D Operationen mit Brüchen

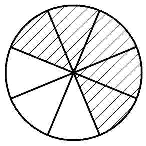
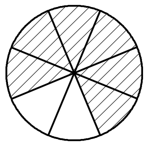
1 Vergleich von Brüchen

Es geht in diesem Kapitel ausschliesslich um den *Grössenvergleich* von *gemeinen Brüchen* !
Der Vergleich von *Dezimalbrüchen* ist wegen der *Stellenwertschreibweise* problemlos.

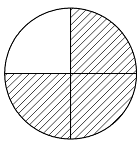
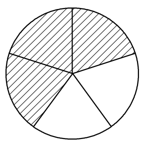
Beispiel: $0{,}73\underline{5}8 > 0{,}73\underline{4}9$

Haben gemeine Brüche entweder den *gleichen Nenner* oder den *gleichen Zähler*, ist der Grössenvergleich ebenfalls nicht schwierig.

Beispiele: $\frac{5}{8} < \frac{6}{8}$

$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$

Um aber nicht nur in diesen Ausnahmefällen gemeine Brüche vergleichen zu können, brauchen wir eine *allgemein gültige Regel*. Diese lautet:

Brüche mit verschiedenen Nennern müssen durch *Erweitern* zuerst *gleichnamig gemacht werden* , d.h. *auf den gleichen Nenner - den sogenannten Hauptnenner - gebracht werden* .

Beispiel: Welcher Bruch ist grösser : $\frac{2}{3}$ oder $\frac{5}{7}$?

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{\underbrace{21}_{\text{Hauptnenner}}} \;, \quad \frac{5}{7} = \frac{15}{21} \quad \longrightarrow \quad \underline{\frac{5}{7} > \frac{2}{3}}$$

Das Gleichnamigmachen der Brüche ist eigentlich problemlos, denn im Prinzip brauchten die gegebenen Nenner nur miteinander multipliziert zu werden. Dies kann unter Umständen aber *sehr grosse Zahlen* ergeben!

Beispiel: $\frac{3}{32}$, $\frac{5}{48}$.

$$\frac{3}{32} = \frac{3 \cdot 48}{32 \cdot 48} = \frac{144}{1536} \quad , \quad \frac{5}{48} = \frac{5 \cdot 32}{48 \cdot 32} = \frac{160}{1536}$$

Es geht deshalb bei der Bestimmung des Hauptnenners darum, das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der gegebenen Nenner zu bestimmen!

Bei kleineren Zahlen findet man das kgV oft durch *Probieren*, bei grösseren Zahlen verwendet man das Prinzip der *Primfaktorzerlegung*.

Hauptnenner bestimmen mit Hilfe der Primfaktorzerlegung

Die Brüche $\frac{3}{32}$, $\frac{5}{48}$ und $\frac{7}{60}$ sollen der Reihe nach geordnet werden.

1. Die Nenner 32 , 48 und 60 in ein Produkt aus Primfaktoren zerlegen.

$\rightarrow$ $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$\rightarrow$ $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$\rightarrow$ $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$\rightarrow$ $\text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 480$

2. Die Brüche durch Erweitern auf den Hauptnenner 480 bringen.

$\rightarrow$ $\frac{3}{32} = \frac{45}{480}$

$\rightarrow$ $\frac{5}{48} = \frac{50}{480}$

$\rightarrow$ $\frac{7}{60} = \frac{56}{480}$

3. Die Brüche ordnen:

$\rightarrow$ $\frac{7}{60} > \frac{5}{48} > \frac{3}{32}$

2 Addition und Subtraktion von Brüchen

Bei der *Addition* und *Subtraktion* von *gemeinen Brüchen* besteht die Schwierigkeit darin, dass wir diese Operationen nur durchführen können, wenn die Brüche alle *denselben Nenner* aufweisen.

Weil das meistens nicht der Fall ist, müssen wir vorher gleichnamig machen, d.h. alle Brüche durch Erweitern auf den Hauptnenner bringen.

Beispiel: $\frac{4}{15} + \frac{5}{12} = ?$

1. Hauptnenner (= kgV) bestimmen:

   $\rightarrow \quad 15 = 3 \cdot 5$

   $\rightarrow \quad 12 = 3 \cdot 4$

   $\rightarrow \quad \text{kgV} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{60}$

2. Gleichnamig machen durch Erweitern:

   $\rightarrow \quad \frac{4}{15} = \frac{16}{60}$

   $\rightarrow \quad \frac{5}{12} = \frac{25}{60}$

3. Gleichnamig gemachte Brüche addieren und ev. kürzen:

   $\rightarrow \quad \frac{4}{15} + \frac{5}{12} = \frac{16}{60} + \frac{25}{60} = \frac{41}{60}$

Falls *gemischte Zahlen* addiert oder subtrahiert werden, müssen diese zuerst in *unechte Brüche* verwandelt werden!

