C Brüche und Prozente

1 Brüche und Bruchteile

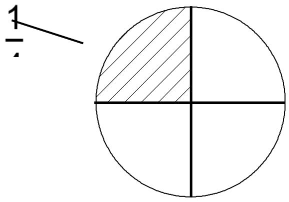
Gemeine Brüche

Teilt man ein Ganzes in 4 gleiche Teile, so erhält man als Bruchstücke *Viertel*.

Zähler

Es gilt: 1 Viertel = $\frac{1}{4}$

Nenner



Die Anzahl der Teile, in die man ein Ganzes unterteilt, nennt man *Nenner*.
Er steht *unter dem Bruchstrich*.

Die Anzahl, die angibt, wie viele dieser Teile gemeint sind, nennt man *Zähler*.
Er steht *über dem Bruchstrich*.

Brüche, welche mit einem Bruchstrich dargestellt werden, heissen *gemeine Brüche*.

Man unterscheidet *verschiedene Arten von gemeinen Brüchen*:

1 Stammbrüche: *der Zähler ist 1*
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right)$.

2 Echte Brüche: *der Zähler ist kleiner als der Nenner*
$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{10}, \frac{25}{26}, \ldots \right)$.

3 Unechte Brüche: *der Zähler ist grösser als der Nenner*
$\left(\frac{3}{2}, \frac{16}{5}, \frac{9}{8}, \frac{31}{18}, \ldots \right)$.

4 <u>Scheinbrüche</u>: *der Zähler ist ein Vielfaches des Nenners* $\left(\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{4}{4}, \frac{20}{5}, \ldots \right)$.

<u>Es gilt ferner zu beachten</u> :

- *<u>Unechte Brüche</u>* können als *<u>gemischte Zahl</u>* geschrieben werden.

  (<u>Beispiele</u>: $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$, $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$)

- *<u>Scheinbrüche</u>* können durch eine *<u>natürliche Zahl</u>* ersetzt werden.

  (<u>Beispiele</u>: $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{20}{5} = 4$)

- Brüche sind *<u>kleiner als 1</u>*, wenn der *<u>Zähler kleiner als der Nenner</u>* ist.

  (<u>Beispiele</u>: $\frac{3}{4} < 1$, $\frac{9}{10} < 1$, $\frac{81}{82} < 1$)

- Brüche sind *<u>grösser als 1</u>*, wenn der *<u>Zähler grösser als der Nenner</u>* ist.

  (<u>Beispiele</u>: $\frac{5}{4} > 1$, $\frac{11}{10} > 1$, $\frac{83}{82} > 1$)

- Brüche haben den *<u>Wert 1</u>*, wenn der *<u>Zähler gleich gross wie der Nenner</u>* ist.

  (<u>Beispiele</u>: $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{10}{10} = 1$, $\frac{82}{82} = 1$)

- Gemeine Brüche werden meistens in *<u>gekürzter Form</u>* notiert.

  (<u>Beispiele</u>: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$, $\frac{120}{240} = \frac{1}{2}$)

Dezimalbrüche

Dividiert man bei einem gemeinen Bruch den *Zähler durch den Nenner*, erhält man einen *Dezimalbruch*.

Beispiel: $\frac{1}{4} = 1:4 = 0{,}25$

gemeiner Bruch Dezimalbruch

Gemeine Brüche lassen sich immer in Dezimalbrüche verwandeln, doch entstehen *verschiedene Formen*. Es gibt drei Fälle:

1 Der entstehende Dezimalbruch ist *endlich* (bricht ab).

Beispiel: $\frac{1}{8} = 0{,}125$

2 Der entstehende Dezimalbruch ist *unendlich* (bricht nicht ab) und *periodisch* (sich regelmässig wiederholende Ziffernfolge).

Beispiele: $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$, $\frac{1}{11} = 0{,}090909... = 0{,}\overline{09}$

Die sich regelmässig wiederholende Ziffernfolge wird in der Kurzschreibweise *überstrichen* !

3 Der entstehende Dezimalbruch ist *unendlich* und *erst von einer gewissen Stelle an periodisch*.

Beispiele:

$\frac{1}{6} = 0{,}1666... = 0{,}1\overline{6}$, $\frac{1}{12} = 0{,}08333... = 0{,}08\overline{3}$

Nur die sich *regelmässig wiederholende Ziffernfolge* wird in der Kurzschreibweise *überstrichen* !

Umgekehrt lassen sich viele, *aber nicht alle* Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandeln.

1 $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

2 $\pi = 3{,}141592654...$ (nicht abbrechender, nicht periodischer Dezimalbruch!)

