B Weitere Grundlagen zur Geometrie

1 Mengen von Punkten

Jedes *geometrische Gebilde* - beispielsweise eine Gerade oder ein Kreis - ist als *Punktemenge* definiert. Dabei bildet eine *unendliche Menge von Punkten* aneinandergereiht diese Gerade oder diesen Kreis.

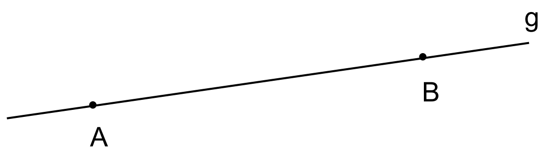
Einzelne Punkte werden mit *Grossbuchstaben* notiert, die Punktemengen *Gerade, Strecke, Strahl und Kreis* mit *Kleinbuchstaben*.

- Eine *Gerade* ist eine geradlinige Verbindungslinie zweier Punkte, wobei die Ausdehnung beidseitig unendlich ist.
- Eine *Strecke* ist die kürzestmögliche Verbindungslinie zweier Punkte.
- Ein *Strahl* ist eine einseitig begrenzte Gerade.
- Ein *Kreis* ist die Menge aller Punkte, deren Abstand zu einem Punkt (dem Mittelpunkt) gleich gross ist.

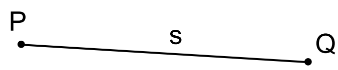
Beispiele:

Punkt P

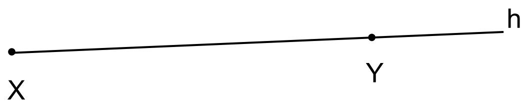
Gerade g = AB



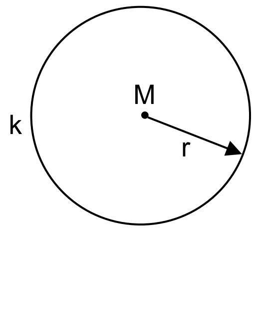
Strecke s = $\overline{PQ}$



Strahl h = XY^+



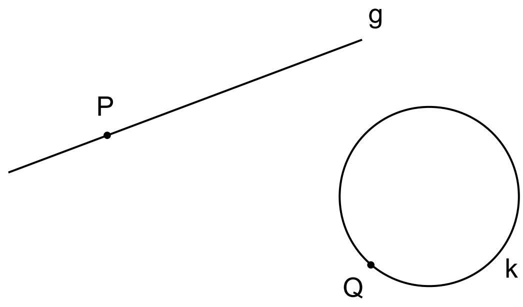
Kreis k (M, r)



Wichtige Notationen

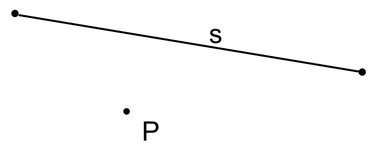
- Liegt ein Punkt z.B. auf einer Geraden oder auf einem Kreis, so sagt man auch, er sei *Element* der Geraden bzw. des Kreises.
  Dies wird wie folgt notiert:

  $P \in g$, $Q \in k$



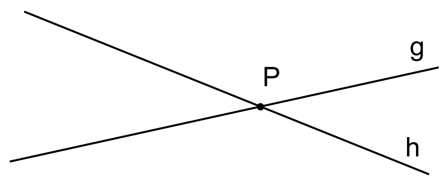
- Liegt ein Punkt nicht auf einer Punktemenge - z.B. einer Strecke -, so sagt man auch, er sei *nicht Element* dieser Punktemenge.
  Dies wird wie folgt notiert:

  $P \notin s$



- Schneiden sich *zwei Geraden*, so entsteht ein *Schnittpunkt* .
  Dies wird wie folgt notiert:

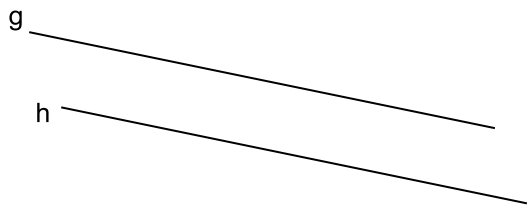
  $g \cap h = \{ P \}$



- Zwei *parallele Geraden* besitzen *keinen Schnittpunkt*.

