B Rechenoperationen I

1 Addition und Subtraktion

Die Zusammenzählrechnung wird von jetzt an *Addition* genannt, und das Zusammenzählen heisst *addieren*.
Das Wegzählen heisst von jetzt an *Subtraktion*, und wegzählen nennen wir *subtrahieren*.
Die Zahlen, die bei der Addition und der Subtraktion beteiligt sind, besitzen *Fachausdrücke*:

7	**+**	8	=	15	**(Addition)**
Summand	plus	*Summand*	gleich	*Summe*	

21	**-**	16	=	5	**(Subtraktion)**
Minuend	minus	*Subtrahend*	gleich	*Differenz*	

Die Subtraktion ist die *Umkehroperation* der Addition. Dies kann mit Hilfe eines *Pfeil-Diagrammes* gezeigt werden:

$$\boxed{36} \underset{-24}{\overset{+24}{\rightleftarrows}} \boxed{60}$$

(natürlich gilt auch, dass die Addition die Umkehroperation der Subtraktion ist!)

Um *Dezimalzahlen* möglichst einfach zu addieren bzw. zu subtrahieren, *zerlegt man sie in dieselben Stelleneinheiten*.

Beispiele:

a.) 0,45 + 5,06 = 45 **h** + 506 **h** = 551 **h** = **5,51**
b.) 5,1 - 3,4 = 51 **z** - 34 **z** = 17 **z** = **1,7**
c.) 0,02 - 0,0002 = 200 **zt** - 2 **zt** = 198 **zt** = **0,0198**
d.) 1 - 0,045 = 1'000 **t** - 45 **t** = 955 **t** = **0,955**
e.) 4,4 + 0,94 = 440 **h** + 94 **h** = 534 **h** = **5,34**

2 Rechenvorteile: Mit List und Tricks macht Rechnen Spass

Du weisst bereits aus der Primarschule, dass gilt: $4 + 9 = 9 + 4 = 13$.
Man darf also bei einer Addition die *Summanden vertauschen*.

Allgemein ausgedrückt gilt: $\boxed{a + b = b + a}$

Dieses Gesetz heisst *Vertauschungsgesetz* oder *Kommutativgesetz*.

Beispiel: Betrachte die folgende Addition: $39 + 27 + 61$.
Statt stur von links nach rechts zu addieren, wenden wir zuerst das *Kommutativgesetz* an und vertauschen den 2. und 3. Summanden, damit nachher eine „runde" Teilsumme (Zehnerzahl) entsteht.

Die Rechnung lautet nun: $39 + 61 + 27 = 100 + 27 = \underline{127}$.

Das Kommutativgesetz gilt *nicht* für die *Subtraktion*!

Beispiel: $120 - 50 \neq 50 - 120$.

In einer Summe mit mehr als zwei Summanden dürfen die *Summanden beliebig zu Teilsummen zusammengefasst werden*.
Mit *Klammern* werden die Teilsummen angedeutet.

Beispiel:
$$25 + 35 + 45 = (25 + 35) + 45 = 60 + 45 = 105$$
$$25 + 35 + 45 = 25 + (35 + 45) = 25 + 80 = 105$$

Allgemein ausgedrückt gilt: $\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$

Dieses Gesetz heisst *Verbindungsgesetz* oder *Assoziativgesetz*.

Es ist möglich, dass bei einer Addition *sowohl* das Kommutativgesetz *als auch* das Assoziativgesetz angewendet werden.

Beispiel: $17 + 19 + 16 + 21 \;=\; 17 + 16 + 19 + 21 \;=$

Kommutativgesetz

$17 + 16 + \mathbf{(}19 + 21\mathbf{)} \;=\; 17 + 16 + 40 \;=$

Assoziativgesetz

$\mathbf{(}17 + 16\mathbf{)} + 40 \;=\; 33 + 40 \;=\; 73$

Assoziativgesetz

Tricks (Vereinfachen von Rechnungen)

Bei der *Addition zweier Summanden* darf man den *einen Summanden* um einen bestimmten Betrag *vergrössern*, wenn man *den andern Summanden* um *dieselbe Zahl verkleinert*.

- 100

Beispiel: 5'900 + 2'600 = 6'000 + 2'500 = 8'500

+ 100

Bei der *Subtraktion* darf man den *Subtrahenden* um einen bestimmten Betrag *vergrössern*, wenn man *Minuenden* auch um *dieselbe Zahl vergrössert*.

+ 400

Beispiel: 6'100 - 2'600 = 6’500 - 3’000 = 3'500

+ 400

3 Schriftliche Addition und Subtraktion

Bei der *schriftlichen Addition* werden die *Summanden einzeln untereinander geschrieben*, so dass die *Einheiten in derselben Spalte* zu liegen kommen.

