C ANWENDUNGEN

1 Die Strukturen der Prozentrechnung

Es gilt: $\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$ (lies: 1 Prozent)

(*Prozent* = pro centum (lat.) , der hundertste Teil)

Eine prozentuale Angabe bezieht sich immer auf einen bestimmten Wert. Dieser entspricht 100%. Wir nennen diesen Wert *Grundwert G*.

Beispiel: „Bestimme 5% von 80Fr.“ ---> 80Fr. ist der Grundwert G

$$\begin{aligned} 100\% &\;\hat{=}\; 80\text{Fr.} \\ 5\% &\;\hat{=}\; \underline{\underline{4\text{Fr.}}} \end{aligned} \qquad\qquad 80\text{Fr.} \xrightarrow{\approx 5\%} \underline{\underline{4\text{Fr.}}}$$

In der *Prozentrechnung* werden diese *Grössen* mit den folgenden *Begriffen* benannt:

1 Das *Ganze*, von dem ein Teil betrachtet wird, heisst *Grundwert G*.
(G = 80Fr.)

2 Der *Teil des Ganzen* heisst *Prozentwert W*.
(W = 4Fr.)

3 Das *Verhältnis* $\frac{Prozentwert\ W}{Grundwert\ G}$ wird prozentual mit dem *Prozentsatz p%* angegeben.
$\left(p\% = \frac{4\text{Fr.}}{80\text{Fr.}} = 0{,}05 = \frac{5}{100} = 5\%\right)$

Zwischen Grundwert G, Prozentwert W und Prozentsatz p% gilt folgender Zusammenhang:

$$\boxed{G \approx p\% = W}$$

<u>Beispiel</u>:

$G = 120kg$
$p\% = 36\%$

$$W = G \approx p\% = 120kg \approx 0{,}36 = \underline{\underline{43{,}2kg}}$$

Aufgelöst nach G und p% gilt:

$$\boxed{G = \frac{W}{p\%}} \qquad \boxed{p\% = \frac{W}{G}}$$

<u>Beispiele</u>:

$W = 240Fr$
$p\% = 60\%$

$$G = \frac{W}{p\%} = \frac{240Fr.}{0{,}6} = \underline{\underline{400Fr.}}$$

$G = 320m$
$W = 180m$

$$p\% = \frac{W}{G} = \frac{180m}{320m} = 0{,}5625 = \underline{\underline{56{,}25\%}}$$

Anwendungen der Prozentrechnung

1. Statt 200 Fr. muss für ein Möbelstück nur noch 160 Fr bezahlt werden. Wie gross ist der *Rabatt* in Prozenten?

G = 200 Fr.
W = 160 Fr.

$$p\% = \frac{W}{G} = \frac{160\ \text{Fr}}{200\ \text{Fr.}} = 0{,}8 = \underline{80\%} \quad , \qquad \text{Rabatt: } 100\% - 80\% = \underline{\underline{20\%}}$$

2. Ein Paket wiegt *netto* 36 kg, die *Tara* beträgt 8%. Berechne das *Bruttogewicht*. Runde auf g.

$\boxed{\text{Netto + Tara = Brutto}}$ $\boxed{\text{Brutto = 100\%}}$

---> Nettogewicht = 100% - 8% = 92%

W = 36 kg
p% = 92%

$$G = \frac{W}{p\%} = \frac{36\ \text{kg}}{0{,}92} \cong \underline{\underline{39{,}130\ \text{kg}}}$$

3. *Von 1990 bis 2000* nahm die Einwohnerzahl der Gemeinde A *um 6% zu*. Sie beträgt im Jahre 2000 10'840 Einwohner. Berechne die Einwohnerzahl des Jahres 1990.

$$1990 \xrightarrow{+\,6\%} 2000$$

100% 106%

W = 10‘176 Einwohner
p% = 106%

$$G = \frac{W}{p\%} = \frac{10176\ \text{Einwohner}}{1{,}06} = \underline{\underline{9'600\ \text{Einwohner}}}$$

4. *Von 1980 bis 1985* nahm die Zahl der Sugus-Käufer *um 30% ab*.
1980 waren es noch 6'200 Personen, welche wöchentlich 1 Sack Sugus kauften. Berechne die Anzahl der Käufer im Jahre 1985.

$$1980 \xrightarrow{-30\%} 1985$$

100% 70%

G = 6'200 Personen
p% = 70%

W = G · p% = 6'200 Personen · 0,7 = 4'340 Personen

5. In einer Kiste liegen 64 grosse und kleine Bonbons.Die Wahrscheinlichkeit, ein grosses Bonbon zu ziehen beträgt 25%.
Wie viele kleine Bonbons sind in der Kiste?

