B Von der Theorie zur Praxis

1 Beispiele für statistische Untersuchungen

Die *Statistik* ist ein *Zweig der Mathematik*, der sich mit der *Sammlung, Zusammenstellung und Analyse von Zahlenmaterial* beschäftigt.

Eine einfach zu berechnende und oft gebrauchte statistische Grösse ist der *Mittelwert*.
Sind x_1, x_2, ..., x_n die Zahlen einer statistischen Erhebung, so ist die *Summe der Werte dividiert durch n* das sogenannte *arithmetische Mittel* ξ.

$$\boxed{\xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}$$

Sind die x - Werte numerisch (der Zahl nach) angeordnet und n *ungerade*, so ist der *Zentralwert* $\tilde{x}$ der Wert, *der in der Reihe in der Mitte steht*.

Ist n *gerade*, so ist der *Zentralwert* $\tilde{x}$ das *arithmetische Mittel der mittleren beiden x-Werte.*

Beispiel: Bestimme den Mittelwert ξ und den Zentralwert $\tilde{x}$
für folgende Werte: 12 / 3 / 5 / 11 / 9 / 2 / 8 / 4 .

$$\xi = \frac{12 + 3 + 5 + 11 + 9 + 2 + 8 + 4}{8} = \frac{54}{8} = \underline{6{,}75}$$

x-Werte numerisch angeordnet:

2 / 3 / 4 / 5 / 7 / 8 / 9 / 12 .

$$\tilde{x} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = \underline{6}$$

2 Sinnvolle Genauigkeit

Gemessene Werte sind immer mit einem *Messfehler* behaftet, d.h. sie sind nur *innerhalb eines bestimmten Bereiches genau*. Diesen Bereich nennt man *Genauigkeitsintervall*.

Beispiel: Die *Länge einer gemessenen Strecke* betrage *0,7 m*. Daraus ist zu schliessen, dass die wahre Länge *mindestens 0,65 m* und *höchstens 0,74999... m* beträgt.

$$\underbrace{0{,}65\text{ m} \quad \leq \quad 0{,}7\text{ m} \quad < \quad 0{,}74999...\text{ m}}_{\textit{Genauigkeitsintervall}}$$

Ein *geschätzter Wert* ist entsprechend mit einem *Schätzfehler* behaftet. Die *Differenz* zwischen dem wahren Wert und dem geschätzten Wert nennt man den *absoluten Fehler*. Den *Quotienten* aus dem absoluten Fehler und dem wahren Wert nennt man *relativen Fehler*.

Beispiel: Das Gewicht eines Gegenstandes wird auf 2,7 kg geschätzt. Der wahre Wert lautet 3,0 kg.

absoluter Fehler : $3{,}0\text{ kg} - 2{,}7\text{ kg} = \underline{0{,}3\text{ kg}}$

relativer Fehler : $\dfrac{0{,}3\text{ kg}}{3{,}0\text{ kg}} = 0{,}1 = \underline{10\%}$

Wird mit *gemessenen Werten* operiert gelten folgende zwei Regeln:

- Bei der *Addition* und *Subtraktion* kann das *Resultat nicht genauer sein als das ungenaueste Glied*.

  Beispiel: $14{,}\underline{2}\text{ m} + 8{,}156243\text{ m} \cong 22{,}\underline{4}\text{ m}$

- Bei der *Multiplikation* und *Division* kann das *Resultat nicht mehr zuverlässige Ziffern* haben *als das ungenaueste Glied*:

  Beispiel: $\underline{21}'000 \cdot 152 \cong \underline{3'2}00'000$

3 Der Proportionalitätsfaktor

Gehört bei einer Zuordnung zum Doppelten / Dreifachen / ... der ersten Grösse das Doppelte / Dreifache ... der zweiten Grösse, so nennt man diese Zuordnung *proportionale Zuordnung*.

Beispiel:

	Gewicht	Preis	
	1 kg	4 Fr.	
· 2			· 2
	2 kg	8 Fr.	
· 3			· 3
	6 kg	24 Fr.	