Der gemeine Bruch als Operator

Wenn ein *gemeiner Bruch als Operator* eingesetzt wird, wird in zwei Schritten das Resultat bestimmt.
Der *Nenner ist der Divisor*, der *Zähler der Multiplikator* .

Beispiel: „ Bestimme $\frac{2}{3}$ von 21.“

$$\begin{tikzcd}
\boxed{21} \arrow[rr, "\cdot\frac{2}{3}"] \arrow[dr, ":3"'] & & \boxed{14} \\
& \boxed{7} \arrow[ur, "\cdot 2"'] &
\end{tikzcd}$$

Die dazugehörige Gleichung lautet: $21 \cdot \frac{2}{3} = 14$.

Zahlenmengen

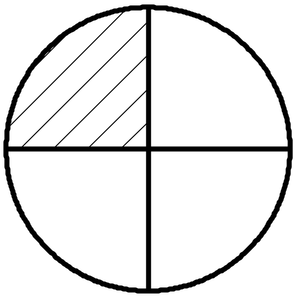
- Natürliche Zahlen: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
  $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

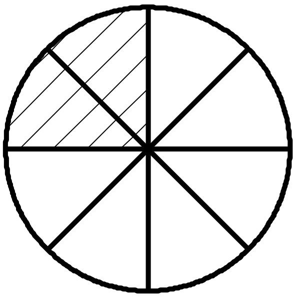
- Ganze Zahlen: $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

- Rationale Zahlen: $Q^+ = \{\text{alle positiven Brüche}\}$
  $Q = \{\text{alle Brüche}\}$

2 Verschiedene Zahlen der gleichen Form

Unterteilt man einen Kreis in *vier gleich grosse Teile* und nimmt *einen Teil* davon, erhält man gleich viel, wie wenn man denselben Kreis in *acht gleich grosse Teile* unterteilt und *zwei Teile* davon nimmt.





Es gilt folglich:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\frac{1}{4}} \arrow[rr, bend left, "\cdot 2"] \arrow[rr, bend right, "\cdot 2"'] & = & \mathbf{\frac{2}{8}} \end{tikzcd}$$

Multipliziert man *Zähler und Nenner* des ersten Bruches mit 2, erhält man den zweiten Bruch. Dieser Vorgang heisst *Erweitern*.

→ Beim Erweitern wird die *Form* eines Bruches *verändert*, nicht aber dessen Wert!

Beispiele:

Erweitere $\frac{3}{8}$ mit 5 → $\frac{3\cdot 5}{8\cdot 5}=\frac{15}{40}$

Erweitere $\frac{2a}{3b}$ mit 4ab → $\frac{2a\cdot 4ab}{3b\cdot 4ab}=\frac{8a^2b}{12ab^2}$

Erweitere $\frac{6x^2}{25xy^2}$ mit $12xy^2$ → $\frac{6x^2\cdot 12xy^2}{25xy^2\cdot 12xy^2}=\frac{72x^3y^2}{300x^2y^4}$

Weisen *Zähler und Nenner* eines Bruches *einen oder mehrere gemeinsame Teiler* auf, kann der Bruch *gekürzt* werden, indem *Zähler und Nenner* durch *dieselbe Zahl dividiert* werden.
Die kann *schrittweise* oder *direkt* erfolgen!

Beispiel:

$$\frac{36}{120} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{18}{60} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{9}{30} \overset{:3}{\underset{:3}{=}} \frac{3}{10}$$

(schrittweise)

$$\frac{36}{120} \overset{:12}{\underset{:12}{=}} \frac{3}{10}$$

(direkt)

> → Beim Kürzen wird die *Form* eines Bruches *verändert*, nicht aber dessen Wert!

Kann ein Bruch *nicht mehr weiter gekürzt* werden, steht er in der sogenannten *Grundform*.

Beispiel:

$$\frac{18}{48} = \frac{9}{24} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

Grundform

Auch *Bruchterme* (Brüche mit Buchstaben) lassen sich kürzen!

Beispiel:

$$\frac{12x^2y}{20xy^3} = \frac{12\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}}{20\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y} = \frac{3\cdot x}{5\cdot y\cdot y} = \frac{3x}{5y^2}$$

3 Brüche und Dezimalbrüche

Es gibt 2 Arten von Brüchen: *Dezimalbrüche* und *gemeine Brüche*.

