<u>A Terme, Variablen und Mengen</u>

<u>1 Der Taschenrechner als Rechenhilfe</u>

Der Taschenrechner ist ein handlicher elektronischer Rechner im Taschenformat, der mit Batterie- oder Solarzellen betrieben wird.
Er ist aus Mikroprozessoren aufgebaut, welche die gewünschten Rechnungsschritte ausführen. Eingaben und Resultate können über eine Flüssigkristallanzeige (LCD) abgelesen werden.

Der Taschenrechner beherrscht die <u>*Grundoperationen*</u> **+** , **-** , **·** , **:** mit ganzen Zahlen und mit Dezimalzahlen.

<u>Beispiel</u>: 25,89 · 1,65 = 42,7185 .

Er bewältigt <u>*verkettete Operationen*</u>.

<u>Beispiel</u>: 88,5 · 4,66 : 2,5 = 164,964 .

Zahlenterme mit <u>*Klammern*</u> können berechnet werden:

<u>Beispiel</u>: 50,6 - 0,8 · (61 - 47,95) = 40,16 .

Der Rechner beachtet die Vereinbarung *"<u>Punkt- vor Strichoperation</u>"*.

<u>Beispiel</u>: 50,8 + 4,5 · 10,2 = 96,7 .

Der Taschenrechner besitzt die Möglichkeit, Zahlen zu <u>*speichern*</u> und wieder <u>*abzurufen*</u>.

Zudem gibt es eine Reihe weiterer Funktionen, welche der Taschenrechner ausführen kann: <u>*Potenzieren*</u>, <u>*Wurzeln ziehen*</u>, ...

Der Taschenrechner liefert kein richtiges Resultat, wenn du falsch eintippst! Mache daher zuerst eine <u>*Überschlagsrechnung*</u> (schätzen)!

2 Variablen in Termen

Variablen sind *Platzhalter für Zahlen*. In der Mathematik verwendet man dafür *Kleinbuchstaben* (z.B. x, y, z).

Terme sind Gebilde aus *Zahlen und/oder Variablen* (z.B. $35x - 4{,}2$) .

Für das *Produkt* einer Zahl und einer/mehrerer Variablen gelten betreffend der Schreibweise folgende Punkte:

- $6 \cdot a = 6a$
- $1 \cdot b = b$
- $3 \cdot a \cdot b = 3ab$.

Terme können *zusammengefassst* werden, indem *gleichartige Ausdrücke* (gleiche Buchstaben oder Buchstabenkombination) *addiert* bzw. *subtrahiert* werden.

Beispiele:
- $5a + 7b + 3c + 4a + 6b + 5c - 8a = a + 13b + 8c$
- $6ab + 3ac - 4ab + 5bc + 9ac = 2ab + 12ac + 5bc$
- $4a^2 + 5ab^3 - 2a^2 + 3ab^3 = 2a^2 + 8ab^3$

Beim Vereinfachen von Termen gilt ebenfalls die Regel *„Punktoperationen vor Strichoperationen"* (d.h. Multiplikation und Division vor der Addition und Subtraktion ausführen).

Beispiele:
- $a + b \cdot 4 = a + 4b$
- $3 \cdot a - b \cdot 6 = 3a - 6b$
- $10x + 20y : 5 - 5x = 10x + 4y - 5x = 5x + 4y$.

3 Variablen in Termen: Potenzen

Die Multiplikation mehrerer gleicher Faktoren kann als *Potenz* abgekürzt notiert werden.

Beispiel: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ (lies: 5 hoch 4).

$\mathbf{5^4}$ heisst *Potenz* , **5** ist die *Basis* und **4** der *Exponent*.

Ebenso können Potenzen mit Variablen gebildet werden.

Beispiel: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$.

Potenzen von Klammerausdrücken sind möglich.

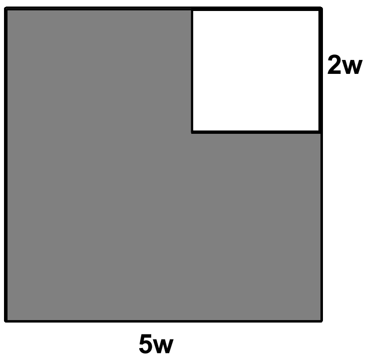
Beispiele: $(3x)^2 = 3x \cdot 3x = 9x^2$

$(8a)^3 = 8a \cdot 8a \cdot 8a = 512a^3$

Beachte: $(3x)^2 \neq 3x^2$!

Potenzen werden bei der Berechnung von Flächen und Rauminhalten verwendet.