Bei Berechnungen dieser Art ist jeweils *ein Grössenpaar mit zwei einander zugeordneten Werten* gegeben.
Von einem zweiten oder dritten Grössenpaar ist dann *nur eine Grösse gegeben*, die zweite muss berechnet werden.

Beispiel: „1 kg Teigwaren kostet 3 Fr. Wie teuer sind 2 kg / 6 kg ?"

	Gewicht, kg	Preis, Fr.	
	1	3	
· 2			· 2
	2	6	
· 3			· 3
	6	18	

$\xrightarrow{\cdot 3}$

Senkrechte Operatoren

Waagrechter Operator oder

Proportionalitätsfaktor

Die fehlenden Grössen lassen sich entweder mit Hilfe der *senkrechten Operatoren* oder des *waagrechten Operators* bestimmen.
Der waagrechte Operator wird auch *Proportionalitätsfaktor* genannt.

Der *<u>Proportionalitätsfaktor</u>* entspricht oft einer *<u>Grösse</u>* und weist eine entsprechende *<u>Masseinheit</u>* auf.

<u>Beispiele</u>:

Zeit, h	Weg, km
2	160
1	80

$\longrightarrow$

$\cdot\, \mathbf{80\ \frac{km}{h}}$ *„Geschwindigkeit“*

Es gilt somit folgende *<u>Gleichung</u>*:

Zeit (h)	$\cdot$	*Geschwindigkeit* ($\frac{km}{h}$)	=	Weg (km)
t	$\cdot$	v	=	s

Vol. , cm^3	Gewicht, g
50	320
1	6,4

$\longrightarrow$

$\cdot\, \mathbf{6{,}4\ \frac{g}{cm^3}}$ *„Dichte“*

Es gilt somit folgende *<u>Gleichung</u>*:

Volumen (cm^3)	$\cdot$	*Dichte* ($\frac{g}{cm^3}$)	=	Gewicht (g)
V	$\cdot$	ρ	=	m

4 Verhältnisse

In der Mathematik werden _Verhältnisse_ als _Quotienten_ geschrieben. Sie dienen zum _Vergleich zweier Grössen_.

Beispiel: „In einem Kleinbetrieb arbeiten 2 Männer und 3 Frauen. Das Verhältnis Männer zu Frauen beträgt 2 zu 3 und wird notiert als 2 : 3 .“

Verhältnisse können durch _Erweitern_ und _Kürzen_ umgeformt werden.

Beispiele: 2 : 3 = 4 : 6 (Erweitern)

15 : 6 = 5 : 2 (Kürzen)

Sind bei einem Verhältnis die beiden Zahlen _ganzzahlig_, und besitzen sie _keinen gemeinsamen, ganzzahligen Teiler ausser 1_, so nennt man diese Form des Verhältnisses die _einfachste Form_.

Beispiele: 2 : 3 , 5 : 2 , 13 : 20 , 1 : 4

Der _Massstab_ gibt das _Verhältnis der Grösse im Modell bzw. in der zeichnerischen Darstellung zu der Grösse des Originals_ an.

Beispiel: Im Massstab 1 : 100'000 entspricht 1cm in der zeichnerischen Darstellung 1km im Original.

1cm : 1km = 1cm : 100’000cm

Der _Wert eines Verhältnisses_ entspricht der _Zahl_, die bei der _Division_ entsteht.

Beispiel: 5 : 8 = 0,625

Angaben von Wahrscheinlichkeiten mit Verhältnissen

Die eventuelle Möglichkeit, dass ein bestimmtes Ereignis unter mehreren möglichen eintritt, nennt man *Wahrscheinlichkeit*.

Die *Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten eines zufälligen Ereignisses wird durch den *Quotienten aus der Anzahl der günstigen Ereignisse durch die Anzahl der möglichen Ereignisse* bestimmt.

