B GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN IN Q

1 Grundkenntnisse

Sind zwei *Terme mit einem Gleichheitszeichen* verbunden, so spricht man von einer *Gleichung*.

Beispiele:

1. $12 + 6 = 18$
2. $5x - 12 = x + 8$
3. $2a - x = \frac{3x}{2} + 0{,}5a$

Eine Gleichung enthält in der Regel eine oder mehrere *Variablen*. Diese sogenannten *Aussageformen* gehen bei *Belegung der Variablen durch Zahlen* in *wahre oder falsche Aussagen* über.
Ergibt sich bei der Belegung der Variablen mit einer bestimmten Zahl eine wahre Aussage, so heisst diese Zahl *Lösung der Gleichung*.
Die Menge aller Werte, die eine Gleichung erfüllen, nennt man dann *Lösungsmenge*.

Beispiel: Setzt man in der Gleichung $5x - 12 = x + 8$ an die Stelle der Variablen x die Zahl 5, so entsteht eine wahre Aussage:

$5 \cdot 5 - 12 = 5 + 8$ ---> $13 = 13$

Die Zahl 5 ist also Lösung der Gleichung.

Gleichungen mit 1 Variablen werden gelöst, indem man sie soweit umformt, bis die *Variable isoliert auf einer Seite des Gleichheitszeichens* steht.
Die dabei notwendigen Umformungsschritte dürfen die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern. Die umgeformte Gleichung muss *äquivalent* (lat. gleichwertig) zur vorhergehenden Gleichung sein. Aus diesem Grunde nennt man diese Umformungen *Äquivalenzumformungen*.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
5x - 12 &= x + 8 &&| -x \\
4x - 12 &= 8 &&| +12 \\
4x &= 20 &&| :4 \\
\underline{x} &\underline{= 5} && \mathbb{L} = \{5\}
\end{aligned}
$$

Äquivalenzumformungen

Gleichungen mit Bruchtermen

Das Lösen von Gleichungen mit Bruchtermen basiert auf der Tatsache, dass sich die *Lösungsmenge einer Gleichung nicht ändert, wenn man beide Seiten mit dem gleichen Term multipliziert*.
Bei der Multiplikation der Bruchterme mit dem *einfachsten gemeinsamen Vielfachen* (dem sogenannten *Hauptnenner*), erhält man eine *nennerfreie* Gleichung, welche zum Auflösen bedeutend einfacher ist.

Beispiel: Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x+3}{x-5} = \frac{x-2}{x-6}$:

Zuerst bestimmt man den *Hauptnenner*, d.h. den Term, welcher sowohl x - 5 als auch x - 6 als Teiler enthält.
Dieser Hauptnenner ist das *einfachste gemeinsame Vielfache* der beiden Ausdrücke, also: (x - 5)(x - 6).

Anschliessend *multipliziert man die Gleichung mit diesem Hauptnenner*, so dass in beiden Brüchen der *Nenner wegfällt*:

$$\frac{x+3}{x-5} = \frac{x-2}{x-6} \quad \Big| \cdot (x-5)(x-6)$$

$$(x+3)(x-6) = (x-2)(x-5)$$

Nun multipliziert man beide Seiten aus, fasst zusammen und löst nach x auf.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 18 &= x^2 - 7x + 10 && \big| -x^2 \\ -3x - 18 &= -7x + 10 && \big| +7x \\ 4x - 18 &= 10 && \big| +18 \\ 4x &= 28 && \big| :4 \\ \underline{x} &\underline{= 7} \end{aligned}$$

Bevor die Lösungsmenge notiert wird, ist die *Definitionsmenge* zu bestimmen.
Die Definitionsmenge gibt alle *Zahlen* an, *welche für die Variable eingesetzt werden dürfen*, *ohne dass dabei ein Nenner den Wert 0 annimmt* (denn eine Division durch 0 ist nicht definiert!). Die Definitionsmenge in unserem Beispiel lautet:

D = Q \ { 5, 6 } (sprich: Definitionsmenge gleich Q *ohne* 5 und 6)

Unsere Lösung darf also verwendet werden, und somit gilt:

