C Rechenoperationen II

1 Die Multiplikation

Die *Multiplikation* entspricht einer *Addition mehrerer gleichenSummanden*.

Beispiel*:* $8 \cdot 5 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$

Es gelten folgende *Bezeichnungen*:

8	**·**	**5**	**=**	**40**
Multiplikand (1. Faktor)		Multiplikator (2. Faktor)		Produkt

Wie bei der Addition gelten auch bei der Multiplikation das *Kommutativ*- und *Assoziativgesetz*.

Kommutativgesetz: $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$

Assoziativgesetz: $(8 \cdot 5) \cdot 2 = 8 \cdot (5 \cdot 2)$

Mit Hilfe des *schriftlichen Multiplikationsverfahren* können schwierige Multiplikationen bewältigt werden.

Beispiel:

$$
\begin{array}{rl}
267 \cdot 916 & \\
\hline
1602 & \longrightarrow \; 6 \cdot 267 \\
267 & \longrightarrow \; 1 \cdot 267 \text{ bzw } 10 \cdot 267 \\
2403 & \longrightarrow \; 9 \cdot 267 \text{ bzw } 900 \cdot 267 \\
\hline
244'572 & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

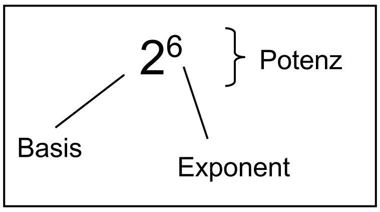
2 Potenzen und Potenzieren – Grosse Zahlen

Besteht eine Multiplikation aus *lauter gleichen Faktoren*, so drückt man es verkürzt als *Potenz* aus.

Beispiel: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$

(Die Zahl 2 wird 6 mal mit sich selbst multipliziert)

Es gelten folgende *Bezeichnungen*:



Potenzen mit dem *Exponenten 2* heissen *Quadratzahlen*.

Beispiele: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, ...

Potenzen mit der *Basis 10* heissen *Zehnerpotenzen*.

Beispiel: $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10'000$

Grosse Zahlen können mit Hilfe der *Zehnerpotenzen* viel kürzer geschrieben werden.

Beispiele:
$1'000'000 = 10^6 =$ 1 Million
$1'000'000'000 = 10^9 =$ 1 Milliarde
$1'000'000'000'000 = 10^{12} =$ 1 Billion
$1'000'000'000'000'000 = 10^{15} =$ 1 Billiarde

Es gilt weiter:

1 $8'500'000 = 8{,}5$ Millionen $= 8{,}5 \cdot 10^6$

Summe der Exponenten!

2 $10^3 \cdot 10^6 = 1'000 \cdot 1'000'000 = 1'000'000'000 = 10^9$

3 Die Division

Die *Division* ist die *Umkehroperation der Multiplikation*.

Beispiel: $\boxed{4} \underset{:7}{\overset{\cdot 7}{\rightleftarrows}} \boxed{28}$

Division

Dividieren bedeutet *teilen* oder *messen*.

Beispiele:

28 Fr.	:	7	=	4 Fr.	(*teilen*)
28 m	:	7 m	=	4	(*messen*)

Es gelten folgende *Bezeichnungen*:

28	:	7	=	4
Dividend		Divisor		Quotient

Bei schwierigen Divisionsaufgaben verwendet man ein *schriftliches Verfahren*.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 4 & 5 & 2 & 6 & : & 2 & 7 & = & \underline{\underline{5\ 3\ 8}} \\
 & 1 & 0 & 2 & & & & & & \\
 & & 2 & 1 & 6 & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

Es ist wichtig, dass vor dem schriftlichen Dividieren eine *Überschlagsrechnung* gemacht wird, um allfällige grobe Rechnungsfehler zu bemerken!

Potenzen mit derselben Basis können problemlos dividiert werden.

Beispiele:

$10^6 : 10^2 = 1'000'0\cancel{0}\cancel{0} : 1\cancel{0}\cancel{0} = 10'000 = \underline{\underline{10^4}}$

$4^5 : 4^3 = (4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}) : (\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}) = 4 \cdot 4 = \underline{\underline{4^2}}$

$x^8 : x^2 = \underline{\underline{x^6}}$

Es gilt: Der *Exponent des Resultates* berechnet sich als *Differenz der Exponenten*, die Basis bleibt dieselbe.