Beispiel: „Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 6 zu würfeln ?“

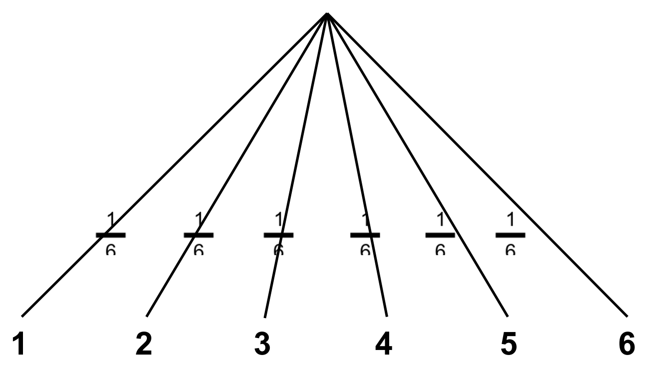
→ Anzahl günstige Ereignisse : 1 (❻)

→ Anzahl mögliche Ereignisse : 6 (❶,❷,❸,❹,❺,❻)

→ Wahrscheinlichkeit : $w = 1 : 6 = \frac{1}{6}$.

Mit Hilfe eines *Baumdiagrammes* können alle Ereignisse eines Zufalls-experimentes dargestellt werden.

Beispiel: Beim Würfel gibt es 6 mögliche Ereignisse. Folglich hat ein solches Baumdiagramm 6 Äste. Jeder Ast hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.



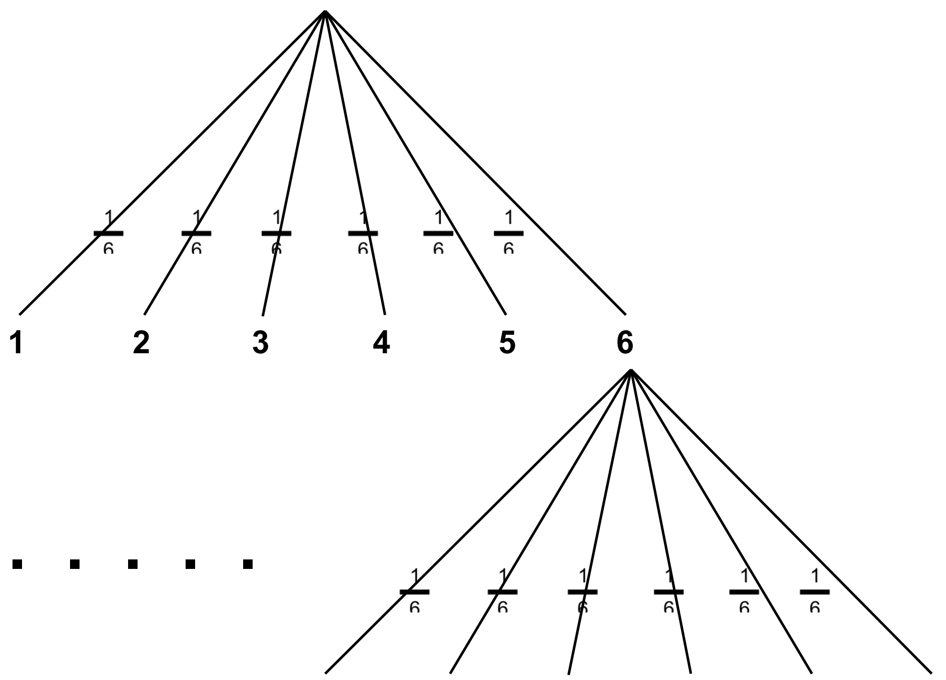
Führt man dasselbe Zufallsexperiment *__mehrfach hintereinander__* aus, so spricht man von einem *__mehrstufigen Zufallsexperiment__*.

__Beispiel__: „Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zweimal hintereinander eine 6 zu würfeln ?“

→ Anzahl günstige Ereignisse : 1
(❻❻)

→ Anzahl mögliche Ereignisse : 36
(❶❶,❶❷,...,❶❻,
❷❶,❷❷,...,❷❻,
...,
❻❶,❻❷,...,❻❻)

→ Wahrscheinlichkeit : $w = 1 : 36 = \frac{1}{36}$.

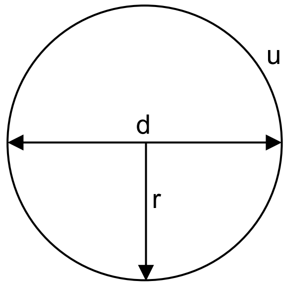


→ Wahrscheinlichkeit : $w = \frac{1}{6} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

5 Umfang und Flächeninhalt bei Kreis und Kreissektor

Der Wert des *Verhältnisses „Umfang zu Durchmesser“*
ist für alle Kreise gleich.