Beispiele:
- Dezimalbrüche: 0,58 / 3,0654 / 0,0001
- Gemeine Brüche: $\frac{1}{5}$ / $\frac{5}{3}$ / $\frac{9}{28}$

Gemeine Brüche können in Dezimalbrüche umgewandelt werden und umgekehrt.

Beispiel: $\frac{1}{2} = 0{,}5$

Es ist wichtig, dass man die *Umwandlungstechniken* kennt.

Umformung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche

Gemeine Brüche lassen sich immer in Dezimalbrüche verwandeln. Es gibt drei Arten von Dezimalbrüchen, die entstehen können.

1. *Abbrechende Dezimalbrüche:*

   Beispiel: $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$.

2. *Rein periodische Dezimalbrüche (nicht abbrechend)*:

   Beispiel: $\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0{,}444... = 0{,}\overline{4}$.

   → Die Ziffer 4 ist die *Periode*.

3. *Periodische Dezimalbrüche mit Vorziffer/n (nicht abbrechend)*:

   Beispiel: $\frac{5}{12} = 5 : 12 = 0{,}41666... = 0{,}41\overline{6}$.

   → Die Ziffern 4 und 1 sind die *Vorziffern* , die Ziffer 6 ist die *Periode*.

Umformung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche

Man unterscheidet zwei Umwandlungsarten:

1. *Umwandlung von abbrechenden Dezimalbrüchen:*

Hier erfolgt die Umwandlung, indem die Ziffernfolge rechts des Kommas durch die Stelleneinheit der letzten Ziffer dividiert wird. Anschliessend wird gekürzt.

Beispiel: $0{,}325 = \frac{325}{1000} = \frac{13}{40}$.

2. *Umwandlung von nicht abbrechenden Dezimalbrüchen:*

Hier wird unterschieden zwischen den rein periodischen Dezimalbrüchen und den periodischen Dezimalbrüchen mit Vorziffer/n.

Rein periodische Dezimalbrüche

Beispiele: $0{,}\overline{1} = \frac{1}{9}$ / $0{,}\overline{01} = \frac{1}{99}$ / $0{,}\overline{001} = \frac{1}{999}$ / etc.

Daraus lässt sich ableiten:

$0{,}\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ / $0{,}\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ / $0{,}\overline{618} = \frac{618}{999} = \frac{206}{333}$.

Periodische Dezimalbrüche mit Vorziffer/n

Beispiele: $0{,}0\overline{1} = \frac{1}{90}$ / $0{,}0\overline{01} = \frac{1}{990}$ / $0{,}0\overline{001} = \frac{1}{9990}$ / etc.

Daraus lässt sich ableiten:

$0{,}0\overline{6} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ / $0{,}0\overline{36} = \frac{36}{990} = \frac{2}{55}$ /

$0{,}0\overline{618} = \frac{618}{9990} = \frac{103}{1665}$.

Falls die Vorziffer ≠ 0 ist, erfolgt die Umwandlung wie folgt:

$0{,}5\overline{3} = 0{,}5 + 0{,}0\overline{3} =$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{15}{30} + \frac{1}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \text{ .}$$

4 Bruchteile und Prozente

Der Begriff *"Prozent "* ist lateinisch und heisst *"von Hundert "*.

Als Abkürzung für "Prozent" verwendet man das Zeichen " % ".

Es gilt:

$$\boxed{1\,\% \quad = \quad 1 \text{ von } 100 \quad = \quad \frac{1}{100}}$$

Beispiel: Berechne 1% von 5’625Fr.

$$\rightarrow \quad 5'625\text{Fr.} \cdot \frac{1}{100} = 5'625\text{Fr.} : 100 = \underline{\underline{56{,}25\text{Fr.}}}$$

Bei der Berechnung von *mehr als 1%* erhalten wir in *zwei Schritten* das Resultat:

Beispiel: Berechne 6% von 1’040kg

$$\rightarrow \quad \begin{tikzcd} 1'040\text{kg} \arrow[rr, "\cdot \frac{6}{100}"] \arrow[dr, ": 100"'] & & \boxed{62{,}4\text{kg}} \\ & 10{,}4\text{kg} \arrow[ur, "\cdot 6"'] & \end{tikzcd}$$

$$\rightarrow \quad 1'040\text{kg} \cdot \frac{6}{100} = (1'040\text{kg} : 100) \cdot 6 = \underline{\underline{62{,}4\text{kg}}}$$

Da die Gleichung $\boxed{6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06}$ gilt, lässt sich die Aufgabe auch

in *einem Schritt* lösen: $1'040\text{kg} \cdot 0{,}06 = \underline{\underline{62{,}4\text{kg}}}$.