Beispiel: 125 + 76 + 2'890 + 7 --->

$$\begin{array}{lr} & \underline{\text{THZE}} \\ & 125 \\ + & 76 \\ + & \text{2'890} \\ + & 7 \end{array}$$

Nun bildet man zuerst die *Summe der Einer*. Ist sie grösser als 9, erfolgt die Verwandlung und der *Übertrag* (sog. *Behaltewert*) *zu den Zehnern*.
Dann bildet man die *Summe der Zehner* (*inkl. Behaltewert!*). Ist sie grösser als 9, erfolgt die Verwandlung und der Übertrag zu den Hundertern u.s.w. .

Damit Fehler möglichst rasch gefunden werden, müssen die *Behaltewerte* unbedingt geschrieben werden!

Die obige Rechnung schriftlich ausgeführt sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lr} & 125 \\ + & 76 \\ + & \text{2'890} \\ + & 7 \\ & {\scriptstyle 1\;1\;1\;\;} \\ \hline & \text{3'098} \\ \hline\hline \end{array}$$

Das Vorgehen der schriftlichen Addition lässt sich problemlos auf *Dezimalbrüche* übertragen. Damit dieselben Einheiten der Summanden untereinander stehen, muss *das Komma jedes Summanden in derselben Spalte sein!*

Beispiel: 140,3 + 13,86 + 8,666 --->

$$\begin{array}{lr} & 140{,}3\mathit{00} \\ + & 13{,}86\mathit{0} \\ + & 8{,}666 \\ & {\scriptstyle 1\;1\;1\;\;\;} \\ \hline & 162{,}826 \\ \hline\hline \end{array}$$

Fehlende Stellen werden zur Vereinfachung der Rechnung mit Nullen besetzt!

Bei der *<u>schriftlichen Subtraktion</u>* werden *<u>der Minuend und der Subtrahend/die Subtrahenden untereinander geschrieben</u>*, so dass die *<u>Einheiten in derselben Spalte</u>* zu liegen kommen.

<u>Beispiel</u>: 386 - 124 -->

$$\begin{array}{r} \underline{\text{HZE}} \\ 386 \\ -\ 124 \end{array}$$

Nun wird für jeden Stellenwert *<u>von der oberen Ziffer die untere subtrahiert</u>*, so dass die obige Aufgabe schriftlich ausgeführt wie folgt aussieht:

$$\begin{array}{r} 386 \\ -\ 124 \\ \hline 262 \\ \hline\hline \end{array}$$

Was passiert aber, wenn die *<u>untere Ziffer grösser ist als die obere</u>*?
Wir wollen für ein solches Beispiel die einzelnen Rechnungsschritte notieren.

<u>Beispiel</u>: 2'823 - 587 -->

$$\begin{array}{r} 2'823 \\ -\quad 587 \\ {\scriptstyle 1\,1\ } \\ \hline 2'236 \\ \hline\hline \end{array}$$

1. Wir leihen einen Zehner (=10 Einer) aus und addieren ihn zu den 3 Einern, was 13 Einer ergibt.
2. Wir ergänzen 7 Einer auf 13 Einer, was 6 Einer ergibt. Schreibe 6 Einer und gib den geliehenen Zehner zurück: behalte 1 Zehner.
3. Wir leihen einen Hunderter (=10 Zehner) aus und addieren ihn zu den 2 Zehnern, was 12 Zehner ergibt.
4. Wir ergänzen 8+1 Zehner (=9 Zehner) auf 12 Zehner, was 3 Zehner ergibt. Schreibe 3 Zehner und gib den geliehenen Hunderter zurück: behalte 1 Hunderter.
5. 1 Hunderter und 5 Hunderter auf 8 Hunderter ergänzen ergibt 2 Hunderter. Schreibe 2 Hunderter.
6. Ergänze 0 Tausender auf 2 Tausender, was 2 Tausender ergibt. Schreibe 2 Tausender.

4 Das Runden von Zahlen und Grössen

In vielen Situationen ist es sinnvoll, *Zahlen* oder *Grössen* (Masszahlen *und* Masseinheiten) zu runden.

Beispiel: Die *Einwohnerzahl einer Stadt* soll angegeben werden. Da sich diese Zahl fast täglich verändert, ist es sinnlos, eine Angabe auf einzelne Einwohner genau zu machen. Man rundet deshalb beispielsweise *auf hundert Einwohner genau* und notiert:
Die Stadt zählt rund 11'200 Einwohner.

Manchmal ist es auch völlig sinnlos, Zahlen zu runden.