  Dies wird wie folgt notiert:

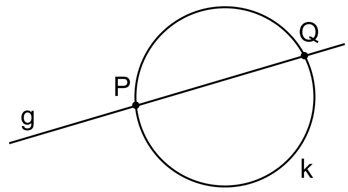
  $g \parallel h$, $g \cap h = \{ \}$



- Wird ein *Kreis* von einer *Geraden* geschnitten, entstehen zwei *Schnittpunkte*.

  Dies wird wie folgt notiert:

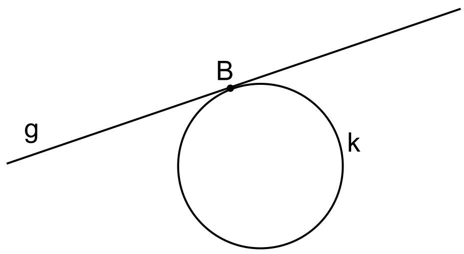
  $k \cap g = \{ P, Q \}$



- Wird ein *Kreis* von einer *Geraden* *berührt*, so nennt man den gemeinsamen Punkt *Berührpunkt*.

  Dies wird wie folgt notiert:

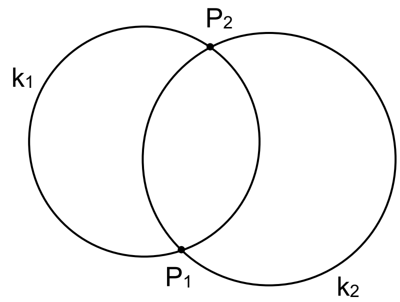
  $k \cap g = \{ B \}$



- Schneiden sich ***zwei Kreise***, entstehen ***zwei Schnittpunkte***.

  Dies wird wie folgt notiert:

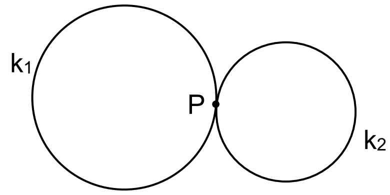
  $k_1 \cap k_2 = \{ P_1, P_2 \}$



- ***Berühren*** sich ***zwei Kreise***, so entsteht ***ein gemeinsamer Berührpunkt***.

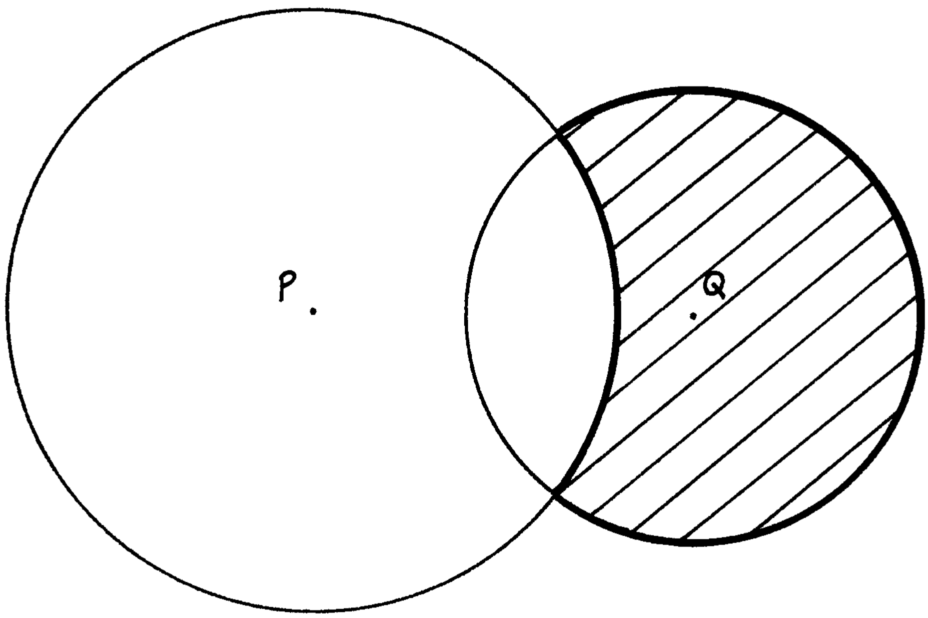
  Dies wird wie folgt notiert:

  $k_1 \cap k_2 = \{ P \}$

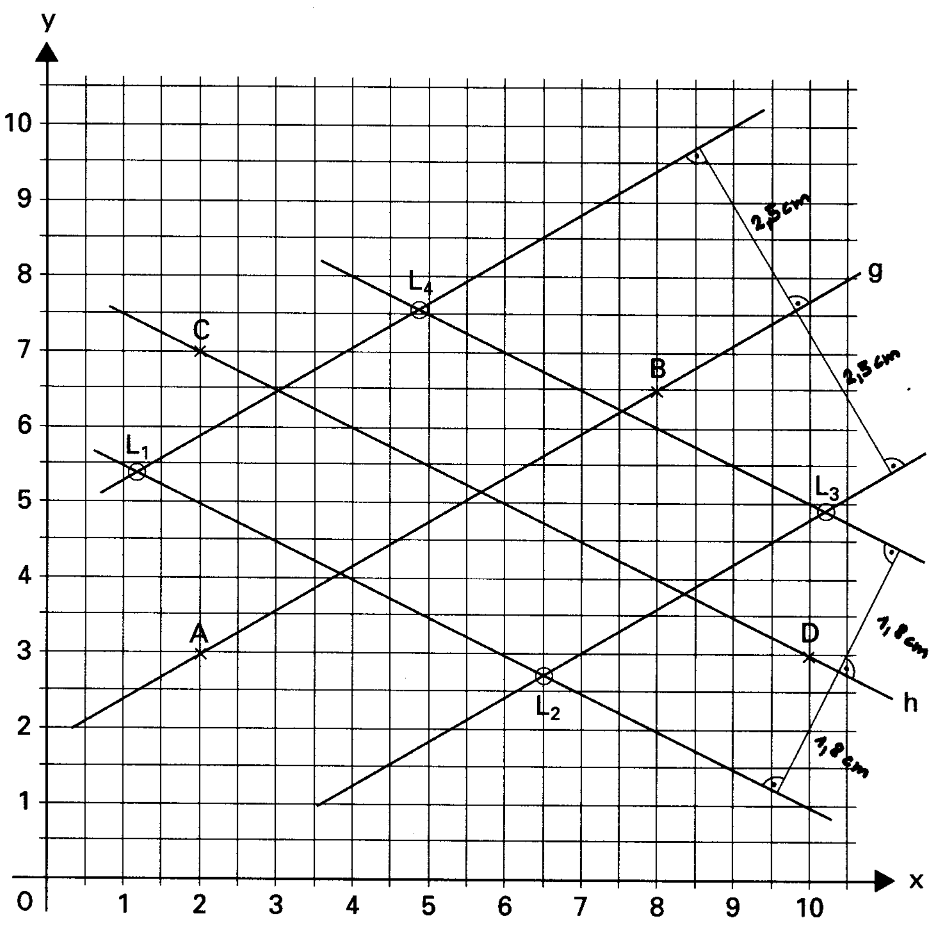


Beschreibung von Punktemengen durch Abstände: 2 Beispiele

1. Zwei Punkte P und Q sind 5cm voneinander entfernt. Bestimme die Menge aller Punkte, die mindestens 4cm von P, aber höchstens 3cm von Q entfernt sind.

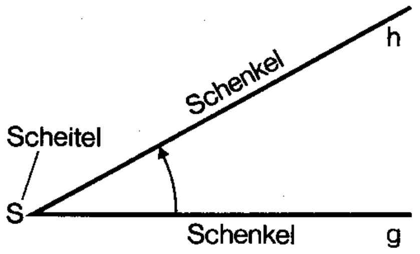


2. Zeichne die Menge aller Punkte, die von der Geraden g 2,5cm und von der Geraden h 1,8cm Abstand haben, wenn gilt:
g = AB mit A(2/3), B(8/6,5) und h = CD mit C(2/7), D(10/3).



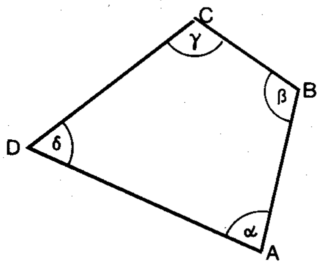
2 Winkel und Messen der Winkelweite

Ein *Winkel* entsteht durch die *Drehung einer Halbgeraden um ihren Anfangspunkt* im *Gegenuhrzeigersinn*.