Wichtige Regeln

1. Die Operatoren $\cdot 1$ und $:1$ *verändern den Wert einer Zahl nicht*.

   Beispiele: $18 \cdot 1 = 18$ *und* $18 : 1 = 18$

2. Der Operator $\cdot 0$ *erzeugt als Resultat immer den Wert 0*.

   Beispiele: $18 \cdot 0 = 0$ *und* $a \cdot 0 = 0$

3. *Die Division durch O ist nicht definiert!*

   Beispiel: $18 : 0 =$ nicht definiert

4 Zur Teilbarkeit von Zahlen

Dividiert man *eine natürliche Zahl durch eine andere*, geht die Rechnung meistens nicht *ganzzahlig* auf, und es entsteht ein *Rest*.

Beispiel: 27 : 6 = 4 , Rest 3 .

Man kann mit Hilfe von *Teilbarkeitsregeln* prüfen, ob bei der Division durch eine bestimmte natürliche Zahl ein Rest entsteht oder nicht.

Teilbarkeitsregeln

2 : Eine Zahl ist teilbar durch 2, wenn ihre Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 heisst.
(solche Zahlen nennt man *gerade Zahlen*)

3 : Eine Zahl ist teilbar durch 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
(die *Quersumme* wird gebildet, indem *die einzelnen Ziffern einer Zahl addiert werden*)

4 : Eine Zahl ist teilbar durch 4, wenn ihr Hunderterrest durch 4 teilbar ist.
(der *Hunderterrest* ist die *aus den letzten zwei Ziffern gebildete Zahl* / es ist der Rest, der bei einer Division durch 100 entsteht)

5 : Eine Zahl ist teilbar durch 5, wenn ihre Einerziffer 0 oder 5 heisst.

6 : Eine Zahl ist teilbar durch 6, wenn sie durch 2 *und* 3 teilbar ist.
(denn: $6 = 2 \cdot 3$, und: 2 und 3 sind *teilerfremd* (haben keinen gemeinsamen Teiler)).

7 : Keine Regel!

8 : Eine Zahl ist teilbar durch 8, wenn ihr Tausenderrest durch 8 teilbar ist.
(der *Tausenderrest* ist die *aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl* / es ist der Rest, der bei einer Division durch 1'000 entsteht)

9 : Eine Zahl ist teilbar durch 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

10: Eine Zahl ist teilbar durch 10, wenn ihre Einerziffer 0 heisst.

12: Eine Zahl ist teilbar durch 12, wenn sie durch 3 *und* 4 teilbar ist.
(denn: $12 = 3 \cdot 4$, und: 3 und 4 sind *teilerfremd* (haben keinen gemeinsamen Teiler)).

25: Eine Zahl ist teilbar durch 25, wenn ihr Hunderterrest durch 25 teilbar ist.

125: Eine Zahl ist teilbar durch 125, wenn ihr Tausenderrest durch 125 teilbar ist.

Primzahlen

Als *Primzahlen* bezeichnet man alle natürlichen Zahlen, die nur *durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilbar* sind.

Die *erste Primzahl heisst 2*. Die weiteren Primzahlen lauten: 3, 5, 7, 11, ...

Es gibt *unendlich viele Primzahlen*. Die Häufigkeit nimmt allerdings mit grösseren Zahlen ab. Eine sehr alte Methode zur Bestimmung von Primzahlen ist das sogenannte *Sieb des Eratosthenes*!

Es funktioniert nach folgendem *Prinzip*:

1. Man schreibt eine Liste aller natürlichen Zahlen auf, die man überprüfen will:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Nun streicht man als erstes die 1 weg, da 1 keine Primzahl ist.