Beispiel: $2\frac{3}{8} + 1\frac{1}{3} - 3\frac{1}{18} = \frac{19}{8} + \frac{4}{3} - \frac{55}{18} =$

$$\frac{171}{72} + \frac{96}{72} - \frac{220}{72} = \frac{47}{72}$$

3 Vervielfachen und Teilen eines Bruches

Bei der *Multiplikation* eines gemeinen Bruches mit einer natürlichen Zahl gilt folgende Regel:

> Ein gemeiner Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man den *Zähler mit dieser Zahl multipliziert* und den *Nenner beibehält*.

Beispiele:

$$\frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{15}{8}$$

$$\frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Achtung: Nicht vergessen zu *kürzen* !

Bei der *Division* eines gemeinen Bruches durch eine natürliche Zahl gilt folgende Regel:

> Ein gemeiner Bruch wird durch eine natürliche Zahl dividiert, indem man:
>
> - den *Zähler* durch diese Zahl *dividiert* und den *Nenner beibehält*,
>
> oder (falls dies nicht möglich ist):
>
> - den *Nenner* mit dieser Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.

Beispiele:

$$\frac{8}{15} : 4 = \frac{2}{15}$$

$$\frac{3}{10} : 2 = \frac{3}{20}$$

$$\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Achtung: Nicht vergessen zu *kürzen* !

Bei der Multiplikation oder Division von *gemischten Zahlen* mit natürlichen Zahlen, werden erstere zuerst in *unechte Brüche* verwandelt.

Beispiele:

$$2\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3}$$

$$3\frac{3}{8} : 4 = \frac{27}{8} : 4 = \frac{27}{32}$$

Bei der Multiplikation und Division von *gemeinen Brüchen mit Buchstaben* ist das Vorgehen analog.
Besonders wichtig ist hier, dass *sorgfältig gekürzt wird* !

Beispiele:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$2x \cdot \frac{3y}{4} = \frac{6xy}{4} = \frac{3xy}{2}$$

$$\frac{5a}{6b} \cdot 2ab = \frac{10a^2b}{6b} = \frac{5a^2}{3}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{4a}{5b} : 6a = \frac{4a}{30ab} = \frac{2}{15b}$$

$$\frac{16pq^2}{81r} : 24p^2q^2r^2 = \frac{16pq^2}{81 \cdot 24p^2q^2r^3} =$$
$$\frac{2}{81 \cdot 3pr^3} = \frac{2}{243pr^3}$$

4 Multiplikation von Brüchen

Zwei gemeine Brüche werden miteinander multipliziert, indem man *die beiden Zähler miteinander multipliziert* und *die beiden Nenner miteinander multipliziert*.

Regel:

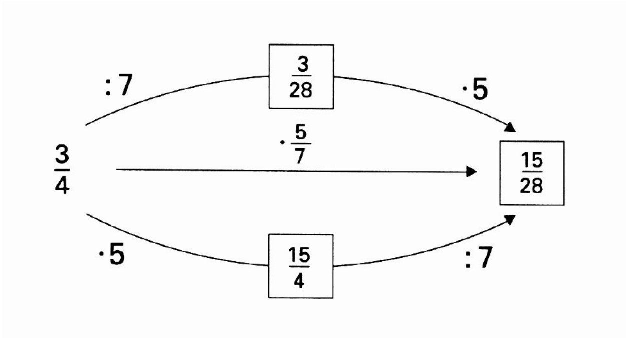
$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Beispiele:

1

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

→ Mit Hilfe eines *Operatordiagrammes* lässt sich das Produkt auch bestimmen!



2

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

→ Besser: falls möglich vor dem Multiplizieren Zähler und Nenner *kürzen* !

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2}$$

3

$$2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{17}{5} = \frac{9 \cdot 17}{4 \cdot 5} = \frac{153}{20}$$

→ Gemischte Zahlen werden vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandelt!

4 $$\frac{a^2}{2b} \cdot \frac{8b^3}{5a} = \frac{\cancel{a^2}^{\,a} \cdot \cancel{8b^3}^{\,4b^2}}{\cancel{2b}_{\,1} \cdot 5\cancel{a}_{\,1}} = \frac{4ab^2}{5}$$

→ *Bruchterme* (gemeine Brüche mit Buchstaben) werden analog multipliziert!

Vergrössern und verkleinern

Bei der Multiplikation eines Ausdruckes ist es *vom Multiplikator abhängig*, ob das *Resultat grösser oder kleiner ist als der ursprüngliche Wert*.

Regeln:

- Das *Produkt wird grösser*, wenn die Zahl, mit der multipliziert wird, *grösser als 1* ist.

  Beispiel: $2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad 3 > 2$

- Das *Produkt wird kleiner*, wenn die Zahl, mit der multipliziert wird, *kleiner als 1* ist.