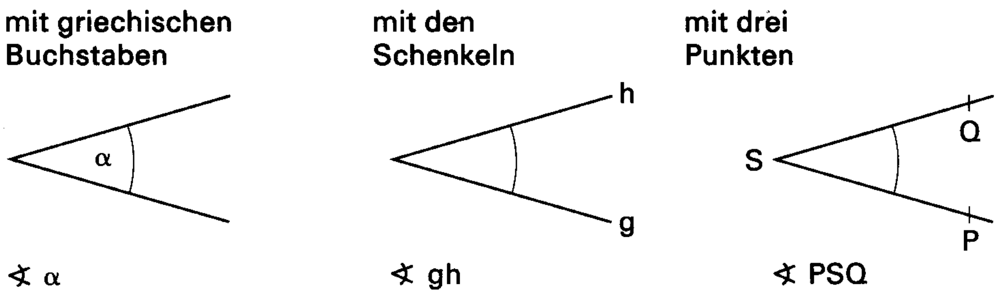


Bei der Drehung wird die Halbgerade g auf die Halbgerade h abgebildet. Diese Halbgeraden nennt man *Schenkel des Winkels*. Der gemeinsame Anfangspunkt der Halbgeraden heisst *Scheitel des Winkels*.

Man kennzeichnet Winkel mit *griechischen Buchstaben* (α, β, γ, δ□□□□□).



Winkel können aber auf *verschiedene Arten* bezeichnet werden:

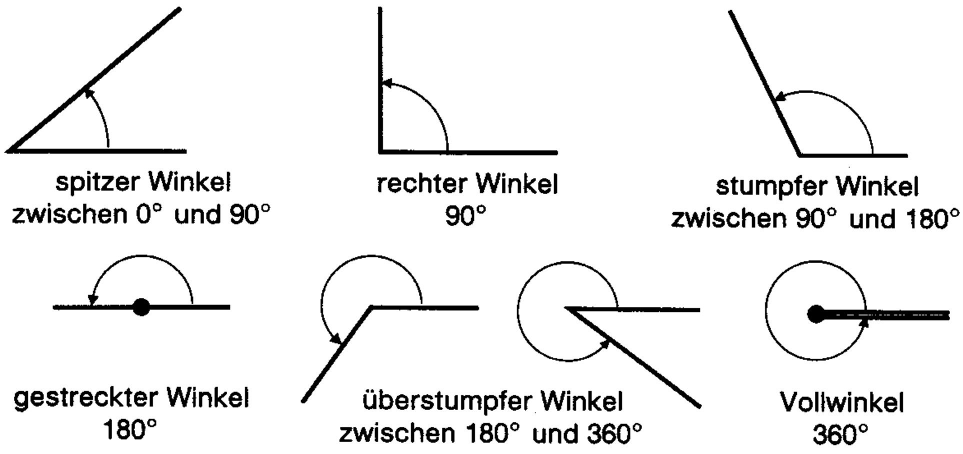


Die Grundeinheit bei der Winkelmessung ist das _Grad_.

1 Grad (1°) entspricht $\frac{1}{360}$ des Vollwinkels.

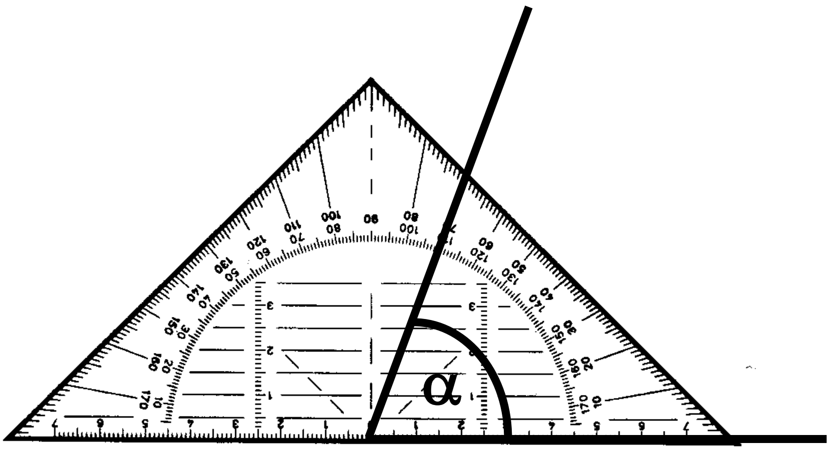
(Die auf die Babylonier zurückgehende Gradmessung der Winkel ordnet dem Vollwinkel 360° zu!)

Je nach _Grösse_ haben die Winkel _unterschiedliche Namen_.



Winkel werden mit Hilfe der _Skala auf dem Geodreieck_ gemessen.