$\boxed{\text{64 Bonbons = 100\%}}$

G = 64 Bonbons
p% = 25%

W = G · p% = 64 Bonbons · 0,25 = 16 Bonbons

---> 64 Bonbons – 16 Bonbons = 48 Bonbons

2 Grundkenntnisse zum Zinsrechnen

Die *Bank* ist ein *Unternehmen für den Geldverkehr*. Geld kann auf der Bank angelegt werden, oder Geld kann als Kredit von der Bank ausgeliehen werden.
Der Geldbetrag (das Kapital) wirft sogenannte *Zinsen* ab, eine prozentual berechnete *Entschädigung für die leihweise Überlassung von Kapital*.

→	Legt man Geld auf der Bank an, *zahlt die Bank Zinsen*.
→	Nimmt man von der Bank Geld auf, *verlangt die Bank Zinsen*.

Bei Geldgeschäften verwendet man folgende Begriffe:

- Grundwert G $\rightarrow$ Kapital K
- Prozentwert W $\rightarrow$ Zins Z_a (a → Zins für 1 Jahr!)
- Prozentsatz p% $\rightarrow$ Zinssatz p%

Zwischen Kapital K, Zins Z_a und Zinssatz p% gilt folgender Zusammenhang:

$$\boxed{K \approx p\% = Z_a}$$

Beispiel:

$$K = 500\text{Fr.}$$
$$p\% = 3\%$$

$$Z_a = K \approx p\% = 500\text{Fr.} \approx 0{,}03 = \underline{15\text{Fr.}}$$

Der *Zins*, der nur *für eine bestimmte Zeit eines Jahres* zu berechnen ist, heisst Marchzins Z_t.
Da ein *Bankjahr* nur *360 Tage* zählt, gilt folgende Formel:

„Anzahl Tage“

$$Z_t = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$$

„360 Tage = 1 Jahr“

Beispiel:

K = 3'000Fr.
p% = 2%
t = 45 d *(d → Tag)*

$$Z_t = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360} = 3'000\text{Fr.} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{45}{360} = \underline{\underline{7{,}5\text{Fr.}}}$$

Regeln im Bankwesen bezüglich Zeitdauer:

- 1 Jahr = *360* Tage
- 1 Monat = *30* Tage *(auch der Februar!)*
- *1.Tag* einer Zeitdauer wird *nicht* gezählt
- *Letzter Tag* einer Zeitdauer *wird* gezählt
- Der *Monatsletzte* ist der *30. Tag* des Monats
  (31. Januar = 30. Tag des Monats / 28. Februar = 30. Tag des Monats)

Beispiele:

17. Januar - 30. Januar	→	13 Tage
17. Januar - 31. Januar	→	13 Tage
17. Februar - 28. Februar	→	13 Tage
17. Februar - 27. Februar	→	10 Tage
17. Februar - 17. März	→	30 Tage
1. Februar - 17. März	→	46 Tage
31. Januar - 17. März	→	47 Tage
1. Januar - 17. März	→	76 Tage
1. Januar - 31. Dezember	→	359 Tage

Verrechnungssteuer

Die Bank unterliegt der Vorschrift, von Zinsen eine *Verrechnungssteuer* (VST) in Abzug zu bringen. Diese beträgt *35% vom Zinsbetrag* und wird am Ende eines Jahres von diesem abgezogen.

3 Zinsrechnen: Alle Varianten

Durch Äquivalenzumformungen erhält man aus der Zinsformel für Z_a die *Berechnungsformeln für K und p%.*

$$\boxed{K = \frac{Z_a}{p\%}} \qquad \boxed{p\% = \frac{Z_a}{K}}$$

Beispiele:

$Z_a = 240Fr$
$p\% = 2\%$

$$K = \frac{Z_a}{p\%} = \frac{240Fr.}{0{,}02} = \underline{\underline{12'000Fr.}}$$

$K = 40'000Fr.$
$Z_a = 2'500Fr.$

$$p\% = \frac{Z_a}{K} = \frac{2500Fr.}{40000Fr.} = 0{,}0625 = \underline{\underline{6{,}25\%}}$$

Durch Äquivalenzumformungen erhält man aus der Zinsformel für Z_t die *<u>Berechnungsformeln für K, p% und t</u>*.

$$\boxed{K = \frac{Z_t \cdot 360}{p\% \cdot t}} \qquad \boxed{p\% = \frac{Z_t \cdot 360}{K \cdot t}} \qquad \boxed{t = \frac{Z_t \cdot 360}{K \cdot p\%}}$$

