C Die Verbindung der Operationen

1 Das Ausmultiplizieren von Produkten

Unter *Ausmultiplizieren* versteht man die *Umwandlung eines Produktes in eine Summe*.

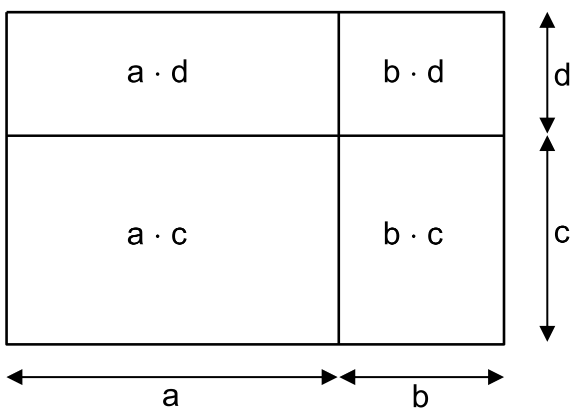
Beim Ausmultiplizieren eines Produktes bestehend aus einem *Vorfaktor* und einem *Klammerausdruck* gilt das *Distributivgesetz*.

$$a \cdot (b + c) \quad = \quad a \cdot b \; + \; a \cdot c \quad = \quad ab \; + \; ac$$

Das *Produkt zweier Klammerausdrücke* wird berechnet, indem *jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird*.

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (c + d) \quad &= \quad a \cdot c \; + \; a \cdot d \; + \; b \cdot c \; + \; b \cdot d \\ &= \quad ac \; + \; ad \; + \; bc \; + \; bd\end{aligned}$$

Beweis:



2 Erste Anwendungen

Das *Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken* wird beispielsweise beim Lösen von *Gleichungen* angewendet.

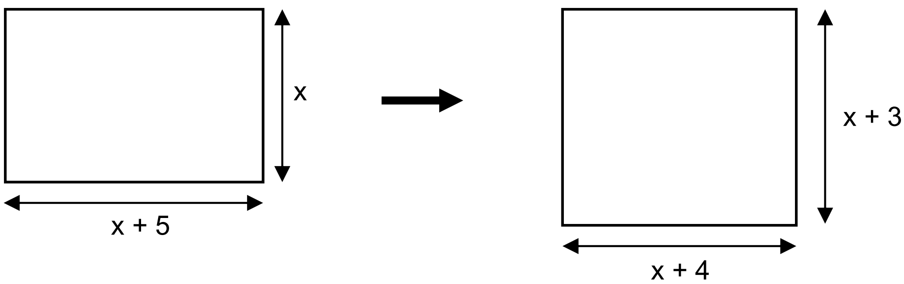
Beispiel 1 :

$$\begin{array}{lcll}
(4x - 5)(2x - 3) & = & 8x(x + 1) & \\
8x^2 - 12x - 10x + 15 & = & 8x^2 + 8x & \mid -8x^2 \\
-22x + 15 & = & 8x & \mid +22x \\
15 & = & 30x & \mid :30 \\
\underline{0,5} & \underline{=} & \underline{x} &
\end{array}$$

$$L = \underline{\underline{\{0,5\}}}$$

Beispiel 2 :

„Die eine Seite eines Rechtecks ist 5cm länger als die andere. Verlängert man die kürzere Seite um 3cm und verkürzt die andere um 1cm, so erhält man ein Rechteck gleichen Flächeninhalts. Bestimme die Seitenlängen."



$$\begin{array}{lcll}
(x + 5)\,x & = & (x + 4)(x + 3) & \\
x^2 + 5x & = & x^2 + 7x + 12 & \mid -x^2 \\
5x & = & 7x + 12 & \mid -5x \\
0 & = & 2x + 12 & \mid -12 \\
-12 & = & 2x & \mid :2 \\
\underline{-6} & \underline{=} & \underline{x} &
\end{array}$$

→ Die Aufgabe hat eine algebraische, *aber keine geometrische Lösung* !

3 Das Zerlegen von Summen in Faktoren

Das *Zerlegen einer Summe in Faktoren* ist das *Gegenteil des Ausmultiplizierens*.
Man spricht bei diesem Umformungsschritt auch von „*Faktorisieren*“ oder „*Ausklammern*“.

Es gilt:

$$3\,(a + b) \overset{\text{„Ausmultiplizieren“}}{=} 3a + 3b$$

$$3a + 3b \underset{\text{„Faktorisieren“}}{=} 3\,(a + b)$$

Es gibt *verschiedene Arten der Faktorzerlegung*:

1. Ausklammern des ggT :

   $6a^2b + 12ab - 9b^3 \quad = \quad 3b\,(2a^2 + 4a - 3b^2)$

2. Faktorisieren in zwei Schritten :

   $3x - 3y + bx - by \quad = \quad 3\,(x - y) + b\,(x - y) \quad = \quad (x - y)\,(3 + b)$

3. Zerlegen in zwei Klammern durch „Probieren“ :

   $x^2 + 3x + 2 \quad = \quad (x + 2)\,(x + 1)$

4. Ausklammern des ggt und Zerlegen in zwei Klammern :

   $2x^3 - 10x^2 - 28x \quad = \quad 2x\,(x^2 - 5x - 14) \quad = \quad 2x\,(x + 2)\,(x - 7)$

4 Binomische Formeln

Die *binomischen Formeln* stellen einen wichtigen *Sonderfall der Multiplikation von zwei Summen* dar.
Der Begriff *„binomisch"* drückt aus, dass es sich um *Summen bestehend aus zwei Summanden* handelt (lat. *bis* = doppelt , *nomen* = Name).