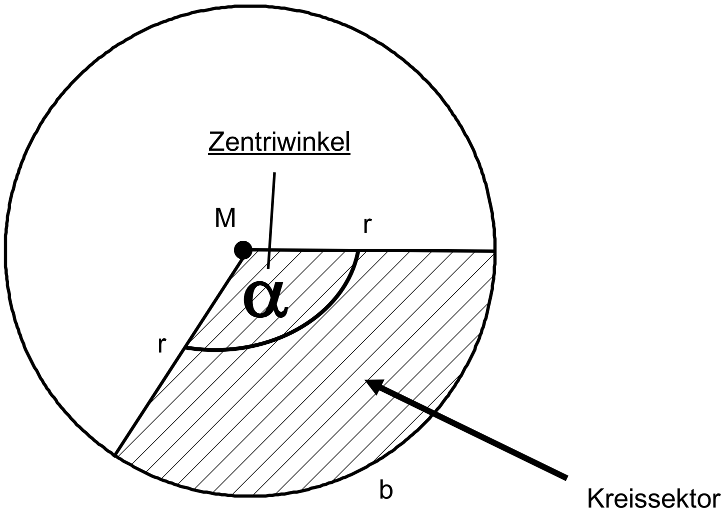
Beispiel:



---> $\underline{\alpha = 70°}$

Winkel im Kreis

Kreissektor nennt man eine Fläche im Kreis, welche von *zwei Radien* (r) und einem Bogen (b) des Kreises begrenzt wird.



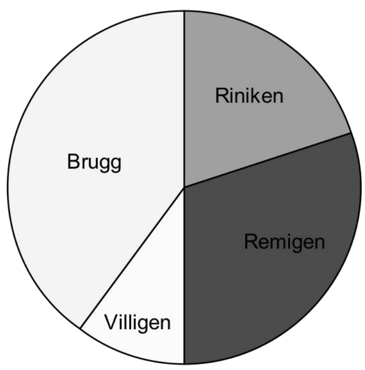
Die *Grösse des Kreissektors* wird einerseits bestimmt durch den *Kreisradius r*, andererseits durch den sogenannten *Zentriwinkel α*.

Kreissektoren werden in *Kreisdiagrammen* verwendet. Ein Kreisdiagramm ist eine graphische Darstellung, welche die Aufteilung einer Grösse in verschiedene Anteile veranschaulicht.

Beispiel: In einer Schulklasse wohnen 4 Schüler in Riniken, 6 in Remigen, 2 in Villigen und 8 in Brugg.
Zeichne dazu ein Kreisdiagramm.

Vorgehen:
Die *ganze Klasse* (20 Schüler) entspricht der *ganzen Kreisfläche* (360°).
Entsprechend der *Anzahl Schüler pro Gemeinde* wird die *Winkelweite pro Sektor* berechnet.
Die vier Kreissektoren werden in einen Kreis abgemessen.

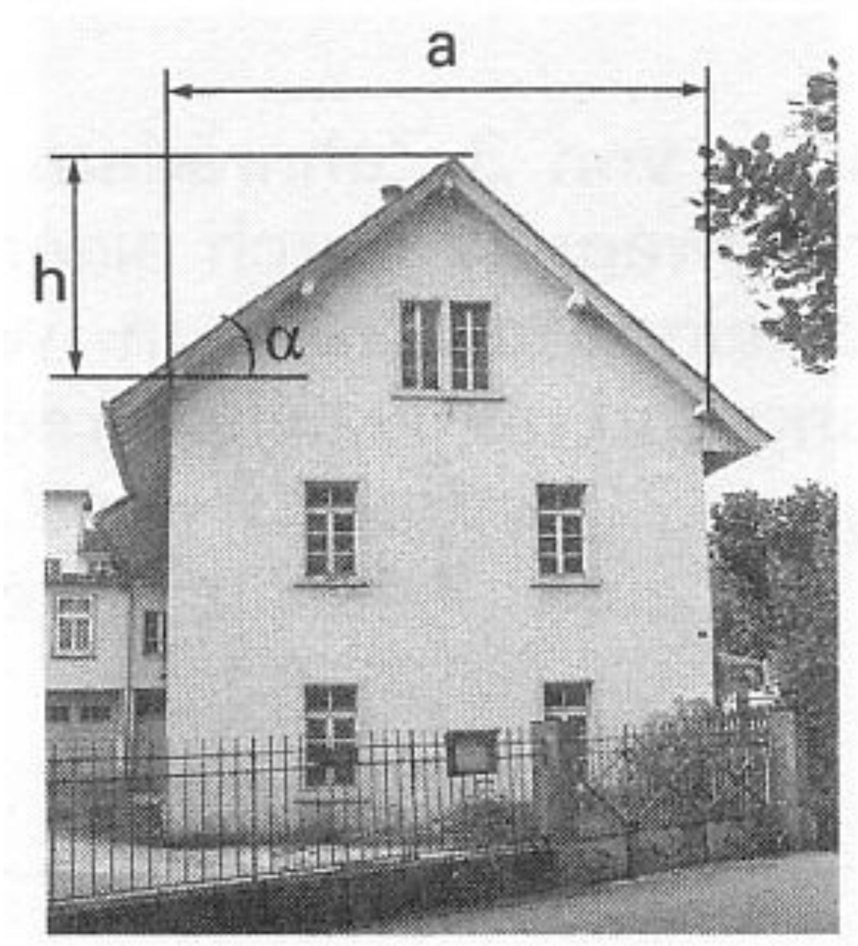
Gemeinde	Anzahl Schüler	Grad (°)
Riniken	4	72°
Remigen	6	108°
Villigen	2	36°
Brugg	8	144°