<u>Beispiele</u>:

Z_t = 840Fr
p% = 2%
t = 300d

$$K = \frac{Z_t \cdot 360}{p\% \cdot t} = \frac{840\text{Fr.} \cdot 360}{0{,}02 \cdot 300} = \underline{\underline{50'400\text{Fr.}}}$$

K = 10'000Fr.
Z_t = 480Fr.
t = 96d

$$p\% = \frac{Z_t \cdot 360}{K \cdot t} = \frac{480\text{Fr.} \cdot 360}{10000\text{Fr.} \cdot 96} = 0{,}18 = \underline{\underline{18\%}}$$

K = 15'000Fr.
Z_t = 520Fr.
p% = 6,5%

$$t = \frac{Z_t \cdot 360}{K \cdot p\%} = \frac{520\text{Fr.} \cdot 360}{15000\text{Fr.} \cdot 0{,}065} = \underline{\underline{192\text{d}}}$$

4 Verketten von Prozentrechnungen

Bei der *Berechnung von Prozentanteilen* verwenden wir *Kurznotationen*.

Beispiel: $\boxed{45\% \text{ von } x = 0{,}45 \cdot x}$

Mit *Operatordiagrammen* können Berechnungen von Prozentanteilen übersichtlich dargestellt werden.

Beispiel: „Berechne 45% von 320Fr.“

$$\boxed{320\text{Fr.} \xrightarrow{\cdot\, 0{,}45} \underline{\underline{144\text{Fr}}}.}$$

Bei *verketteten Prozentberechnungen* wird das Resultat einer Ausrechnung als *Ausgangswert für die nächste Berechnung* verwendet.
So entsteht eine „Kette“ von Prozentrechnungen.

Beispiel: „Eine Schulklasse zählt 25 SchülerInnen. 60% davon sind Mädchen. 20% von den Mädchen tragen eine Brille. Wieviele Mädchen der Klasse tragen eine Brille?“

$$25 \xrightarrow{\cdot\, 0{,}6} 15 \xrightarrow{\cdot\, 0{,}2} \underline{\underline{3}}$$

Bei den verketteten Prozentberechnungen können die einzelnen Multiplikatoren durch *einen* Multiplikator ersetzt werden.

Beispiel:

$$25 \xrightarrow{\cdot\, 0{,}6} 15 \xrightarrow{\cdot\, 0{,}2} \underline{\underline{3}}$$

$$25 \xrightarrow[\cdot\,(0{,}6\,\cdot\,0{,}2)\;=\;\cdot\;0{,}12]{} \underline{\underline{3}}$$

Die *Prozentanteile* bei verketteten Prozentberechnungen können sowohl *grösser als 100%* als auch *kleiner als 100%* sein.

Beispiel: „Der Preis eines Fernsehers von 1‘420Fr. wird zuerst um 10% gesenkt, dann aber wieder um 10% angehoben. Berechne den neuen Preis.“

$$1'420\text{Fr.} \xrightarrow{\cdot\, 0,9} 1'278\text{Fr.} \xrightarrow{\cdot\, 1,1} \underline{\underline{1'405,8\text{Fr}}}.$$

Kennt man bei verketteten Prozentrechnungen nur das *Schlussresultat*, muss über die *Umkehroperation* (Division!) der Zwischen- und Anfangswert bestimmt werden.

Beispiel: „Der Preis eines Kleides wird zuerst um 40% gesenkt, dann wieder um 20% angehoben. Wie teuer war das Kleid anfänglich, wenn am Schluss 540Fr. zu bezahlen ist?“

$$x \underset{:\,0,6}{\overset{\cdot\, \mathbf{0,6}}{\rightleftarrows}} y \underset{:\,1,2}{\overset{\cdot\, \mathbf{1,2}}{\rightleftarrows}} 540\text{Fr.}$$