3. Die Zahl 2 wurde bis jetzt nicht weggestrichen und ist deshalb eine Primzahl! Wir markieren sie mit einem Kreis.

4. Wir streichen nun alle Vielfachen von 2 durch, da diese Zahlen sicher keine Primzahlen sind.

5. Die Zahl 3 ist die nächste nicht durchgestrichene Zahl und deshalb eine Primzahl! Wir markieren sie mit einem Kreis.

6. Wir streichen nun alle Vielfachen von 3 durch, da diese Zahlen sicher keine Primzahlen sind.

7. Die Zahl 5 ist die nächste nicht durchgestrichene Zahl und deshalb eine Primzahl! Wir markieren sie mit einem Kreis.

8. Wir streichen nun alle Vielfachen von 5 durch, da diese Zahlen sicher keine Primzahlen sind.

9. etc.

Die Primzahlen zwischen 1 und 100 heissen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

5 Dezimalbrüche in Divisionsaufgaben

Geht eine Division mit natürlichen Zahlen nicht auf, schreiben wir den verbleibenden Zahlenwert als *Rest*.

Beispiel: 248 : 5 = 49 *Rest 3*

Statt den Rest zu notieren, können wir die Division mit dem Rest fortsetzen und erhalten so als Resultat eine *Dezimalzahl*.

Beispiel: 248 : 5 = 49,6

(Rest 3 = 30 Zehntel → 30 Zehntel : 5 = 6 Zehntel = 0,6)

Bei der Division durch eine *Zehnerpotenz* ($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1'000$, ...) wird das *Komma um so viele Stellen nach links verschoben, wie die Zehnerpotenz Nullen* hat.

Beispiel:

5'867 : 10 = 586,7

5'867 : 100 = 58,67

5'867 : 1'000 = 5,867

5'867 : 10'000 = 0,5867

Bei der *Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl* führt die Schreibweise mit den *Stellenwerten* zum Resultat.

Beispiele:

0,9 : 3 = 9 Zehntel : 3 = 3 Zehntel = 0,3

0,12 : 3 = 12 Hundertstel : 3 = 4 Hundertstel = 0,04

0,2 : 5 = 2 Zehntel : 5 = 20 Hundertstel : 5 = 4 Hundertstel = 0,04

14,4 : 12 = 144 Zehntel : 12 = 12 Zehntel = 1,2

0,288 : 12 = 288 Tausendstel : 12 = 24 Tausendstel = 0,024

Bei der Division *durch eine Dezimalzahl* formen wir die Aufgabe durch *gleichsinnige Kommaverschiebung* so um, dass der *Divisor* eine *natürliche Zahl* wird.

Beispiele*:*

$120 : 0{,}2 \;=\; 120{,}\underrightarrow{0} : 0{,}\underrightarrow{2} \;=\; 1'200 : 2 \;=\; 600$

$30 : 0{,}005 \;=\; 30{,}\underrightarrow{000} : 0{,}\underrightarrow{005} \;=\; 30'000 : 5 \;=\; 6'000$

$56 : 0{,}0014 \;=\; 56{,}\underrightarrow{0000} : 0{,}\underrightarrow{0014} \;=\; 560'000 : 14 \;=\; 40'000$

$6{,}\underrightarrow{4} : 0{,}\underrightarrow{4} \;=\; 64 : 4 \;=\; 16$

$0{,}\underrightarrow{96} : 0{,}\underrightarrow{08} \;=\; 96 : 8 \;=\; 12$

$0{,}324 : 0{,}0008 \;=\; 0{,}\underrightarrow{3240} : 0{,}\underrightarrow{0008} \;=\; 3'240 : 8 \;=\; 405$

$0{,}12 : 0{,}3 \;=\; 1{,}2 : 3 \;=\; 0{,}4$ (→ Division durch eine natürliche Zahl!)

6 Runden von Quotienten

In vielen Divisionsaufgaben ist der Quotient eine Zahl, *welche unendlich viele Stellen nach dem Komma aufweist*.
Solche Zahlen nennt man *nichtabbrechende Dezimalbrüche*.

Beispiel: 120 : 14 = 8,57142857142857142857142857142857...

Bei genauem Betrachten des Quotienten lässt sich zwar eine *Regelmässigkeit* erkennen, doch ändert dies nichts an der Tatsache, dass die *Zahl nie abbrechen wird* !