Beispiele: Nicht gerundet werden dürfen

- *Telephonnummern*	(062/731 45 62)
- *Kontonummern*	(810-17000-45)
- *Autonummern*	(269 738)

Vorgehen beim Runden

Für das Runden entscheidend ist die *Ziffer hinter der Stelle, auf die gerundet werden muss*.

- Ist die für das Runden entscheidende Ziffer eine *0, 1, 2, 3 oder 4* , so wird *abgerundet*.
- Ist die für das Runden entscheidende Ziffer eine *5, 6, 7, 8 oder 9*, so wird *aufgerundet*.

Beispiele:

1	Auf Hunderter runden:	5'631 ≅ 5'600
2	Auf Zehner runden:	23'466,7 ≅ 23'470
3	Auf Zehntel runden:	12,746 ≅ 12,7
4	Auf 2 Dezimalen runden:	0,9788 ≅ 0,98
5	Auf 3 Dezimalen runden:	5,8996 ≅ 5,**9**00 !
6	Auf cm runden:	6,9206m ≅ 6,92m
7	Auf m runden:	5'561,59m ≅ 5'562m

(unterstrichen ist jeweils die für das Runden entscheidende Stelle)

5 Addieren und Subtrahieren im Alltag

In sogenannten *Sätzchenaufgaben* (Aufgaben die in Sätzen eingekleidet sind) wird das *situationsbezogene Anwenden* der Addition und der Subtraktion gelernt.
Wichtig ist bei solchen Aufgaben in erster Linie das *korrekte Erfassen der gegebenen Situation*, was vor allem ein *genaues Lesen* der Aufgabenstellung voraussetzt!

Beispiel: *„Ein Parkhaus hat 1'352 Plätze. Während der Nacht waren 25 Autos eingestellt. Im Laufe des Vormittags fahren 1'579 Autos hinein und 428 hinaus.*
Wie viele Plätze sind um 12 Uhr noch frei?"

Vorgehensweise

1. *Lies* die Aufgabe *genau* durch (eventuell mehrmals).
2. Überlege dir, welche *Rechenoperationen* in welcher *Reihenfolge* benötigt werden.
3. Führe die einzelnen *Ausrechnungen schrittweise schriftlich* aus.
4. Achte auf eine *übersichtliche Darstellung*.
5. *Runde* gegebenenfalls das Resultat.
6. Schreibe einen kurzen *Antwortsatz*.

Lösung der obigen Aufgabe

$$\begin{array}{r} 1'579 \\ -\quad 428 \\ \hline 1'151 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1'151 \\ +\quad 25 \\ \hline 1'176 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1'352 \\ -\quad 1'176 \\ \hline 176 \\ \hline\hline \end{array}$$

Um 12 Uhr sind noch 176 Parkplätze frei.

6 Die Verbindung von Addition und Subtraktion - Gleichungen

Operieren wir in einem Term sowohl mit der *Addition* als auch mit der *Subtraktion*, ist oft das *Setzen von Klammern* notwendig, um genau angeben zu können, in welcher *Reihenfolge* gerechnet werden soll.

Beispiele:

1. $12 - 5 + 4 - 3 = \underline{\underline{8}}$
2. $12 - \mathbf{(}5 + 4\mathbf{)} - 3 = \underline{\underline{0}}$
3. $12 - \mathbf{(}5 + 4 - 3\mathbf{)} = \underline{\underline{6}}$

Die Klammern geben an, dass die Rechnung, die darin enthalten ist, zuerst ausgeführt werden muss!

Enthält eine Aufgabe *ineinander verschachtelte Klammern*, so wird zuerst die *innerste Klammer* verrechnet.

Beispiel:

$\mathbf{(}53 - (18 + 5)\mathbf{)} - \mathbf{(}18 + (13 - 9)\mathbf{)} =$

$\mathbf{(}53 - 23\mathbf{)} - \mathbf{(}18 + 4\mathbf{)} =$

$30 – 22 = \underline{\underline{8}}$

Achte auf das korrekte Setzen des Gleichheitszeichens!

Vom Term zum Text und vom Text zum Term

Ein gegebener Term kann *in Worten* ausgedrückt werden (vom Term zum Text). Dabei muss die Aufgabenstellung absolut verständlich bleiben!

Beispiel:

$(3{,}7 + 5{,}8) - (2{,}4 - 1{,}7)$ Achte auf die Klammern!

"Subtrahiere von der Summe von 3,7 und 5,8 die Differenz von 2,4 und 1,7."

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Term in Worten auszudrücken!

Umgekehrt ist es auch möglich, einen in Worten formulierten Term als *Zahlen- / Buchstabenausdruck* zu schreiben.