L = { 7 }

Zwei weitere Beispiele

$$\frac{2+7x}{1+x}=\frac{4-9x}{1-x}-\frac{12-2x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{2+7x}{1+x}=\frac{4-9x}{1-x}-\frac{12-2x^2}{(1+x)1-x)} \qquad \big|\cdot(1+x)(1-x)$$

$$(2+7x)(1-x)=(4-9x)(1+x)-(12-2x^2)$$

$$2+5x-7x^2=4-5x-9x^2-12+2x^2$$

$$2+5x-7x^2=-8-5x-9x^2 \qquad \big|+9x^2$$

$$2+5x=-8-5x \qquad \big|+5x$$

$$2+10x=-8 \qquad \big|-2$$

$$10x=-10 \qquad \big|:10$$

$$\underline{\underline{x=-1}}$$

Die Definitionsmenge ist: D = Q \ { -1, +1} .

Da die Lösung aber gerade –1 ist, gilt für die Lösungsmenge:

L = $\underline{\underline{\{\ \}}}$ (sprich: Lösungsmenge gleich leere Menge)

$$\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x+4}=\frac{7}{(3-x)(x+4)} \qquad \big|\cdot(3-x)(x+4)$$

$$(x+4)+(3-x)=7$$

$$\underline{\underline{7=7}}$$

Die Variable fällt aus der Gleichung heraus und es entsteht eine wahre Aussage! Das bedeutet, dass grundsätzlich jede Zahl für die Variable eingesetzt werden kann, ausser: was nicht definiert ist!

Die Definitionsmenge ist: D = Q \ { 3, -4 } .

Die Lösungsmenge lautet somit:

L = $\underline{\underline{\text{Q \textbackslash\ \{ 3, -4 \}}}}$ (sprich: Lösungsmenge gleich Grundmenge Q ohne 3 und –4).

Ungleichungen mit Bruchtermen

Schreibt man zwischen zwei Terme eines der Zeichen "$\leq, \geq, <$ oder $>$" , so entsteht eine *Ungleichung*. Enthält mindestens einer der Terme eine *Variable*, so nennt man die Ungleichung eine *Aussageform*.

Beispiel: $5x - 18 \leq 22$

Diejenigen Elemente der Grundmenge G, bei deren Einsetzung für die Variable die Ungleichung zu einer *wahren Aussage* wird, heissen *Lösungen der Ungleichung*. Diese werden in der *Lösungsmenge* zusammengefasst. *Die Lösungsmenge richtet sich nach der Grundmenge!*

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x - 18 &\leq 22 \quad &&| +18 \\ 5x &\leq 40 \quad &&| :5 \\ x &\leq 8 \end{aligned}$$

G = N ---> L = {1, 2, 3, ... , 8}
G = N_0 ---> L = {0, 1, 2, ... , 8}
G = Z ---> L = {8, 7, 6, ... , 1, 0, -1, -2, ...}
G = Q ---> L = $\{ x \mid x \leq 8 \}$

Ungleichungen mit *zwei Zeichen* werden aufgesplittet und *einzeln* gelöst. Die Lösungsmenge ist die *Schnittmenge* der beiden Einzel-Lösungsmengen.

Beispiel: $\frac{x}{2} - 4 < 5 - \frac{x}{4} < \frac{x}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - 4 &< 5 - \frac{x}{4} \quad &&| \cdot 4 \\ 2x - 16 &< 20 - x \quad &&| +x \\ 3x - 16 &< 20 \quad &&| +14 \\ 3x &< 36 \quad &&| :3 \\ x &< 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - \frac{x}{4} &< \frac{x}{3} \quad &&| \cdot 12 \\ 60 - 3x &< 4x \quad &&| +3x \\ 60 &< 7x \quad &&| :7 \\ \frac{60}{7} &< x \end{aligned}$$

G = Q ---> L = $\{ x \mid \frac{60}{7} < x < 12 \}$

2 Anwendungen

Zahlenrätsel sind in Worten formulierte Aufgaben, in denen eine oder *mehrere Zahlen aufgrund gewisser Angaben zu bestimmen sind*.

