A Operationen mit Variablen in Q

1 Bruchterme: Entstehung und Formänderungen

Bruchterme sind Brüche, welche Zahlen und Buchstaben enthalten.

Beispiele: $\frac{3x}{4}, \frac{5}{a}, \frac{12xy}{a}, \frac{4x^2}{x-1}, \frac{(x+2)^2}{5}$.

Der Begriff *Formänderung* gibt an, dass bei einem Bruchterm die Form (= Aussehen), aber nicht der Wert verändert wird!

Beispiele: 1.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \dfrac{3x}{4} = \dfrac{6x}{8} \\ \xrightarrow[\cdot 2]{} \end{array}$$

(dieser Vorgang heisst *Erweitern* und stellt eine Formänderung dar)

2.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{:4x} \\ \dfrac{4x^3}{8x} = \dfrac{x^2}{2} \\ \xrightarrow[:4x]{} \end{array}$$

(dieser Vorgang heisst *Kürzen* und stellt eine Formänderung dar)

- *Erweitern* heisst, Zähler und Nenner mit demselben Ausdruck zu multiplizieren.
- *Kürzen* heisst, Zähler und Nenner durch denselben Ausdruck zu dividieren.

Für die Variable(n) eines Bruchtermes können Zahlen eingesetzt werden, so dass der Wert des Termes berechnet werden kann.

Beispiel: Berechne den Wert des Bruchtermes $T = \frac{2x+7}{y-2}$ für x = 7 und y = -1.

$$T = \frac{2 \cdot 7 + 7}{-1-2} = \frac{14+7}{-3} = \frac{21}{-3} = -7 \ .$$

Grundmenge G

Die Zahlen, welche für die Variable(n) eines Bruchtermes eingesetzt werden dürfen, müssen in der sogenannten *Grundmenge G* enthalten sein. Die Grundmenge ist eine Art Vorratskammer aus Zahlen, welche zur Verfügung stehen.

Die Grundmenge G entspricht meistens einer der folgenden Zahlenmengen:

- $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (Menge der natürlichen Zahlen ohne 0)
- $N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (Menge der natürlichen Zahlen mit 0)
- $Z = \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (Menge der ganzen Zahlen)
- $Q = \{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ und } a,b \in Z\}$ (Menge der rationalen Zahlen)

Definitionsmenge D

Beim Einsetzen von Zahlen aus der Grundmenge G für die Variable(n) eines Bruchtermes können sich Probleme ergeben. Mit der Definitions-menge D wird angegeben, welche Zahlen verwendet werden dürfen.

Beispiel: Grundmenge G = Q.

Setze im Bruchterm $\frac{3x-5}{x+1}$ für x die Zahl –1 ein.

---> $\frac{3\cdot(-1)-5}{-1+1} = \frac{-8}{0}$ ---> *Division durch 0 ist nicht definiert!*

Der obige Bruchterm ist für x = -1 nicht definiert. Die Definitionsmenge D ist folglich hier:

$D = Q \setminus \{-1\}$

„ausser“

Kürzungsregeln anhand von Beispielen

1. $\dfrac{6x}{10} = \dfrac{3x}{5}$

2. $\dfrac{10}{20y} = \dfrac{1}{2y}$

3. $\dfrac{24xy}{8x} = \dfrac{3y}{1} = 3y$

4. $\dfrac{4x}{x^2} = \dfrac{4}{x}$

5. $\dfrac{12x^2y}{20xy^2} = \dfrac{3x}{5y}$

6. $\dfrac{(2x)^3}{4x^2} = \dfrac{8x^3}{4x^2} = \dfrac{2x}{1} = 2x$

7. $\dfrac{(4x^2)^3}{(6x)^3} = \dfrac{64x^6}{216x^3} = \dfrac{8x^3}{27}$

8. $\dfrac{-8a^2b}{12ab^2} = \dfrac{-2a}{3b} = -\dfrac{2a}{3b}$

9. $\dfrac{(-2a)^4}{4a^2} = \dfrac{16a^4}{4a^2} = \dfrac{4a^2}{1} = 4a^2$

10. $\dfrac{(-2a)^3}{4a^2} = \dfrac{-8a^3}{4a^2} = \dfrac{-2a}{1} = -2a$

11. $\dfrac{-xa^2}{(-x)^3a} = \dfrac{-xa^2}{-x^3a} = \dfrac{a}{x^2}$

12. $\dfrac{-(ax^2)^2}{(-a^2x)^2} = \dfrac{-a^2x^4}{a^4x^2} = \dfrac{-x^2}{a^2} = -\dfrac{x^2}{a^2}$

13. $\dfrac{7x^2}{5} \cdot \dfrac{10}{14x} = \dfrac{7x^2 \cdot 10}{5 \cdot 14x} = \dfrac{x \cdot 2}{1 \cdot 2} = \dfrac{x}{1} = x$