Beispiel: Bestimme den Flächeninhalt der grauen Figur.
(es handelt sich um Quadrate)



$$A = (5w)^2 - (2w)^2$$
$$= 25w^2 - 4w^2$$
$$= \underline{21\,w^2}$$

4 Werte von Termen berechnen

Der Taschenrechner ist beim Rechnen mit grossen Zahlen eine echte Hilfe. Mit wenig Aufwand kann beispielsweise der Wert eines Terms bestimmt werden, wenn für die Variable(n) Zahlen eingesetzt werden.

Beispiel: Bestimme den Wert des Terms $T = 15x^2 + 8xy - 92y$ für x = 12 und y = 21.

$$T = 15 \cdot (12)^2 + 8 \cdot 12 \cdot 21 - 92 \cdot 21 =$$
$$2'160 + 2'016 - 1'932 = \underline{2'244}$$

Bei der Berechnung von Potenzen entstehen grosse Zahlen mit vielen Stellen. Der Taschenrechner besitzt aber nur begrenzt viele Anzeigestellen. Aus diesem Grunde werden grosse Zahlen als *Zehnerpotenzen* dargestellt.

Beispiel: Berechne 20^{30}. Im Display des Rechners erscheint:

$\boxed{1.073741824 \quad {}^{39}}$.

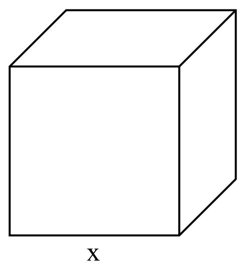
Zehnerpotenz

Die eigentliche Lösung lautet: $1.073741824 \cdot \mathbf{10}^{39}$!

Die Basis der Zehnerpotenz (eben die Zahl 10!) wird aufgrund der beschränkten Anzahl Stellen in der Anzeige weggelassen!

Formeln werden mit Termen dargestellt. Die Formel für die Gesamtoberfläche eines Würfels beispielsweise lautet: $O = 6x^2$ (x ist die Kantenlänge des Würfels). Häufig ist das Bestimmen einer Lösung mit Hilfe eines Termes einfacher.

Beispiel: Bestimme die Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge 32cm.



$$O = 6x^2 = 6 \cdot (32\text{cm})^2 = 6 \cdot 1'024\ \text{cm}^2$$
$$= \underline{6'144\ \text{cm}^2}$$

5 Multiplizieren und Dividieren mit algebraischen Termen

Algebraische Terme sind Gebilde aus *Zahlen und/oder Variablen.*

Bezüglich der *Multiplikation von Termen* gelten folgende Regeln:

1. $5 \cdot 3z = 5 \cdot 3 \cdot z = 15 \cdot z = \underline{15z}$

2. $4x \cdot 3x = 4 \cdot x \cdot 3 \cdot x = 4 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 12 \cdot x^2 = \underline{12x^2}$

3. $6a \cdot 9b = 6 \cdot a \cdot 9 \cdot b = 6 \cdot 9 \cdot a \cdot b = 54 \cdot ab = \underline{54ab}$

4. $8y^2 \cdot 6y^3 = 8 \cdot y \cdot y \cdot 6 \cdot y \cdot y \cdot y = 8 \cdot 6 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 48 \cdot y^5 = \underline{48y^5}$

5. $3c^2d \cdot 4cd^3 = 3 \cdot c \cdot c \cdot d \cdot 4 \cdot c \cdot d \cdot d \cdot d = 3 \cdot 4 \cdot c \cdot c \cdot c \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d = 12 \cdot c^3 \cdot d^4 = \underline{12c^3d^4}$

Die Division wird als *Umkehroperation* der Multiplikation aufgefasst.

Bezüglich der *Division von Termen* gelten folgende Regeln:

1. $50 : 10 = \underline{5}$, denn : $5 \cdot 10 = 50$

2. $12x : 3 = \underline{4x}$, denn : $4x \cdot 3 = 12x$

3. $48x^5 : 6x^2 = \underline{8x^3}$, denn : $8x^3 \cdot 6x^2 = 48x^5$

4. $45a^6b^5c^2 : 9a^5b^2c^2 = \underline{5ab^3}$, denn : $5ab^3 \cdot 9a^5b^2c^2 = 45a^6b^5c^2$

Umkehroperationen

6 Terme bilden: Weitere Beispiele

Es ist ein wichtiges Ziel im Mathematikunterricht, dass Sachverhalte in Form von Texten in Terme umgewandelt (*übersetzt!*) werden können und umgekehrt.

"Vom Text zum Term" und *"Vom Term zum Text"* sind elementare mathematische Schritte, welche genaue algebraische Grundkenntnisse voraussetzen.

Beispiele:

1. Vom Text zum Term

   Gesucht ist der Term, welcher folgende Bedeutung hat:
   "Das 3fache der um 2 vergrösserten Zahl" .

   Lösung: $3(x + 2)$.

