eck gemäss der Formel:

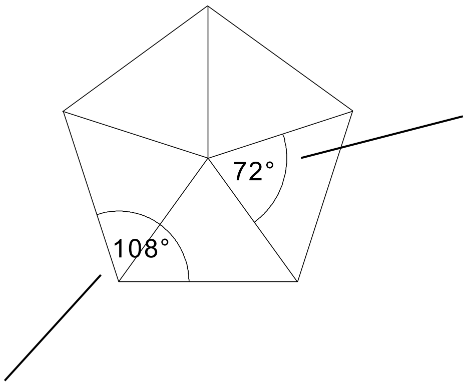
$$\boxed{\text{Innenwinkelsumme n-Eck} \;=\; (n-2)\cdot 180^\circ}$$

Ein 3-Eck weist eine Innenwinkelsumme von $1 \cdot 180^\circ$ auf, ein 4-Eck eine Innenwinkelsumme von $2 \cdot 180^\circ$, ein 5-Eck eine Innenwinkelsumme von $3 \cdot 180^\circ$ und ein n-Eck eine Innenwinkelsumme von $(n-2) \cdot 180^\circ$!

Somit berechnet sich ein Innenwinkel nach der Formel:

$$\boxed{\text{Innenwinkel n-Eck} \;=\; \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}}$$

Beispiel: Regelmässiges 5-Eck.



$$\text{Zentriwinkel} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\text{Innenwinkel} = \frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

→ Zwischen Zentriwinkel und Innenwinkel gilt bei jedem regelmässigen n-Eck folgende Beziehung:

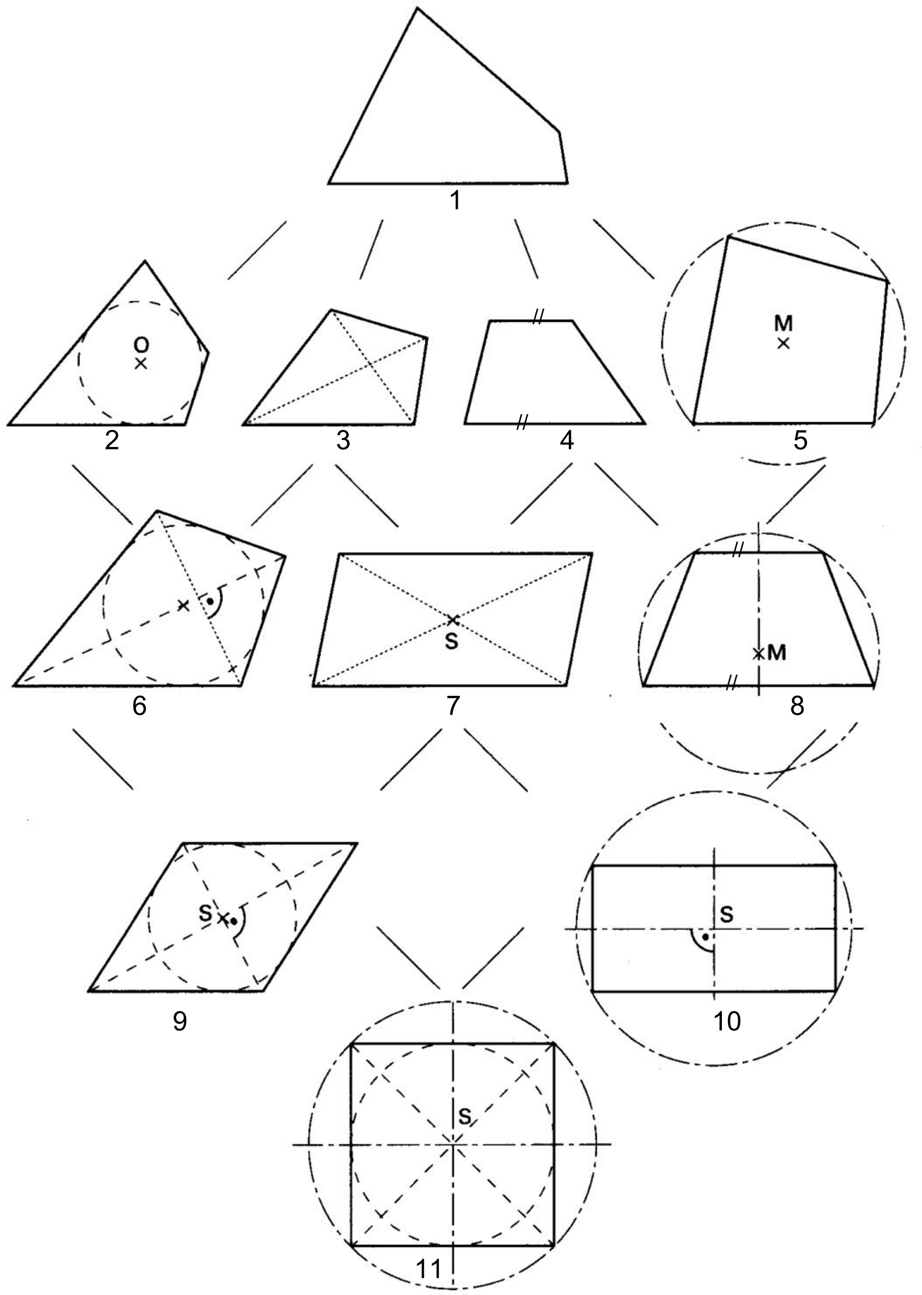
$$\boxed{\text{Zentriwinkel} + \text{Innenwinkel} = 180^\circ}$$

2 Anwendungen in Konstruktionsaufgaben

In Konstruktionsaufgaben ist es wichtig, von der zu konstruierenden *Figur* alle wichtigen *Eigenschaften* präsent zu haben.