  Beispiel: $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2} < 2$

- Das *Produkt bleibt gleich gross*, wenn die Zahl, mit der multipliziert wird, *gleich gross wie 1* ist.

  Beispiel: $2 \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 2$

Wahrscheinlichkeiten

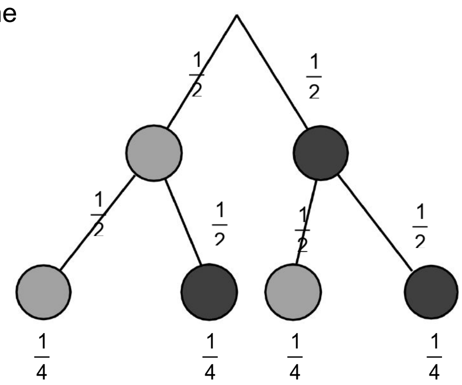
Wahrscheinlichkeiten werden oft mit *gemeinen Brüchen* angegeben.

Beispiele:

- Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 1 blauen und 1 schwarzen Kugel die blaue Kugel zu ziehen, beträgt $w = \frac{1}{2}$.

- Die Wahrscheinlichkeit, *zweimal hintereinander* die blaue Kugel aus derselben Urne zu ziehen (mit Zurücklegen!), beträgt

  $w = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.



5 Division durch Brüche

Werden *Zähler und Nenner eines gemeinen Bruches vertauscht*, erhält man den sogenannten *Kehrwert* (Reziprokwert) des Bruches.

Beispiel: Der Kehrwert von $\frac{3}{4}$ ist $\frac{4}{3}$.

Multipliziert man einen *gemeinen Bruch* mit seinem *Kehrwert*, erhält man immer 1.

Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

Dividiert man einen *gemeinen Bruch* durch *sich selber*, erhält man ebenfalls 1.

Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = 1$

Daraus folgt, dass die *Division durch einen gemeinen Bruch* der *Multiplikation mit dessen Kehrwert* entspricht.

Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$

Die allgemeine Formel lautet:

$$\boxed{: \frac{a}{b} = \cdot \frac{b}{a}}$$

Beispiele:

1 $$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

2 $$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Umkehroperatoren : Betrachtungen am Operatordiagramm

Beispiel:

$$\boxed{12} \; \underset{: \frac{2}{3} \,/\, \cdot \frac{3}{2}}{\overset{\cdot \frac{2}{3} \,/\, : \frac{3}{2}}{\rightleftarrows}} \; \boxed{8}$$

→ Von *links nach rechts* gelangt man mit den Operatoren $\cdot \frac{2}{3}$ oder $: \frac{3}{2}$.

→ Von *rechts nach links* gelangt man mit den Operatoren $: \frac{2}{3}$ oder $\cdot \frac{3}{2}$.

→ Der *Umkehroperator* von $\cdot \frac{2}{3}$ ist $: \frac{2}{3}$!

→ Der *Umkehroperator* von $: \frac{3}{2}$ ist $\cdot \frac{3}{2}$!

6 Mal so, mal so ...

Es ist bei vielen Aufgaben der Fall, dass gemeine Brüche *und* Dezimalbrüche zusammen auftreten.
Solche Aufgaben sind meistens *einfacher* zu lösen, wenn *ausschliesslich mit gemeinen Brüchen* operiert wird, vor allem wenn *nicht abbrechende Dezimalbrüche* enthalten sind.

Beispiele:

$$0,\overline{3} + \frac{5}{6} - 0,625 = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{8}{24} + \frac{20}{24} - \frac{15}{24} = \frac{13}{24}$$

$$1,\overline{5} : \frac{4}{9} = 1\frac{5}{9} : \frac{4}{9} = \frac{14}{9} : \frac{4}{9} = \frac{14}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7}{2}$$

$$0,7 - \frac{2}{3} \cdot \left(0,75 + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{10} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{10} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} =$$
$$\frac{7}{10} - \frac{2}{3} = \frac{21}{30} - \frac{20}{30} = \frac{1}{30}$$

Auch bei *Sätzchenaufgaben* ist es meistens einfacher, mit gemeinen Brüchen zu rechnen!

Beispiel: „Zerlege 1,1 in zwei Summanden, so dass der eine um $\frac{3}{4}$ grösser ist als der andere."

$$1,1 = x + \left(x + \frac{3}{4} \cdot x\right) = x + \left(1\frac{3}{4} \cdot x\right) = 2\frac{3}{4} \cdot x$$

$$x = 1,1 : 2\frac{3}{4} = \frac{11}{10} : \frac{11}{4} = \frac{11}{10} \cdot \frac{4}{11} = \underline{\frac{2}{5}}$$

1. Summand : $\underline{\underline{\frac{2}{5}}}$

2. Summand: $1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{7}{10}}}$