In der Mathematik verwendet
man für diese Zahl den griechischen
Buchstaben π (*Pi*).



u : Umfang

d : Durchmesser

r : Radius

Es gilt: $u : d = \pi = 3{,}141592654\ ...$

(π ist ein nicht abbrechender, *nicht periodischer* Dezimalbruch !)

Damit gilt für den *Umfang eines Kreises* folgende Formel:

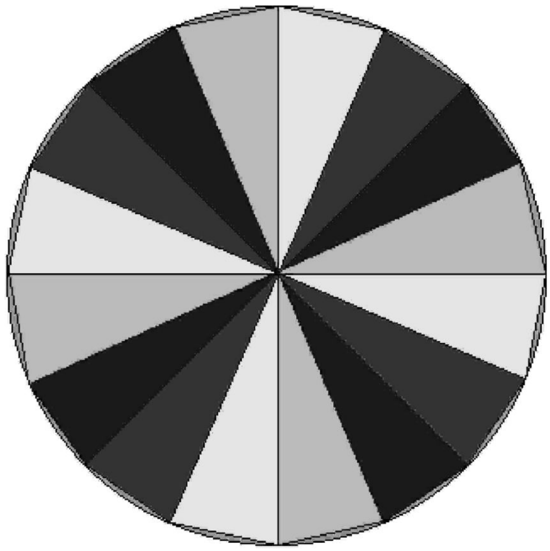
$$\boxed{u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi}$$

Beispiel: Der Durchmesser eines Kreises beträgt d = 15 cm.
Berechne den Umfang u.

$$u = d \cdot \pi = 15\ \text{cm} \cdot \pi$$

$$\cong \underline{\underline{47{,}12\ \text{cm}}}$$

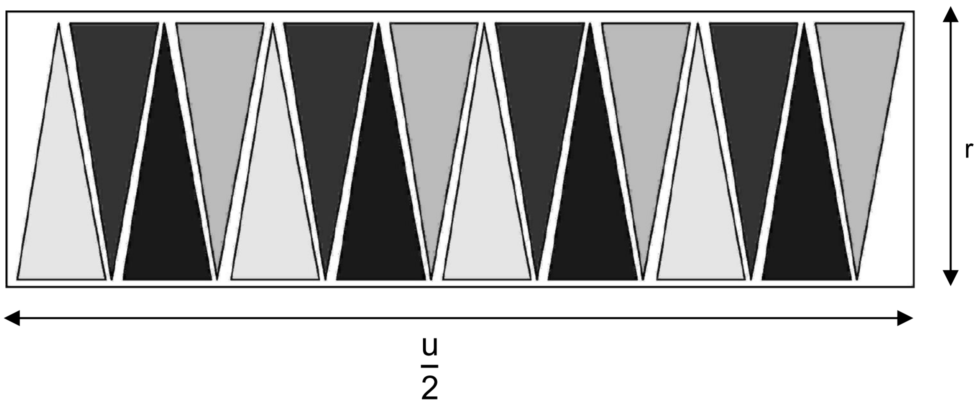
Schreibt man einem Kreis ein *<u>regelmässiges Vieleck</u>* ein, so entspricht dessen Fläche annähernd der Kreisfläche.



<u>Es gilt</u>: $A_V \cong A_K$

Je mehr Ecken das regelmässige Vieleck besitzt, desto genauer wird die Annäherung!

Ordnet man die Dreiecke des regelmässigen Vieleckes wie unten dargestellt an, entspricht die Fläche der Figur ungefähr der Fläche eines Rechteckes mit der Länge $\frac{u}{2}$ und der Breite r.



Die Kreisfläche entspricht also ungefähr der Fläche aller Dreiecke. Diese Fläche entspricht ungefähr der Fläche des Rechtecks, das die Figur umschreibt.