2. Vom Term zum Text

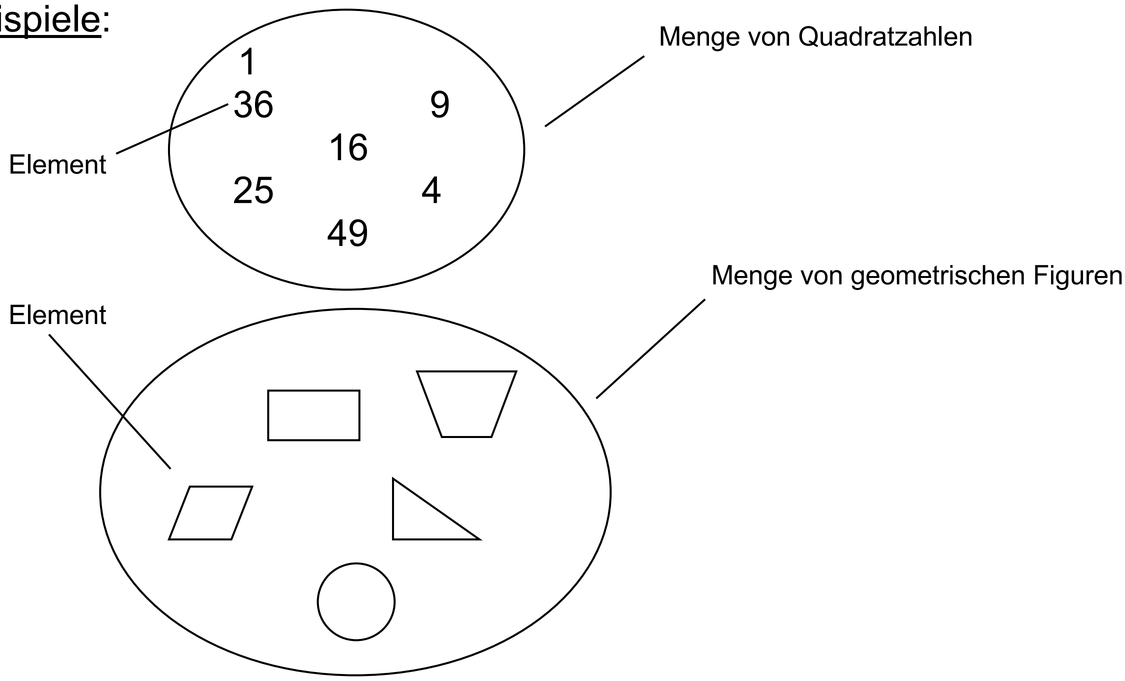
   Was stellt der Term $(x+4)^2 - 5$ dar?

   Lösung: "Das Quadrat der um 4 vergrösserten Zahl, vermindert um 5" .

<u>7 Zahlenmengen</u>

Eine *<u>Menge</u>* ist eine *<u>Zusammenfassung von Objekten</u>*, die man genau voneinander unterscheiden kann, zu einem Ganzen.
Die Objekte, aus denen die Menge besteht, nennt man *<u>Elemente</u>*.

<u>Beispiele</u>:



<u>Mengen</u> werden mit *<u>grossen Blockbuchstaben</u>* bezeichnet, *<u>Elemente</u>* mit *<u>kleinen Buchstaben</u>*.

<u>Beispiel</u>: $M = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$ (Menge M der Quadratzahlen)

Gehört ein Element a zu einer bestimmten Menge A, so schreibt man:
$a \in A$ (*lies: a ist Element von A*).

Gehört ein Element b nicht zu einer Menge B, so schreibt man:
$b \notin B$ (*lies: b ist <u>nicht</u> Element von B*).

<u>Beispiele</u>: Gegeben sei die Menge der natürlichen Zahlen:
$N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Es gilt: $8 \in N$ (8 ist Element von N)

$-8 \notin N$ (-8 ist nicht Element von N)

Endliche und unendliche Mengen

Enthält eine Menge eine endliche Anzahl Elemente, so heisst sie *endliche Menge*.

Enthält eine Menge unendlich viele Elemente, so nennen wir sie *unendliche Menge*.

Beispiele: $M_1 = \{2, 4, 6, 8\}$ (endliche Menge)

$M_2 = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ (unendliche Menge)

Darstellungsformen von Mengen

Werden die einzelnen Elemente einer Menge (endlich oder unendlich) *der Grösse nach geordnet* aufgezählt, heisst die Darstellungsform *aufzählende Form*.

Werden die Elemente einer Menge durch ihre *gemeinsame, charakteristische Eigenschaft* beschrieben, heisst die Darstellungsform *beschreibende Form*.

Beispiele: $C = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ (aufzählende Form)

$C = \{x \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$ (beschreibende Form)

C ist die Menge   aller x   für welche gilt

Die Grundmenge

Die *Grundmenge G* ist eine Art Vorratskammer aus Zahlen, welche für eine bestimmte Aufgabe zur Verfügung stehen.