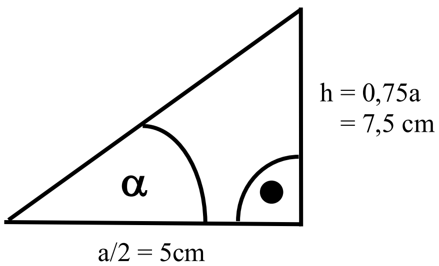
3 Anwendungen

Anwendungsmöglichkeiten der Winkelmessung in der *Praxis* gibt es viele.

Beispiel: Bestimme den Neigungswinkel α eines Hausdaches, wenn gilt: $h = 0{,}75a$.



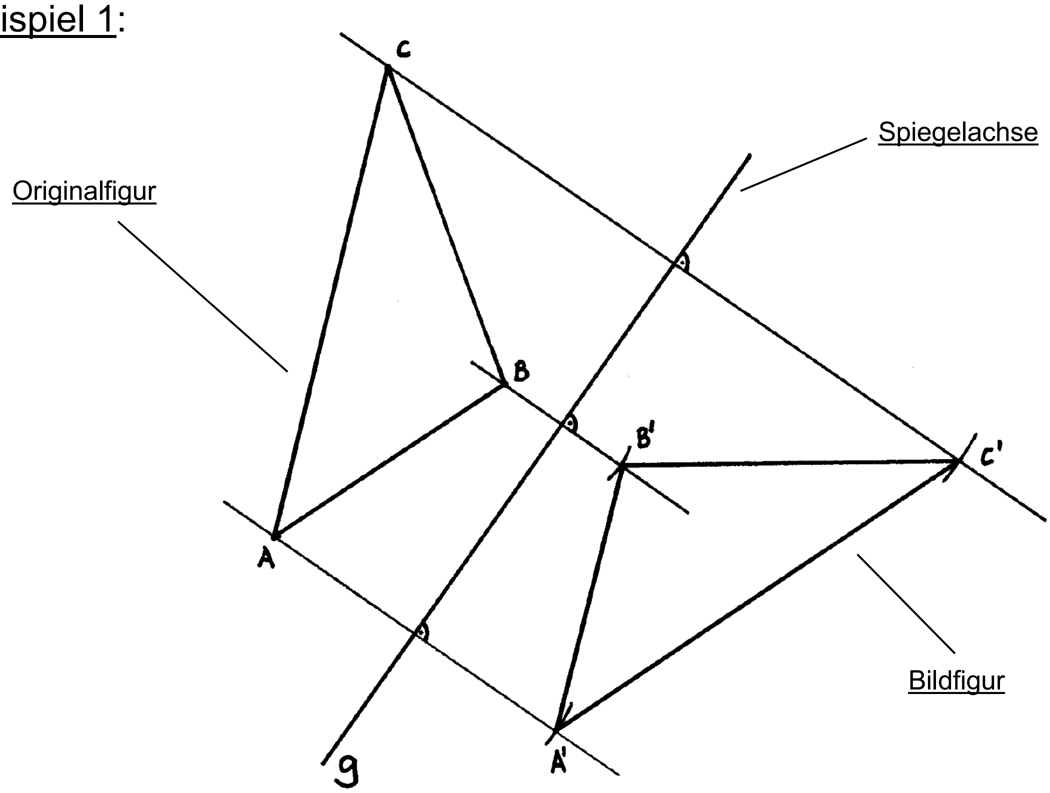
Mit Hilfe einer *Konstruktion* des rechtwinkligen Dreiecks im Dachstock wird der Winkel α bestimmt. Man wählt dazu *für a* eine *beliebige Länge*, z.B. $a = 10$ cm.
Durch Messung erhält man: $\alpha \cong \underline{\underline{56°}}$.