<u>Somit gilt</u>:

$$A = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r$$

$$= r \cdot \pi \cdot r = r^2 \cdot \pi$$

Damit gilt für den ***Flächeninhalt eines Kreises*** folgende Formel:

$$\boxed{A = r^2 \cdot \pi}$$

Beispiel: Der Radius eines Kreises beträgt r = 8 cm.
Berechne den Flächeninhalt A.

$$A = r^2 \cdot \pi = (8\text{ cm})^2 \cdot \pi$$

$$= 64\text{ cm}^2 \cdot \pi \cong \underline{\underline{201{,}06\text{ cm}^2}}$$

Berechnen des Radius r aus dem Umfang u bzw. dem Flächeninhalt A

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi \quad | : (2 \cdot \pi)$$

$$\frac{u}{2 \cdot \pi} = r$$

$$A = r^2 \cdot \pi \quad | : \pi$$

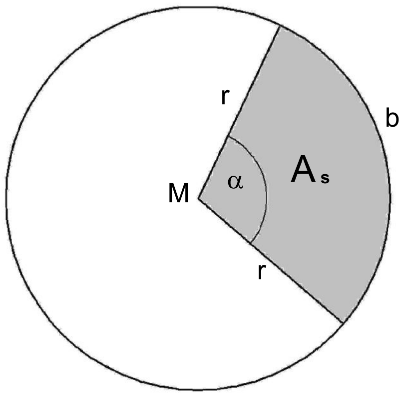
$$\frac{A}{\pi} = r^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$$

Der Kreissektor

Der im Winkelfeld des *Zentriwinkels* α liegende Teil der Kreisfläche nennt man *Kreissektor*.

Er wird von zwei Radien und einem *Bogen* begrenzt.



Es gilt folgende Formel für die Kreissektorfläche A_s :

$$A_S = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

Es gilt folgende Formel für die Bogenlänge b :

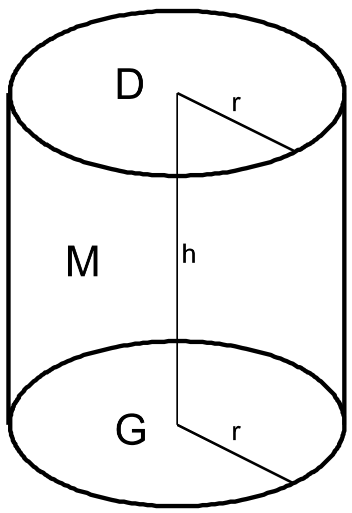
$$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

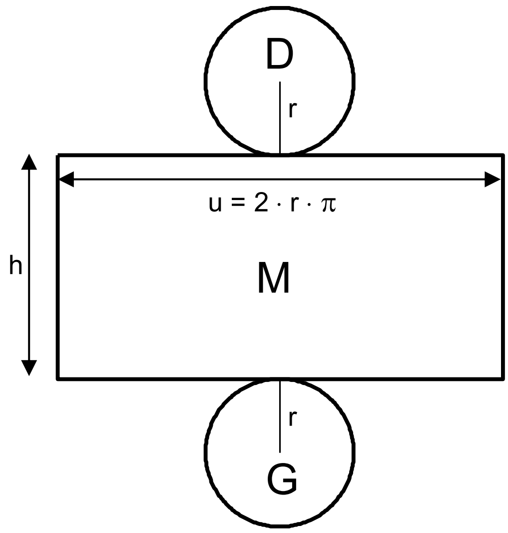
6 Berechnungen am Zylinder

Der *gerade Kreiszylinder* ist ein Körper mit *zwei zueinander kongruenten und parallelen Kreisflächen*, der *Grundfläche G* und der *Deckfläche D*.

Die *seitliche Begrenzungsfläche* heisst *Mantelfläche M*. Sie steht *senkrecht* zu der Grund- und Deckfläche.

Untenstehend rechts ist das *Netz eines Kreiszylinders* abgebildet. Die *Mantelfläche M* ergibt abgerollt eine *Rechtecksfläche*!





Es gelten für den Kreiszylinder folgende Formeln:

$$M = u \cdot h = \underline{2 \cdot r \cdot \pi \cdot h}$$

$$O = G + D + M = 2 \cdot G + M = \underline{2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h}$$

$$V = G \cdot h = \underline{r^2 \cdot \pi \cdot h}$$