14. $\frac{-5a}{3}\cdot\frac{12}{a^2}=\frac{-5\cdot 4}{1\cdot a}=\frac{-20}{a}=-\frac{20}{a}$

15. $\frac{(-2x)^3}{5a}\cdot\frac{15a^2}{-6x}=\frac{-8x^3}{5a}\cdot\frac{15a^2}{-6x}=\frac{4x^2\cdot 3a}{1\cdot 3}=\frac{4x^2\cdot a}{1}=4ax^2$

16. $\frac{x+1}{x+1}=\frac{1}{1}=1$

17. $\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}=\frac{2}{1}=2$

18. $\frac{x-1}{1-x}=\frac{(-1)\cdot(-x+1)}{1-x}=\frac{-1(1-x)}{1-x}=\frac{-1}{1}=-1$

19. $\frac{4x^2-4x^3}{1-x}=\frac{4x^2(1-x)}{1-x}=\frac{4x^2}{1}=4x^2$

20. $\frac{12x-20}{-8}=\frac{4(3x-5)}{-8}=\frac{3x-5}{-2}=-\frac{3x-5}{2}$

21. $\frac{12x-20}{3x-5}=\frac{4(3x-5)}{3x-5}=\frac{4}{1}=4$

22. $\frac{12x-20}{5-3x}=\frac{4(3x-5)}{(-1)(3x-5)}=\frac{4}{-1}=-4$

23. $\frac{8-24a}{30a-10}=\frac{8(1-3a)}{10(3a-1)}=\frac{-8(3a-1)}{10(3a-1)}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$

24. $\frac{x^2a-x^3}{x^2-ax}=\frac{x^2(a-x)}{x(x-a)}=\frac{x(a-x)}{1(x-a)}=\frac{x(a-x)}{-1(a-x)}=\frac{x}{-1}=-x$

25. $\frac{a^2-1}{a-1}=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=\frac{a+1}{1}=a+1$

26. $\frac{x^4-x^2}{x^2+2x+1}=\frac{x^2(x^2-1)}{(x+1)(x+1)}=\frac{x^2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)}=\frac{x^2(x-1)}{x+1}$

2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Brüche

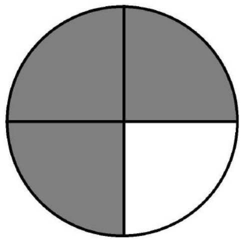
Der *Nenner* „nennt“ die Grösse eines Bruches, der *Zähler* „zählt“ die Anzahl.

Beispiel:

$$\frac{3}{4}$$

Zähler
(Anzahl: Drei)

Nenner
(Grösse: Viertel)



Brüche, die addiert oder subtrahiert werden, müssen *gleichnamig* sein, d.h. *den gleichen Nenner* besitzen.
Dann werden die *Zähler* addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$$

gleichnamig

Sind Brüche *ungleichnamig* (besitzen sie *nicht* den gleichen Nenner), müssen sie durch *Erweitern* gleichnamig gemacht werden.
Man bestimmt in diesem Falle den sogenannten *Hauptnenner*.
Der Hauptnenner ist das *kgV* (*kleinstes gemeinsames Vielfaches*) der einzelnen Nenner.
Dann addiert bzw. subtrahiert man die *Zähler* der *erweiterten Brüche*.

Beispiele:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=\frac{15}{20}+\frac{12}{20}=\frac{27}{20}$$

ungleichnamig

Hauptnenner (kgV)

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-\frac{7}{12}=\frac{16}{24}+\frac{15}{24}-\frac{14}{24}=\frac{17}{24}$$

Hauptnenner (kgV)

Bruchterme

Das Vorgehen bei der Addition bzw. Subtraktion von *Bruchtermen* ist *identisch* mit dem vorher geschilderten *Verfahren bei Brüchen*.

Bruchterme, die addiert oder subtrahiert werden, müssen *gleichnamig* sein, d.h. *den gleichen Nenner* besitzen.

Beispiele:

$$\frac{3x}{4}+\frac{5x}{4}=\frac{8x}{4}=2x$$

$$\frac{2}{3a}+\frac{1}{3a}=\frac{3}{3a}=\frac{1}{a}$$

Sind Bruchterme *ungleichnamig* (besitzen sie *nicht* den gleichen Nenner), müssen sie gleichnamig gemacht werden.
Man bestimmt ebenfalls den *Hauptnenner* und addiert bzw. subtrahiert die Zähler der *erweiterten Brüche*.