Beispiel: "Von der Differenz der Zahlen 87,32 und 36,18 soll die Summe von 10,97 und 21,34 subtrahiert werden und zum Rest die Differenz von 65,12 und 36,75 addiert werden."

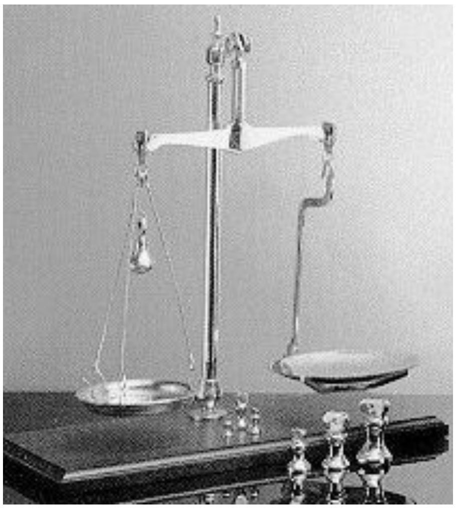
(87,32 - 36,18) - (10,97 + 21,34) + (65,12 - 36,75)

Gleichungen

Sind zwei Terme durch ein *Gleichheitszeichen* (=) verbunden, spricht man von einer *Gleichung*. Der Wert auf der linken Seite entspricht dem Wert auf der rechten Seite.

Beispiel: 25 + 17 **=** 42

Man kann sich dieses *"Gleichgewicht"* am Bild einer *Balkenwaage* vorstellen.



Enthält eine Gleichung eine *Variable*, muss diese so *durch eine Zahl ersetzt werden*, dass die *Gleichung erfüllt ist*, d.h. beide Seiten gleichwertig sind.

Beispiel: 57 - x = 28

x = 29

Bei *Sätzchenaufgaben* muss die Gleichung zuerst noch aufgestellt werden.

Beispiel: "Um welche Zahl muss die Summe von 8,30 und 6,71 vermindert werden, um ihre Differenz zu erhalten?"

$$(8{,}30 + 6{,}71) - x = (8{,}30 - 6{,}71)$$
$$15{,}01 - x = 1{,}59$$

$$x = \underline{\underline{13{,}42}}$$

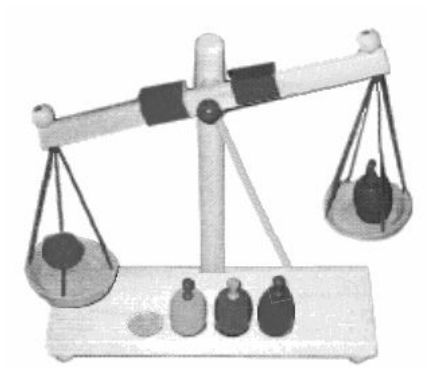
Ungleichungen

Sind zwei Terme durch ein *Ungleichheitszeichen* (<, >) verknüpft, so spricht man von einer *Ungleichung*. Der Wert auf der einen Seite muss in diesem Falle *grösser oder kleiner* sein als auf der andern Seite.

Beispiele: $5 + 7 > 2 + 4$

$40 - 23 < 40 + 23$

Dieses "*Ungleichgewicht*" lässt sich ebenfalls mit einer Balkenwaage darstellen.



Enthält eine Ungleichung eine *Variable*, muss diese *durch eine oder mehrere Zahlen ersetzt werden*, so dass die *Ungleichung erfüllt ist*.

Beispiele: $x + 7 < 15$ ---> $\underline{\underline{x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}}$

$25 + x > 48$ ---> $\underline{\underline{x > 23}}$

7 Addition und Subtraktion: Vermischtes

Zahlenfolgen

Zahlen, die *nach einem bestimmten Gesetz aufeinanderfolgen*, bilden eine *Zahlenfolge*. Die einzelnen Zahlen heissen *Glieder* der Folge.

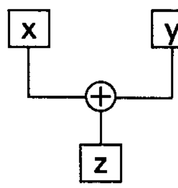
Beispiele:

1, 4, 7, 10, 13, ...	(Gesetz: + 3)
2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, ...	(Gesetz: +1 / ·2)
1, 4, 3, 12, 11, 44, 43, ...	(Gesetz: ·4 / -1)

Verknüpfungsdiagramme

Ein *Verknüpfungsdiagramm* ist eine *graphische Darstellung einer Gleichung*. Die Zahlen (in quadratischen Kästchen) und die Operationszeichen (in Kreisen) werden durch Verbindungslinien verknüpft.

Beispiele:

Gleichung	Verknüpfungsdiagramm
x + **y** = **z** **4** + **7** = **11**	

Gleichung	Verknüpfungsdiagramm
95 – (**x** +33) = **y** 95 – (**15** +33) = **47**