Beispiel 1: „Der vierte Teil einer Zahl, vergrössert um 6, ist ebenso gross wie das Dreifache der Zahl, vermindert um 5. Bestimme die Zahl.“

Zahlenrätsel sind bei derart einfacher Aufgabenstellung problemlos mit dem „*gesunden Menschenverstand* „ oder mit *Probieren* zu lösen.
Für das Lösen *schwierigerer Probleme* ist jedoch ein *Lösungsverfahren mit Gleichungen* unerlässlich! Um zum grundsätzlichen Verstehen solcher Lösungsverfahren zu kommen, arbeitet man deshalb bereits von Anfang an mit Gleichungen.

Die Gleichung des obigen Beispieles sieht wie folgt aus:

$$\underbrace{\frac{x}{4}}_{\text{Der vierte Teil einer } \underline{\textit{Zahl}} \text{ (x)}} \underbrace{+ \quad 6}_{\text{vergrössert um 6}} \underbrace{=}_{\text{ist ebenso gross wie}} \underbrace{3x}_{\text{das Dreifache der } \underline{\textit{Zahl}} \text{ (x)}} \underbrace{- \quad 5}_{\text{vermindert um 5}}$$

Lösung der Gleichung:

$$\begin{array}{lcll}
\frac{x}{4}+6 & = & 3x-5 & | \cdot 4 \\
x+24 & = & 12x-20 & | -x \\
24 & = & 11x-20 & | +20 \\
44 & = & 11x & | :11 \\
\underline{4} & \underline{=} & \underline{x} &
\end{array}$$

Die Zahl heisst 4.

Beispiel 2: „Ein Bruch stellt die Zahl $\frac{5}{6}$ dar. Er geht in seine Kehrzahl über, wenn man den Nenner um 11 vermindert.“

$$
\begin{array}{lcll}
\dfrac{5x}{6x-11} & = & \dfrac{6}{5} & \Big| \cdot 5(6x-11) \\
5 \cdot 5x & = & (6x-11) \cdot 6 & \\
25x & = & 36x-66 & \Big| -25x \\
0 & = & 11x-66 & \Big| +66 \\
66 & = & 11x & \Big| :11 \\
\underline{6} & \underline{=} & \underline{x} &
\end{array}
$$

Der Bruch heisst $\frac{30}{36}$.

Beispiel 3: „Von einer zweistelligen Zahl lautet die hintere Ziffer 7. Wenn ich die beiden Ziffern vertausche, wird die Zahl um 45 grösser.“

$$
\underbrace{x \cdot 10}_{\text{Wert der Zehnerziffer}} + \underbrace{7 \cdot 1}_{\text{Wert der Einerziffer}} \boxed{+45} = \underbrace{7 \cdot 10}_{\text{Wert der Zehnerziffer}} + \underbrace{x \cdot 1}_{\text{Wert der Einerziffer}}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
x \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 45 & = & 7 \cdot 10 + x \cdot 1 & \\
10x + 7 + 45 & = & 70 + x & \\
10x + 52 & = & 70 + x & \Big| -x \\
9x + 52 & = & 70 & \Big| -52 \\
9x & = & 18 & \Big| :9 \\
\underline{x} & \underline{=} & \underline{2} &
\end{array}
$$

Die zweistellige Zahl heisst 27.

Verteilprobleme

Bei den Verteilproblemen wird ein *Ganzes* (z.B. ein Geldbetrag) auf eine bestimme Anzahl Teilnehmer *verteilt*. Dies erfolgt gemäss in Sätzen formulierter Angaben.

Beispiel: „18‘000 Fr. sollen so an 5 Personen verteilt werden, dass A $\frac{3}{4}$ von B, C die Hälfte von A und B zusammen, D und E je das Doppelte von A erhalten.“

Lösung

A: $\frac{3x}{4}$

B: x

C: $\frac{x+\frac{3x}{4}}{2}=\frac{\frac{4x}{4}+\frac{3x}{4}}{2}=\frac{\frac{7x}{4}}{2}=\frac{7x}{8}$