Es gelten die folgenden 3 binomischen Formeln:

1	$(a + b)^2$	=	$(a + b)(a + b)$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2$	=	$(a - b)(a - b)$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b)(a - b)$			=	$a^2 - b^2$

Beispiele:

1. $(3x + 2y)^2 = (3x + 2y)(3x + 2y) = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

2. $(x - 7)^2 = (x - 7)(x - 7) = x^2 - 14x + 49$

3. $(x^3 + 5)(x^3 - 5) = x^6 - 25$

4. $16a^2 + 40ab + 25b^2 = (4a + 5b)(4a + 5b) = (4a + 5b)^2$

5. $4u^2 - 4uv + v^2 = (2u - v)(2u - v) = (2u - v)^2$

6. $x^4y^2 - 9z^6 = (x^2y + 3z^3)(x^2y - 3z^3)$

5 Algebra – Arithmetik - Geometrie

Quadratische Gleichungen lösen

Eine quadratische Gleichung kann *zwei Lösungen*, *eine Lösung* oder *keine Lösung* haben.

Beispiele:

1

$$x^2 = 9$$
$$x = +3 / -3$$
$$L = \{ +3 ; -3 \}$$

2

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x - 3)(x - 3) = 0$$
$$x = +3$$
$$L = \{ +3 \}$$

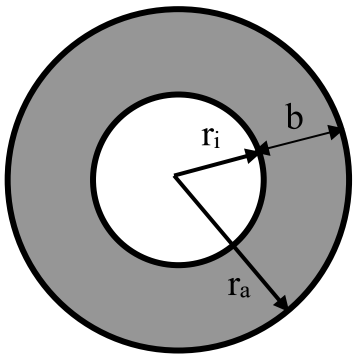
3

$$x^2 = -1$$
$$L = \{ \}$$

Der Kreisring

Das Gebiet, das von *zwei konzentrischen Kreisen* begrenzt wird, heisst *Kreisring*.

Den *Flächeninhalt des Kreisrings* erhält man als *Differenz der beiden Kreisflächen*.



$$A = r_a^2 \cdot \pi - r_i^2 \cdot \pi$$
$$= \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)$$
$$= \pi \cdot (r_a + r_i) \cdot (r_a - r_i)$$

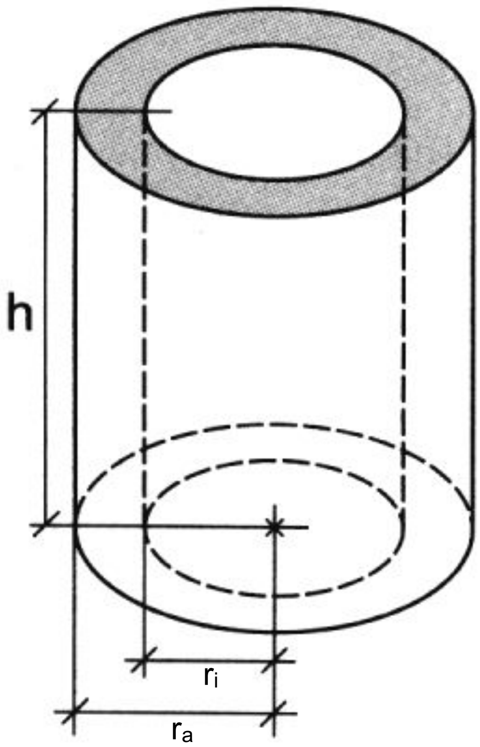
b : Ringbreite

Der Hohlzylinder

„Stanzt“ man aus einem geraden Kreiszylinder einen zweiten Zylinder mit kleinerer Grundfläche aber gleichem Kreismittelpunkt aus, so bildet der Restkörper einen *Hohlzylinder*.

Die *Grund- und Deckfläche* wird von *zwei kongruenten Kreisringen* gebildet.

Das *Volumen des Hohlzylinders* erhält man als *Differenz der beiden Zylindervolumina*.



$$
\begin{aligned}
V &= V_a - V_i \\
&= G_a \cdot h - G_i \cdot h \\
&= r_a^2 \cdot \pi \cdot h - r_i^2 \cdot \pi \cdot h \\
&= (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi \cdot h \\
&= (r_a + r_i) \cdot (r_a - r_i) \cdot \pi \cdot h
\end{aligned}
$$