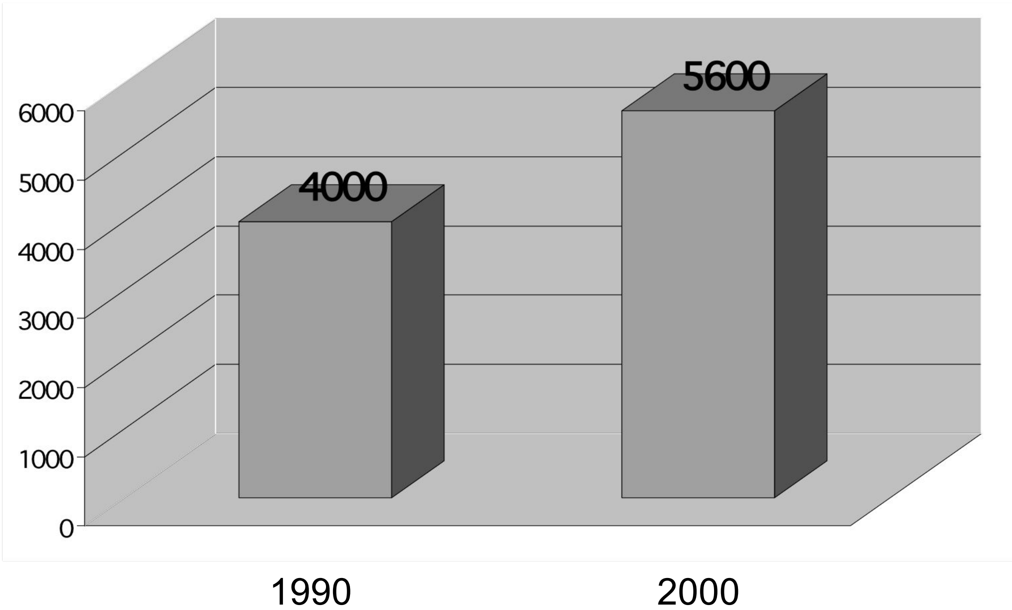
$y = 540\text{Fr.} : 1,2 = \underline{450\text{Fr.}}$

$x = 450\text{Fr.} : 0,6 = \underline{\underline{750\text{Fr.}}}$

5 Aus der Bevölkerungsstatistik

Die Einwohnerzahl einer Ortschaft, eines Kantons oder eines Staates verändert sich laufend. Die Zunahme bzw. Abnahme innerhalb eines bestimmten Zeitraumes wird meistens prozentual angegeben.

Beispiel: Eine Ortschaft zählte 1990 4‘000 Einwohner und im Jahre 2000 5'600 Einwohner.
Berechne die prozentuale Zunahme von 1990 bis 2000.



Die Einwohnerzahl von 1990 entspricht dem Grundwert und ist folglich 100%. Es gilt somit:

$$4'000\text{ E.} \xrightarrow{\cdot\, 1{,}4} 5'600\text{ E.}$$

(100%) *(140%)*

<u>Die Bevölkerungszunahme von 1990 bis 2000 beträgt 40%.</u>

6 Jahr für Jahr immer mehr (Wachstumsprobleme)

Die Einwohnerzahl einer Stadt nehme jährlich um 2% zu, was dem *Veränderungsfaktor* 1,02 entspricht.
Falls die Stadt zum jetzigen Zeitpunkt 10'000 Einwohner hat, so besitzt sie 1 Jahr später $1{,}02 \cdot 10'000 = 10'200$ Einwohner!

Bei der Berechnung der Einwohnerzahl nach 10 Jahren (*bei gleichbleibendem Wachstum!*) ergibt sich eine *Verkettung* des Veränderungsfaktors:

$10'000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02$ E. $\cong$ 12'190 Einwohner .

Mithilfe der *Potenzschreibweise* kann diese Verkettung mehrerer gleicher Faktoren kürzer notiert werden:

10 Jahre !

$10'000 \cdot 1{,}02^{10} \cong$ 12'190 Einwohner .

Beispiel: „Bei welcher prozentualen jährlichen Zuwachsrate verdoppelt sich die Einwohnerzahl eines Staates in 50 Jahren?“

Annahme: Die Einwohnerzahl betrage anfänglich 1E. und nach 50 Jahren 2 E.

$$\rightarrow \quad 1\text{ E.} \cdot (1 + x\%)^{50} = 2\text{ E.}$$

$$1\text{ E.} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{50} = 2\text{ E.}$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{50} = 2 \quad \Big| \sqrt[50]{}$$

$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt[50]{2} \quad \Big| -1$$

$$\frac{x}{100} = \sqrt[50]{2} - 1 \quad \Big| \cdot 100$$

$$x = 100 \cdot (\sqrt[50]{2} - 1) \cong \underline{1{,}40}$$

Die jährliche Zuwachsrate beträgt gerundet 1,40%.

Verändert man die vorherige Aufgabe so, dass die Zuwachsrate bekannt ist und die Zeitspanne für die Verdoppelung der Einwohnerzahl gesucht ist, ergibt sich eine völlig neue Rechnungssituation.

Beispiel: „In welchem Zeitraum ergibt sich bei einem jährlichen Bevölkerungswachstum von 2,5% eine Verdoppelung der Einwohnerzahl?“

Annahme: Die Einwohnerzahl betrage anfänglich 1E. und nach x Jahren 2 E.