D: $2\cdot\frac{3x}{4}=\frac{6x}{4}=\frac{3x}{2}$

E: $2\cdot\frac{3x}{4}=\frac{6x}{4}=\frac{3x}{2}$

$$\frac{3x}{4}+x+\frac{7x}{8}+\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}=18000 \quad |\cdot 8$$

$$6x+8x+7x+12x+12x=144000$$

$$45x=144000 \quad |:45$$

$$\underline{x=3200}$$

A: $\underline{\underline{\text{2'400 Fr.}}}$

B: $\underline{\underline{\text{3'200 Fr.}}}$

C: $\underline{\underline{\text{2'800 Fr.}}}$

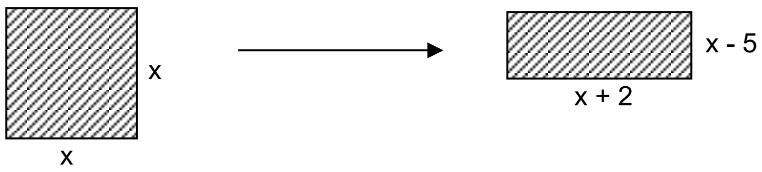
D: $\underline{\underline{\text{4'800 Fr.}}}$

E: $\underline{\underline{\text{4'800 Fr.}}}$

Zwei weitere Beispiele

Beispiel 1: „Wenn man die Seite eines Quadrates um 5 cm verkürzt und die andere Seite um 2 cm verlängert, ist der Flächeninhalt des entstandenen Rechteckes um 121 m^2 kleiner als der Flächeninhalt des Quadrates."

Lösung



$$A_1 = A_2 + 121$$

$$x^2 = (x+2)(x-5) + 121$$
$$x^2 = x^2 - 3x - 10 + 121$$
$$x^2 = x^2 - 3x + 111 \quad \mid -x^2$$
$$0 = -3x + 111 \quad \mid +3x$$
$$3x = 111 \quad \mid :3$$
$$\underline{x = 37}$$

Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 37 m.

Beispiel 2: „Ein Hotel hat 82 Zimmer, teils mit einem und teils mit zwei Betten. Es werden 132 Gäste platziert. Das Hotel ist nun ausgebucht."

Lösung

	Anzahl Zimmer	Anzahl Betten
Einerzimmer:	x	$1 \cdot x$
Zweierzimmer:	$82 - x$	$2 \cdot (82 - x)$

$$1 \cdot x + 2 \cdot (82 - x) = 132$$
$$x + 164 - 2x = 132$$
$$-x + 164 = 132 \quad \mid +x$$
$$164 = x + 132 \quad \mid -132$$
$$\underline{32 = x}$$

Es hat 32 Einerzimmer und 50 Doppelzimmer.

3 Gleichungen mit verschiedenen Variablen

Gleichungen enthalten oft *mehr als eine Variable*. Dabei wird unterschieden zwischen der *Lösungsvariable* und der sogenannten *Formvariable* (diese verändert die *Form* der Gleichung, je nachdem was für eine Zahl dafür eingesetzt wird!).

Lösungsvariable

Formvariable

Beispiel: $\frac{x}{2} + a = 1$

> Die *Lösungsvariable* ist ein *Buchstabe am Ende des Alphabets*, die *Formvariable* ein *Buchstabe am Anfang des Alphabets*!

Eine Gleichung mit mehreren Variablen wird immer *nach der Lösungsvariablen aufgelöst* (ausser es sei etwas anderes vermerkt!).
Es gelten *dieselben Regeln wie beim Auflösen einer „normalen" Gleichung*!

Beispiel:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \quad \Big| \cdot 4ax$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner!

$$4x = 4a + ax \quad \Big| -ax$$

Alle *Ausdrücke mit einem x* auf *eine Seite* bringen!

$$4x - ax = 4a$$

x ausklammern!

$$x(4-a) = 4a \quad \Big| :(4-a)$$

$$\underline{x = \frac{4a}{4-a}}$$

Für diese Werte von x und a ist die Gleichung nicht definiert!

$$L = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{4a}{4-a} \overbrace{\wedge\; x \neq 0 \;\wedge\; a \neq 0; 4}\right\}$$