In solchen Fällen *rundet* man den Quotienten, d.h. man bricht nach einer bestimmten Anzahl Stellen ab. Es gelten dabei die normalen *Rundungsregeln*. Beachte dabei die Verwendung des *Rundungszeichens* (≅) .

Es kann auf *verschiedene Arten* angegeben werden, *wie gerundet* werden soll:

Beispiele:

1. Berechne auf *Hundertstel* genau:

   4'893 : 712 = 6,87|2... ≅ 6,87

2. Berechne auf *km* genau:

   37'412 km : 311 = 120|,2... km ≅ 120 km

3. Berechne auf die *nächstkleinere Einheit* genau:

   893,8 Fr. : 26 = 34,37|6... Fr. ≅ 34,38 Fr.

4. Berechne auf *l (Liter)* genau:

   5,1hl : 13 = 510 l : 13 = 39|,2... l ≅ 39 l = 0,39 hl

   (Achtung: Auch wenn es heisst, dass auf Liter gerundet werden soll, muss das Schlussresultat doch in der *Anfangsmasseinheit*, also Hektoliter, stehen bleiben!)

7 Dezimalbrüche in Multiplikationsaufgaben

Das Verfahren der schriftlichen Multiplikation kann ebenfalls angewendet werden, wenn die beiden Faktoren *Dezimalbrüche* sind.

Es gilt folgende Regel:

> Das Produkt zweier Dezimalbrüche weist *soviele Stellen nach dem Komma* auf, wie die *beiden Faktoren zusammen Dezimalen* aufweisen.

Beispiel:

2 Dezimalen 1 Dezimale

2,	6	3	·	1,	8
		2	1	0	4
		2	6	3	
		4,	7	3	4

3 Dezimalen

Bei der Multiplikation zweier Dezimalbrüche/Zahlen kann der *eine Faktor mit einer Zehnerpotenz vervielfacht* und *der andere entsprechend verkleinert werden*, ohne dass sich der Wert des Produktes verändert.

Dies geschieht durch *gegensinnige Kommaverschiebung*.

Beispiele:

$$\underset{\cdot\, 100}{0{,}08} \cdot \underset{:\, 100}{2{,}5} = 8 \cdot 0{,}025 = 0{,}2$$

$$\underset{\cdot\, 1'000}{0{,}003} \cdot \underset{:\, 1'000}{52'000} = 3 \cdot 52 = 156$$

Bei der Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer Zehnerpotenz

($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1'000$, ...) gilt folgende Regel:

Bei der Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer Zehnerpotenz erhält man das Resultat, indem das *Komma des Dezimalbruches um soviele Stellen nach rechts* verschoben wird, wie die *Zehnerpotenz Nullen* besitzt.

Beispiele: $0{,}4023 \cdot 10'000 = 4'023$

$0{,}00006 \cdot 10^8 = 6'000$

Es lassen sich verschiedene Produkte *bestehend aus einem Dezimalbruch und einer Zehnerpotenz* schreiben, welche alle den gleichen Wert besitzen.

Dies geschieht durch *gegensinnige Kommaverschiebung*.

Beispiele: $8{,}3 \cdot 10^5 = 0{,}83 \cdot 10^6 = 0{,}083 \cdot 10^7$

$49{,}03 \cdot 10^3 = 490{,}3 \cdot 10^2 = 0{,}4903 \cdot 10^5$

8 Verbindung der vier Grundrechenarten

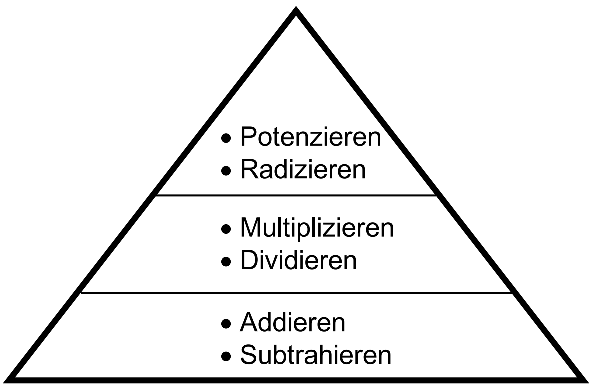
Die *vier Grundrechenarten* heissen:

- Addition (+)
- Subtraktion (-)
- Multiplikation ($\cdot$)
- Division (:) .