4 Achsenspiegelung

Die *Achsenspiegelung* ist eine *geometrische Abbildung*, welche jeden *Punkt einer Originalfigur* auf seinen zugehörigen *Bildpunkt* abbildet, indem jener an der *Spiegelachse* gespiegelt wird.

Beispiel 1:

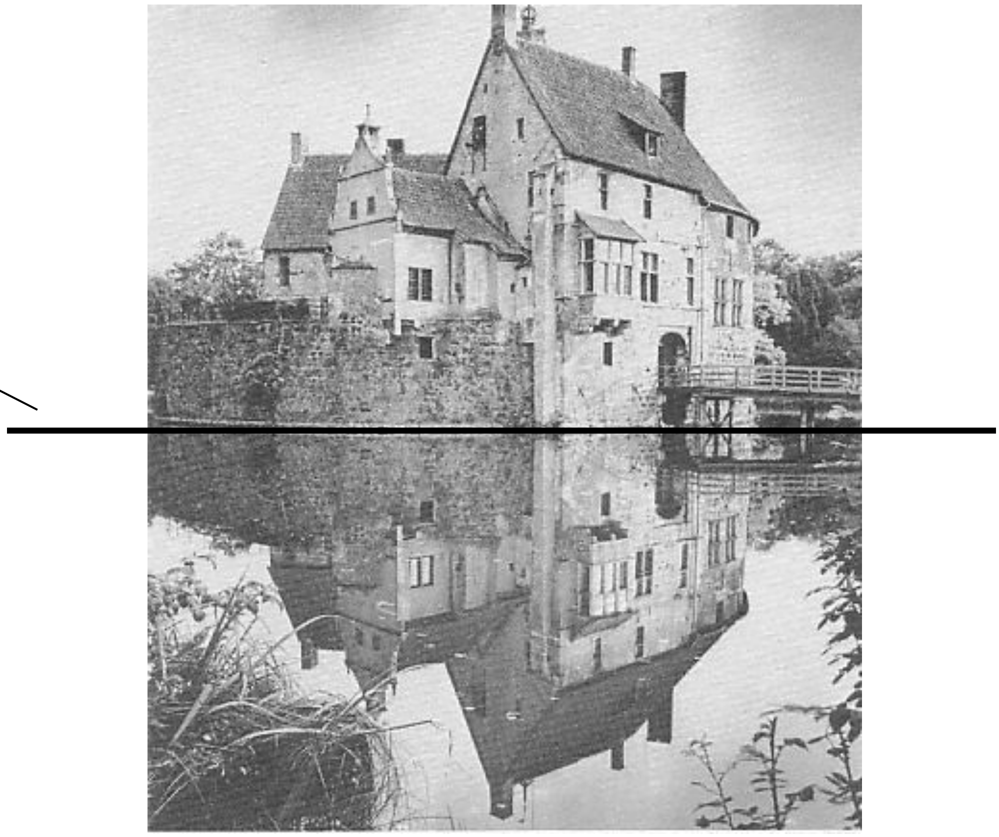


Eigenschaften der Achsenspiegelung

1. Die Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ stehen *senkrecht* zur Spiegelachse g.
2. Die Punkte *A und A'* sind *gleich weit von der Spiegelachse g entfernt* (gilt auch für B und B', sowie C und C').
3. *Punkte auf der Spiegelachse* werden *auf sich selber abgebildet*. Man nennt sie *Fixpunkte*.
4. Durch eine Achsenspiegelung wird der *Umlaufsinn* der Figur *umgekehrt*, d.h. die *Beschriftung* erfolgt *nachher im Uhrzeigersinn*.
5. Die *Originalfigur* und die *Bildfigur* sind *deckungsgleich* (kongruent).