→ $1 \text{ E.} \cdot 1{,}025^{x} = 2 \text{ E.}$

→ Da die Variable x als Exponent geschrieben steht, ist die Gleichung mit den bisherigen Methoden für uns unlösbar. Mithilfe der *Logarithmusfunktion* ist die Gleichung aber lösbar!

Es gilt:
- $\log 1'000 = 3$, denn $1'000 = 10^{3}$
- $\log 10 = 1$, denn $10 = 10^{1}$

→ $\log 10^{3} = 3 \cdot \log 10$!

→ $\boxed{\log a^{x} = x \cdot \log a}$

→ $1 \text{ E.} \cdot 1{,}025^{x} = 2 \text{ E.}$

$$1{,}025^{x} = 2 \qquad | \log$$

$$\log 1{,}025^{x} = \log 2$$

$$x \cdot \log 1{,}025 = \log 2 \qquad | :\log 1{,}025$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}025} \cong \underline{28{,}07}$$

Nach ca. 28 Jahren hat sich die Einwohnerzahl verdoppelt.

Zinseszins

Am Ende eines Jahres werden die angefallenen Zinsen dem Kapital zugeschlagen. Im darauffolgenden Jahr werden diese Zinsen mitverzinst. Man spricht dann von *Zinseszinsen*.

Beispiel: „Auf einem Sparheft sind am 1. Januar 2001 5'000Fr. gutgeschrieben. Der Zinssatz beträgt 2%. Berechne das Guthaben am 1. Januar 2003."

Am 1. Januar 2002 : 5'000Fr. · 1,02 = 5'100Fr.

Am 1. Januar 2003 : 5'100Fr. · 1,02 = 5'202Fr.

Bei grossen Zeiträumen verwendet man auch hier die Potenzschreibweise!

Beispiel: „Auf welchen Betrag wächst ein Guthaben von 15'000Fr. bei einem Zinssatz von 2,5% in 50 Jahren an?"

$\rightarrow \quad 15'000\text{Fr.} \cdot 1{,}025^{50} \cong \underline{\underline{51'557\text{Fr.}}}$

Ebenfalls kann mithilfe der Logarithmusfunktion eine Zeitdauer bestimmt werden, wenn das Anfangs- und Zielguthaben bekannt ist.

Beispiel: „In welcher Zeit verdoppelt sich ein Guthaben bei einem Zinssatz von 1%?"

Annahme: Das Anfangsguthaben betrage 1K. , das Zielguthaben 2 K.

$\rightarrow \quad 1\text{ K.} \cdot 1{,}01^{x} = 2\text{ K.}$

$$1{,}01^x = 2 \qquad | \log$$

$$\log 1{,}01^x = \log 2$$

$$x \cdot \log 1{,}01 = \log 2 \qquad | : \log 1{,}01$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}01} \cong \underline{69{,}66}$$

Nach ca. 70 Jahren hat sich das Guthaben verdoppelt.

7 Kunterbunt

Prozentrechnungen werden in verschiedensten Sachsituationen angewendet.

Beispiel 1: „Welcher Betrag, der jährlich einen Viertel Gewinn abwirft, vermehrt sich in vier Jahren auf 10’000Fr.?“

$$\rightarrow \quad x \cdot 1{,}25^4 = 10'000$$

$$x = \frac{10000}{1{,}25^4} = \underline{4'096}$$

Der Betrag lautet: $\underline{\underline{4'096\text{Fr.}}}$

Beispiel 2: „Wäre der Zinsfuss eines Kapitals um 0,75% höher, so könnte man in 320 Tagen gleichviel Zins bekommen wie mit dem tieferen Zinsfuss im ganzen Jahr. Berechne den gesuchten tieferen Zinsfuss.“

$$\rightarrow \quad Z_1 = K \cdot \frac{p}{100}$$

$$Z_2 = K \cdot \frac{p+0{,}75}{100} \cdot \frac{320}{360}$$

$$\rightarrow \quad Z_1 = Z_2$$

$$K \cdot \frac{p}{100} = K \cdot \frac{p+0{,}75}{100} \cdot \frac{320}{360} \qquad \Big| :K$$

$$\frac{p}{100} = \frac{p+0{,}75}{100} \cdot \frac{320}{360} \qquad \Big| \cdot 36'000$$

$$360p = (p+0{,}75) \cdot 320 \qquad \Big| :320$$

$$1{,}125p = p+0{,}75 \qquad \Big| -p$$

$$0{,}125p = 0{,}75 \qquad \Big| :0{,}125$$

$$p = \underline{6}$$

Der tiefere Zinsfuss beträgt $\underline{\underline{6\%}}$.