Im Falle des *Vierecks* lassen sich – ausgehend vom sogenannten *allgemeinen Viereck* – zehn verschiedene Vierecksarten zeichnen, die alle ihre speziellen Eigenschaften in Bezug auf *Seitenlängen*, *Winkel*, *Inkreis*, *Umkreis*, *Diagonalen*, *Parallelität*, *Symmetrieachsen* oder *Symmetriepunkt* aufweisen.

Übersicht über die Vierecke



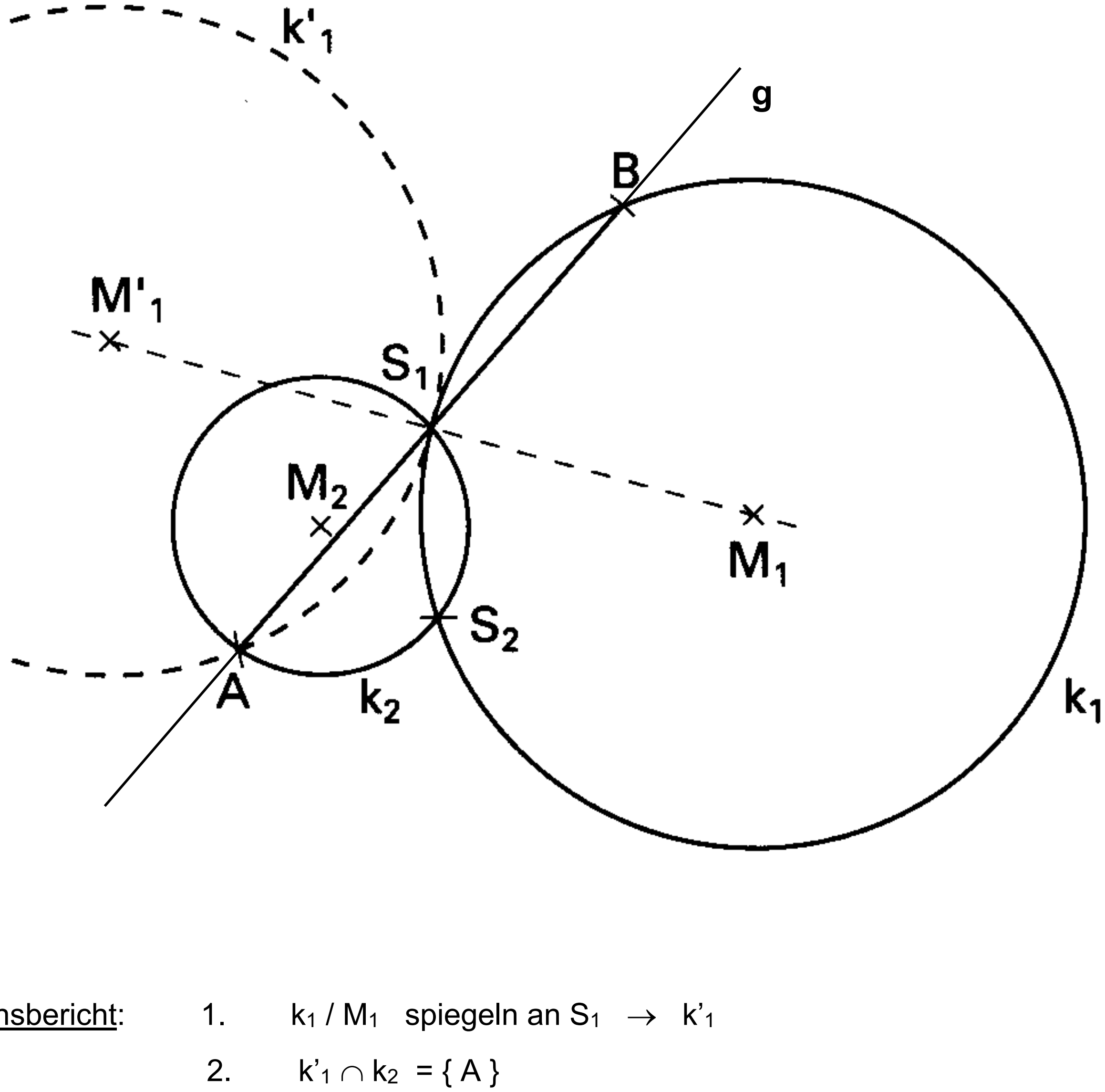
1. allgemeines Viereck
2. Tangentenviereck
3. Schiefer Drachen
4. Trapez
5. Sehnenviereck
6. Drachenviereck
7. Parallelogramm
8. gleichschenkliges Trapez
9. Rhombus / Raute
10. Rechteck
11. Quadrat

3 Herausforderungen

Durch das Erkennen von Symmetrie-Eigenschaften werden anspruchsvolle Aufgaben zum Teil stark vereinfacht.

Beispiel: „Zeichne zwei verschieden grosse Kreise k_1 und k_2, die einander in den Punkten S_1 und S_2 schneiden. Lege durch S_1 eine Sekante g, aus welcher die beiden Kreise gleich lange Sehnen ausschneiden.“

→ Idee: S_1 ist Symmetriepunkt der Strecke $\overline{AB}$!



Konstruktionsbericht:

1. k_1 / M_1 spiegeln an S_1 → k'_1
2. $k'_1 \cap k_2 = \{ A \}$
3. $AS_1 \cap k_1 = \{ B \}$
4. $AB = g$