Beispiel 2:

Spiegelachse

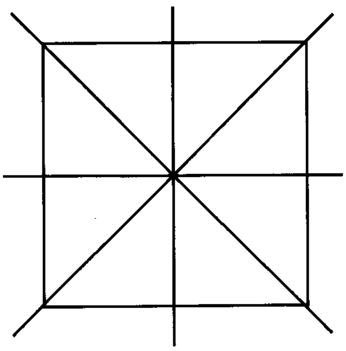


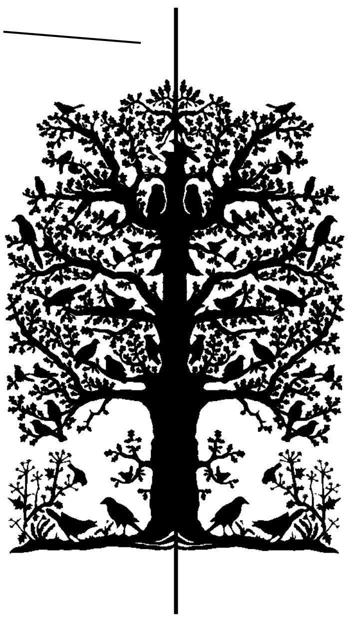
Achsensymmetrie

Bei bestimmten Figuren lässt sich eine Spiegelachse so einzeichnen, dass die *Figur bei einer Spiegelung auf sich selber abgebildet wird*.
Solche Figuren nennt man *achsensymmetrisch*. Die Spiegelachse wird in solchen Fällen auch *Symmetrieachse* genannt.

Beispiele:

Symmetrieachsen

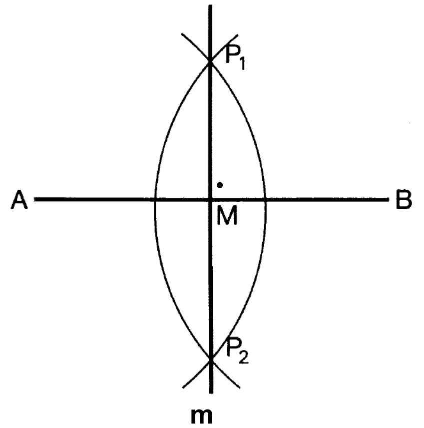




5 Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

Die Mittelsenkrechte

Die *Mittelsenkrechte m einer Strecke $\overline{AB}$* ist die *Gerade*, welche *rechtwinklig* zu dieser Strecke ist und durch deren *Mittelpunkt* geht.
Die Mittelsenkrechte ist der *geometrische Ort der Punkte, die von A und B gleichen Abstand haben*.

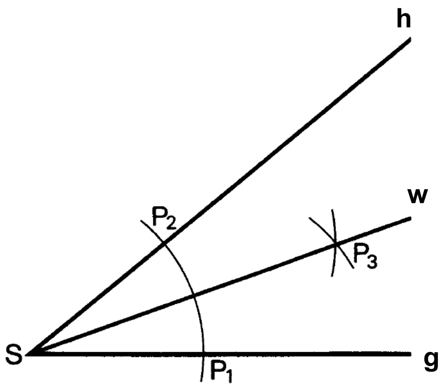


Konstruktion

Um die Punkte A und B zeichnet man Kreisbögen mit *gleichem Radius*. Der Radius muss grösser als die halbe Streckenlänge sein. Die Kreisbögen schneiden sich in P_1 und P_2. Die Gerade durch P_1 und P_2 ist die Mittelsenkrechte m. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Die Winkelhalbierende

Die *Winkelhalbierende w* eines Winkels <gh ist die *Gerade*, welche das durch *die Schenkel g und h begrenzte Winkelfeld* in *zwei kongruente Winkelfelder* teilt.
Die Winkelhalbierende ist der *geometrische Ort der Punkte, die von den Schenkeln g und h gleichen Abstand haben*.



Konstruktion

Um den Scheitelpunkt S des Winkels zeichnet man einen Kreisbogen mit beliebigem Radius. Er schneidet die Schenkel g und h in den Punkten P_1 und P_2. Um diese Punkte zeichnet man Kreisbögen mit *gleichem Radius*. Diese schneiden sich im Punkt P_3. Die Gerade durch den Scheitelpunkt S und den Punkt P_3 ist die Winkelhalbierende w des Winkels.