Beispiele:

$$\frac{3z}{4}+\frac{3z}{5}=\frac{15z}{20}+\frac{12z}{20}=\frac{27z}{20}$$

$$\frac{2}{3b}+\frac{5}{8b}-\frac{7}{12b}=\frac{16}{24b}+\frac{15}{24b}-\frac{14}{24b}=\frac{17}{24b}$$

$$\frac{2x}{5y}+\frac{7x}{8y}-\frac{3x}{10y}=\frac{16x}{40y}+\frac{35x}{40y}-\frac{12x}{40y}=\frac{39x}{40y}$$

$$\frac{2}{5a}+\frac{5}{6b}=\frac{12b}{30ab}+\frac{25a}{30ab}=\frac{12b+25a}{30ab}$$

$$\frac{3b}{2a^2}+\frac{3}{4ab}=\frac{6b^2}{4a^2b}+\frac{3a}{4a^2b}=\frac{6b^2+3a}{4a^2b}$$

Bestimmung des Hauptnenners bei Summen

Die Bestimmung des Hauptnenners wird anspruchsvoller, sobald im Nenner *Summen* vorkommen.
In diesem Falle müssen die *Summen* – falls möglich – durch *Faktorisieren* in Produkte zerlegt werden.

Beispiele:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x-1}{x(x-1)}=\frac{1+x-1}{x(x-1)}=\frac{x}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

„Faktorisieren“

„Klammern setzen wegen negativem Vorzeichen!“

!

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}-\frac{(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)}=$$

$$\frac{-2b}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{4x}{x^2+x}-\frac{4}{2x-2}+\frac{4}{x^2-1}=\frac{4x}{x(x+1)}-\frac{4}{2(x-1)}+\frac{4}{(x+1)(x-1)}=$$

$$\frac{4x\cdot 2\cdot(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}-\frac{4\cdot x\cdot(x+1)}{2x(x+1)(x-1)}+\frac{4\cdot 2x}{2x(x+1)(x-1)}=$$

$$\frac{8x(x-1)-4x(x+1)+8x}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{8x^2-8x-4x^2-4x+8x}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{4x^2-4x}{2x(x+1)(x-1)}=$$

$$\frac{4x(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x+1}$$

3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

Brüche multiplizieren

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die *beiden Zähler miteinander multipliziert* und die *beiden Nenner miteinander multipliziert*. Statt *nach* dem Multiplizieren *kürzt* man besser *vor* dem *Multiplizieren*!

Beispiel: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ *besser:* $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1}{2}$

Brüche dividieren

Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man *den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert*.

Den Kehrwert eines Bruches erhält man, wenn man Zähler und Nenner miteinander vertauscht!

Der Kehrwert von $\frac{a}{b}$ *ist folglich* $\frac{b}{a}$.

Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{1} = \frac{3}{2}$ *es gilt:* $\boxed{\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = :\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}}$

Kehrwert von $\frac{1}{2}$

Doppelbrüche

Sind der *Zähler und der Nenner eines Bruches selber auch Brüche*, so spricht man von einem Doppelbruch.
Die Berechnung erfolgt, indem man den *Hauptbruchstrich durch ein Divisionszeichen ersetzt*.

Beispiel: $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{16}{15}} = \frac{4}{5}:\frac{16}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{3}{4}$

Bruchterme multiplizieren und dividieren

Das Vorgehen bei der Multiplikation bzw. Division von *Bruchtermen* ist *identisch* mit dem vorher geschilderten *Verfahren bei Brüchen*.

Beispiele:

1 $$\frac{27xy}{28uvw}\cdot\frac{35uv}{81xy}=\frac{5z}{12w}$$

2 $$\frac{-3a}{2b}\cdot\frac{4b}{5a}\cdot\frac{25c}{9d}=-\frac{10c}{3d}$$

3 $$16x^2\cdot\frac{x+1}{8x^2}=\frac{16x^2}{1}\cdot\frac{x+1}{8x^2}=2(x+1)$$

4 $$\frac{(v+1)s}{t^2}\cdot\frac{(t+1)t}{rs}=\frac{(v+1)(t+1)}{rt}$$

5 $$-a^2\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{-d}=\frac{-a^2}{1}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{-d}=\frac{a^3}{d}$$

6 $$\frac{5x}{7x+7y}\cdot(x^2+2xy+y^2)=\frac{5x}{7(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x+y)}{1}=\frac{5x(x+y)}{7}$$

7 $$\frac{3a}{5b}:\frac{9ab}{25c}=\frac{3a}{5b}\cdot\frac{25c}{9ab}=\frac{5c}{3b^2}$$

8 $$\frac{3x+1}{2x-2}:\frac{-y}{x-1}=\frac{3x+1}{2(x-1)}\cdot\frac{x-1}{-y}=-\frac{3x+1}{2y}$$

9 $$a^3:\frac{a^2}{b}=\frac{a^3}{1}\cdot\frac{b}{a^2}=ab$$

10 $$\frac{a^2(a^2-4)}{a^2+2a}:(a^2-2a)=\frac{a^2(a+2)(a-2)}{a(a+2)}\cdot\frac{1}{a(a-2)}=1$$

11 $$\frac{\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a^2-b^2}}=\frac{1}{a-b}:\frac{1}{a^2-b^2}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{1}=a+b$$