Die Grundmenge G entspricht meistens einer der folgenden Zahlenmengen:

- $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (Menge der natürlichen Zahlen ohne 0)
- $N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (Menge der natürlichen Zahlen mit 0)
- $Z = \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (Menge der ganzen Zahlen)

Teilermengen

Die *Menge aller Teiler einer natürlichen Zahl* nennt man *Teilermenge T*.
Teilermengen sind *endliche Mengen*!

Beispiel: Bestimme die Teilermenge von 24.

$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Vielfachenmengen

Die *Menge aller Vielfachen einer natürlichen Zahl* nennt man *Vielfachenmenge V*.
Vielfachenmengen sind *unendliche Mengen*!

Beispiel: Bestimme die Vielfachenmenge von 24.

$V_{24} = \{24, 48, 72, 96, ...\}$.

8 Schnittmengen

Die *Schnittmenge* zweier Mengen A und B enthält sämtliche Elemente, die zu A *und* B gehören, also beiden *gemeinsam* sind.

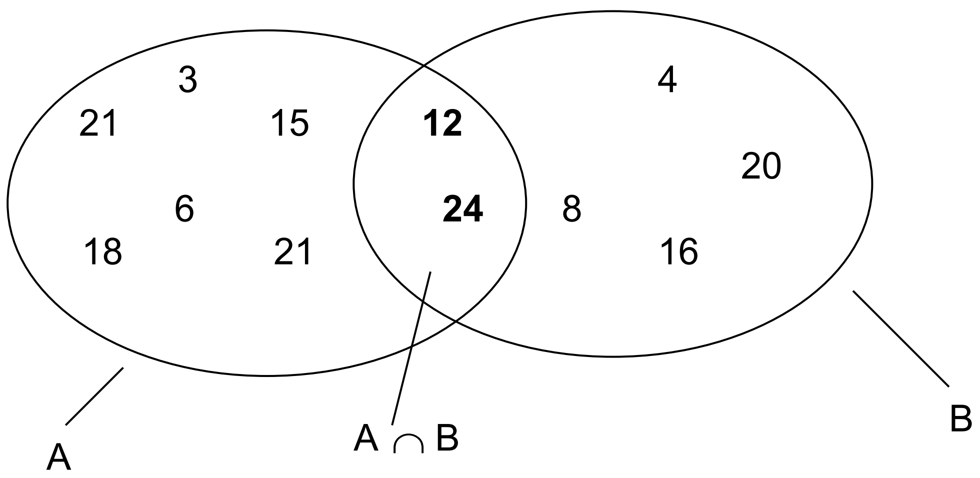
Die Schnittmenge wird geschrieben als $A \cap B$ *(lies: A geschnitten mit B)*.

Beispiel: $A = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$

$B = \{4,8,12,16,20,24\}$

$A \cap B = \{12,24\}$

Die Schnittmenge lässt sich mit Hilfe eines *Venn-Diagrammes* veranschaulichen.



Schnittmengen von Teilermengen und Vielfachenmengen

Beispiele:

$T_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$T_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

$T_{24} \cap T_{30} = \{1,2,3,6\}$

$V_{24} = \{24,48,72,96,...\}$

$V_{30} = \{30,60,90,120,...\}$

$V_{24} \cap V_{30} = \{120,240,360,480,...\}$

9 ggT und kgV

Der *grösste gemeinsame Teiler (ggT)* von zwei oder mehreren natürlichen Zahlen ist diejenige natürliche Zahl, welche Teiler dieser Zahlen ist und zudem möglichst gross ist.

Beispiel: Der ggT der Zahlen 12 und 18 ist 6, da 6 die grösste Zahl ist, die sowohl 12 als auch 18 ganz teilt.

Dies wird wie folgt notiert: $\boxed{\text{ggT }(12, 18) = 6}$

Das *kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)* von zwei oder mehreren natürlichen Zahlen ist diejenige natürliche Zahl, in der jede dieser Zahlen als Faktor enthalten ist und die zudem möglichst klein ist.

Beispiel: Das kgV der Zahlen 12 und 18 ist 36, da 36 die kleinste Zahl ist, die ganzzahlig durch 12 und durch 18 teilbar ist.

Dies wird wie folgt notiert: $\boxed{\text{kgV }(12, 18) = 36}$

Mit Hilfe der sogenannten *Primfaktorzerlegung* kann der ggT und das kgV problemlos bestimmt werden.

Beispiele:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

ggT = **2** · **3** = 6

$12 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 3$
$18 = 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3}$

kgV = **2** · **2** · **3** · **3** = 36

$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

ggt (540, 630) = 2 · 3 · 3 · 5 = 90
kgV (540, 630) = 2 · 2 · 3 · 3 · 3 · 5 · 7 = 3’780