Quotienten als Leistungsangaben

Die *Leistung im physikalischen Sinn* ist definiert als *Arbeit pro Zeiteinheit*.
Wir werden den Begriff „Leistung“ in folgenden zwei Situationen verwenden:

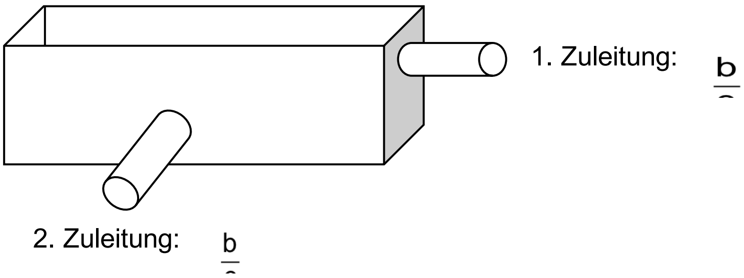
- Leistung einer Wasserzuleitung: *Wassermenge, welche eine Zuleitung eines Beckens in einer bestimmten Zeit liefern kann.*

- Leistung einer Maschine: *Anzahl Einheiten (z.B. Zeitungen), welche eine Maschine in einer bestimmten Zeit herstellen kann.*

Beispiel 1: „Ein Becken wird durch zwei Zuleitungen gefüllt. Die erste Zuleitung kann das Becken alleine in 8h füllen, die zweite benötigt alleine 6h.
In welcher Zeit füllen sie gemeinsam das leere Becken?“

- Beckeninhalt: b (Liter)

- Leistungen der zwei Zuleitungen: $\frac{b}{8}$ und $\frac{b}{6}$ $\left(\frac{\text{Liter}}{\text{Stunde}}\right)$



- Es gilt: $\boxed{\textit{Leistung} \cdot \text{Zeit} = \text{Menge}}$ $\left(\frac{\text{Liter}}{\text{Stunde}} \cdot \text{Stunde} = \text{Liter}\right)$

---> $\boxed{\left(\frac{b}{8} + \frac{b}{6}\right) \cdot x = b}$

- Gleichung auflösen nach x:

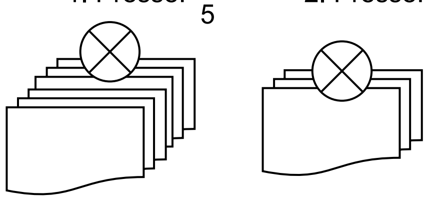
$$\left(\frac{b}{8} + \frac{b}{6}\right) \cdot x = b \quad | \cdot 24$$
$$(3b + 4b) \cdot x = 24b$$
$$7bx = 24b \quad | : 7b$$
$$\underline{x = \frac{24}{7}}$$

- Antwortsatz: Gemeinsam brauchen sie $\frac{24}{7}$ h.

Beispiel 2: „Für den Druck einer Tageszeitung brauchen zwei Pressen gemeinsam 3 Stunden. Die erste Presse schafft die gesamte Auflage alleine in 5 Stunden.
Welche Zeit benötigte die zweite Presse alleine für den Druck der Zeitung?"

- Druckauftrag: a (Anzahl Zeitungen)
- Leistungen der zwei Pressen: $\frac{a}{5}$ und $\frac{a}{x}$ $\left(\frac{\text{Zeitungen}}{\text{Stunde}}\right)$

1. Presse: $\frac{a}{5}$ 2. Presse: $\frac{a}{x}$



- Es gilt: $\boxed{\textit{Leistung} \cdot \text{Zeit} = \text{Menge}}$ $\left(\frac{\text{Zeitungen}}{\text{Stunde}} \cdot \text{Stunde} = \text{Zeitungen}\right)$

---> $\boxed{\left(\frac{a}{5} + \frac{a}{x}\right) \cdot 3 = a}$

- Gleichung auflösen nach x:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{5} + \frac{a}{x}\right) \cdot 3 &= a && \mid \cdot 5x \\
(ax + 5a) \cdot 3 &= 5ax \\
3ax + 15a &= 5ax && \mid -3ax \\
15a &= 2ax && \mid :2a \\
7{,}5 &= x
\end{aligned}
$$

- Antwortsatz: Die zweite Presse braucht alleine 7,5 h.