Die Grundrechenarten können *einzeln* oder *miteinander verbunden* auftreten. Damit die *Reihenfolge der Operationsschritte* klar festgelegt werden kann, gibt es eine sogenannte *Hierarchie der Rechenoperationen*.

Es gilt:

Die Rechenarten, die in der *Pyramide der Rechenarten* weiter *oben* stehen, müssen beim Ausrechnen *zuerst* berücksichtigt werden!



Für die Grundrechenarten gilt folgende Regel:

Die *Punktoperationen (Multiplikation / Division)* werden *vor* den *Strichoperationen (Addition / Subtraktion)* ausgeführt!

→ *„Punkt vor Strich“*

Weiterhin gilt natürlich die Regel, dass *Klammern* immer *zuerst* ausgerechnet werden.
Bei mehreren *ineinandergeschachtelten Klammern* wird zuerst die *innerste Klammer* ausgerechnet.

Beispiele:

1 $6 \cdot 2 + 10 = 12 + 10 = 22$

2 $12 - 6 : 2 = 12 - 3 = 9$

3 $6 \cdot (2 + 10) = 6 \cdot 12 = 72$

4 $(12 - 6) : 2 = 6 : 2 = 3$

5 $3 \cdot (12 - 4 \cdot 2) = 3 \cdot (12 - 8) = 3 \cdot 4 = 12$

6 $3 \cdot 12 - 4 \cdot 2 = 36 - 8 = 28$

7 $48 - 36 : (6 - 2) = 48 - 36 : 4 = 48 - 9 = 39$

8 $(48 - 36) : (6 - 2) = 12 : 4 = 3$

9 $24 \cdot 3 - 2 \cdot (56 : 4 - 2 \cdot 3) = 72 - 2 \cdot (14 - 6) = 72 - 2 \cdot 8 =$
$72 - 16 = 56$

10 $(90 - 2 \cdot (43 - 2 \cdot 6)) : 7 = (90 - 2 \cdot (43 - 12)) : 7 =$
$(90 - 2 \cdot 31) : 7 = (90 - 62) : 7 = 28 : 7 = 4$

9 Die Grundoperationen im Alltag : Beispiele

Die 4 Grundoperationen kommen häufig in sogenannten *„Sätzliaufgaben"* zur Anwendung.
Bei diesen Aufgaben muss gemäss den *schriftlichen Anweisungen* in der Aufgabenstellung die *„Rechnung" (Term / Gleichung)* selber aufgestellt werden.

Beispiel: „2,5kg Teigwaren kosten 6,40Fr. Wie teuer ist 1kg?"

→ 6,5 Fr. : 2,5 = 2,6 Fr.

Es ist wichtig, dass beim Lösen solcher Aufgaben auf eine *übersichtliche Darstellung* geachtet wird! Es gilt, folgende Punkte zu beachten:

1. *Aufgabe in Teilschritte gliedern und diese klar trennen*
2. *Masseinheiten* korrekt verwenden
3. *Keine Schlauchrechnungen* notieren (Beispiel: $2 \cdot 3 = 6 + 4 = 10 : 5 = 2$ → falsch!)
4. *Teilresultate einfach unterstreichen, Schlussresultat doppelt*.
5. Eventuell einen kurzen *Antwortsatz* schreiben.

Beispiel: „Ein Strasse von 5,340 km Länge soll beiderseits mit Bäumen bepflanzt werden, die 12 m Abstand voneinander haben. Wie viele Bäume sind nötig, wenn der erste und letzte Baum je 6 m vom Anfang bzw. Ende der Allee entfernt sind?"

5,340 km = 5'340 m

5'340 m - 2 · 6 m = 5'340 m - 12 m = 5'328 m

5'328 m : 12 m = 444 (Abstände) → 445 Bäume

2 · 445 Bäume = 890 Bäume